

統計における模型解析について

樋 口 伊 佐 夫
横 田 紀 男
鈴 木 雪 夫

(1959年6月受付)

The Model-Analysis in the Statistics

Isao Higuti, Toshio Yokota and Yukio Suzuki

The "model-analysis method," which has contributed to the development of science in many fields, is of great use in the process of scientific researches. Especially, this method is fruitful for constructing theories from empirical knowledge. Beside the forming of theory, such operations as prediction, control of conditions, and etc. are often performed more successfully when empirical information is properly organized, than when these operations are carried out directly from data, obtained by means of formal extrapolation, regression analysis and so forth. For organizing information, the model analysis serves well. So, this method is important both in fundamental and applied sciences.

The model analysis, though having a significant basis of its own, seems at a glance not to have objectivity, and has not been taken up in the domain of mathematical statistics. But we think statistics should have connections with all sort of scientific methods, and so it is natural and at the same time necessary for us to develop the model analysis method in statistics.

In this article we explain what is called the model in science (§ 1) and how the model analysis can be applied to theoretical and practical problems, referring to various successful cases in the fields of mathematics, physics, biology, engineering and operations research (§ 2). After that, we emphasize the necessity of the model-analysis in scientific researches (§ 3), and then we show our programs of making and using models in two branches, i. e. in statistical mechanics (§ 4) and in management of enterprise (§ 5). The model-analyses in these two branches give typical treatments of cognizing nature, and of human decision-making. Finally, our prospect of the development of the model analysis as a branch of statistics is shown, and important problems which will arise in this branch are discussed (§ 6).

Institute of Statistical Mathematics

§ 0. 緒

科学的研究*と呼ばれるところの我々人間の認識の営みは、段階的にいつて大略次の如くなるであろう。先づ現象の観察乃至測定によつて得られた経験の分類及び記述が行われ、次に、二つ或はそれ以上の属性や量の間の関係の記述が行われる。これ等の記述は適当に整理されて、我々の用いやすいような形にまとめられる。しかしこの段階では未だ科学的思考といつたものは現われて来ず、一口に言つて**直接経験の記述の段階**と言えるだろう。科学の本領はこれ等の経験記述をもとにして概念の客観化及び数量化を行いつつ、類推と帰納によつて次第に高次の理論を構成する所にある**。これは**科学的思考の段階**であつて、**模型解析**こそはこの段階の特に理論構成にあつて有力な補助手段となる。言う迄もなく作られた理論は再び実験等により経験の批判を受け（検証）更に客観性、普遍妥当性を持つものへと進んでゆくのである。

応用の立場から考えるならば、科学の目的は認識ではなく、人間の幸福に役立つ手段を見つける事であるから、現象の予測とか、条件のコントロールの仕方を与えること等が目標となろう。この場合も、より深い認識がより有効な応用を生むことはよく経験される所である。実際、記述の段階から直ちに応用に向うならば、その効用に限度があるのみならず、しばしば非能率的でさえあるもので、ここでも方法として高次段階に属する模型解析が有用である***。

従来の統計学（数理統計学、推測統計学、近代統計学等）に於ては、主として前述の記述段階と、それからの直接の応用、及び検定という形にもたらされる所の検証の一部に対する一般的補助手段を内容としている。これ等の統計学の研究方向から察せられる方法論的立場****からすると模型解析の考え方は統計の考え方とは水と油の如き関係になるのではなかろうかと思われる。これに対し、広く科学の方法で体系づけられつつある**統計数理**に於ては模型解析をその内容に含むことは何ら不自然ではないのみか、あるべくしてあるものであろう。実際統計数理の研究の中で既に多くのこれに関した或はこれを用いた研究が行われて来たり、将来も多きを加えるであろう*****。

ここでは模型解析の方法についての筆者等の抱負を述べ、この方法になじみの少い一般の方々の参考に供すると共に、我々自身の今後の研究に役立てたい*****。

* 勿論歴史学のような純粋の人文科学の方法はここでは考えていない。

** かつては自然科学は自然記述（Naturbeschreibung）の学問だといわれていたが、現今ではそんな考え方は通用しない。

*** この模型解析は前述の自然認識のためのものとは少し異なるが、ほぼ同じ方法である。

**** 非常に単純な浅い考えの下で客観性を理解し、それを尊重している。古い経験主義に立つているかに見えるが、勿論これに徹しきれぬわけのものでなく、“実験の構造模型”の如き中途半端な考えが生れている。或る意味では統計学の発展方向は Mach 的思想に導かれているようであるから、近代統計学を以て力学に於ける量子力学になぞらえる議論は了解し難い。

***** 統計数理研究所に於ける研究のみについて見てもこれに関しては、林の講演（科学基礎論学会 1958 年）を始めとし、種々の系列現象に関する研究（赤池）、交通現象に関する研究（鉄道：青山、路面：植松）、水文学に関する研究（菅原）、伝染病伝播に関する研究及び放射線生物学に関する研究（崎野）等に於て模型が巧みに作られ用いられている。これ等の具体的成果は既刊及び未刊の集報、Annals 其他の印刷物を見ていただきたい。

