

交通制御の問題の統計数理的解析 (I)

——系統式の信号機系列に対する，信号のフェイズ
の個別的に Optimum な設定について——

植 松 俊 夫
袖 崎 淑 子

(1962 年 2 月 受 付)

Studies in Traffic Control Problems (I)

——On the Individually Optimum Layout of Phases for the Traffic Control
by Co-Ordinated Fixed-Time Traffic Signals——

Tosio UEMATU and Yoshiko SODESAKI

In the present paper we deal with some problem of traffic control. The controllers installed on a long urban street with a series of intersections are often operated as a coordinated system. In such a case it is desirable to use any reasonable coordination which ensures the highest possible efficiency of the control, though such a coordination is very difficult to find in many cases.

Our problem is to give a method which can meet such a requirement, for the case of the control with equally ballanced cycle split. As for a criterion to judge the efficiency of a coordination, we use the breadths of through bands obtained from the time-space diagram which represent the programming of control considered. We can hardly say that this criterion is a very suitable one. The judgement of the efficiency of a coordination on the basis of the statistical treatment of the traffic will be more adequate. But in the present paper we concern ourselves only with the above-mentioned criterion, reserving the statistical treatment for another occasion.

In [1] Mr. Kell presented a method for the determination of coordination, for the same type of the control. This method has practical value in the sense that it gives a simple procedure for selecting among many programmings of coordination and brings about a reasonable result for the case where the arrivals in the two directions of the flow are ballanced. However, as the ballance of the arrivals does not necessarily occur in practice, this method is not always very effective.

We generalize Kell's method and present a method which is reasonable even in the case where the arrivals in the two directions of the flow are not necessarily ballanced. The simplicity of the procedure for selecting among many programmings of coordination is lost in our method. But because of the recent development of automatic computers, our method is easily applicable in practice.

Institute of Statistical Mathematics

§1. 前 置 き

都市に於ける自動車交通の渋滞の緩和の問題は、社会的にみて今日極めて重要な課題となっているが、問題解決の為の一つの方策としての交通規制について言えば、その実施方法についての系統だった研究は殆んど為されていない現状である。

勿論交通規制といっても種々のやり方がある。ここで取扱かうのは車の流れの制御に関するものであるが、これにも多くの型があり、一方又道路或は道路網の各部分の状況に応じて個々の条件が重要となる場合もあり得る。従って色々な場合に依り得る様に各種の方法を研究し、それ等の場合に対し optimum なものを導いておく事が必要である。その意味ではここに取上げるのは一つの場合のみであり、又一つの考え方であって、更に各種のものを色々な考え方の下に研究してゆく事は今後の課題である。

ここで取上げるのは、幾つかの交叉点をもつ長い一路線に於て、各交叉点に対して信号燈により、而も系統式に車の流れの制御が行われる場合である。又信号の各サイクル（青信号になってから次に初めて再び青信号になる迄）の時間の長さはすべて一定且つ同一で、而も各サイクルに対して青信号の時間と赤信号の時間が等しい様に割ふられている場合である。なほ実際には青信号と赤信号の間に黄信号があるのが普通だが、この時間は青信号の時間に繰入れておく事にし、以後は黄信号そのものは考えない事にする。又取上げている路線上には左右両方向の車の流れがあるものとし、一方交通の場合は除外する。各方向の流れの車に対しては、その進行速度として、或る一定時速が指定され、車はその指定に従って進行するものとする。

上述の場合に於て、各交叉点に於ける信号のサイクル同志の間の phase のずれと、信号のサイクルの時間の長さ乃至各方向の流れに対する指定時速を、どの様に与えるのが optimum であるかという事が通常問題になる。この phase のずれは offset と呼ばれる。但しサイクルは青時間で初まるものと定めておく。offset は次の様に規定される。即ち或る基準の時点をきめておいて、各交叉点に於てその時点以後初めてサイクルが切換る迄の時間をもってこの交叉点の信号の offset と呼ぶ。明らかに、offset は0又はそれより大きく、且つサイクルの時間の長さよりも小さい。通常は一番左の交叉点の offset が0であるように基準の時点がとられるが、これは本質的ではない。

各交叉点の夫々の offset, 信号のサイクルの時間の長さ乃至各方向の流れの車に対する指定時速をどう与えたら optimum であるかという事を考えたいわけであるが、この場合判断の基準としては色々なものが考えられる。最も簡明で且つ現在実際に用いられている基準は、車の進行と各交叉点に於ける制御とを図示し (time-space diagram と呼ばれる), それによって through band と呼ばれるものを各方向に対して構成し (詳しい事は §2 に述べる), それに関して判断するというやり方である。ここでもこの基準を基礎に置く事にする。

勿論上述の基準の良否という点には問題があり得る。車のさばけ方は単純に through band の幅の大きさのみできまるとは一概に言えない。時速を指定されても、すべての車が厳密にそれに従って走るという事は現実にはあり得ないのであって、車の速度は必ず車毎に或るランダムな変動を持つであろう。又車の速度の指定時速からのずれは、ランダムな変動のみでなく、車の渋滞や混雑の生起、或は右折、左折車の存在にも関係する。渋滞や混雑、或は右、左折車があれば、車の速度は指定されたよりも落ちるであろう。これ等の点から考えて、図に画いた through band は必ずしも現実の車の走行を表現しているとは限らない。より妥当な取扱かいは、車の来方や速度の変化を考慮した統計数理的な手法が必要である。それに応じて、制御の型は、ここで取上げるようにすべての交叉点で同じ型の制御をするといったものでなく、交叉点間の相互関係の様相につれて交叉点毎に夫々の妥当な型をきめる事が必要となるであろう。

上に述べた様に、問題をより本質的に取扱かってゆくには、問題の統計数理的な formulation が

必要であるが、それについては別の機会に譲り、ここでは前述の基準を採っておく。

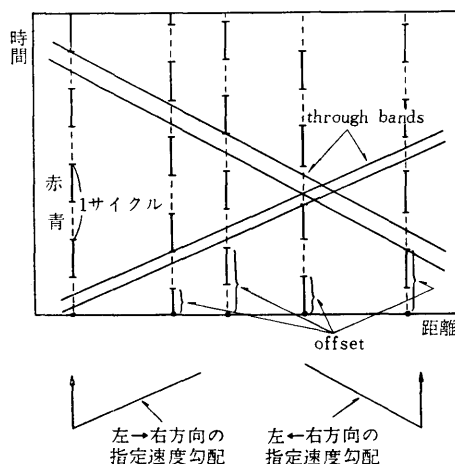
かかる限定の下に、optimum な offset の組と、信号のサイクルの時間の長さ乃至は各方向の車の流れに対する指定時速を、数値計算によって決定できる様にするのがこの論文の目的である。現実にはこの様な決定は、一般には(青信号と赤信号の時間が必ずしも等しくない場合には) time-space diagram を色々作図して、そのうちからよさそうなものを選ぶというやり方がとられている状態である。但し特に青信号と赤信号の時間が等しい場合には、J.H. Kell の考えた作図法 ([1] 参照) があって、これは割合に簡明な方法で、且つ良好な作図結果が得られる事が多い。然しこの方法も必ずしも(青信号と赤信号の時間が等しい場合に於ける) optimum な結果を与えるとはいえない。optimum なものは作図から得ようとするとは煩わしい事が多い。むしろ数値計算で出す方が、現在の様に計算機の発達した時代では簡単である。

ここでは青信号と赤信号の時間が等しくない場合は取上げないが、この様な場合も optimum なものを数値計算で与え得る様にする事は今後に残されている問題である。

§2. Kell の方法

本節では Kell の方法を紹介し、更にその持つ内容を検討し、そこに暗々裡に含まれている有用な考え方と改善すべき点とをみてゆく事にする。初めに time-space diagram について説明する。

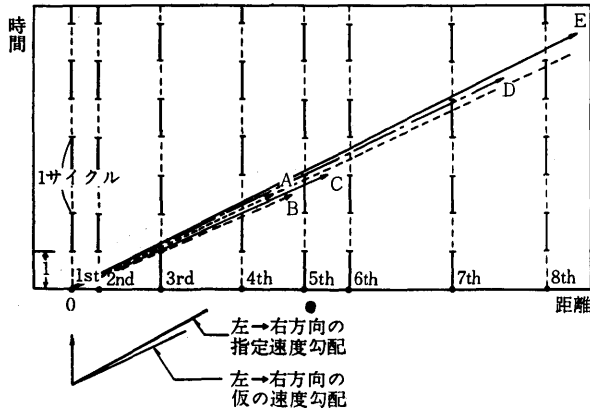
time-space diagram とは次の様なものである。但し各交叉点での offset と信号のサイクルの時間及び車の進行の時速が与えられたものとする。先づ直交座標系を考え、その横軸に距離を、縦軸に時間をとり、横軸上に各交叉点に対応する点をその間の距離に従ってとり(第1図横軸上の黒点参照)、各点に於て縦軸に平行な直線上にその交叉点での信号の生起をとるようにする(第1図の例で、縦方向の破線の線分は青の時間の区間を、実線の線分は赤の時間の区間を示す)。但し各交叉点での信号の offset は指定された値に従ってとるようにする。今、指定された進行の時速の勾配と同じ勾配を持つ様な線で、最初の交叉点の最初の青時間の区間を通り、而もどの交叉点でも青の時間の区間を通るようなものを考える。この様な線のうちの上の限界と下の限界を考え、それを与える様な2本の平行線を引く。この平行線で示される帯を、左から右へ方向の車の流れに対する through band と呼ぶ。同様に右から左へ方向の車の流れに対する through band が定められる。この様にして構成された図は time-space diagram といわれる。第1図に time-space diagram の一例を示してある。



