視覚の閾値光量子数に関する Bouman-Velden-山本の関係式について

池　田　貞　雄

(1961 年 8 月 受 付)

On an equality by Bouman, Velden and Yamamoto relating to the threshold number of quanta in human vision

Sadao IKEDA

Relating to the problem of finding the threshold number of quanta in human vision under some experimental condition, M. A. Bouman, H. A. Van der Velden and S. Yamamoto have driven, in a heuristic manner, an equality concerning the probability of recognizing the flash when the duration of flash is sufficiently large compared with the life time of quanta, which is assumed to be constant ;

$$W_k(\mu, t) \sim 1 - e^{-\frac{\mu^k t}{(k-1)!}}, \quad (k \geqq 2),$$

where k is the threshold value, μ is the average number of quanta which are absorbed, and t is the duration of flash. Here the life time of the energy of quanta is taken as the unit of time.

In the present paper, the methematical proof of the result mentioned above is shown under the condition that

$$\mu^k t \to \lambda (>0), \quad (t \to \infty).$$

Dep. of Math., College of Sci. and Eng., Nihon Univ.

1. 序　論

刺戟強度 I の矩形波光刺戟を刺戟時間 T だけ与えたとき，それに含まれる光量子数 N は IT に比列する．1 個の光量子が視物質に効果的に吸収される確率を f とし，個々の光量子の吸収はこの一定の確率で相互に独立に起るものと仮定する．吸収された光量子のエネルギーには一定の life time τ があるとし，吸収されてから時間が τ 以上経過すればそのエネルギーは消失して光覚の成立には寄与しないが，時間がまだ τ 以上経過しない間は，そのエネルギーは保存されていて，吸収されて未だ life time を終っていない他の光量子のエネルギーと相加的に加算されて，光覚の成立に寄与するものとする．即ち，以下で取扱う光覚の閾値光量子数の問題は，“constant life time” の場合である．問題の全般にわたる概容は，山本 他 [1]，山本 [2] を参照されたい．[2] では，以下取扱う問題を，τ が指数分布に従う確率変数である場合，つまり，“exponential life time” の場合について考察してある．

さて，constant life time の仮定の下では，τ を時間の単位にとってやれば，刺戟時間を $t=T/\tau$，life time は単位時間 1 であると考えてよく，今記号を簡単にするため

(1.1) $$fN\equiv m,\quad \frac{fN\tau}{T}=\frac{m}{t}\equiv\mu$$

とおくと，μ は単位時間当りの平均吸収個数と見做される．この時，吸収された光量子の個数 S は，刺戟時間 t，単位時間当りの平均吸収個数に依存する確率変数であり，Poisson 分布

(1.2) $$P_t\{S=s\}\equiv p_s(t)=e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^s}{s!},\quad s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

に従う．更に精密には，均質な刺戟が持続されている限り，この吸収は，Poisson 過程を構成すると見られる（[1]，4 節，8 節参照）．

この刺戟で光覚を生ずる確率を $W_k(\mu,\ t)$ で表わそう．ここで，k は正の整数で，閾値光量子数を表わす．即ち，吸収されて life time を終っていない光量子の個数が k 個以上になっている状態が，刺戟時間中のある時点で起れば光覚を生ずるが，そうでなければ光覚は生じない．

今，s 個の吸収が起ったという条件の下で，光覚を生じないという事象の条件附確率を $P(k,\ \mu,\ t/s)$ で表わせば，閾値が k であるから，

(1.3) $$P(k,\ \mu,\ t/s)\begin{cases}=1, & s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1,\\ >0, & s=k,\ k+1,\cdots,\ N_k(t)\\ =0, & s=N_k(t)+1,\ N_k(t)+2,\cdots\cdots\end{cases}$$

が成立する．ここに，$N_k(t)$ は正の整数で，後に第4節で $k\geq 2$ に対してその一般形を与えるが，吾々の問題を取扱う限りでは，$t\to\infty$ の場合の t に対する order だけがわかれば充分である．勿論 $N_k(t)$ は，$k,\ t$ 以外には依存しない．

さてそこで，

(1.4) $$P_s(k,\ \mu,\ t)\equiv P(k,\ \mu,\ t/s)\cdot P_t\{S=s\}$$

とおくと，これは，“s 個の吸収が行われ且つ光覚を生じない”という事象の確率である．(1.2)，(1.3) から明らかに

(1.5) $$P_s(k,\ \mu,\ t)\begin{cases}=e^{-\mu t}\dfrac{(\mu t)^s}{s!}, & s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1\\ >0, & s=k,\ k+1,\ \cdots,\ N_k(t)\\ =0, & s=N_k(t)+1,\ N_k(t)+2,\ \cdots\cdots\end{cases}$$