***** 筆者等は夫々 (i) 粉粒体の問題（樋口）、(ii) 物性の諸問題（横田）、(iii) 経営に於ける管理と計画の問題（鈴木）について研究して来ている。(i) これに関して書いたものは A Statistical Research on Colloidal Graphite I. (Ann. Inst. Stat. Math. Vol. VI, No. 2) 等二三あるが、これ等の論文は主としてコロイドの粒度分布と粒子の形及びその測定法に関したもので模型解析とはいえない。しかし分布をもつ粒体のパッキングについて剛体球を模型として用いて実験的並びに理論的研究も行いつつある。これについての結果の一部は昭和 32 年 3 月研究発表会（粒体模型実験）昭和 33 年統計学会（ランダムパッキング）に発表した。(ii) 種々の問題を手がけて発表したものも多いが特に模型解析に関したのでは、“電気抵抗の理論——一価金属の抵抗極小について”（物研 2 集 4 巻 2 号）（二中心散乱に関する模型を作り一価金属の抵抗極小を説明したもの）及び、“時間的変動の統計量に及ぼす影響について（昭和 33 年統計学会）（統計力学に用いられた模型を一般現象に応用したもの）が代表的である。(iii) リニア・プログラミングを不確定要素のある場合に拡張しそれを実際面に応用出来る形にしたのが従来のこの分野に対（次の頁の下に続く）

§ 1. 模型とは何か

“模型”という言葉聞いた時、船や飛行機の玩具を第一に連想する人は少なくないであろう。又工作に於ける雛型を思い出す人も製造工業の従業者には多いであろう。模型の西洋語である“モデル”^{*}という言葉からではどうであろうか。画や小説のモデル、或はモデル学級とかモデルケースとか、はた亦マネキンなどが思い浮ぶのではなからうか。我々がここで言う模型も此等のものを持つ働きや性質を何らかの意味で具えているのであつて、此等の仲間入りが出来るものだと思う。それでは此等のモデルの属性にはどんなものがあるだろうか。(i) モデルは本物ではない。(ii) 本物と何らかの類似性をもっている。(iii) モデルはもともとあるのでなく我々人間が採用するなり作るものである。(iv) モデルは説明の役割をする。従つて理解し易いものであり、単純性をもっている。(v) モデルは空想とか理念とかいうものでなく実現されるものである。即ちはつきりと定義されるものである。其他いろいろ挙げる事が出来よう。このように世間のモデルの性格を抽象して書き並べて来ると我々の科学に於けるモデルの輪郭もややつきりしてくる。科学に於ける模型とは一体何か？ 故石原純博士は“一般的に言つて模型とは理論のあらゆる内容を空間的・時間的に具体化したものであるといえよう”と言つている^{**}。確かにそうに違いないが、これだけではどうも物足りない。哲学者 Rickert は“いやしくも理論的対象の模型”というものは、普遍妥当論理的に將に考えられようとしているもの (das allgemein-gültig-logisch zu Denkende) のみを含む所の論理的対象であると考えていたようである^{***}。よく考えればこれも模型の本質を穿つていることがわかるが、我々の言い現わしたいこととニュアンスが少しずれている。実際我々の考えている模型というものの簡単で満足な定義を与えることはむづかしい。これはむしろ次の § 以下この論説全体を通じて説明したい。

§ 2. 諸科学に於ける模型解析

我々のいう模型解析は、(自然) 科学及びその応用の方法としてのそれであり、我々は純粋数学の立場ではないが、先づ**純粋数学**——帰納や類推の許されない——に於ても模型の方法のあることを思い起しておくことは肝要であろう。かの F. Klein が非ユークリッド幾何が論理的に可能であることの証明に、ユークリッド幾何を用いたユークリッド模型、更に Hilbert がユークリッド幾何の公理の無矛盾性を示すのに解析幾何に着目して作つた、ユークリッド空間の算術模型などは、数学に於ける模型の典型的なものである^{****}。

する主な寄与であるが、この方面に於ける論文は Note on linear programming (Ann. Inst. Stat. Math. Vol. X, No. 2) On Scheduling of Overtime Work (ibid. Vol. IX, No. 1) Discrete Decision Problems (ibid. Vol. IX, No. 3) 等である。

尚筆者等はこの論文で得られた方法論的成果を生かして勿論今後共夫々の方面で模型解析を進めてゆくつもりである。

* 英仏独露の model, modèle, Modell, Модель の語源は何れもラテン語の modus であるといわれている。ギリシャ語の *μοδος* さえもこれから出ている。この modus は方法とか方式とかの意味で現代でも西洋語の中で用いられるが、元来はかり (measure) の意味だそうで、モード (mode) もこれから出た言葉であり、数学でよく用いられる modulus も親類語である。又 modus には moderation とか control とかの意味もあるそうである。此等のことは我々に何らかの示唆を与える。

** 石原純：自然科学概論，評論社。

*** Eisler: Wörterbuch der philosophischen Begriffe. (E. S. Mittler & Sohn, Berlin)

**** 今 Hilbert の方法を {(i) 相異なる二点を通る直線は必ず唯一つである。(ii) 二つの異なる直線は必ず唯一点で交る。} という二つの公理から成る公理系に例をとつて紹介しよう。この公理系で扱う対象 (名詞) は直線と点であり、公理系に含まれる基本的関係は“点が直線の上にある”ということだけである。点には長さがないとか直線の上には無限個の点がある等のことは何も公理に語っていない。従つてこの公理系が (純論理的に矛盾のないことは次の表が与えられることから明かである。表で例えば 4 行 II 列の目に *

(次の頁の下に続く)

数学に於ては類推が許されないから、これに代るものとして、ある体系で用いられる言葉を論理的に何ら失うことなく他の体系で用いられる言葉なり記号に置き換えることが行われる。この方法で構成される模型によつて、たとえ数学的に完全に証明されなくても、かなり判り易くなることがある。ユークリッド模型や算術模型はこのようなものであつて、“言い替え”ともいえるが、事柄の本質探究の方向に向つているので、学問の進歩に寄与するのである。事実算術模型から実数公理の無矛盾性という問題に進み、数学が次第に本質的なものへと発展していつたことはこの事情をよく物語つている。(模型とはそれに従つて一つの対象が生み出される所の前提である: **Eisler**)