第1図 time-space diagram の一例
但し、青信号の時間=赤信号の時間の場合

time-space diagram に関して、optimum な offset の組を与えようとする場合、現在用いられている基準は次の如きものである。即ち両方向の夫々に対する through band の幅と青時間の長さとの比が、各々出来るだけ大きくとれる様なもの程よいという基準である。これはもっと正確に表現されねばならない。というのは、二つの方向の through bands の幅は互に相反するものであって、一方を大きく取ろうとすれば他方が小さくなる。従って両方向の夫々をできるだけ大きくするという言い方では曖昧である。又他方に於て、両方向の through bands の幅の和が最大となっても、一方の方向が極端に小さな幅を持つのでは一般には良くないからである。

それ故次の様に上の基準を表現するのがよいであろう。即ち二つの方向の車の来方の頻度を考慮した上で両方向の through bands の幅を互に均衡させるという条件の下で、各方向の through



第2図 Kellの方法による time-space diagram の作製
(その1)

band の幅の青時間の長さに対する比の合計が出来るだけ大きい様なもの程良いと考える。以後の議論に於ては、吾々はこの基準を基礎に置く事にする。但し吾々は基本的な考え方に於てこの基準に立つが、具体的には本節の終りに述べる様に、これを適当な形に表現してそれを用いる。

次に Kell の方法 ([1] 参照) の説明に移る。この方法は、time-space diagram を次の様に構成してゆくものである (第2図参照)。

(1°) 時間の軸については、サイクルの時間の長さの半分 (= 青の時間 = 赤の時間) をこの方向の単位にとる。その具体的な時間は最初は不定にしておき、diagram が作られた後で実際の時間をきめる。

(2°) 左→右方向の仮の速度勾配を与えておき、この勾配を持つ様な半直線 OA を引く (第2図参照)。

(3°) 各交叉点における規制の offset は何れも、0 又は 1 の何れかにとる。但し最初の交叉点の offset は 0 にとる。他の交叉点について、0 と 1 の何れをとるかはその (4°) に述べる。

(4°) 各交叉点に於て、信号の生起を縦軸方向に図示する。但し offset の 0 か 1 かの選択は、この交叉点における信号のサイクルの初まりの時刻のうちで OA に一番近いもの (これは offset の 0 か 1 かのとり方に依りて 2 通りが考えられる) を調べて、この時刻と OA との時間差の小さい方が得られる様に 0 と 1 のうちの何れかを選ぶ、(第2図参照)。但し 0 をとって 1 をとってこの時間差に余り差がない時は、最終決定は保留して両方の可能性を残しておく。

(5°) 各交叉点に於て、 OA に一番近いサイクルの初まり時刻を示す点と 0 を結ぶ半直線を考える。この半直線が若し OA と可成り喰違う時は、かかる半直線は棄てる。一方ほぼ OA に一致する時はこの半直線を採用する。なお (4°) に述べた保留が行われた場合は、その最終決定をここで行う。その時の判断は、上述の半直線が OA とどの程度喰違う結果になるかによって行う。即ち喰違いの小さい方を結果するように 0 と 1 の間の選択をする。

採用された半直線のうちで一番上のものの示す勾配を、左→右方向の流れに対する速度勾配として指定する。実際に行う場合には交叉点を左の方から順次見ていって、採用され得る半直線でも既に引かれている或る半直線の下にあるものは図に引く必要はない。前に引かれたものの上に新たに出てくるもののみを引けばよい。

第2図の場合を例としていえば、2番目と6番目の交叉点に対しては半直線を考えない (棄てる)。又それ以外の交叉点に対しては半直線が順次 OB , OC , ... と引かれる。この場合8番目の交叉点に対する半直線は、既に引かれた半直線のうちの OE の下にくるから引く必要はない。この様にして OE が左→右方向の速度勾配を指定するものとして得られる。

(6°) 速度勾配 OE と各交叉点に於ける信号の生起に基づいて、左→右方向の流れに対する through band を構成する (第3図参照)。この through band の下の限界は OE となる。

(7°) 左→右方向の流れに対しての through band を構成する (第3図参照)。この場合一般には2通りの構成が可能であるが、そのうち幅の広い方を採用する。この through band の勾配をもって、左→右方向の流れに対する速度の勾配に指定する。

(8°) サイクル時間と指定速度をきめる。

左→右方向の流れに対して指定された速度勾配を α , 左←右方向の流れに対するそれを β とし, サイクル時間の長さを C とすれば, 左→右方向の指定速度は $2\alpha/C$, 左←右方向のそれは $2\beta/C$ となる, この $2\alpha/C, 2\beta/C$ の値が実用上使える数値を持つ様に C を選ぶ。

明らかにこの場合, サイクル時間と指定速度は夫々が絶対的に決定されるのではなくて, その相対的關係が(即ち勾配 α, β が) 決定されるのである。この相対的關係を用いて, 実用上の観点から適当なものを選ぶわけである。

上の説明は原論文の説明そのままではない。原論文では作図例を中心とした説明がなされており, 一般的な場合についてやや曖昧な点があるのでそれを補い考えて述べた。次にはこの Kell の方法の持つ内容を検討してゆく事にする。

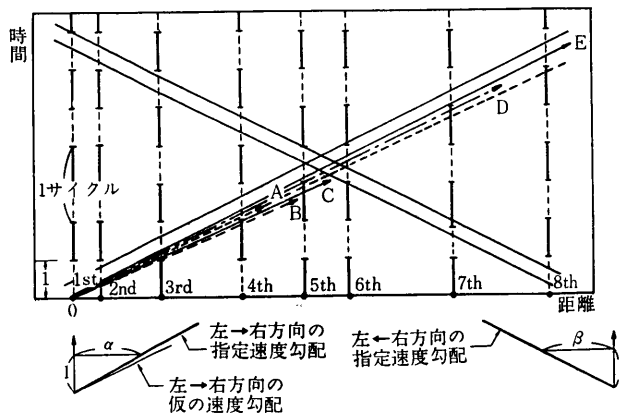
先づ Kell の方法に於ける手順 (5°) は, 流れに対する速度勾配を調節して, できるだけ良い diagram を得ようとする事で, 極めて妥当な考え方である。(5°) ではかかる調節を, 作図しながら successive に行ってゆくわけである。然し手順 (5°) の場合には, 速度勾配の調節をかなり限定している。即ち初めに与えた仮の勾配 $0A$ と少ししか喰違はない様な範囲の調節しか許さない。これは初めに与へた仮の勾配 $0A$ をできるだけ採用したい立場にある事を意味するであろう。Kell の論文の例の場合には, $0A$ の勾配として, サイクルの長さの半分の時間の間に 1000 フィート進行するというものを採っている。

実際問題に於て一般には, 仮の速度勾配 $0A$ として或る特定の値が望ましいという事はなくて或る範囲のものをどれも対等に考え得る場合が多いであろう。それ故 (5°) の様に「 $0A$ と少ししか喰違はない」という限定をしないで, 或る範囲で自由な調節を許す方が望ましいと考えられる。更に (5°) を用いる場合, 「 $0A$ と少ししか喰違はない」という事は diagram の作製に当たって場合々々に応じて直観的に見てゆかなくてはならない(形式的に喰違いの判定基準を設定するとかえって良い結果が失われる事になるようである)。その意味で曖昧である。直観に頼るよりも調節を機械的に行い得る方が望ましい。

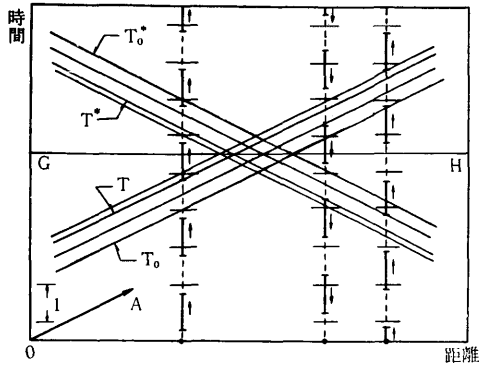
それ故に (5°) の代りに, $0A$ を或る範囲で自由に動かし, 一番よい結果が得られる様な $0A$ を速度勾配として採用するというやり方をとった方がよい。勿論作図によってそれを行おうとすると甚だ煩雑な事になる。然し計算機で数値計算によってそれを行う事を考えればそう大変な事でもない。

次に Kell の方法における (3°) であるが, これはこの方法における大きな特徴である。これは diagram の作製の単純化に非常に役立っているが, 他方ではこれは, 原論文でも強調している様に, 両方向の through bands がほぼ対等に得られる様にする為に採られているのである。この点の説明は原論文では何もなされていないので次に説明を試みる事にする。

速度勾配は一定にしておくものとして考えてゆく。若し流れの何れか一方の方向のみしか考えなくてよい場合には, 幅 1 の through band T_0 或は T_0^* (第 4 図) がとれる(両方向の速度勾配は等しくって考える)。然し実際には両方向の流れを考える為に, 各交叉点での制御の結果 T_0, T_0^* はせばめられて, 実際の through bands T, T^* となる。この場合 T, T^* が対等に得られる様な制



第3図 Kell の方法による time-space diagram の作製 (その2)



第4図

御を考える。但し対等という意味は T, T^* が中心線 GH (第4図) に関して対称という意味とする。

この様な任意の T, T^* に対して、或る適当な offset の組をとれば、それによる制御においては、どの交叉点に対してもそこでの信号の生起の仕方が GH に関して対称で、且つこの制御での through bands がそれぞれ T, T^* を含むというようにできる。この事を容易に示し得る (第4図ではこれを例示してある。即ち第4図の場合、最初に T, T^* を生ぜしめた offset の場合の各交叉点での信号の生起を、矢印の方向に、横に引いた線迄ずらせばよい)。新たに

