機械部品精度に及ぼす要因の解析について

樋　口　伊　佐　夫
小　沢　　　勝

(1958 年 10 月受付)

Analysis of Factors which have Influence on the Accuracies of Dimensions of Machine Parts.

by Isao HIGUTI & Masaru OZAWA

Problems offinding and analizing the factors, which have influcnce on the accuracy for fluctuation of the product characters, usually arise in engineering researches. Though the methodology for such problems is necessany, only overunified discussions will be sterile because of the wide variation of the conditions which are essential for the methods. Here we discuss the problems from statistical point of view confining ourselves to such cases as dealing with the precision of dimensions of machine parts produced by press punching.

Especially, in our country, the so-called design of experiments and analysis of variances (developed with British farm experiments) have been superficially accepted by a certain engineering circle, and the methods are prevailing so extraordinary that there are many vulgar engineers who misbelieve that all experimental research should be done through such design and analysis. We, therefore, also make clear that the methods cannot be used in the analysis of fluctuation (variance!).

The Institute of Statistical Mathematcs.

§1. 序

量産製品の品質の向上を図るために，製品特性のバラツキが如何なる原因によるかを研究することは産業科学で一つの類型をなすであろう．しかし製品の種類，製造機構，製造規模等の相違は研究方法に対しても本質的であるので，方法論を一律に論ずることは勿論無意味である．幸いそのような例として割合単純でしかも典型的なプレス打抜き部品の精度に関してかなり大規模な調査，実験，研究が或会社で行われ，そのデータの提供を受けた．それでプレス打抜きということを念頭におきつつ品質特性に及ぼす要因解析について少し感じたことを述べる．

バラツキという概念そのものが統計的概念であることからも明かな如く，こういつた研究に方法論的に援助を与えることも統計の役割の一つであろう．しかし我が国の戦後の工場に於ては統計的方法がゆがんだ形で受け入れられ，そのことが正しい方法を見出す事を妨げているように思える*．例えば実験といえば，何でもかんでも“実験計画法”（圃場試験の方法を定式化した，世に喧伝さ

---

* 戦後の品質管理等に関する啓蒙の商業主義がもたらした結果であろう．

れている，いわゆる小数サンプルの…）によつて行うべきであるという誤つた考え方がある．実験の計画と解析は，我々の問題の本質的な部分であるから，この論文では先づ“実験計画法”が我々の問題に役に立たないことを明かにしておく（§2）．

統計的方法の応用ということに関しては，異論もあろうが，筆者は個々の特殊性を考えない一般的方法の適用は意味がないと考える．精度とかバラツキとかいつたものの統計的に考えることが，研究目標を明かにすることでもありこういつた研究では先づ第一に重要なことである．そういうわけで §3 では機械で量産を行うという事柄の本性から考えて，精度に及ぼす要因の解析とは一体何を意味するのかについて述べる．

更にプレス打抜きといつた工程中の一単位を取上げて広範囲にわたる調査研究を行う意義と，その目的によつて必然的に規定される求めたい知識の性格について考察する（§4）．

以上の抽象的議論の後に前述のデータの解析について述べる．未だその途中であり資料の性格上十分な知識を得ることは出来なかつたが実際問題にあたつて上記の考え方はどのようになるかを示す（§5, 6）．

絶大な好意を以て資料を提供し，其上種々の実際上の知識を与えて下さつた，鈴木三郎氏をはじめとする東芝プレス技術専門委員会の諸氏に謝意を表すると共に，実際の測定にあたつた多くの技術者及び作業員の方々の労を多とするものである．

尚本文 §1–§5 及び附録は樋口が担当し §6 は小沢が担当した．

§2. 分散の解析と実験計画法の分散分析

量産製品の特性量のバラツキは製品集団に於ける分散と一応考えることにする．工作機械に材料を入れて製品をつくる場合，バラツキを小さくするには材料の上質なものを用い，機械の精度の高いものを用いればよいことは明白であるが，上等の機械を用いてもたいしてバラツキが小さくならないときは，バラツキに対しては機械という要因はきかないという．この場合“大して”の意味が重要であつて実験計画法（以下計画法と略称する）の帰無仮説なる純粋に等しいということとは異る．しかし勿論これを代用しても差支えないが，その場合大してということと，こういつた検定規準との量的関係が明かでなければ意味がない．今一つの実験に限つたとしても，機械を更めて購入するということと材料を変えるということとの経営的意義は異るから，大して異らないの大しては二つの要因で異るであろう．これを同じ criterion で検定して，一方は有意差あり，一方は有意差がないと結果が出たとして，それはどれだけ有用な知識であろうか．これに反しもしも製造条件をかえたときにどの程度バラツキが変るかということが分ればその知識は，経営方針の決定にも役立つであろうし新しく別のものを作る際の技術的知見にもなるであろう． 経営とか技術上の action といつた問題は第二段階だから，一応考えの外におくと，実験の段階では個々の限定された条件下でのバラツキの単純な推定が重要である（§3 参照）．