さて科学に於ける模型解析での先駆である**物理学**に目を転じてみよう。ここでよく知られた典型的な模型は核の周りに電子が旋廻している原子構造の模型であろう。これに関連した物理学の発展史をふりかへつて見れば直ちにわかる如く*、模型は新しい模型を生み——数学の場合の如く、否それ以上に——、次第に本質的なものに進み、終には一義的な自然像となり模型でなくなつてしまふ。このことは甚だ重要である。又模型化に伴つて新しい概念が生み出される事があることにも注目したい。尚ここで模型が生れるにあつて必ず何らかの現象に対する知識(素材)が必要であることは勿論であるが、科学の模型では特に模型が後で何らかの形で経験と対決されることを前提として居り、その可能性が全然ないものは模型としても意味のないものであることを注意しておきたい。しかしこれを作るにあつては空想が肝要である。勿論単なる空想でなく **Tyndall** のいう **constructive imagination** である。即ち **Vaichinger** の言葉を借りれば、我々のいう模型は **schematische Fiktion** であるともいえよう。模型を経験との対決にもつてゆくことから当然**解析**が附随する。我々は実は“模型解析を模型を作つて現象を解析する”という意味に解しているが、その中には勿論“模型を解析する”という操作も含まれている。

次に統計が特に懇意にしている**生物学**(含遺伝学)に於ては、全般的にみて事柄の複雑さと実験のむつかしさのために、模型解析は未だ常套手段となる程迄には用いられていないが、近い将来に予想される生物学の中心課題の移動と共に、これが益々重きを加えて来るであろう**。

化学や天文、地文、其他の基礎科学に於ける模型解析についても言及すべきであるが省略して応用の領域に話を移そう。

応用の場合の模型は理論的認識のためのものと性格が異なることは当然である。応用には種々の目

	I	II	III	IV	V	VI	VII
1	*		*	*			
2				*	*	*	
3		*		*			*
4	*					*	*
5	*	*			*		
6		*	*		*		
7			*		*		*

があるのは3点は直線IIの上にあるという事を表わす。この表を調べれば上の幾何の公理の矛盾のないことがわかる。この表で現わされている所の(I, II, …, VII, 1, 2, …, 7)なるシンボルとその関係の仕組が模型である。目的に対して余分なものは払い落されていることに注目されたい(特に **Rickert** 説の通り!)。又理論の内容を具体化した点、石原氏の言葉通りである。

* 無機化学の原子価模型は有機化合物に於て生じた例外を説明するように修正されていつた。此等の知識は原子構造の模型を作るのに役立ち、原子構造に対して多くの人が模型を提案した。中でも **Rutherford** は従来経験的に知られている電磁-力学現象を素材にして例の核の周りを電子が廻るといふ模型を構成したが、原子からの光の放出に関して実験事実と矛盾を生ずることになつた。一方 **Planck** は黒体輻射の理論導出のための模型から量子なる概念をつくり、これは **Einstein** によつて光電現象の説明のための模型に応用され、その模型化に於て更に光量子(或は光子)なるものが導かれた。**Bohr** はこの **Einstein** の仕事の暗示から量子の考えを **Rutherford** 模型に適用し前期量子論が出来上つた。これは更に **Sommerfeld** により発展させられたが、分光学の発達と共にやはり実験とあわない事実がみつかり、これを解決するために **Schrodinger** と **Heisenberg** が量子力学をつくり新しい自然像が生れるきつかけとなつた。

** 生物学では歴史的に見て分類記述の段階が甚だ厄介で手間どつていた。かの **Linne** 以来次第にこの方面は進んで、理論化が行われるようになり(進化論等)、一方 **Mendel** 法則の理論化に際して遺伝子模型が生れ、細胞に関する研究の進展と共に染色体中の遺伝子の位置決定の模域も作られ、更に物質構造的な研究による生物体研究による生物体研究が最近急速に進み生命の起源に関する(形而上学的でない)自然科学的模型がだんだん作られつつあることも周知であろう。

的があるが、夫々の目的に応じて、全く似てもつかない二つの模型が有効であることもあろう。又应用到於ては、模型を作らない場合よりも少しでも目的に近づけばそれでよいのだから、類似が全く厳密でなくてもよい。従つて模型に課せられた規準は認識の場合より緩いといえない事もないが、その代り大抵の場合模型と経験との対決が困難であつたり、又それが行われる時は既に我々の生活に重大な影響を及ぼしてしまつていたりするので、模型の客観性が峻厳な批判に曝されねばならない。特に应用到於ける模型に対しては適用限界を知るべきでこれを認識の本質的模型と見誤ることは甚だ危険である。

上述の相違を除いては模型の本性は認識の場合とほぼ同じである。特に模型化の原理——余分なものを除いて単純化する——に於て変りない。応用の扱う対象体系は一般に複雑であるし、模型はそれによつて解析を行い得るのでなければ意味が大半失われてしまうので、模型の持つ単純性の実用的意義は大きい。