得られる through bands は又対等である。従って対等な T, T^* を結果する制御としては、どの交叉点に対してもそこでの信号の生起が GH に関して対称であるというものを考えれば充分である。これは即ち、offset をすべて0か1 (但し時間の原点を適当にずらして) と与える事に他ならない。

さて、得られる through bands T, T^* が対等でも offset が0か1という条件を与えてもまだ、かかる through bands を結果するような規制は必ずしも一意にきまらない。そこでこれが一意にきまってくるような而も適当な条件はないかを考えてみる。次に述べるようにかかる条件を、而も Kell の方法に於ける手順 (3°), (4°) が含まれるような形で与える事ができる。

今各交叉点に於て個別的に (他との関係は考えずに)、そこでの制御によって T_0, T_0^* のせばめられる幅が等しく且つこれ等の和が一番小さいように (その意味で optimum に) する事を考える。 T_0, T_0^* のせばめられる幅が等しいという事から、この交叉点に於ける信号の生起は GH に関して対称でなくてはならない事が出る。従ってこの交叉点の offset は0か1の何れかでなければならない (但し時間の原点を適当にずらす。ずらす大きさは T_0, T_0^* のとり方からきまってくる)。offset として0と1のうちの何れがよいかは、この交叉点での制御により T_0, T_0^* のせばめられる幅の和が小さい方をとるという条件で定められる。所がこの選択は丁度 Kell の方法に於ける手順 (4°) を行う事である。

なお T_0, T_0^* のとり方によって、上の条件で定まる through bands T, T^* の幅は色々な異なり得る。従って T_0, T_0^* を動かして、できるだけ T, T^* の幅を大きくする事も考えられねばならない。

Kell の方法では上述の様に、両方向の through bands の幅を均衡させる事が狙はれている。これは両方向の車の流れの頻度が均衡している場合を考えているものであって、車の流れの間の均衡のない場合には明らかに不満足なものである。Kell の論文でも均衡のない場合を全然無視しているわけではないが、かかる場合については一方の流れが他方に比して圧倒的に多いという極端な場合のみ取上げられている。この点の改善が考えられねばならない。それには、両方の流れに対する through bands の幅を等しくとるというのでなく、この2つの幅を、2つの流れの車の頻度の比を考慮して規定する事にすればよいであろう。

又 Kell の方法では両方の流れの速度勾配が別々に定められるが、実際問題の場合には進行速度を精密に指定しても意味がないから、“optimum なものを得る為には両方の流れの指定速度が少し違った方がよい” という様な結果は実際には余り役に立たない。むしろ初めから両方の流れの指定速度を等しくする場合のみ考える方がかえって実用的であろう。よって §3 ではその様な場合を考える事にする。

以上の考察によれば、Kell の方法の内容は、それに適当な改善を行う時、次の様に述べてよいであろう。

(a) 速度勾配 (両方の流れに対して同じとす) を固定しておき、又この速度勾配に等しい勾配

を持つ幅 1 の帯 T_0, T_0^* を固定しておき、その下で各交叉点を個別的に次の意味で optimum にする。即ち各交叉点に於て、そこでの制御により T_0, T_0^* のせばめられる幅の和をできるだけ小さくし、且つこれ等の幅の縮小を、2つの流れの車の頻度に反比例させるようにする。然る時は全交叉点を通してみれば、一組の through bands T, T^* が得られる。

(b) 次に速度勾配はなお固定しておき、帯 T_0, T_0^* を色々動かし、得られる T, T^* の幅の和ができるだけ大きくなるようにする。

(c) 更に速度勾配を動かして、 T, T^* の幅の和をできるだけ大きくする。

上の (a), (b), (c) によって、速度勾配と各交叉点に於ける offset を決定すれば (この方法を、個別的に optimum な系統式制御と呼ぶ事にする)、或る意味で optimum な結果が得られるであろう。次節に於てはそのやり方について一般的に取扱かう事にする。なおそれによって得られた指定速度の勾配は、Kell の方法による場合と同じく、サイクルの時間の長さとの相対的な関係に於て考えたものである。即ち得られた指定速度の勾配を α としサイクルの時間の長さを C とする時、指定速度の値は v は $v=2\alpha/C$ であって C の函数である。

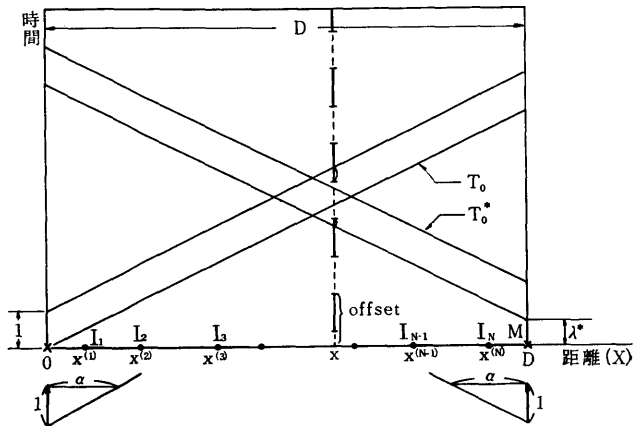
§3. 個別的に optimum な系統式制御の決定

与えられた交叉点の数を N 個とし、これ等を I_1, I_2, \dots, I_N とする。又時間の軸に対し、半サイクルの時間の長さを時間の単位にとる。但しサイクルの実際の時間の長さ C は不定としておく。

この時前節の終りに述べた基準 (a), (b), (c) によって、各交叉点の信号の offset (この場合、0 又は 0 より大きく、2 よりも小さい) 及び速度勾配 α を決定する事を問題にする。

その為に、先づ I_1 より左の地点 0 と I_N の右の地点 M を夫々 I_1 及び I_N に充分遠く (後に述べる位) 採って固定しておく (第 5 図参照)。これ等両地点間の距離を D とする。次に 0 を原点として横軸 (X -軸) に距離を、縦軸に時間をとる。これに関しての I_1, I_2, \dots, I_N の座標を夫々 $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$ とする。

前節に述べた基準 (a), (b), (c) によって諸量の決定を行う為に、先づ (b) 及び (c) に関しては一定しておいて (a) を考える。よって $0 \leq \lambda^* < 2$ なる任意の λ^* 、及び $(0 <) \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ ($< \pi/2$) を満足する任意の α を固定する。ここに α は速度勾配、 α_1, α_2 は



第 5 図

夫々 (c) によって速度勾配を動かす範囲の下限と上限で、これ等は実際の要求によってきめられる量である。又 λ^* は (b) によって幅 1 で且つ勾配 α を持つ帯 T_0, T_0^* を動かす事に関する量であり、即ち λ^* は T_0^* の下限が M を通って縦軸と平行に引いた直線と交わる点と M との差である。 T_0, T_0^* のうち T_0 は固定しておいてよく、その下限は 0 を通るとしておいてよい。又 λ^* は 0 から 2 迄動かせばよい事明らかである。

地点 0 及び M は、一番左の交叉点と地点 0 との距離 $x^{(1)}$ 及び一番右の交叉点と地点 M との距離 $D-x^{(N)}$ が、夫々次の条件を充すように選んでおく：

$$2\alpha_2 \leq x^{(1)} \tag{1}$$

$$2\alpha_2 \leq D-x^{(N)} \tag{2}$$

α, λ^* を固定しておいて (a) を行うには、先づ

$$2\alpha_2 \leq x \leq D - 2\alpha_2 \tag{3}$$

なる任意 x に対し、これを距離の座標に持つ地点に交叉点があった場合に、ここでの信号による制御を (a) の意味で optimum にする様な信号の offset 及びその時の T_0, T_0^* の縮小を求めておけばよい。よって次にそれを考える。

その為には、距離の座標を

$$x_\alpha = \frac{x}{\alpha} \tag{4}$$

によって交換しておくくと便利である。こうしておく、横軸の単位の長さと同縦軸の単位の長さを等しくして図をかくようにする時、 T_0, T_0^* は何れも横軸と 45 度の角度をなす。この場合 x が (3) の範囲にある時は

$$2 \leq x_\alpha \leq \frac{D}{\alpha} - 2 \tag{5}$$

である。

この様に変換する様にすれば、第6図の様に初めから速度勾配が1の場合を考えてゆけば充分である。この変換に応じる為には、 $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$ の代りに

$$x_\alpha^{(i)} = \frac{x^{(i)}}{\alpha}, \quad i=1, 2, \dots, N \tag{6}$$

を、又 D の代りに

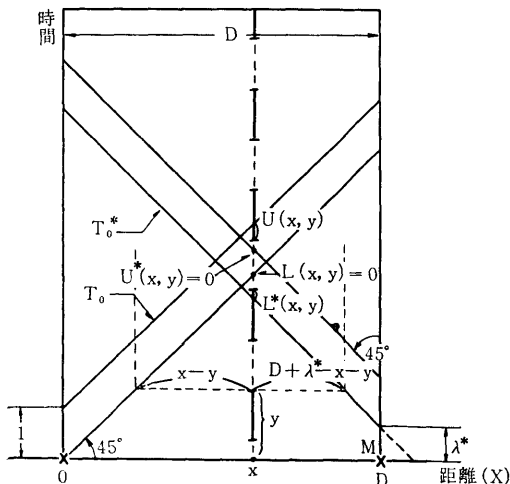
$$D_\alpha = \frac{D}{\alpha} \tag{7}$$

を考えればよいわけである。

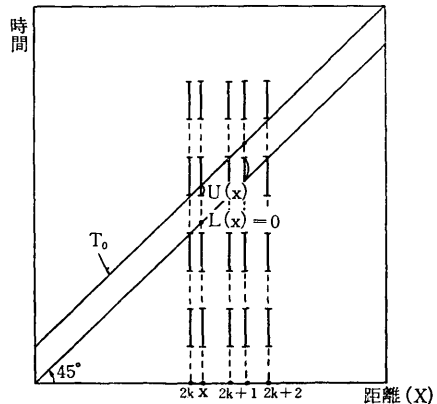
よって初めから $\alpha=1$ として考える。この時、距離の座標 x なる交叉点に於て、信号の offset を $y (0 \leq y < 2)$ とした場合 (第6図参照)、この信号制御によって帯 T_0 の上側に生ずる縮小を $U(x, y)$ 、 T_0 の下側に生ずる縮小を $L(x, y)$ 、又 T_0^* の上側に生ずる縮小を $U^*(x, y)$ 、 T_0^* の下側に生ずる縮小を $L^*(x, y)$ とする (第6図参照)。これ等を次に評価する。(5) によれば x は $2 \leq x \leq D-2$ の範囲で考えればよい。