ここで分散の解析には計画法が原理的に使えないことを述べよう．今機械 i で材料 j を用いたときに出来る製品の特性量を Y_{ij} とする．Y_{ij} はバラツくのでこれを確率変数とみなす．計画法では多少変化はあつても

$$\left.\begin{array}{l} Y_{ij}=\mu+\xi_i+\eta_j+\lambda_{ij}+\varepsilon_{ij} \\ \sum_i \xi_i=\sum_j \eta_j=\sum_i \chi_{ij}=\sum_j \chi_{ij}=0 \\ \varepsilon_{ij}\ \text{は平均 0 分散}\ \sigma^2\ \text{のガウス分布に従う，} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

とおくが常道であろう．測定誤差を考慮外におくと $\mathrm{var}\,(Y_{ij})=\mathrm{var}\,(\varepsilon_{ij})=\sigma^2$ であるが我々の場合 $\mathrm{var}\,(Y_{ij})$ の異り方が興味の中心であるから，これをすべて等しいと置いてしまう仮定は勿論ナンセンスである．

次に ε を測定誤差とみて，i, j state の製品集団からの sample k について

$$Y_{ijk}=\mu+\xi_i+\eta_i+\lambda_{k(i,j)}+\alpha_{ij}+\varepsilon_{ijk} \quad \cdots\cdots(2)$$

といういわいる混合模型を用いるとする．

ε_{ijk} は平均 0 分散 σ^2 のガウス分布に従うと考え，更に $\lambda_{k(i,j)}$ (i,j state 中の sample k による効果) は平均 0，分散 $\sigma_\lambda{}^2$ の確率変数と考える．このようにした所で何ら得にならない．というのは我々の問題にする分散は

$$\underset{k}{E}(Y_{ijk}-\underset{k}{E}(Y_{ijk}))^2=\underset{k}{E}(\mu+\xi_i+\eta_j+\lambda_{k(i,j)}+\alpha_{ij}-\mu-\xi_j-\eta_j-\alpha_{ij})^2=\underset{k}{E}\lambda^2{}_{k(i,j)}=\sigma_\lambda{}^2$$

であり，計画法解析は $\sigma_\lambda{}^2$ が 0 か否かを検定するのであつて，$\sigma_\lambda{}^2$ が i,j にかかわらず const. であるか否かを見るのではない．このようなことなら始めから

$$Y_{ij}=X_{ij}+\varepsilon_{ij} \cdots\cdots(3)$$

(X_{ij} は $i\ j$ state の中の製品の変動をあらわす random variable) と書くのが簡単であり自然である．もしも各 state に於ける sample size を揃えて各 sample の中の k 番目のものを group にするという形式的操作を行えば

$$Y_{ijk}=\mu+\xi_i+\eta_j+\lambda_k+\alpha_{ij}+\beta_{k(j)}+\gamma_{k(j)}+\kappa_{k(ij)}+\varepsilon_{ijk} \cdots\cdots(4)$$

とし λ_k, $\beta_{k(i)}$, $\gamma_{k(j)}$, $k_{k(ij)}$ は平均 0 分散 $\sigma_\lambda{}^2,\cdots$, $\sigma_k{}^2$ のガウス分布に従う独立な確率変数として，$\sigma_\lambda{}^2,\cdots,\sigma_k{}^2$ 等の 0 や否やを検定出来るであろうが，λ_k, $\beta_{k(i)}$, $\gamma_{k(j)}$ 等は意味が全く不明瞭である．又 k という番号の間には何ら本質的相違はないのだから，この解析も亦ナンセンスである．——計画法の教科書にもこういうデタラメな解析法は書いてないが——．

兎に角このような方法で計画法に従つて分散に及ぼす i 要因と j 要因の影響をしらべることは出来ない．

計画法を是非利用しようという場合に次に考えつくことは i,j state の各々で夫々大きさ n の標本から分散なり標準偏差なりを推定し，それを以て Y_{ij} とすることである．即ち例えば ij state に於ける sample の値を X_{ijk} ($k=1,2,\cdots n$) とし

$$Y_{ij}=\frac{1}{n-1}\sum\left(X_{ijk}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{ijk}\right)^2 \cdots\cdots(5)$$

とする．この Y_{ij} を

$$Y_{ij}=\mu+\xi_i+\eta_j+\alpha_{ij}+\varepsilon_{ij} \cdots\cdots(6)$$

と考えるのである．この場合 ($\alpha_{ij}+\varepsilon_{ij}$) 或は ε_{ij} が推定誤差であるが，Y_{ij} は正に正であり $-\infty$ から $+\infty$ にわたらないから推定誤差がガウス分布になる筈はない．