が成立ち，又，

(1.6) $$\begin{aligned}W_k(\mu,t)&=1-\sum_{s=0}^{\infty}P_s(k,\ \mu,\ t)\\ &=1-\sum_{s=0}^{N_k(t)}P_s(k,\ \mu,\ t)\end{aligned}$$

なる関係式が得られる．

以上で見た刺戟時間 $t=T/\tau$ は，実験者の方で任意に与えうるもので，通常は t はかなり大きい値をとるものと考えてよいが，今閾値が k であるという仮定のとき，刺戟強度も適当に control して，$\mu^k t\to\lambda(>0)$ という状態で $t\to\infty$ とするとき，Bouman-Velden [3] は

(1.7) $$W_k(\mu,\ t)\propto\mu^k t,\ (t\gg 1),$$

なる比例式を予想し，山本，他 [1] では，これより精密な近似式

(1.8) $$W_k(\mu,\ t)\fallingdotseq 1-e^{-\frac{\mu k t}{(k-1)!}}\quad (t\gg 1,\ \ \mu\ll 1)$$

が与えられている．尚 $k=2$ の場合には，両者共に

(1.9) $$W_2(\mu,\ t)\fallingdotseq 1-e^{-\mu^2 t}\qquad (t\gg 1,\ \ \mu\ll 1)$$

を導いている．これらは共に，heuristic なものであって，その導き方は，しっかりした確率論的な考察の上に立ったものではない．

本小論の目的は，近似式 (1.8) の正当性を証明することである．前にのべたように，山本 [2] は，上の近似式 (1.8) を exponential life time の場合に証明している．所で，τ の分布がもっと他の形で与えられたとき，尚，上の近似式が成立するのではなかろうかという疑問が山本氏によって提出されている．

2. 吸収間隔の分布

前節で考えた矩形波光刺戟を刺戟時間 t だけ与えた場合，吸収は既に述べたように Poisson 過程に従って起る．t が有限の場合，及び $t\to\infty$ のとき，吸収間隔は如何なる分布に従うであろうか．

今，刺戟時間 $(0, t)$ 内に，s 個の光量子が吸収されるものとすれば，それらは s 個の吸収時点 $0<t_1<t_2<\cdots<t_s<t$ をもつ．$s=0$ の場合は勿論吸収時点は存在しない．$s\geqq 1$ の場合，これらの吸収時点及び吸収個数の同時分布を求めると，その確率密度函数 $P_t(t_1, t_2, \cdots, t_s, s)$ は，(1.2) から次のようにして得られる．

$$P_t(t_1, t_2, \cdots, t_s, s)$$
$$=\lim_{\substack{\Delta t_i\to 0\\(i=1,2,\cdots,s)}}\frac{p_0(t)p_1(\Delta t_1)p_0(t_2-t_1-\Delta t_1)p_1(\Delta t_2)\cdots p_0(t_s-t_{s-1}-\Delta t_{s-1})p_1(\Delta t_s)p_0(t-t_s-\Delta t_s)}{\Delta t_1\Delta t_2\cdots\Delta t_s}$$
$$=\lim_{\substack{\Delta t_i\to 0\\(i=1,2,\cdots,s)}}\frac{e^{-\mu t_1}e^{-\mu\Delta t_1}\cdot\Delta t_1 e^{-\mu(t_2-t_1-\Delta t_1)}\cdot e^{-\mu\Delta t_2}\mu\cdot\Delta t_2\cdots e^{-\mu(t_s-t_{s-1}-\Delta t_{s-1})}e^{-\mu\Delta t_s}\mu\Delta t_s\cdot e^{-\mu(t-t_s-\Delta t_s)}}{\Delta t_1\Delta t_2\cdots\Delta t_s}$$
$$=\mu^s e^{-\mu t},\quad (s=1,\ 2,\ \cdots\cdots),$$

従ってこれから，$s=0$ の場合も含めて

$$(2.1)\qquad p_t(t_1, t_2, \cdots, t_s, s)dt_1dt_2\cdots dt_s=\mu^s e^{-\mu t}dt_1dt_2\cdots dt_s$$
$$(0<t_1<t_2<\cdots<t_s<t,\ s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

を得る．吸収個数が s 個であるという条件の下での，吸収時点の分布は，(2.1) から

$$(2.1)'\qquad p_t(t_1, t_2, \cdots, t_s/s)\,dt_1dt_2\cdots dt_s=\frac{s!}{t^s}dt_1dt_2\cdots dt_s$$
$$(0<t_1<t_2<\cdots<t_s<t)$$

で与えられるが，これは，$S=s$ の条件下での吸収時点 $0<t_1<t_2<\cdots<t_s<t$ の条件附分布は，区間 $(0, t)$ 上の一様分布からの大きさ s の順序統計量の分布に同じであることを示している．