その為、第7図の如く左→右方向の流れで offset が0ととられる場合を考え、この場合に T_0 に生ずる上側の縮小を $U(x)$ 、下側の縮小を $L(x)$ とすれば、第7図より明らかに

$$2k \leq x < 2k+1 \text{ の場合 : } \left. \begin{array}{l} U(x) = x - 2k \\ L(x) = 0 \end{array} \right\} \tag{8}$$



第 6 図



第 7 図

$$x=2k+1 \quad \text{の場合} : U(x)=L(x)=\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$2k+1 < x \leq 2k+2 \quad \text{の場合} : \left. \begin{array}{l} U(x)=0 \\ L(x)=2k+2-x \end{array} \right\} \quad (10)$$

($k=0, 1, 2, \dots$) である。

然るに $2 \leq x \leq D-2$ なる x , $0 \leq y < 2$ なる y , $0 \leq \lambda^* < 2$ なる λ^* に対しては

$$x-y \geq 0, D+\lambda^*-x-y \geq 0 \quad (11)$$

であるから, $U(x, y)$, $L(x, y)$ 及び $U^*(x, y)$, $L^*(x, y)$ の評価は, 第6図から明らかな如く, 次の様に $U(x), L(x)$ の評価に帰着される。

$$U(x, y) = U(x-y) \quad (12)$$

$$L(x, y) = L(x-y) \quad (13)$$

$$U^*(x, y) = U(D+\lambda^*-x-y) \quad (14)$$

$$L^*(x, y) = L(D+\lambda^*-x-y) \quad (15)$$

(8), (9), (10), (12), (13), (14), (15) によって $U(x, y)$, $L(x, y)$, $U^*(x, y)$, $L^*(x, y)$ を書き下すには4つの場合を分けねばならない。そこで以下それ等4つの場合の夫々を取扱かってゆく。

(I) $[x]$, $[D+\lambda^*-x]$ が共に偶数の場合:

ここに $[]$ はガウスの記号である。今 $[x]=2m$, $[D+\lambda^*-x]=2n$ とする。

(8), (9), (10), (12), (13) より

$$0 \leq y \leq x-2m \quad \text{ならば} \quad \left. \begin{array}{l} U(x, y) = x-y-2m \\ L(x, y) = 0 \end{array} \right\} \quad (16)$$

$$x-2m \leq y < x-2m+1 \quad \text{ならば} \quad \left. \begin{array}{l} U(x, y) = 0 \\ L(x, y) = 2m-x+y \end{array} \right\} \quad (17)$$

$$y = x-2m+1 \quad \text{ならば} \quad U(x, y) = L(x, y) = \frac{1}{2} \quad (18)$$

$$x-2m+1 < y < 2 \quad \text{ならば} \quad \left. \begin{array}{l} U(x, y) = x-y-2m+2 \\ L(x, y) = 0 \end{array} \right\} \quad (19)$$

但し (16) を出す場合には, $x-y < 2m+1$ なる事をも使っている。

同様に (8), (9), (10), (14), (15) 及び $D+\lambda^*-x-y < 2n+1$ より

$$0 \leq y \leq D+\lambda^*-x-2n \quad \text{ならば} \quad \left. \begin{array}{l} U^*(x, y) = D+\lambda^*-x-y-2n \\ L^*(x, y) = 0 \end{array} \right\} \quad (20)$$

$$D+\lambda^*-x-2n \leq y < D+\lambda^*-x-2n+1 \quad \text{ならば} \quad \left. \begin{array}{l} U^*(x, y) = 0 \\ L^*(x, y) = 2n-D-\lambda^*+x+y \end{array} \right\} \quad (21)$$

$$y = D+\lambda^*-x-2n+1 \quad \text{ならば} \quad U^*(x, y) = L^*(x, y) = \frac{1}{2} \quad (22)$$

$$D+\lambda^*-x-2n+1 < y < 2 \quad \text{ならば} \quad \left. \begin{array}{l} U^*(x, y) = D+\lambda^*-x-y-2n+2 \\ L^*(x, y) = 0 \end{array} \right\} \quad (23)$$

$U(x, y)$, $L(x, y)$, $U^*(x, y)$, $L^*(x, y)$ を書き下すには, ここで更に

$$(イ) \quad x-[x] < (D+\lambda^*-x) - [D+\lambda^*-x]$$

$$(ロ) \quad x-[x] = (D+\lambda^*-x) - [D+\lambda^*-x]$$

$$(ハ) \quad x-[x] > (D+\lambda^*-x) - [D+\lambda^*-x]$$

の3つの場合を分けねばならない。

(イ) の場合には, y の値に応じて, $U(x, y)$, $L(x, y)$, $U^*(x, y)$, $L^*(x, y)$ が夫々第1表の様になる事が, (16), (17), (18), (19), (20), (21), (22), (23) を用いて容易に導かれる。

第1表 $U(x, y), L(x, y), U^*(x, y), L^*(x, y)$ の評価, 但し $[x], [D+\lambda^*-x]$ が共に偶数で且つ (i) の場合

y の 範囲	$U(x, y)$	$L(x, y)$	$U^*(x, y)$	$L^*(x, y)$
$0 \leq y \leq x-2m$	$x-y-2m$	0	$D+\lambda^*-x-y-2n$	0
$x-2m \leq y \leq D+\lambda^*-x-2n$	0	$2m-x+y$	$D+\lambda^*-x-y-2n$	0
$D+\lambda^*-x-2n \leq y < x-2m+1$	0	$2m-x+y$	0	$2n-D-\lambda^*+x+y$
$y=x-2m+1$	1/2	1/2	0	$2n-D-\lambda^*+x+y$
$x-2m+1 < y < D+\lambda^*-x-2n+1$	$x-y-2m+2$	0	0	$2n-D-\lambda^*+x+y$
$y=D+\lambda^*-x-2n+1$	$x-y-2m+2$	0	1/2	1/2
$D+\lambda^*-x-2n+1 < y < 2$	$x-y-2m+2$	0	$D+\lambda^*-x-y-2n+2$	0

第1表より, x, y に対する帯 T_0, T_0^* の縮小幅の合計 $d(x, y)$ は次の通りになる:

- (i) $0 \leq y \leq x-2m$ なら $d(x, y) = D+\lambda^*-2y-2m-2n$
- (ii) $x-2m \leq y \leq D+\lambda^*-x-2n$ なら $d(x, y) = D+\lambda^*-2x+2m-2n$
- (iii) $D+\lambda^*-x-2n \leq y < x-2m+1$ なら $d(x, y) = 2m+2n-D-\lambda^*+2y$
- (iv) $x-2m+1 \leq y \leq D+\lambda^*-x-2n+1$ なら $d(x, y) = 2n-2m-D-\lambda^*+2x+2$
- (v) $D+\lambda^*-x-2n+1 < y < 2$ なら $d(x, y) = D+\lambda^*-2y-2m-2n+4$

基準 (a) に従い, x を固定しておいて y を動かして $d(x, y)$ を最小ならしめる事を考える.

(i), (iv) の場合には夫々, 該当する範囲の y の値の如何に拘らず $d(x, y)$ は一定である. その場合この一定値は, (iv) の場合の値の方が (ii) の値に比べて小さくはない. 何となれば上式より, (iv) の場合の $d(x, y)$ から (ii) の場合の $d(x, y)$ を引いたものは $2[1-\{(D+\lambda^*-x)-[D+\lambda^*-x]\}-(x-[x])]$ でこれは非負であるから. 故に (iv) の範囲の y は除外される.

又上式より明らかに, (i), (iii), (v) の y 範囲の場合には夫々, y が $x-2m, D+\lambda^*-x-2n, 2$ の場合に $d(x, y)$ が最小となる. この最小値は夫々, $D+\lambda^*-2x+2m-2n, D+\lambda^*-2x+2m-2n, D+\lambda^*-2m-2n$ である. このうち $D+\lambda^*-2m-2n$ は $D+\lambda^*-2x+2m-2n$ より小さくはない. 故に (i), (iii), (v) の範囲の y のうち, $y=x-2m$ 又は $D+\lambda^*-x-2n$ 以外の y は除外される.