特にもとの量 X_{ijk} の分布が計画法礼讃者に好ましいガウス型だとすると (平均 m_{ij}, 分散 $\sigma_{ij}{}^2$) $\sigma_{ij}{}^2$ の推定量 (5) の分布は周知の如く χ^2 の常数倍の分布であり，(6) の誤差項の密度も次の如くなり

$$\frac{(\eta-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sigma_{ij}{}^{n-1}2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}(\varepsilon_{ij}+\mu+\lambda_i+\eta_j+\alpha_{ij})^{\frac{n-1}{2}-1}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(n-1)(\varepsilon_{ij}+\mu+\lambda_i+\eta_j+\alpha_{ij})}{2\sigma_{ij}{}^2}\right\} \cdots\cdots(7)$$

この平均は $E(\varepsilon_{ij})=\sigma_{ij}{}^2-(\mu+\lambda_i+\eta_j+\alpha_{ij})$

分散は　$\mathrm{var}\,(\varepsilon_{ij})=\dfrac{2}{n-1}\sigma_{ij}{}^2$

となる ε_{ij} の分布はガウスでないがそれを不問としても $E(\varepsilon_{ij})=0$ という仮定は，$\sigma_{ij}{}^2=\mu+\lambda_i+\eta_j+\alpha_{ij}$ なることを意味し，従つて $\sum\lambda_i=0$ 等は $\sum_i\sigma_{ij}{}^2=\sum_j\sigma_{ij}{}^2$ を意味し，全くおかしい．更

に等分散の仮定は sample size を同じにとると σ_{ij}^2 が i, j にかかわらず一定ということであるからやはりナンセンスである．σ_{ij}^2 が一定ならば i が ν 水準，j が η 水準あれば上述の関係式は $\nu\sigma^2=\eta\sigma^2$ となり $\nu \neq \eta$ ととることも出来るから明かに矛盾である．

Y_{ij} として標準偏差をもつて来ても本質的事情はかわらない．

この場合

$$E(\varepsilon_{ij})=\sqrt{\frac{2}{n-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sigma_{ij}-\mu-\lambda_i-\eta_j-\alpha_{ij}$$

$$\fallingdotseq\left(1-\frac{1}{4(n-0.8)}\right)\sigma_{ij}-\mu-\lambda_i-\eta_j-\alpha_{ij}\cdots\cdots(8)^*$$

$$\mathrm{var}(\varepsilon_{ii})=\left\{1-\frac{2}{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\right\}\sigma_{ij}^2\fallingdotseq\frac{1}{2(n-0.8)}\sigma_{ij}^2\cdots\cdots(9)^*$$

そこで，今ここに Y_{ij} として分散を変数変換し誤差項が等分散のガウス分布になるようにしてから計画法を用いればよいと言われる方があるかも知れないが，その希望は次に述べる事情により断たれるであろう．

先づ変数変換の函数は単調なものでなければならない．成程単調な一価連続函数で χ^2 型（Γ 型）をガウス型に変換することが出来る．しかし変換先のガウスの方の平均，分散は何であつてもよいとしても，変換函数には Γ 型のパラメータ（この場合未知の σ_{ij}^2）が入つて来る．従つて σ_{ij}^2 が未知である以上変換しようがないのである（附録 I に証明を附す）．

近似的にガウスに近くなるようにという意味で，例えば標本分散の対数をとつたものを変量に用いることも考えられよう．即ち (5) の Y_{ij} に対し $Y^*_{ij}=\log Y_{ij}$ とすると，平均，分散は

$$E(Y^*_{ij})=\log\sigma_{ij}^2-\log\left(\frac{n-1}{2}\right)+\Psi\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdots\cdots(10)$$

$$\mathrm{var}(Y^*_{ij})=\Psi'\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdots\cdots(11)$$

となる．ここに $\Psi(x)$ はガウスの Ψ 函数で $\Psi(x)=\Gamma'(x)/\Gamma(x)$ である．

$$\Psi\left(\frac{n-1}{2}\right)=\begin{cases}-C+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i} & (n=2m+1\ \text{奇数})\\ -C-2\log 2+2\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2i-1} & (n=2m\ \text{偶数})\end{cases}\cdots\cdots(12)$$

ここで C は Euler-Mascheroni の常数：$C=0.5772\cdots$

$$\Psi'\left(\frac{n-1}{2}\right)=\begin{cases}\frac{\pi^2}{6}-\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i^2} & (n=2m+1)\\ \frac{\pi^2}{2}-\sum_{i=1}^{m-1}\frac{4}{(2i-)^2} & (n=2m)\end{cases}\cdots\cdots(13)$$