今，吸収間隔を

$$(2.2)\qquad u_1=t_1,\quad u_2=t_2-t_1,\quad \cdots,\quad u_s=t_s-t_{s-1}$$

とおくと，この変換の Jacobian は 1 で，(2.1), (2.1)′ より直ちに，吸収間隔と吸収個数との同時分布の確率密度函数 $p_t(u_1, u_2, \cdots, u_s, s)$ は

$$(2.3)\qquad p_t(u_1, u_2, \cdots, u_s, s)du_1du_2\cdots du_s=\mu^s\cdot e^{-\mu t}du_1du_2\cdots du_s$$
$$\left(u_i>0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s),\ \sum_{i=1}^{s}u_i<t,\ s=1,\ 2,\ \cdots\cdots\right)$$

によって与えられ，又 $S=s$ の条件の下における吸収間隔の条件附分布は，$s=1, 2, \cdots$ に対して

$$(2.3)'\qquad p_t(u_1, u_2, \cdots, u_s/s)du_1\cdots du_s=\frac{s!}{t^s}du_1du_2\cdots du_s$$
$$\left(u_i>0,\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ s),\ \sum_{i=1}^{s}u_i<t\right)$$

で与えられる．

さて次に，$t\to\infty$ の場合にはよく知られているように ([4], [5])，吸収間隔 $u_1, u_2, \cdots, u_s$ は互に独立に，同一の指数分布に従う．今，刺戟時間 t に対して平均吸収個数を μ とすると

き，$t\to\infty$ に対して $\mu\to 0$ と control するような場合に対しては，十分大きな t に対して吸収間隔は近似的に独立で，平均 $1/\mu$ の指数分布に従うと見做してよい．つまり，十分大きな t に対しては，吸収間隔及び吸収個数の同時分布の密度函数は

$$p(u_1, u_2, \cdots, u_s, s)=\prod_{i=1}^{s}\mu e^{-\mu u_i}\cdot e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^s}{s!} \tag{2.4}$$
$$=\mu^s\cdot e^{-\mu\sum_1^s u_i}\cdot e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^s}{s!} \qquad \begin{pmatrix} u_i>0,\ i=1, 2, \cdots, s, \\ s=1, 2, \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

で近似される．

この小論では，t が十分大きいとき，($\mu^k t\to\lambda>0$ となるように $\mu\to 0$ を control して)，(1.6) で与えられる $W_k(\mu, t)$ の近似評価を上の (2.4) の確率分布によって行う．

3. Poisson 分布の分布域

本節では極限移行 $(t\to\infty)_k$ 即ち

$$t\to\infty,\quad \mu^k\to\lambda(>0) \tag{3.1}$$

に対して，平均 μt の Poisson 分布

$$p_s(t)=e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^s}{s!} \qquad (s=0, 1, 2, \cdots\cdots) \tag{3.2}$$

の分布域について考察する．

Lemma $\delta(>0)$ を任意に与えられた実数とするとき

$$P_t\{\mu^{1+\delta}t<s<\mu^{1-\delta}t\}\to 1,\quad (t\to\infty)_k. \tag{3.3}$$

が成立つ．

（証明） 先づ Markov の不等式により

$$\sum_{s\geqq\mu^{1-\delta}t}P_s(t)\equiv P_t\{S\geqq\mu^{1-\delta}t\}\leqq\frac{E_t[S]}{\mu^{1-\delta}t}=\frac{\mu^{1-\delta}t}{\mu t}=\mu^{\delta}\to 0,\quad (t\to\infty)_k. \tag{3.4}$$

又，

$$P_t\{S\leqq\mu^{1+\delta}t\}=P_t\left\{\frac{1}{S+1}\geqq\frac{1}{\mu^{1+\delta}t+1}\right\} \tag{3.5}$$

の右辺に Markov の不等式を用いて

$$P_t\left\{\frac{1}{S+1}\geqq\frac{1}{\mu^{1+\delta}t+1}\right\}=E^t\left[\frac{1}{S+1}\right]\Big/\frac{1}{\mu^{1+\delta}t+1} \tag{3.6}$$

此処で

$$E_t\left[\frac{1}{S+1}\right]=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s+1}e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^s}{s!}$$
$$=\frac{1}{\mu t}(1-e^{-\mu t})$$

であるから (3.6) の右辺は

$$\frac{1}{\mu t}(1-e^{-\mu t})\Big/\frac{1}{\mu^{1+\delta}t+1}\leqq\frac{\mu^{1+\delta}t+1}{\mu t}=\mu^{\delta}t\frac{1}{\mu t}\to 0,\quad (t\to\infty)_k$$