(ii) の範囲の任意 y 又は $y=x-2m$ 又は $y=D+\lambda^*-x-2n$ に対しては, 上に述べた所により, $d(x, y)$ は最小値 $D+\lambda^*-2x+2m-2n$ をとる. これ等の y のうちから, 基準 (a) に従い, 両方の流れの車の来方の頻度に関して T_0 の縮小幅と T_0^* の縮小幅 (即ち $U(x, y)+L(x, y)$ と $U^*(x, y)+L^*(x, y)$) を均衡させたものを選ぶ様にす. 即ち今左→右の流れの車の来方の頻度を ξ_1 , 左←右の流れのそれを ξ_2 とし (以後常に $\xi_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0$ と仮定する),

$$w_1 = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2} \tag{24}$$

$$w_2 = \frac{\xi_2}{\xi_1 + \xi_2} \tag{25}$$

とおく時, 上述の y のうち

$$\frac{U(x, y)+L(x, y)}{U^*(x, y)+L^*(x, y)} = \frac{w_2}{w_1} \tag{26}$$

を満足するものを選ぶ. かかる y は丁度1つだけ存在する. 何となれば, 先づ $y=x-2m$ 又は $y=D+\lambda^*-x-2n$ に対しては, 夫々 $U(x, y)+L(x, y)=0$ であるか又は $U^*(x, y)+L^*(x, y)=0$ であるから (26) は成立たない. 一方 (ii) の範囲の y のうちで (26) を満足するものが丁度1つだけである. それは, 第1表と (26) から, 条件

$$\frac{2m-x+y}{D-\lambda^*-x-y-2n} = \frac{w_1}{w_2}$$

によって定まるものである. この条件から

$$y = w_1(x-2m) + w_2(D+\lambda^*-x-2n)$$

即ち

$$y = w_1\{x-[x]\} + w_2\{(D+\lambda^*-x)-[D+\lambda^*-x]\} \quad (27)$$

と定まる。この y は実際に (ii) の範囲にある事明らかなり。

よって (イ) の場合には、座標 x の地点にある交叉点に対して (a) によって定められる optimum な offset は (27) で与えられる。又この場合第1表及び (27) によれば、帯 T_0 の縮小は下側にのみ起り (T_0 の上側の縮小を U であらわす時、 $U=0$)、その大きさ L は

$$L = w_2[\{(D+\lambda^*-x)-[D+\lambda^*-x]\} - \{x-[x]\}] \quad (28)'$$

であり、帯 T_0^* の縮小は上側にのみ起り (T_0 の下側の縮小を L^* であらわす時、 $L^*=0$)、その大きさ U^* は

$$U^* = w_1[\{(D+\lambda^*-x)-[D+\lambda^*-x]\} - \{x-[x]\}] \quad (29)'$$

で与えられる。

同様にして (ロ) の場合には、第1表に対応する表は第2表のようになる：

第2表 $U(x, y)$, $L(x, y)$, $U^*(x, y)$, $L^*(x, y)$ の評価、但し $[x]$, $[D+\lambda^*-x]$ が共に偶数で且つ (ロ) の場合

y の 範 囲	$U(x, y)$	$L(x, y)$	$U^*(x, y)$	$L^*(x, y)$
$0 \leq y \leq x-2m$	$x-y-2m$	0	$x-y-2m$	0
$x-2m \leq y < x-2m+1$	0	$2m-x+y$	0	$2m-x+y$
$y = x-2m+1$	1/2	1/2	1/2	1/2
$x-2m+1 < y < 2$	$x-y-2m+2$	0	$x-y-2m+2$	0

第2表から明らかに、

$$y = x-2m = D+\lambda^*-x-2n$$

の時には、帯 T_0, T_0^* の縮小の何れも0となり最も良い。(ロ) の場合にはこれが、当該地点に交叉点があった場合これに対して (a) によって定められる optimum な offset と考えられる。この y も (27) と書ける事明らかなり。

又 (ハ) の場合も同様に、第1表に対応するものとして第3表が得られる。

第3表 $U(x, y)$, $L(x, y)$, $U^*(x, y)$, $L^*(x, y)$ の評価、但し $[x]$, $[D+\lambda^*-x]$ が共に偶数で且つ (ハ) の場合

y の 範 囲	$U(x, y)$	$L(x, y)$	$U^*(x, y)$	$L^*(x, y)$
$0 \leq y \leq D+\lambda^*-x-2n$	$x-y-2m$	0	$D+\lambda^*-x-y-2n$	0
$D+\lambda^*-x-2n \leq y \leq x-2m$	$x-y-2m$	0	0	$2n-D-\lambda^*+x+y$
$x-2m \leq y < D+\lambda^*-x-2n+1$	0	$2m-x+y$	0	$2n-D-\lambda^*+x+y$
$y = D+\lambda^*-x-2n+1$	0	$2m-x+y$	1/2	1/2
$D+\lambda^*-x-2n+1 < y < x-2m+1$	0	$2m-x+y$	$D+\lambda^*-x-y-2n+2$	0
$y = x-2m+1$	1/2	1/2	$D+\lambda^*-x-y-2n+2$	0
$x-2m+1 < y < 2$	$x-y-2m+2$	0	$D+\lambda^*-x-y-2n+2$	0

これより $d(x, y)$ は次の通りになる：

- (i) $0 \leq y \leq D+\lambda^*-x-2n$ なら $d(x, y) = D+\lambda^*-2y-2m-2n$
- (ii) $D+\lambda^*-x-2n \leq y \leq x-2m$ なら $d(x, y) = 2n-2m-D-\lambda^*+2x$
- (iii) $x-2m \leq y < D+\lambda^*-x-2n+1$ なら $d(x, y) = 2m+2n-D-\lambda^*+2y$
- (iv) $D+\lambda^*-x-2n+1 \leq y \leq x-2m+1$ なら $d(x, y) = D+\lambda^*-2x+2m-2n+2$
- (v) $x-2m+1 < y < 2$ なら $d(x, y) = D+\lambda^*-2y-2m-2n+4$

これ等から、(i) の場合と全く同様に、 $d(x, y)$ を最小にする y の値は、(ii) の範囲の任意 y 、又は、 $y=D+\lambda^*-x-2n$ 、又は $y=x-2m$ である。更に (i) の場合と同じく、かかる y のうちで (26) を満足するものが唯一つあり、これが、座標 x の地点にある交叉点に対して (a) によって定められる optimum な offset を与える。この y はやはり (27) で与えられる事が分る。又この場合の L は 0 (T_0 の縮小が上側にのみ起る) であり、 U は

$$U=w_2[\{x-[x]\}-\{(D+\lambda^*-x)-[D+\lambda^*-x]\}] \tag{28}"$$

で与えられる。一方 $U^*=0$ (T_0^* の縮小が下側にのみ起る) であり、 L^* は

$$L^*=w_1[\{x-[x]\}-\{(D+\lambda^*-x)-[D+\lambda^*-x]\}] \tag{29}"$$

で与えられる。

以上をまとめれば、 $[x]$ 、 $[D+\lambda^*-x]$ が共に偶数なる場合に対して次の結果を得る。即ち座標 x の地点にある交叉点に対し (a) によって定められる optimum な offset は (27) で与えられ、且つこの場合 T_0, T_0^* の縮小の大きさは夫々

$$w_2 |\{x-[x]\}-\{(D+\lambda^*-x)-[D+\lambda^*-x]\}| \tag{28}$$

$$w_1 |\{x-[x]\}-\{(D+\lambda^*-x)-[D+\lambda^*-x]\}| \tag{29}$$

である。この場合、縮小の起り方は第4表のようになる。

第4表 optimum な offset の場合に T_0, T_0^* に生ずる縮小の位置、但し $[x]$ 、 $[D+\lambda^*-x]$ が共に偶数又は共に奇数の場合

場 合	T_0 の 縮 小	T_0^* の 縮 小
(i)	下 側	上 側
(ii)	な し	な し
(iii)	上 側	下 側

(II) $[x]$ 、 $[D+\lambda^*-x]$ が共に奇数の場合の場合：

(I) と全く同程にして次の結果を得る。即ち optimum な offset は

$$y=w_1\{x-[x]\}+w_2\{(D+\lambda^*-x)-[D+\lambda^*-x]\}+1 \tag{30}$$

で与えられ、又 T_0, T_0^* の縮小の大きさは夫々 (28)、(29) で与えられる。更にこの場合、縮小の起り方はやはり第4表で与えられる。

(III) $[x]$ が奇数、 $[D+\lambda^*-x]$ が偶数の場合：

今 $[x]=2m+1$ 、 $[D+\lambda^*-x]=2n$ とする。(I) の場合に述べた (i)、(ii)、(iii) の3つの場合を分けて考える。

(i) の場合には、(I) の時と同様に、 y の値に応じて $U(x, y)$ 、 $L(x, y)$ 、 $U^*(x, y)$ 、 $L^*(x, y)$ が夫々第5表の様に評価される。

第5表 $U(x, y)$ 、 $L(x, y)$ 、 $U^*(x, y)$ 、 $L^*(x, y)$ の評価。但し $[x]$ が奇数。
 $[D+\lambda^*-x]$ が偶数で、且つ (i) の場合

y の 範 囲	$U(x, y)$	$L(x, y)$	$U^*(x, y)$	$L^*(x, y)$
$0 \leq y < x-2m-1$	0	$2m+2-x-y$	$D+\lambda^*-x-y-2n$	0
$y=x-2m-1$	1/2	1/2	$D+\lambda^*-x-y-2n$	0
$x-2m-1 < y \leq D+\lambda^*-x-2n$	$x-y-2m$	0	$D+\lambda^*-x-y-2n$	0
$D+\lambda^*-x-2n \leq y \leq x-2m$	$x-y-2m$	0	0	$2n-D-\lambda^*+x+y$
$x-2m \leq y < D+\lambda^*-x-2n+1$	0	$2m-x+y$	0	$2n-D-\lambda^*+x+y$
$y=D+\lambda^*-x-2n+1$	0	$2m-x+y$	1/2	1/2
$D+\lambda^*-x-2n+1 < y < 2$	0	$2m-x+y$	$D+\lambda^*-x-y-2n+2$	0