応用の科学に於ける模型解析の例は我々の周囲に甚だ多い。電磁現象を扱うのに力学系を模型として用いたり、逆に力学現象を扱うのに電磁(光学)現象を模型として用いることが広く行われている。模型航空機を用いる風洞実験、其他工学に於ける実験室実験の大部分はこれである。又アナログ計算機による計算も模型解析であることに違いない。これ等を見て分ることは、先づ成功を取めている場合は模型作りの前に模型系と対象系との間の類似の精度と範囲について基礎科学的研究の成果を利用して十分検討がなされ、模型の素材が精選されていることであり、又此等の検討から模型は単純な直観的自然像からはむしろ変形されることが多い事である。例えば流体(動)力学現象に於ける相似にとつて Reynolds 数が基本的であることから、風洞実験はこれが実際の場合と等しくなるように速度、長さ、粘性の関係を調節して行われる。

次に最近流行のオペレーションズ・リサーチなるものの源を尋ねるに、第二次大戦中に作戦計画を科学的に行うために、物理学者 Morse* 化学者 Kimball が自然認識とその应用到於ける方法をこの目的に用いたのに発する。自然科学に於ては長い間に行う事を作戦という場では単時間で行わねばならない。そこで自然科学の方法のダイジェスト的なものが出来上つた。ここではデータの完璧を期することが出来ないから尚更模型解析が活発に行われる。このオペレーションズ・リサーチの方法は戦後種々の経営の場に用いられるようになり衆目をあつめるに至つたが、そこでは進展する社会の中に於ける人間の現実的の行為を決定することが問題で、自然科学の方法とは少し異つたものが要求されるだろう**。これについては § 5 で論じよう。ちなみにオペレーションズ・リサーチの一つとしてリニア・プログラミングの方法が確立され、いろいろの方面で用いられているが、用い方に注意しなければならない。検証が困難なものに用いるためには模型適用の妥当性について十分に検討されるべきであるのに、常に一般に適用出来ると考えるのは危険である。

この誤りは実験計画法に於ける構造模型に於てもあてはまる。これは観測値に及ぼす、効果、相互作用等を Fisher 流に解釈し、有意差検定を行うという建前で、その解析法を模型化したものと見る限り、模型として十分首肯できるが、実験の場を模型化したものであると誤つて考えることは甚だ危険で、そのような誤つた考え方は一般実験解析を知らず知らずにこのような特定の考え方の方にもつてゆくことになり、実験をゆがんだ形に計画し、ゆがんだ形に解析するということになり

* 分子間引力に関する Morse 函数で有名。

** 行為に伴う結果の効果を評価するための模倣も同時に考えてゆかねばならない。勿論応用自然科学例えば医学とか工学に於ても効果を考えに入れて行かねばならないが、そこでは効果の概念や評価を十分客観的は捉え得る。即ち例えば熱機関の効率を評価したり、厳密なことを言わなければ病気の治癒率を推定したり出来る。これは自然認識を利用し、それを役立てて行動するという場合は、同じく人間の行為ではあるが、行為の相手が自然であり、従つて自然現象の再現性に相当安心して頼ることが出来ることによる。これに対し人間の行動の場が歴史的発展しつつある社会である場合これが甚しく制限される。後述 (§ 5) の如く行動の場の発展の模型が又必要となつて来るし、これは又自然科学に於ける過渡現象過程現象と異なるものである。しかしわれわれは経営のような場では自然科学的方法も相当な程度役立つと思う。

かねない。実験計画法の模型は極めて制限された模型であるとの注意を促しておきたい。

§ 3. 模型解析は何故必要か

模型解析が科学的研究にとつて重要であることは冒頭にも述べた通りで、又前§の説明からも明かであろう。しかし記述データから**狭義の統計的方法**によつて（例えばリグレーション解析を用いて）何らかの内挿、外挿を行つてゆくことが、最良の科学的方法であるとする思想が未だ一部の研究者の間で根強いので、くどいようだがその考え方の偏狭であることを繰返して置きたい。ただしこのような考え方が模型解析の方法の発展を阻むものであるからである。

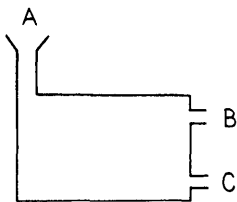
例えばジェット機が音速以上で急に梶がきかなくなつた時逆に廻さねばならず、又ヨットでは潮梶というものがある如く、直接経験データの**形式的外挿**だけに頼つてると、予期しなかつた事*が起ることをしばしば経験する。我々は量的変化の動向を見るのみならず、それを生起せしめる内在的な質の変化に注意を払わねばならない。

外挿的方法と模型解析的方法との相違は例えば次のようなものである。コンクリート建築は形が安定する迄長年月を要するが、この時間を推定するのに、数年間の建築物の変形の測定からサチュレーションの傾向を探るのが外挿的方法であるが、固体と液体の間であるレオロジカルな物質の変形は多様であるから数年のデータからでは的が外れるであろう。これに対して例えばスポンジに水が含まれた状態を模型として考えそれを更に簡単なレオロジ的模型で近似して計算するのが模型解析である。

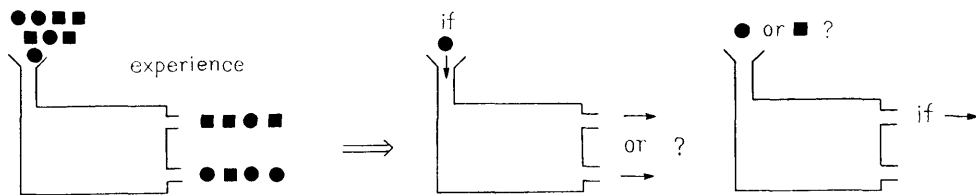
ここで内挿、外挿が模型解析と対立する如く述べたが、例えば二つの理想的ケースについて理論が立て易い時、その中間の現実に対して**内挿的模型**を立てて解析することは成功を収める場合が多く**、その方法も発展させるべきである。