で，従って (3.5), (3.6) から

$$\sum_{s\leqq\mu^{1+\delta}t}p_s(t)\to 0,\quad (t\to\infty)_k \tag{3.7}$$

(3.4), (3.7) から (3.3) が得られる． （証明終り）

これから，例えば s, μ, t に関して一様に有界な函数 $f_s(\mu, t)$ に対しては

$$\left|\sum_{s=[\mu^{1+\delta}t]}^{[\mu^{1-\delta}t]}f_s(\mu, t)p_s(t)-\sum_{s=0}^{\infty}f_s(\mu, t)p_s(t)\right|\to 0,\quad (t\to\infty)_k \tag{3.8}$$

が得られるが，特に，$f_s(\mu, t)$ として，$S=s$ の条件の下での，μ, t に関係するある事象の条件附確率を考える場合には，$(t\to\infty)_k$ の極限移行に対して，十分大きな範囲の s，即ち

(3.9)
$$\mu^{1+\delta}t<s<\mu^{1-\delta}t$$

の範囲の s に対してのみ着目すればよいことがわかる.

4. $N_k(t)$ の決定

前にのべたように，$N_k(t)$ の正確な形は吾々の当面の問題には必要でなく，$t\to\infty$ に対する order だけが必要であるが，本節では，一般の $k\geqq 2$ に対して $N_k(t)$ の一般形を与える.

閾値光量子数を k とするとき，第1節で導入された $N_k(t)$ は，“必ずしも光覚を生ずるとは限らない吸収個数の最大なもの”として与えられる．結論を先にのべると，$k\geqq 2$ のとき

(4.1)
$$N_k(t)=(k-1)([t]+1)$$

但し，$[t]$ は Gauss 記号で，t を超えない最大整数である．$k=2$ の場合は，山本他 [1] の結果

(4.1)′
$$N_2(t)=[t]+1$$

と同一になる.

さて，今 $[0, t)$ の時間区間内に s 個の光量子が時点 $0<t_1<t_2<\cdots<t_s<t$ で吸収されたものとすれば，これらは $[0, t)$ を $s+1$ 個の区間に分割するが，その両端の2つを除いて左から順番に区間の長さを $l_1, l_2, \cdots, l_{s-1}$ としよう．即ち

(4.2)
$$l_1=t_2-t_1,\ \ l_2=t_3-t_2,\ \cdots,\ l_{s-1}=t_s-t_{s-1}.$$

又，それらの引続く $k-1$ 個の和を

(4.3)
$$\begin{cases} w_1=l_1+l_2+\cdots+l_{k-1} \\ w_2=\quad l_2+l_3+\cdots+l_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_{s-k+1}=\qquad l_{s-k+1}+l_{s-k+2}+\cdots+l_{s-1} \end{cases}$$

とおく．すると，$N_k(t)$ は，吸収時点のあらゆる配置を考えたとき，条件

(4.4)
$$\begin{cases} \text{(i)}\ \ w_1\geqq 1,\ w_2\geqq 1,\ \cdots,\ w_{sk+1}\geqq 1 \\ \text{(ii)}\ \ \sum_{i=1}^{s-1} l_i\leqq t \end{cases}$$

を満す s のうちで最大なものとして与えられる.

先づ s を固定したものと考えると，(4.4) の条件 (i) を満す $l_1, l_2, \cdots, l_{s-1}$ のうちで，(ii) の左辺を最小にする組，即ち吸収時点の配置を考えなければならない．このとき，任意の w_i の増大は $\sum_{i=1}^{s-1} l_i$ の増大を斉すから，(4.4) の条件 (i) の代りに次の条件

$$\text{(i)}'\ \ w_1=w_2=\cdots=w_{s-k+1}=1$$

をとればよい．換言すれば，(4.4) を満す s の最大数は

(4.4)′
$$\begin{cases} \text{(i)}'\ \ w_1=w_2=\cdots=w_{s-k+1}=1. \\ \text{(ii)}\ \ \sum_{i=1}^{s-1} l_i\leqq t \end{cases}$$

を満す s の最大数と一致する．又，容易にわかるようにそのような $l_1, l_2, \cdots, l_{s-k+1}$ は，$t_1=0$ とした配置のなかから得られることも明らかである.