これより $d(x, y)$ は次の通りになる：

- (i) $0 \leq y \leq x-2m-1$ なら $d(x, y) = D + \lambda^* - 2x + 2m - 2n + 2$
- (ii) $x-2m-1 < y \leq D + \lambda^* - x - 2n$ なら $d(x, y) = D + \lambda^* - 2y - 2m - 2n$
- (iii) $D + \lambda^* - x - 2n \leq y \leq x-2m$ なら $d(x, y) = 2n - 2m - D - \lambda^* + 2x$
- (iv) $x-2m \leq y < D + \lambda^* - x - 2n + 1$ なら $d(x, y) = 2m + 2n - D - \lambda^* + 2y$
- (v) $D + \lambda^* - x - 2n + 1 \leq y < 2$ なら $d(x, y) = D + \lambda^* - 2x + 2m - 2n + 2$

基準 (a) に従い、 x を固定しておいて y を動かして $d(x, y)$ を最小にする事を考える。(I) の場合と同様に、 $d(x, y)$ を最小にする y の値は、(iii) の範囲の任意 y 又は、 $y = D + \lambda^* - x - 2n$ 、又は $y = x - 2m$ である事が分る。かかる y のうちで (26) を満足するものが唯一つある(それは (iii) の範囲の y) 事が、(I) の (i) の場合と同様に言える。この y は

$$y = w_1\{x - [x]\} + w_2\{(D + \lambda^* - x) - [D + \lambda^* - x]\} + w_1 \quad (31)$$

である。座標 x の地点にある交叉点に対して (a) によって定められる offset は、この場合 (31) で与えられる y である。

又この場合は $L = 0$ (即ち T_0 の縮小は上側にのみ起る) であり、又 U は

$$U = w_2[1 - \{(D + \lambda^* - x) - [D + \lambda^* - x]\} - (x - [x])] \quad (32)'$$

で与えられる。一方では $U^* = 0$ (即ち帯 T_0^* の縮小は下側にのみ起る) であり、又 L^* は

$$L^* = w_1[1 - \{(D + \lambda^* - x) - [D + \lambda^* - x]\} - (x - [x])] \quad (33)'$$

で与えられる。

(ロ) の場合には第 5 表に対応するものは第 6 表となる。

第 6 表 $U(x, y)$, $L(x, y)$, $U^*(x, y)$, $L^*(x, y)$ の評価, 但し $[x]$ が奇数, $[D + \lambda^* - x]$ が偶数で、且つ (ロ) の場合

y の 範 囲	$U(x, y)$	$L(x, y)$	$U^*(x, y)$	$L^*(x, y)$
$0 \leq y < x-2m-1$	0	$2m+2-x+y$	$x-y-2m-1$	0
$y = x-2m-1$	1/2	1/2	0	0
$x-2m-1 < y < x-2m$	$x-y-2m$	0	0	$y-x+2m+1$
$y = x-2m$	0	0	1/2	1/2
$x-2m < y < 2$	0	$2m-x+y$	$x-y-2m+1$	0

これより $d(x, x)$ は y の如何に拘らず 1 である事が分る。従ってこの場合には、基準 (a) によって offset を選ぶ事は条件 (26) を満足するものを選ぶ事になる。然るに第 6 表より、(26) を満足する y が $x-2m-1 < y < x-2m$ なる範囲にある事が分る。offset としてかかるものを選ぶ事にする。これは

$$y = w_1(x-2m) + w_2(x-2m-1)$$

である。所で $x - [x] = (D + \lambda^* - x) - [D + \lambda^* - x]$ の場合であるから、上述の y は (31) に他な

第 7 表 $U(x, y)$, $L(x, y)$, $U^*(x, y)$, $L^*(x, y)$ の評価, 但し $[x]$ が奇数, $[D + \lambda^* - x]$ が偶数で、且つ (ロ) の場合

y の 範 囲	$U(x, y)$	$L(x, y)$	$U^*(x, y)$	$L^*(x, y)$
$0 \leq y \leq D + \lambda^* - x - 2n$	0	$2m+2-x+y$	$D + \lambda^* - x - y - 2n$	0
$D + \lambda^* - x - 2n \leq y < x-2m-1$	0	$2m+2-x+y$	0	$2n - D - \lambda^* + x + y$
$y = x-2m-1$	1/2	1/2	0	$2n - D - \lambda^* + x + y$
$x-2m-1 < y < D + \lambda^* - x - 2n + 1$	$x-y-2m$	0	0	$2n - D - \lambda^* + x + y$
$y = D + \lambda^* - x - 2n + 1$	$x-y-2m$	0	1/2	1/2
$D + \lambda^* - x - 2n + 1 < y \leq x-2m$	$x-y-2m$	0	$D + \lambda^* - x - y - 2n + 2$	0
$x-2m \leq y < 2$	0	$2m-x+y$	$D + \lambda^* - x - y - 2n + 2$	0

らない。

この場合の帯 T_0, T_0^* の縮小は夫々上側及び下側に起り, その大きさは夫々 w_2 及び w_1 で与えられる (即ち $U=w_1, L=0, U^*=0, L^*=w_2$)。

(ハ) の場合には第5表に対応するものは第7表となる。

これより $d(x, y)$ は次の通りになる:

- (i) $0 \leq y \leq D + \lambda^* - x - 2n$ なら $d(x, y) = D + \lambda^* - 2x + 2m - 2n + 2$
- (ii) $D + \lambda^* - x - 2n \leq y < x - 2m - 1$ なら $d(x, y) = 2m + 2n - D - \lambda^* + 2y + 2$
- (iii) $x - 2m - 1 \leq y \leq D + \lambda^* - x - 2n + 1$ なら $d(x, y) = 2n - 2m - D - \lambda^* + 2x$
- (iv) $D + \lambda^* - x - 2n + 1 < y \leq x - 2m$ なら $d(x, y) = D + \lambda^* - 2y - 2m - 2n + 2$
- (v) $x - 2m \leq y < 2$ なら $d(x, y) = D + \lambda^* - 2x + 2m - 2n + 2$

x を固定しておいて y を動かして $d(x, y)$ を最小にせんとするに, 先づ (i), (iii), (v) の場合には夫々, 該当する範囲の y の値の如何に拘らず $d(x, y)$ は一定である。その場合この一定値は, (iii) の場合の値が (i) 及び (v) の場合の値よりも小ではない。故に (iii) の範囲の y は除外される。なおこの $d(x, y)$ の一定値は $D + \lambda^* - 2x + 2m - 2n + 2$ である。

(ii), (iv) の場合の $d(x, y)$ の最小値も又 $D + \lambda^* - 2x + 2m - 2n + 2$ で, 且つ $d(x, y)$ がこの値となるのは夫々 $y = D + \lambda^* - x - 2n$ 及び $y = x - 2m$ の時である。故に $d(x, y)$ が最小となるのは, $y = D + \lambda^* - x - 2n$ 又は $y = x - 2m$ 又は y が (i) 又は (v) の範囲の任意の値なる場合である。

これ等の y の値のうち $y = D + \lambda^* - x - 2n$ 又は $y = x - 2m$ の場合には, (26) の左辺の分母又は分子が0となり (26) は成立たない。一方 (i) 又は (v) の範囲の y のうちには, (26) を成立たしめるものが丁度一つだけ存在する。何となれば, (i) の範囲の y で (26) を成立たしめるものがある為の条件は, 第7表により,

$$\left. \begin{aligned} w_1(2m+2-x+y) &= w_2(D+\lambda^*-x-y-2n) \\ 0 \leq y < D+\lambda^*-x-2n \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

なる y が存在する事であり, 又 (v) の範囲の y で (26) を成立たしめるものがある為の条件は, 第7表より,

$$\left. \begin{aligned} w_1(2m-x+y) &= w_2(D+\lambda^*-x-y-2n+2) \\ x-2m \leq y < 2 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

なる y が存在する事である。これ等は夫々

$$w_1 \leq w_1(x-2m-1) + w_2(D+\lambda^*-x-2n)$$

即ち

$$w_1 \leq w_1\{x-[x]\} + w_2\{(D+\lambda^*-x)-[D+\lambda^*-x]\}, \quad (36)$$

又は

$$w_1 > w_1(x-2m-1) + w_2(D+\lambda^*-x-2n)$$

即ち

$$w_1 > w_1\{x-[x]\} + w_2\{(D+\lambda^*-x)-[D+\lambda^*-x]\} \quad (37)$$

なる事と同値であるが, (36), (37) は互に相反し, 且つ少くも一方が成立つ。故に (i) 又は (v) の範囲の y で (26) を成立たしめるものがある。又この場合, (26) を成立たしめる y の値は, (36) の場合には

$$y = w_1(x-2m-2) + w_2(D+\lambda^*-x-y-2n) \quad (38)$$

であり, (37) の場合には

$$y = w_1(x-2m) + w_2(D+\lambda^*-x-y-2n+2) \quad (39)$$

である。かかる y がこの場合, 座標 x の地点にある交叉点に対し (a) によって定められる optimum な offset である。

(ハ) の場合に T_0 又は T_0^* に起る縮小は次の通りである。即ち (36) 又は (37) の何れの場合でも、 $U=0$ (即ち T_0 の縮小は下側にのみ起る) であって、 L は

$$L = w_2[1 - \{(x - [x]) - ((D + \lambda^* - x) - [D + \lambda^* - x])\}] \quad (32)'''$$