模型解析の役割を模型を用いて説明しよう。今、決して開けて中を見ることの出来ない“開かずの箱”（ブラックボックス）があり、入口Aから物を入れると二つの出口B、Cの何れかから出るものとする。（図1）。我々は過去の経験として●が入つた時はCから出やすく、■が入つた時はBから出やすいという事のデータをもっている。いわゆる統計的推論によつて、何れの出口に出るかの出方の比率から、■を入れた時、●を入れた時の各について、BCの何れに出るかの確率的予想をしたり、又逆に例えばBから出たということを知つてAに入つたのは●であるかであるかを推測することが出来る。

これに対し模型解析では別の経験で知つている●、■の本性を考慮してブラックボックスの中の仕組について想像を働かせる。例えば図3のようなカギのある坂に上から



第 1 図



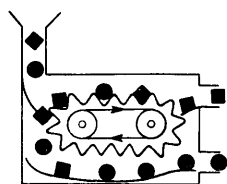
第 2 図

* 予期せざることをすべて偶然の中に霧散せさせて必然性の解析を忘ることもよくない。確率論の科学全体に於ける応用的役割は偶然の中から必然性を選びわけることにあつたと思うが、面倒な事は何でも偶然量としてしまい、その分布もいゝ加減に仮定して、あきらめの哲学に依在したような応用が流行するのはなげかわしい。

** 例えば流れの層流、乱流の両領域を含む場合に両方に於ける式の一次結合をつくる。（勿論ディメンジョンが等しくなければ加え算は出来ない）。



第3図



第4図

●■が滑り落ちて来た時、■はカギの所に止り易く、●はそれを越え易いといったような事から、図4のようなものを考える。これによつて★のような全く未曾有のものが入つて来た場合の予測も可能となる。模型はそれが真かどうかの何ら保証は出来ない。又勿論一意的には決らない。しかしこれがよい模型かどうかを確かめるための次の研究を促すことも明かだらう。われわれは上のような図を想像した時いろんな形のものを入れてみたくなるであろう。これが実験であり、模型は人間の科学的探究の興味を湧き立たせるものである。

§ 4. 自然認識のための模型解析

——核物理学及び統計力学に於ける模型——

自然科学に於ける模型は大別して物質の構造に関するものと、その機能を表現するものとに分類されよう。前述の原子模型などは構造模型の典型的なものであり、余り説明を要しないかも知れないが、事柄が非常に複雑で構造に関する単一な自然像を作り上げるには実験的材料も未だ十分ではない原子核の構造について、このような状況の下でどのような努力が払われているかを述べることは、他の分野に益する事が多いと思われる。

一般にわれわれが直接目で見ることの出来ない物質構造は次のようにして研究する。物質に光や素粒子をあてた時吸収され或は放出される光や素粒子のデータや、磁氣的電氣的性質、あるいは化学的性質等の間接的な観測により、物質がどのようにあるべきかを推定しその構造をモデルに描く、次にその模型から物理法則に従つて算出される計算値が、その計算の条件の下で行われた実験の観測値にあうかどうかを調べて模型の妥当性を検証するのである。原子核の場合もこのような方法で調べるのである。然しここで模型を作るのに注意しなければならないことがある。例えば強力なサイクロトロン等で原子核を完全に分解してしまい、どのような素粒子が何個集つて出来ているかを調べ、その素粒子間に働く力を調べさえすれば、それ等から構成される原子核の構造は完全に知られ、核に関するすべての実験結果は理論的に推定されると考える人もあるだろう。このような考え方は分子、原子の構造では或程度成功を収めたのであるが、原子核では現実そううまくはゆかない*。一般に物質の性質を論ずるのに物質を各素粒子に分けて、それ等の素粒子のもつ性質の合成の結果であると考えことは必ずしも妥当ではない。核の場合、中性子と陽子が井戸型ポテンシャルの中に入っていると考える模型がある。これは比較的小さな軽い原子核で成立つもので、重い原子核では陽子や中性子が流体のようになって集団として行動すると考えた方が妥当である**場合もあり、これはコレクティブモデルと呼ばれている。

原子核の模型設定の今一つの方法は経験的模型の設定というべきもので、光学的模型と呼ばれるものにその考え方があらわれている。これは原子核に他の素粒子を衝突させた時の散乱の様子から散乱に寄与する原子核の形(ポテンシャル)を実験に合うように決めて、原子核とはこのようなポテンシャルをもつものだと考えてしまうのである。(これは模型化の方法論的段階としては一步後退と言えなくもないが、複雑な現象に接するとき我々は常に先走るべきではない。ただ逃避であつ

* 原子核が素粒子に分解出来ると考えることは必ずしも自明でなく、現今素粒子と考えているものも将来は又多くの素粒子に分解される可能性もある。又現今でも素粒子分解の過程で寿命の短い素粒子に分れて次から次へと変化し複雑な反応をしたり又その実験ではみつからない粒子となつて飛去つてしまうことがある。又これ等に細く分解された粒子を単位にとる事が原子核の構造を論ずるに有利であるかどうかは分らない。

** 中性子や陽子が多数ある時は、必ずしもそれを個々に分けた性質だけでは不十分であることを示すものである。

てはならない。) これ等の模型は核物理学の発展の為に作られた模型であつて、原子核構造が将来完成されればすべて統合されてしまうものであろう。

コレクティブモデルとか光学的模型とかは原子核の構造が複雑な為に、そのうち特種な性質を説明するために作られた**機能模型**とも解釈されようが、次に**統計力学的アプローチ**に於て機能模型がどういふ風に作られどのように用いられるかを説明しよう。