今

(4.5)
$$s-1=(k-1)r+p,\quad (0\leqq p<k-1)$$

とおく．そこで，左から順番に，互に共通の l_i を持たない w で $l_1, l_2, \cdots, l_{s-1}$ を cover してゆけば，r 個のwが得られ，p 個の l が cover されずに残る．(4.4)′ (i)′ によりそれら r

個の w の長さの和は r である．cover されずに残っている p 個の l は，勿論 $l_{s-p}, l_{s-p+1}, \cdots, l_{s-1}$ である．

所で今 (4.4)′ の (i)′ の条件から容易に

$$(4.6)\qquad l_1=l_k,\ l_2=l_{k+1},\ \cdots,\ l_{k-1}=l_{2(k-1)},\ \cdots$$
$$l_i=l_{i+(k-1)},\ \cdots,\ l_{s-k}=l_{s-1}$$

が得られるが，もし $t-r\geqq 1$ であれば，(4.6) の rule に従って，更に $k-1-p$ 個以上の l を附加して (4.4)′ の (i)′ が満されるように出来るから s が増大する．従って，s が (4.4)′ を満す s の最大数なら，$0\leqq t-r<1$，即ち

$$(4.7)\qquad r=[t]$$

でなければならない．

容易にわかるように，(4.4)′ (i)′ の条件は，(4.6) の条件に，更に，$w_1=1$ という条件を附加して出来る条件と同等である．(4.6) の条件は，さきにとった r 個の w，即ち，$w_1, w_k, w_{2(k-1)+1}, \cdots, w_{(r-1)(k-1)+1}$ の互に対応する l が相互に相等しいことを含んでいるから，再び (4.6) によって，$t-r=t-[t]$ の部分にある l に対して

$$(4.8)\qquad l_{s-p}=l_1,\ l_{s-p+1}=l_2,\ \cdots,\ l_{s-1}=l_p$$

が得られる．

そこで吾々の問題は，条件 (4.6) 及び附加条件 $w_1=1$ の下で，(4.8) を満すような $l_{s-p}, l_{s-p+1}, \cdots, l_p$ の組を考え

$$(4.9)\qquad 0<\sum_{i=s-p}^{s-1} l_i\leqq t-[t],\ 0\leqq p\leqq k-2$$

を満足する p の最大数を見出す問題に帰着され，これは容易にわかるように $t-[t]>0$ なる限り

$$p=k-2$$

として与えられる．$t=[t]$ ということは実際上あり得ない．その時の s を $N_k(t)$ とすると (4.5) から

$$N_k(t)=[t](k-1)+(k-2)+1$$
$$=(k-1)([t]+1)$$

が得られる．即ち (4.1) である．

5. $W_k(\mu, t)$ $(k\geqq 2)$ の近似評価

第3節 (3.1) の極限移行に対して，第1節で定義した $W_k(\mu, t)$ の漸近的 $(t\to\infty)_k$ な近似評価を行うのが本節の目的である．

十分大きな t に対して，時間区間 $[0, t)$ に s 個の光量子の吸収が起きたものとしよう．この時，光覚を生じないという事象は，吸収間隔 $u_1, u_2, \cdots, u_s$（第2節の定義に従う）の領域

$$(5.1)\qquad A_{s,t}:\begin{cases} u_1+u_2+\cdots+u_s<t \\ v_2=u_2+u_3+\cdots+u_k>1 \\ v_3=\quad u_3+u_4+\cdots+u_{k+1}>1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{s-k+2}=\qquad u_{s-k+2}+u_{s-k+3}+\cdots+u_s>1 \end{cases}$$

で表わされるが $t\to\infty$ のときこの事象は

$$(5.2)\qquad A_s:\ v_2>1,\ v_3>1,\ \cdots,\ v_{s-k+2}>1$$

に一致する．(1.5) で与えられた $P_s(k, \mu, t)$ は

$$(5.3)\qquad P_s(k, \mu, t)=P_t(A_{s.t}/s)P_t\{S=s\}$$

であるが，この近似値として，

$$Q_s(k,\ \mu,\ t)=P(A_s)\cdot P_t\{S=s\} \tag{5.4}$$

を計算する．但し，(5.4) の右辺 $P(A_s)$ は $u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_s$ が (2.4) の確率分布に従うものとしての，事象 A_s の確率である．又，第3節で見たように，s は十分大きいところで考えれば十分である．

さて，今簡単の為に事象 $E_2,\ E_3,\ \cdots,\ E_{s-k+2}$ を

$$E_2 : v_2>1,\ E_3 : v_3>1,\ \cdots,\ E_{s-k+2} : v_{s-k+2}>1$$

と定義すると

$$A_s=E_2\cdot E_3\cdots E_{s-k+2}$$

で，$|i-j|\geqq k-1$ なら v_i と v_j とは独立な確率変数であり，従って当然 E_i と E_j とは独立である．又，v_i の確率密度函数は，$i=2,\ 3,\ \cdots,\ s-k+2$ に対してすべて同一で

$$\frac{\mu^{k-1}}{(k-2)!}v^{k-2}e^{-\mu v},\quad (v>0) \tag{5.5}$$

で与えられることは (2.4) から容易にわかる．即ち，μv_i は Γ_{k-1}-分布に従う．

$\bar{E}$ で E の余事象を表わすことにすると

$$\begin{aligned} P(E_2E_3\cdots E_{s-k+2}) &= 1-P(\overline{E_2E_3\cdots E_{s-k+2}}) \\ &= 1-P(\bar{E}_2\cup\bar{E}_3\cup\cdots\cup\bar{E}_{s-k+2}) \end{aligned} \tag{5.6}$$