で与えられる。更に $L^*=0$ (即ち T_0^* の縮小は上側にのみ起る) であり、一方 U^* は

$$U^* = w_1[1 - \{(x - [x]) - ((D + \lambda^* - x) - [D + \lambda^* - x])\}] \quad (33)'''$$

で与えられる。

以上をまとめると、 $[x]$ が奇数、 $[D + \lambda^* - x]$ が偶数の場合に対して次の結果を得る。即ち、座標 x の地点にある交叉点に対し (a) によって定められる optimum な offset を用いる時は、 T_0 、 T_0^* の縮小の大きさは夫々

$$w_2[1 - \{(x - [x]) - ((D + \lambda^* - x) - [D + \lambda^* - x])\}] \quad (32)$$

及び

$$w_1[1 - \{(x - [x]) - ((D + \lambda^* - x) - [D + \lambda^* - x])\}] \quad (33)$$

であり、これ等の縮小の起り方は第8表の様になる。

第8表 optimum な offset の場合に T_0 、 T_0^* に生ずる縮小の位置、但し $[x]$ が奇数、 $[D + \lambda^* - x]$ が偶数の場合、又は $[x]$ が偶数、 $[D + \lambda^* - x]$ が奇数の場合

場 合	T_0 の 縮 小		T_0^* の 縮 小	
(イ)	上	側	下	側
(ロ)	上	側	下	側
(ハ)	下	側	上	側

又 optimum な offset は次の様与えられる。即ち (イ) 又は (ロ) の場合には (31) で与えられ、又 (ハ) で且つ (36) の場合には

$$y = w_1\{x - [x]\} + x_2\{(D + \lambda^* - x) - [D + \lambda^* - x]\} - w_1 \quad (40)$$

で、又 (ハ) で且つ (37) の場合には

$$y = w_1\{x - [x]\} + w_2\{(D + \lambda^* - x) - [D + \lambda^* - x]\} - w_1 + 2 \quad (41)$$

で与えられる。

(IV) $[x]$ が偶数、 $[D + \lambda^* - x]$ が奇数の場合：

(III) の場合と全く同様にして次の結果を得る。即ち座標が x の地点にある交叉点に対し (a) によって定められる optimum な offset を用いる時は、 T_0 、 T_0^* の縮小の大きさは夫々 (32) 及び (33) で、又縮小の起り方は第8表で与えられる。

又 optimum な offset は次の様与えられる。即ち (イ) 又は (ロ) の場合には、更に若し

$$w_2 \leq w_1\{x - [x]\} + w_2\{(D + \lambda^* - x) - [D + \lambda^* - x]\} \quad (42)$$

の場合には

$$y = w_1\{x - [x]\} + w_2\{(D + \lambda^* - x) - [D + \lambda^* - x]\} - w_2 \quad (43)$$

で与えられ、又

$$w_2 > w_1\{x - [x]\} + w_2\{(D + \lambda^* - x) - [D + \lambda^* - x]\} \quad (44)$$

の場合には

$$y = w_1\{x - [x]\} + w_2\{(D + \lambda^* - x) - [D + \lambda^* - x]\} - w_2 + 2 \quad (45)$$

で与えられる。又 (ハ) の場合には

$$y = w_1\{x - [x]\} + w_2\{(D + \lambda^* - x) - [D + \lambda^* - x]\} + w_2 \quad (46)$$

で与えられる。

以上の結果から、 α 、 λ^* を固定した場合における ((a) の意味で) optimum な offset の組、

及びそれ等を用いた時の各交叉点についての T_0 , T_0^* の縮小が求められる。この後者より、これ等の offset の組を用いた時の両方の流れに対する through bands (α , λ^* を固定した時の個別的に optimum な through bands) の幅が求められる事になる。

更に (b), (c) に従い α, λ^* を色々動かして、両方向の流れに対する through bands の幅の和が最大となるようなものを選んでゆく。それによって最もよい α, λ^* と through bands の幅の和の最大値が求められ、又この α, λ^* の場合に於ける個別的に optimum な offset の組が得られる。具体的な手順は次の通りである。

先づ (1), (2) を満足する様に地点 $0, M$ を選んでおく。より具体的に言えば、互に相隣る交叉点の間の距離を a_1, a_2, \dots, a_{N-1} とする時、各交叉点の座標 $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$ 及び D を次の様にとればよい。即ち

$$\begin{cases} x^{(1)}=2\alpha_2 \\ x^{(2)}=2\alpha_2+a_1 \\ \vdots \\ x^{(N)}=2\alpha_2+a_1+a_2+\dots+a_{N-1} \\ D=2\alpha_2+a_1+a_2+\dots+a_{N-1}+2\alpha_2 \end{cases}$$

ととる。

次に α を用いて (7) の D_α を求め、又各 $x^{(i)}$ に対し、(4) により $x_a^{(i)}$ を求める ($i=1, 2, \dots, N$)。

それから λ^* を用い、 x を次々に $x_a^{(1)}, x_a^{(2)}, \dots, x_a^{(N)}$ と動かし、それ等に対する optimum な offset $y_{a,\lambda^*}^{(1)}, y_{a,\lambda^*}^{(2)}, \dots, y_{a,\lambda^*}^{(N)}$ を求める。又この個別的に optimum な offset の組を用いた場合に各交叉点で生ずる T_0 の上の縮小 $U_{a,\lambda^*}^{(1)}, U_{a,\lambda^*}^{(2)}, \dots, U_{a,\lambda^*}^{(N)}$, T_0 の下の縮小 $L_{a,\lambda^*}^{(1)}, L_{a,\lambda^*}^{(2)}, \dots, L_{a,\lambda^*}^{(N)}$, T_0^* の上の縮小 $U_{a,\lambda^*}^{*(1)}, U_{a,\lambda^*}^{*(2)}, \dots, U_{a,\lambda^*}^{*(N)}$, T_0^* の下の縮小 $L_{a,\lambda^*}^{*(1)}, L_{a,\lambda^*}^{*(2)}, \dots, L_{a,\lambda^*}^{*(N)}$ を求める。各 $x_a^{(i)}, y_{a,\lambda^*}^{(i)}, U_{a,\lambda^*}^{(i)}, L_{a,\lambda^*}^{(i)}, U_{a,\lambda^*}^{*(i)}, L_{a,\lambda^*}^{*(i)}$ を一般的に x, y, U, L, U^*, L^* であらわす時は、これ等は前に述べた様にして (色々の場合に応じて) 求められる。但しその場合、前に D としている所は D_α で置き換えねばならぬ。更に

$$U_{a,\lambda^*} = \max_{1 \leq i \leq N} U_{a,\lambda^*}^{(i)}$$

$$L_{a,\lambda^*} = \max_{1 \leq i \leq N} L_{a,\lambda^*}^{(i)}$$

$$U_{a,\lambda^*}^* = \max_{1 \leq i \leq N} U_{a,\lambda^*}^{*(i)}$$

$$L_{a,\lambda^*}^* = \max_{1 \leq i \leq N} L_{a,\lambda^*}^{*(i)}$$

を求め、これ等から

$$\begin{aligned} b_{a,\lambda^*} &= \max \{0, 1 - (U_{a,\lambda^*} + L_{a,\lambda^*})\} \\ b_{a,\lambda^*}^* &= \max \{0, 1 - (U_{a,\lambda^*}^* + L_{a,\lambda^*}^*)\} \end{aligned}$$

を求め

$$B_{a,\lambda^*} = b_{a,\lambda^*} + b_{a,\lambda^*}^*$$

と置く。

この B_{a,λ^*} が、 α, λ^* を色々動かして、最大になる場合を求める。この B_{a,λ^*} の最大値が、両方向の流れに対する個別的に optimum な through bands の幅の和であり、又この場合の α, λ^* の値が (b), (c) によって定められる α, λ^* の値である。この α, λ^* に対する $y_{a,\lambda^*}^{(1)}, y_{a,\lambda^*}^{(2)}, \dots, y_{a,\lambda^*}^{(N)}$ が、所求の個別的に optimum な offset の組である。

以上の手順は、これを自動計算機に行わせる様に適当に programming を組む事は容易である。それによって先づ与えられたデータ a_1, a_2, \dots, a_{N-1} (即ち与えられた路線) に対する個別的に optimum な速度勾配 α と、又個別的に optimum な λ^* が数値計算によって決定される。次にこの路線に於て w_1, w_2 が与えられた時、それに応じる個別的に optimum な offset の組がやはり数値計算で決定される。この場合一般には w_1, w_2 は時々刻々に変化するが、それに応じて個別的に optimum な offset の組を迅速に計算し、時間と共に修正してゆく事が可能である。

なお α は α_1 と α_2 の間に变化させて考えるが、この限界 α_1, α_2 をどの様にするかという事が問題になる。これは次の様な考慮から限定されてくる。§2 の終りに述べた様に、指定速度 v は、その絶対の値でなく、サイクルの時間の長さ C との相対的關係が次の様にきまる事になる。即ち個別的に optimum な α によって

$$Cv=2\alpha \tag{47}$$

なる関係がきまる。この場合 C 或は v の値には、実用上或る限界が考えられるであろう。それを今 $C_1 \leq C \leq C_2, v_1 \leq v \leq v_2$ とする。然る時これ等の限界の範囲で、而も (47) によって C, v を決め得る為には、 α_1, α_2 としては $C_1 v_1 \leq 2\alpha_1, C_2 v_2 \geq 2\alpha_2$ となるようなものを考えなくてはならない。

§4. 例

本節では、前節の結果を応用した一例を示すと共に、この例の場合に対して Kell の方法により作図した結果と比較する。この例は7個所の交叉点を持つ路線で、各交叉点間の距離が、左から夫々 370 m, 230 m, 330 m, 370 m, 280 m 及び 420 m なるものである。