日常経験する物質の性質の多くは構成する分子原子の統計的性質として説明される。この原子分子の既知のどの性質がどういふ風に現象に寄与するのかを明かにするために、原子分子等構成単位の機能を模型化して*、その模型に統計力学を適用し巨視的結論を演繹して、それと実験値と比べることがなされる。又基となる素過程が極めて複雑であり、更に統計力学を適用する場合に複雑なためにどう処理すべきかが判らなかつたり、又出た結果にどういふ統計力学的特長が現われているのかが判らない事がある。こういう時、基となる素過程の機能を表現する簡単な模型を作り、統計力学計算を数学的に厳密に遂行し、統計力学の処理によつてどういふ影響があらわれるのかを調べる**。この結果によつて統計力学的処理の複雑で困難な実際問題に対しての近似の方針が得られる。

この§を終るにあたり、特に集団模型を作るにあつては**構成単位**を何にとるかが重要であることを強調しておきたい。例えば物質の構成単位は素粒子だからといつて燃えている木の中で中間子がどうなつているかというような馬鹿げた事をいうことは、学問的に精密どころが誤りを犯している。同様に生物体の生理作用を研究するのに化学反応は原子間で行われるからといつて、生体を原子にわけてしまつて考へては何ら知識は得られないであらう。生物体の機能を司る細胞に単位を置いて、例えば神経細胞がどのような働きをするかというような機能模型を作り生物体の生理作用を論ずることが好ましい。(勿論これ等細胞の働きを研究するには、細胞を構成する分子の構造を基にして模型を作るべきであることは言う迄もない)このことは例えば長さの測定に於て **10 cm** もの長さがあるものを測るのに、精密顕微鏡で測つて矢鱈に桁数を出しても無意味であることに対応している。このように模型を作るに際しては常に対象を考へて、その対象を論ずるのに必要な精度に適合するものを作るようにしなければ、知識を得るために有効ではない。何を単位に置くかという事の重要性は、社会科学でも認識されてはいるようであるが今後この方面でも模型解析の方法が盛んになる機運にある今日、特に模型化に關聯して忘れてはならない事である。

§ 5. 行為決定のための模型解析

——企業経営に於ける模型解析——

人間の社会生活の場に於ける**現実的の行為決定**のための模型解析は前述の如く、我々がこの論説

* 例えば原子の大きさだけの影響を調べるために分子や原子をその間の力を考へない剛体球とする模型をつくる。二原子分子に対しては廻転随円体を用いる等。

** 例えば常温で強磁性体であるものも温度を上げると次第に磁化が減少し終には常磁性体となる現象(物質の相転移の一つ)は、低温度の時そろつていた電子のスピン(自転による磁気能率)が温度上昇によつてランダムに向くことによると考へられる。ところで例えば強磁性体の結晶格子に並列された原子の上にある電子のスピンと隣の格子にあるものスピンのとがどういふ相互作用をしているかは統計力学適用に際して必要であるが、これについてはよく判つていない。それでこれを簡単な表現、例えばスピン間の相互作用は隣りの格子点にあるスピン間同志だけであるとして、各格子点のスピンは上を向くか下を向くかだけであつて相隣りのスピンが同じ方向を向いているのと反対方向に向つている場合との相互作用のエネルギー差に一定の常数を置いた模型(Ising 模型)を作つたり、 i 番目の格子点にあるスピン S_i と J 番目の格子点のそれ S_j との相互作用を内積の形 $(S_i \cdot S_j)$ であらわし、結晶全体の磁氣的(スピン)相互作用のエネルギーを $-\sum_{i>j} J_{ij} (S_i \cdot S_j)$ とする模型(Heisenberg 模型)等を考へる。Heisenberg の場合は一次元の場合のみであるが、Ising 模型では一次元二次元で厳密に統計力学が適用されている。Ising 模型によると一次元では相転移がなく二次元で起る。そして模型に於ける相互作用エネルギー差と Curie 温度(相転移の起る温度)との間にどういふ関係があるかも計算されている。これ等は磁性の本質を追求するのに大いに役立つ。

で主として述べて来ている自然科学及びその応用の場合のそれとは少し趣きを異にすべきであろう。(§ 2 の註**** 参照) ここでは現実的の行為決定の科学的方法が深刻に要求されるところの**企業経営**の場に於ける模型解析について論じよう。

企業を経営してゆく上に、経営当事者は常に経営上の諸決定を与える立場にある。従来経営当事者は自己の経験乃至それに基いた直観、或は若干のデータを基礎にした判断等に頼つて決定を行つて来た。今日さわがれているオペレーションズ・リサーチの企業に於ける主要目的は、このような経営上の決定を合理的ならしめることであるといえよう。

決定を合理的に行うためには、企業の活動の諸相及びそれ等の間に関聯について十分な知識が要求される*。又決定が合理的や否やの**客観的な判断基準**が必要であるが、これは当然、所与の決定が企業にもたらす広い意味での得失に基いて定めるべきである。従つて決定を合理的に行うための前提として、少くとも、その決定及び、それと関わりをもつ諸要素間の**関連のメカニズム**と、決定が企業に及ぼす**得失の評価**とがはつきり把握されていなければならない。企業に於ける模型解析はこの仕組と評価を数量的に表現し、合理的な、或は最適な決定を導き出すものである。