が，ここで $P(\bar{E}_2\cup\bar{E}_3\cup\cdots\cup\bar{E}_{s-k+2})$ を調べよう．確率測度計算の一般法則から

$$\begin{aligned} & P(\bar{E}_2\cup\bar{E}_3\cup\cdots\cup\bar{E}_{s-k+2}) \\ &= \sum_{i=2}^{s-k+2}P(\bar{E}_i)-\frac{1}{2!}\sum_{i_1\neq i_2}P(\bar{E}_{i_1}\cdot\bar{E}_{i_2})+\frac{1}{3!}\sum_{i_1\neq i_2\neq i_3}P(\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2}\bar{E}_{i_3})-\cdots \\ &= \sum_{m=1}^{s-k+1}(-1)^{m-1}\frac{1}{m!}\sum_{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_m}P(\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2}\cdots\bar{E}_{i_m}) \end{aligned} \tag{5.7}$$

である．$\mu^{1+\delta}t<s<\mu^{1-\delta}t$ の範囲の s に着目し，$\delta<1/2$ となるような適当な $\delta>0$ を選び

$$M=[\mu^{1+2\delta}t] \tag{5.8}$$

とおくと，$(t\to\infty)_k$ に対して $M\to\infty$ は明らかである．(5.7) から

$$P(\bar{E}_2\cup\bar{E}_3\cup\cdots\cup\bar{E}_{s-k+2})=\left(\sum_{m=1}^{M}+\sum_{m=M+1}^{s-k+1}\right)(-1)^{m-1}\frac{1}{m!}\sum_{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_m}P(\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2}\cdots\bar{E}_{i_m}) \tag{5.9}$$

ここで

$$P(\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2}\cdots\bar{E}_{i_m})=P(\bar{E}_{i_1})P(\bar{E}_{i_2}/\bar{E}_{i_1})P(\bar{E}_{i_3}/\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2})\cdots P(\bar{E}_{i_m}/\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2}\cdots\bar{E}_{i_{m-1}}) \tag{5.10}$$

であるが，(5.5) から

$$\begin{aligned} P(\bar{E}_{i_1}) &= \int_0^1\frac{\mu^{k-1}}{(k-2)!}v^{k-2}e^{-\mu v}dv \\ &= e^{-\mu}\left(\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{\mu^k}{k!}+\cdots\right) \\ &= \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}(1+0(\mu))\quad(\equiv\rho) \end{aligned} \tag{5.11}$$

又，$P(\bar{E}_{i_j}/\bar{E}_{i_1}\cdots\bar{E}_{i_{j-1}})(j=2,\ 3,\ \cdots,\ m)$ については，$i_1<i_2<\cdots<i_m$ と仮定してよいから，v_{i_j} と $\{v_{i_1},\ v_{i_2},\ \cdots,\ v_{i_{j-1}}\}$ とが少なくとも1個の u を共有しないことより

$$\begin{aligned} P(\bar{E}_{i_j}/\bar{E}_{i_1}\cdots\bar{E}_{i_{j-1}}) &\leqq \int_0^1\mu e^{-\mu u}du \\ &= 1-e^{-\mu}=\mu(1+0(\mu))\quad(\equiv\eta) \end{aligned} \tag{5.12}$$

従って (5.10)，(5.11)，(5.12) より

(5.13) $$P(\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2}\cdots\bar{E}_{i_m})\leqq\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}(1-e^{-\mu})^{m-1}\cdot(1+0(\mu))$$

故に

$$\sum_{m=1}^{s-k+1}\frac{1}{m!}\sum_{i_1\neq i_2\neq\cdots i_m}P(\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2}\cdots\bar{E}_{i_m})$$

は，$s\to\infty$ に対して収束する．従って，$M\to\infty$ と併せて，吾々は (5.9) の最初の方の和

$$\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m-1}\frac{1}{m!}\sum_{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_m}P(\bar{E}_{i_1}\cdot\bar{E}_{i_2}\cdots\bar{E}_{i_m})$$

のみに着目して，$\sum_{s=0}^{\infty}Q_s(k,\mu,t)$ の代りに

(5.14) $$\sum_{s=[\mu^{1+\delta t}]}^{[\mu^{1-\delta t}]}\left\{1-\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m-1}\frac{1}{m!}\sum_{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_m}P(\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2}\cdots\bar{E}_{i_m})\right\}P_t\{S=s\}$$