C_1, C_2, v_1, v_2 の値としては、夫々 $C_1=1$ 分, $C_2=3$ 分, $v_1=15$ km/時, $v_2=45$ km/時ととった。従って α_1, α_2 は $\alpha_1 \geq 0.125$ km, $\alpha_2 \leq 1.125$ km なるものを考えねばならぬ。数値計算に当っては $\alpha_1=0.25$ km, $\alpha_2=0.70$ km にとって、この範囲で α を動かした。なお λ^* は 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8 と変動させた。

optimum な α の値は $\alpha=0.33$ と求まった。又この場合 optimum は λ^* (これは一意にはきまらぬ) としては、 $\lambda^*=0$ ととればよい事が見られた。

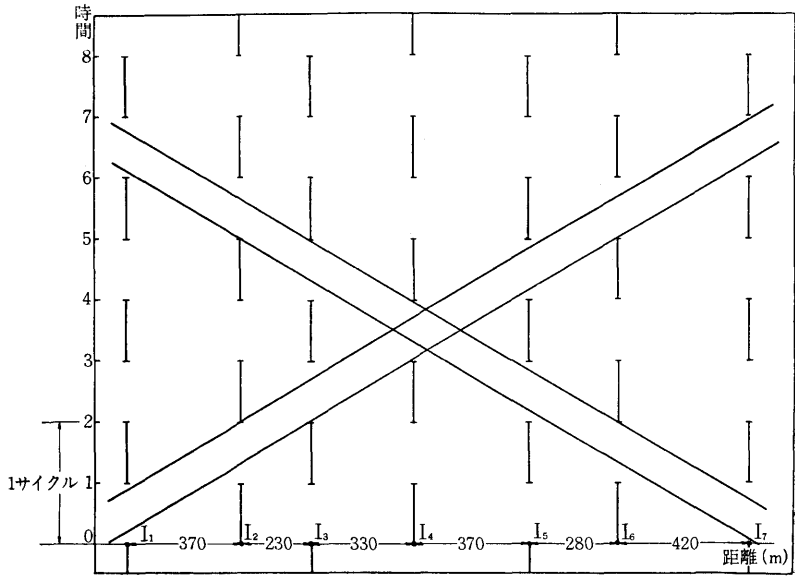
この α, λ^* の値の場合の個別的に optimum な offset の組を、 w_1, w_2 の二三の場合に対して第9表に示し、た。但し一番左の交叉点 I_1 に於ける offset が 0 となる様に時間の原点を調節した夫々の場合の through bands の図は第8図, 第9図, 及び第10図に示してある。これ等の何れの場合についても、両方向の流れに対する through bands の幅の和は 1.33 である。なお各方向

第9表 §3の方法で求めた optimum な offsets の例

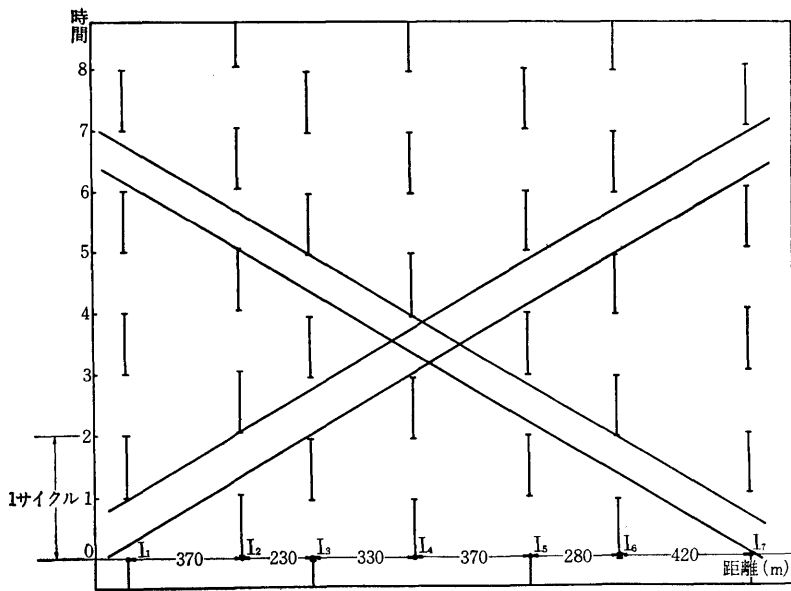
交叉点 車の来方の頻度の比	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
1 : 1	0	1	0	1	0	1	0
3 : 2	0	1.04	1.95	0.95	1.98	0.94	0.02
2 : 1	0	1.04	1.94	0.94	1.98	0.93	0.02

第10表 §3の方法で求めた optimum な through bands の幅の例

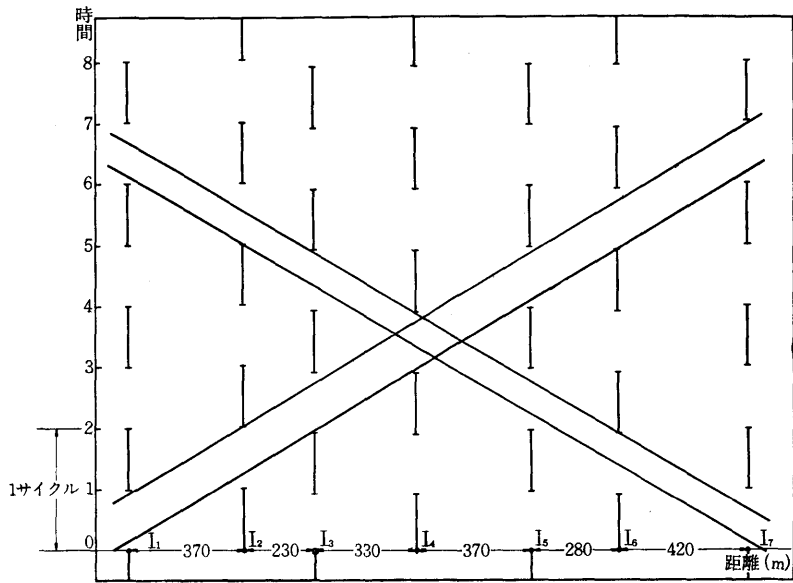
方 向 車の来方の頻度の比	方 向		計
	左 → 右	左 → 右	
1 : 1	0.667	0.667	1.33
3 : 2	0.733	0.600	1.33
2 : 1	0.778	0.556	1.33



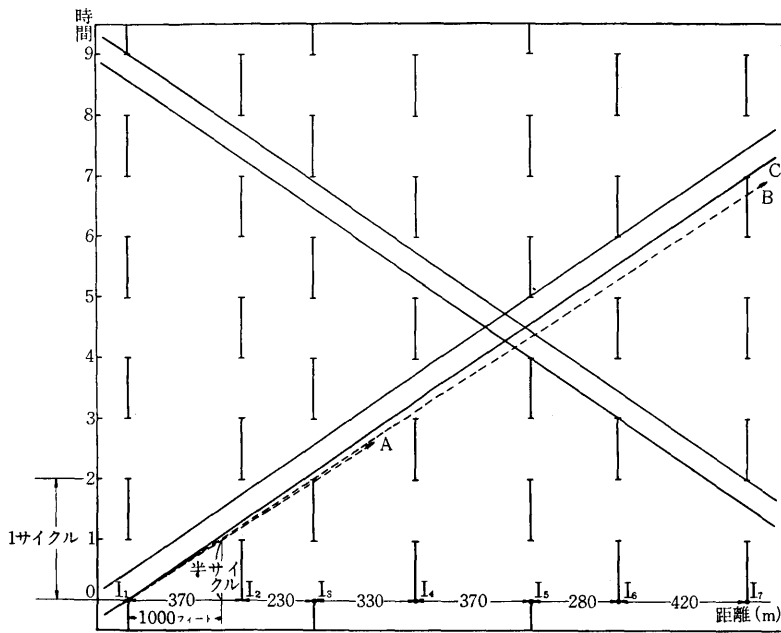
第8図 §3の方法で求めた through bands の例: $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ の場合



第9図 §3の方法で求めた through bands の例: $w_1 = \frac{3}{5}, w_2 = \frac{2}{5}$ の場合



第 10 図 §3 の方法で求めた through bands の例: $w_1 = \frac{2}{3}$, $w_2 = \frac{1}{3}$ の場合



第 11 図 Kell の方法で作図により求めた through bands の例

の流れに対して定まった through band の幅は第 10 表に示した通りである。

この例の路線の場合に対し、Kell の方法で作図してみたものが第 11 図である。この結果に於ける各方向の流れに対する through band の幅は夫々約 0.45 であり、幅の和は 0.90 となる。これと前述の §3 の方法で求めた結果のと 1.33 比べれば、後者は前者に対しその約 5 割増しであって明らかに遙かに良好である。

なお $\alpha=0.33$ の場合には、指定速度 $v=20$ km/時 ならサイクルの時間の長さ C は約 2 分、 $v=25$ km/時なら C は約 1 分 34 秒、 $v=30$ km/時なら C は約 1 分 20 秒である。

上に提示した方法は、各交叉点のそれぞれを個別的に optimum にするものである。それによって実際に全体としても optimum なものが得られる（但し或る条件が必要である）事になるのであるが、それについての議論は別の機会に譲る。

本研究は科学研究費（統計的モデル解析についての総合的研究）による研究の一部である。

統計数理研究所

参 考 文 献

J.H. Kell, "Coordination of fixed-time traffic signals", August 1956, University of California, Institute of Transportation and Traffic Engineering.