さてそれでは、現実の企業の活動を模型に表現するにはどうしたらよいか。先づ準備として、その対象の分析、種々の概念化、及び概念を数量的に表現する数量化が行われるべきことは他の領域の場合と同じである。諸量の相関係する仕組が判然としている場合は、それを忠実に表現し、非本質的なものを除いて単純化してゆくことにより模型が作られるが、仕組が判然としていない場合は種々の知識を用いて出来るだけ実状に適切な模型が作られるであろう。企業の模型化にあつては企業の活動の全範囲を捉える模型を作ることは困難だから、最初は企業の諸相を個別的に捉えて——例えば在庫管理という立場から企業を捉えて——模型化を進める方がよい。とは言えこれは企業全体の立場に立つての諸相でなければあまり有効でない。その意味を**在庫管理**に例をとつて説明しよう。

図のように**F**工場で生産された商品が**S**営業所で財売されるものとする。工場及び営業所は夫々

$$\begin{array}{c}
 F_1 \\
 \vdots \\
 F_m
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \nearrow \\
 \vdots \\
 \searrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 S_1 \\
 \vdots \\
 S_n
 \end{array}$$

在庫能力をもつ。在庫は投機的な意味で使用される場合と将来の不確定な需要と生産との間のギャップに対する緩衝の意味で使用される場合があるが、いま後者のみの場合を考える。各営業所 S_i の在庫管理方式を別口に取扱つて一応最適な方式を導くことが出来ても、——現在の在庫管理の確率模型はこれであるが——これは企業全体から考えて必ずしも最適とはいひ難い。各工場各営業所をすべて含めた立場で考えてゆく必要がある。それ故経営者の採るべき決定は、結局 t 期に於ける各工場の生産量、在庫量、各営業所に各工場より発送すべき商品の量等である。此等の決定は勿論現在及び将来の需要を考慮し、設備、使用し得る労働力、資金の制約等の条件を考慮してなされるが、このような決定に対する模型が考えられるべきであり、我々は考えようとしている。

さて考慮される諸量が兎に角確定値をとり、不確定な要素がないのならば模型の構成は極めて容易であろう。困難の原因は、不確定要素、特に将来に関する**不確定要素**(例えば将来の需要量)が存在する事にある。実際の企業はすべて多かれ少かれ不確定な将来に賭けているのであるから、企業活動の良い模型を作ろうと思えば必ず将来の予測に遭遇せざるを得ない。即ち**活動模型**は将来に対する**予測模型**を組入れることなしには成立し得ないのである。また経営者が t 期に於てとつた諸決定或は政策は多少とも将来に影響を与えるから、この影響も考慮して政策の適否を評価しよう

* 例えば企業の在庫量を合理的に決定しようとするれば企業の生産能力は当然のこととして、前期の在庫量の残高、今期の生産量として決定すべき量、今期或は次々期の需要、生産コスト、在庫コスト、品切れによる損失、輸送費等についての知識や、これ等の相互関係についての知識が必要である。

** 在庫管理の如き問題に於ては、各期に営業所に来る需要が、同一分布に従うと仮定した数学的模型が研究されて来たが、これは短期的に或程度適合し得るとしても、適用範囲はやはり狭いであろう。需要量を取上げれば他社との競争、広告宣伝の効果、他高配による代替等により大きく消長することは経済的に明な事であるからである。

すれば、やはり将来に関する何らかの予測模型が必要となるであろう。

従来企業経営の種々の面を捉えて種々の模型化が進められて来ているが、今迄の所、ごく限られた適用範囲を持つ単純なものであるか、或は単なる測定データの整理、記述に終つているようである。又最近流行している**ビジネスゲーム**は企業全体の活動から種々の重要と思われる要素を一側面から引き出し、これ等の要素の量的関係を簡単に定式化して、ゲームとしてのルールを実際の企業活動に一応似せた形で作られたゲームである。従つてこれは企業活動の簡易化された一種の模型であるということも出来よう*。しかし我々は単にゲームとしての模型のみでは満足出来ないものであつて、個々の企業という生みの組織の活動を生き生きと捉える模型の構成を目標としているのである。このような模型こそが実際に役立ち得ると信ずるからである。

§ 6. 統計に於ける模型解析

これ迄の議論も、根本的には統計の立場で進めて来たのであるが、最後に“統計に於ける模型解析とは何か”を少し補足説明しておこう。実の所この間はあまり重要なことではない。何故ならば我々にとって基礎及び応用の科学に役立つ諸方法を発展せしめる事が重要であつて、そのためには統計の領域はこれこれであると指定することは、役に立たないと考えられるからである。実際又研究者がその置かれているセクションによつて精神的束縛を受けることは無益である。

我々は良い模型解析は如何にあるべきかについて既に多く語つた。これ以上統計に於ける模型解析はどのようなものでなければならぬかを語つて、いたずらに研究に制限を加えることは差控えた。むしろおよそ統計に関連ある模型解析はどんなものでも範囲の中に入れてたい。これ等には種々のものがあるが、

- (i) 統計的方法を用いる模型解析
- (ii) 統計的方法を研究するための模型解析
- (iii) 統計現象を研究するための模型解析
- (iv) 現象解析に統計的方法を用いることが出来るようにするための模型解析

に大体分けることが出来よう。

(i) これはただ何らかの統計的方法が形式的に模型解析のどこかで用いられているといつた程度のものである**。

(ii) 例えば統計量を計算するアナログ計算機の如きものである。又例えば標本分布を研究する際のモンテカルロ法の如きもこの部類に入ろう。

(iii) 緒の註で述べた統計数理に於ける多くの研究はこれに属している。筆者等の考えでは、実は将来純統計で模型解析のブランチが出来るとすればこれがこの基盤となると思われるので、少々附加しておきたい。