を計算してやればよい．明らかに

(5.15) $$\sum_{s}\left\{\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m-1}\frac{1}{m!}\sum_{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_m}P(\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2}\cdots\bar{E}_{i_m})\right\}P_t\{S=s\}$$
$$=\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m-1}\frac{1}{m!}\left\{\sum_{s}\left(\sum_{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_m}P(\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2}\cdots\bar{E}_{i_m})\right)\cdot P_t\{S=s\}\right\}$$

さて，m に対して m 個の事象 $\bar{E}_{i_1}, \bar{E}_{i_2}, \cdots, \bar{E}_{i_m}$ が r 個の互に独立な組にわかれる ($r=m, m-1, \cdots, 2, 1$)，即ち，一つの組の中の事象はすべて dependent な chain を構成し，且つ他の組のものとは互に独立であるように分けられるが，$r=m$ の場合は，$\bar{E}_{i_1}, \bar{E}_{i_2}, \cdots, \bar{E}_{i_m}$ は互に独立であり，$r=m-1$ の場合は，$\bar{E}_{i_1}, \bar{E}_{i_2}, \cdots, \bar{E}_{i_m}$ のうち $m-2$ 個が互に独立で，且つ残りの dependent な二つの事象の組と独立である．特に又 $r=1$ の場合は $\bar{E}_{i_1}, \bar{E}_{i_2}, \cdots, \bar{E}_{i_m}$ の任意の二つは，他の $m-2$ 個の事象のうちの何個かの事象を介して depend しているか，又は直接 depend している．このような組を順次 $C_{mm}, C_{mm-1}, \cdots, C_{m1}$ とすると

(5.16) $$\sum_{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_m}P(\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2}\cdots\bar{E}_{i_m})=\left(\sum_{Cmm}+\sum_{Cmm_{-1}}+\cdots+\sum_{Cm_1}\right)P(\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2}\cdots\bar{E}_{i_m})$$

ここで，C_{mr} に属する $\bar{E}_{i_1}, \bar{E}_{i_2}, \cdots, \bar{E}_{i_m}$ については

(5.17) $$P(\bar{E}_{i_1}\cdots\bar{E}_{i_m})=P(\bar{E}_{j_1}\cdots\bar{E}_{j_{l_1}})P(\bar{E}_{j_{l_1+1}}\cdots\bar{E}_{j_{l_1+l_2}})\cdots P(\bar{E}_{j_{l_1+l_2+\cdots+l_{r-1}+1}}\cdots\bar{E}_{j_m})$$

となり，C_{mr} に属する $\bar{E}_{i_1}, \bar{E}_{i_2}, \cdots, \bar{E}_{i_m}$ の選び方は order にして s^r だけあり，しかも s の r 次の項の係数は1であることが容易にわかるから，その個数を $n_{mr}(s)$ とすると

(5.18) $$n_{mr}(s)=s(s-1)\cdots(s-r+1)+n_{mr}'(s)$$

但し，$n_{mr}'(s)$ は s について $r-1$ 次以下の整係数多項式である．

ここで，先づ $r=m$ のときを考えよう．(5.18) は，

(5.18)′ $$n_{mm}(s)=s(s-1)\cdots(s-m+1)+n_{mm}'(s)$$

となり，$n_{mm}'(s)$ は $m-1$ 以下の次数の多項式である．C_{mm} に属する $\bar{E}_{i_1}, \bar{E}_{i_2}, \cdots, \bar{E}_{i_m}$ に対しては (5.17) 及び (5.11) より

(5.19) $$P(\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2}\cdots\bar{E}_{i_m})=P(\bar{E}_{i_1})P(\bar{E}_{i_2})\cdots P(\bar{E}_{i_m})$$
$$=\rho^m$$

従って

(5.20) $$\sum_{s}\left(\sum_{Cmm}P(\bar{E}_{i_1}\cdots\bar{E}_{i_n})\right)p_s(t)$$
$$=\sum_{s}s(s-1)\cdots(s-m+1)\cdot\rho^m\cdot p_s(t)+\sum_{s}n_{mm}'(s)\rho^m p_s(t)$$
$$=(\mu t)^m\rho^m+0(\rho)$$
$$=(\mu\rho t)^m+0(\rho)$$

次に $r\neq m$ の場合には，(5.17) に於ける右辺の各因子は，(5.13) を出したときと同様に，すべて ρ 又は $\rho\eta$ でおさえられ，そのうち少なくとも1つは $\rho\eta$ でおさえられるから，(5.17) の左辺は

(5.21) $$P(\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2}\cdots\bar{E}_{i_m})\leqq\rho^r\cdot\eta$$

が成立ち，$\mu\rho t=\dfrac{1}{(k-1)!}\mu^k t(1+0(\mu))$ だから

(5.22) $$\begin{aligned}&\sum_s\left(\sum_{C_{mr}}P(\bar{E}_{i_1}\cdots\bar{E}_{i_m})\right)p_s(t)\\ &\qquad\leqq\sum_s s(s-1)\cdots(s-r+1)\cdot\rho^r\cdot\eta\cdot p_s(t)+\sum_s n_{mr}'(s)\cdot\rho^r\cdot\eta p_s(t)\\ &=(\mu\rho t)^r\cdot\eta+0(\rho)\cdot\eta\\ &=0(\eta)\end{aligned}$$

$(t\to\infty)_k$ に対しては，$\rho\to0$, $\eta\to0$ であるから，$m\leqq M=[\mu^{1+2\delta}t]$ に注意すれば，各 m に対して，$r=m$ 以外の部分は (5.15) に極めて微少の寄与しかなし得ない．即ち

$$\begin{aligned}&\sum_s\left(\sum_{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_m}P(\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2}\cdots\bar{E}_{i_m})\right)\cdot p_s(t)\\ &=\sum_s\left\{\left(\sum_{C_{mm}}+\sum_{C_{mm-1}}+\cdots+\sum_{C_{m1}}\right)\cdot P(\bar{E}_{i_1}\bar{E}_{i_2}\cdots\bar{E}_{i_m})\right\}p_s(t)\\ &=\sum_s\left(\sum_{C_{mm}}p(\bar{E}_{i_1}\cdots\bar{E}_{i_m})\right)p_s(t)+(m-1)0(\eta)\\ &=(\mu\rho t)^m+0(\rho)+(m-1)0(\eta)\\ &=(\mu\rho t)^m+m0(\eta)\end{aligned}$$

従って (5.15) の右辺は

(5.23) $$\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m-1}\cdot\frac{(\mu\rho t)^m}{m!}+0(\eta)$$

となり，$(t\to\infty)_k$ のとき $M\to\infty$ ($k\geqq2$ として) であるから，この式及び (5.14) から

(5.24) $$\begin{aligned}&1-\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m-1}\frac{(\mu\rho t)^m}{m!}+0(\eta)\\ &=e^{-\mu\rho t}-\sum_{m=M+1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{(\mu\rho t)^m}{m!}+0(\eta)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\left|\sum_{m=M+1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{(\mu\rho t)^m}{m!}\right|&\leqq\frac{(\mu\rho t)^{M+1}}{(M+1)!}(1+0(\mu^{k-1-2\delta}))\\ &=0\left(\frac{1}{M^{3/2}}\right)(1+0(\mu^{k-1-2\delta}))\\ &=0(\sqrt{\mu^{3k-3-6\delta}})\end{aligned}$$

δ を十分小さく $\delta<1/6$ にとれば $k\geqq2$ だから

$$=0(\mu)$$

又，(5.12) から明らかなように η は μ と同一の order であるから，(5.24) は

(5.25) $$e^{-\mu\rho t}+0(\mu)$$

先に見たように $\mu\rho t=\mu^k t(1+0(\mu))/(k-1)!$ だから (5.25) は

(5.26) $$e^{-\frac{\mu^k t}{(k-1)!}(1+0(\mu))}+0(\mu)=e^{-\frac{\mu^k t}{(k-1)!}}(1+0(\mu))$$

以上をまとめて次の近似評価を得る．即ち

$$W_k(\mu, t) = 1 - \sum_s P_s(k, \mu, t) \tag{5.27}$$
$$\fallingdotseq 1 - \sum_s Q_s(k, \mu, t)$$
$$\fallingdotseq 1 - e^{-\frac{\mu k t}{(k-1)!}}$$

これが (1.8) である．但し，(1.8) で $t \gg 1$, $\mu \ll 1$ とあるのは厳密には，$(t \to \infty)_k$, 即ち $t \to \infty$, $\mu \to 0$, $\mu^k t \to \lambda (>0)$ の状態での極限に近いものでなければならない．Bouman-Velden-山本の記述はこの点に関しても，はっきりは述べていない．

日本大学理工学部数学教室

参 照 文 献

[1] 山本純恭，他5名，"視覚の閾値光量子数について" 数理科学研究第5班報告 4, (1959).

[2] S. Yamamoto, "Some contributions to the specification and analysis of quantal response data", (to be published soon),

[3] M. A. Bouman-H. A. Van der Velden, "The two-quanta explanation of the dependence of the threshold values and visual acuity on the visual angle and the time of observation", J. Optic. Soc. America, 37, (1947).

[4] J. L. Doob, *Stochastic processes*, 1952, Wiley.

[5] 伊藤　清，確率過程 I，岩波現代応用数学講座，1957.