先づ統計現象とは一体何かという事になるが、集団現象と一応考えればよいだろう***。§ 4 に述べた統計力学的アプローチは集団現象解析の一つの正攻法ではなからうか。ここで繰返す迄もないが、集団の構成単位の機能を模型化し、その合成としてあらわれる性質をみてゆくという方法である。エピソードモデル其他多くの過程現象の研究はこのような方法をとつている。しかし集団

* 現在の形ではこれは経営者の訓練には有効であろうが、実際個々の企業に於ける決定を問題に出来るようなものではない。

** 統計的方法とは一体何かという事になる。(これは勿論線型代数学的方法のこともなからう。又確率論を用いる方法だとも言いきれまい)。これを現在の統計的方法に限定するならば決して方法論的發展は望めまい。従つて (i) は統計の立場からはあまり重要でないと考えられる。

*** ここで統計現象を更に確率(偶然)現象と区別する必要があるとすれば確率の方は偶然事象の結果の仮想集団を考えるのに対し、統計の方は構成個体が同時に実在する集団を対象とすると考えればよいであろう。

模型は現在あるものだけでは十分でなく、力学的機能だけでなく種々の機能を考えた模型が必要とされ作られてゆくであろう。

単位機能の単なる合成では片ずかない問題は §4 で原子核の場合についてふれたが、自然界でもこの他粉体などにもあらわれるが、社会科学では気づかないだけで実際多いのではなかろうか。集団の構成単位相互間の関係（作用）が異れば同じ構成単位から出来ている二つの集団でも全く異なる性格をもち得るのは当然である。従つて——これは集団記述の方法に関連するが——このような事をあらわす**マクロ的機能模型***も研究されねばならない。（これは統計力学的ではない、しかし集団を研究するために、もつと考えられて然るべきであろう。尤も単にマクロ状態の機能のみに着目するのならば、集団という事は考えないのと同じである。これによつて合成のされ方の特徴づけが行われるようなものであつて始めて統計的といえるだろう。現在の所このような模型の例はあまり知らない、しかしこれは全然不可能なことでもなかろうし、役に立たないことでもなかろう）。

この問題と同様に定式化されるかも知れないが、図のようなランダムネットワーク（水路、電気回路、或はマイクロロロジー的構造）も模型解析の方法で取扱わざるを得ないであろう**。このような問題は**大低ランダム性**をどこかに導入する事により取扱うのであろうが、その仕方は種々あり、又矛盾のないように導入することも困難だろう。その事からもランダムの意味について吟味すべき事が未だ多く残されていることがわかるが、むしろランダムと規則性の中間的なものであるとして内挿的模型を作ることも考えられよう。これは応用面にも役立つが、このような模型化が次第に進めば、ランダムネスの真の姿も又次第に明かになるであろう。



模型は一応実際問題と離れても存在し得るし、その解析は演繹的であるから数理の対象となる。特定の集団解析のために作られた模型は又多くの他の問題にも適用の可能性を胎んでいるのであつて、これ等論理対象となつたものは、それこそ個別科学が別個に独占するものでなく、共通財産としていわゆる統計に帰属するものであろう。統計に於ける模型はこのようにして、現象に入り現象を出でて出来上るべきだろう。§5 に述べた企業に於ける新しい模型もやがてこういうものとなる。

(iv) 一般に認識がより深ければ深い程、又应用到徹すれば徹する程、それから生れる方法はより一般的であるとはいへようが、これは単なる最大公約数的なものではない。最大公約数的なものは表面上一般的に見えるが、どれにも有効ではない***もし我々が実際問題にあつて既に作られた模型を応用しようとするならば、適用出来るか否か、又適用するにはどのような置き替え（変換）をしたらよいかという問題を常に真剣に考える必要がある。又従来の統計で一次関係を基本に

* 例えばバネ、マサツ板、ダッシュボットを種々に組合せたものによつて物質の力学機能をあらわすレオロジーでの模型に類するもの、レオロジーではこれを構造模型といつているようであるが、マクロ的機能模型といつた方が適當であろう。

** 中谷吉郎氏の如く一般に図形に対する科学的方法是困難で甚だ遅れている。質を表現するには図形の方が便利だからこの方面の研究は社会科学にも役立つであろう。

*** 応用家が一般的に見えるものを有難がつたり、理論家がそのようなものを作ろうも心掛けることは感心しない。統計的実験計画法は、その見かけ上の一般性のために工場などでも用いることが流行しているようであるが、実際これが真に役立つという例は数える程しかないのではないか。——“ここでも亦次の定理の真なることがわかる：理論はより一般的であるのでなくてより特殊であればある程、又それが関係しているすべての質問に対してより決定的な答を与える程、より良く問題を裁く、正にその本質は予期される現象についての一意的な確言を与える所にある”。(Max Planck: Einführung in die Theorie der Elektrizität und Magnetismus S. 2) ——。

尚ちなみに現代統計学の長所を決定論的でないと置いて宣伝している統計家もあるが、あまり賢明とはいへない。かの不確定性原理の量子力学などでも波動函数の時間的変化は決定論的に与えられている如く、科学の本質は決定論にある。決定論的表現を嫌う人も確率が一意的に決定的に与えられることを目標としている筈である (§3 註*参照)。

置いた数理が多く発展させられているが、此等を上手に利用するには実際問題をどういう形にもたせればよいかも問題となろう。このような問題にも模型解析の考え方が用いられるであろう。これ等が (iv) の内容となろう。

最後に我々は模型解析を浮彫りにするために、リグレーション解析等の従来の統計的方法を対照に置いて来たが、決して此等の方法の効用を否定するものではないことを強調しておきたい。夫々
その所を得しめることこそ統計数理の根本精神だからである。

統計数理研究所