であるから $n\to\infty$ のときは $E(Y^*_{ij})\to\log\sigma_{ij}^2$ $\mathrm{var}(Y^*_{ij})\to 0$ なることがわかる．尚標準偏差のときは平均は (10) の 1/2 倍，分散は (11) の 1/4 倍となることはいう迄もない．

さてすべての i, j state で n を一定に揃えておけば $\mathrm{var}\,Y^*_{ij}$ が一定となる（この場合は既知の定数！）．従つて計画法が甚だ有効かというと，必ずしもそうではない．

---

* (8), (9) の近似式は筆者が他の目的のためにつくつたもので $n=3\sim50$ 位に対し相対誤差 5% 位である．

先づ Y^*_{ij} を用いるとき，これを

$$\sigma_{ij}^2 = (\text{平均}) + (\text{機械の効果}) + (\text{材料の効果}) + \cdots$$

の意味で解析することが出来ないことは言う迄もない．Y^*_{ij} を用いて分散分析を行うときに出てくる平方和と，Y_{ij} を用いて分散分析を行うときの平方和とは，大きさの順序も対応しない．（一対一に対応しないから当然）従つて例えば Y^*_{ij} の i の級間変動が残差に比して大きくて有意差ありとしても，Y の方の級間変動は小さいこともある．σ_{ij}^2 の意味を上のように考えず変量 Y^* をつかつてただ形式的に計画法を使おうという場合は

$$Y^*_{ij} = \mu + \xi_i + \alpha_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad E(\varepsilon_{ij}) = 0 \cdots\cdots (14)$$

と (10) 式と比べて考える必要がある．（この ε_{ij} はガウス分布に近いであろうと想像されるだけで正確にはそうではない）(14) とおいたときの μ の中には n に依存する量も含まれている．二種の要因が積の形で σ_{ij}^2 にきいているとき以外は α_{ij} を省くことは出来ない．（α_{ij} を入れると Y^*_{ij} についてくりかえし——同じ ij state についていくつかの Y^*_{ij}——が必要であるが，これは各 ij state で kn 個の値を n 個づつ一組にして Y^*_{ij} を k 個つくればよかろう）ところで計画法の分散分析を行つて F 検定をやることの妥当性はまだ疑問である．

簡単のために α_{ij} は省略するものとし，計画法の分散分析を行つてみる

$$\sum_{i}\sum_{j}(Y^*_{ij} - \bar{Y}^*)^2 = q\sum_{i=1}^{p}(Y^*_{i\cdot} - \bar{Y}^*)^2 + p\sum_{j=1}^{q}(Y^*_{\cdot j} - \bar{Y}^*)^2$$
$$+ \sum_{i}\sum_{j}(Y^*_{ij} - Y^*_{i\cdot} - Y^*_{\cdot j} + \bar{Y}^*)^2 \cdots\cdots (15)$$

に於て，右辺の各平方和を順次 $S^*{}_i{}^2$, $S^*{}_j{}^2$, $S^*{}_{(ij)}{}^2$ とすると，例えば

$$E(S^*{}_i{}^2) = q\sum_{i=1}^{p}\xi_i^2 + (p-1)\Psi'(n-1/2) \cdots\cdots (16)$$

$$E(S^*{}_{(ij)}{}^2) = (p-1)(q-1)\Psi'\{(n-1)/2\} \cdots\cdots (17)$$

なることは通常の場合と同様である．従つて

$$F^* = \left(\frac{1}{p-1}S^*{}_i{}^2\right)\Big/\left(\frac{1}{(p-1)(q-1)}S^*{}_{(i,j)}{}^2\right)$$

なる比は $\sum\xi_i^2$ が大きいとき中心が大きい方にずれるであろうから，F^* の値の大きいときに差ありとする普通の F 検定が使えそうである．しかし，検定は分布の尾の方の挙動がきいてくると思われるので，$S^*{}_i{}^2$, $S^*{}_{ij}{}^2$ 等の分布の高次の積率や，その相関関係がものを言つてくるのであろう．正確には F^* の分布を計算して論じなければならず，これは厄介であるので，ここで断定的なことは言えないが，$S^*{}_i{}^2$ 等の高次の積率は χ^2 のそれと異るし，特に $S^*{}_i{}^2$ と $S^*{}_{ij}{}^2$ とは相関があるから，F 検定を適用してよいかどうか疑問である．このような分布の尾が検定にどうきくかということを含めた検定論一般についての石田正次氏等の研究がやがて発表されるであろうから，それを俟つことにして附録 II に $S^*{}_i{}^2$ と $S^*{}_{(ij)}{}^2$ との相関係数を与えておく．

var (Y^*_{ij}) が未知数を含まぬ常数であることから，ただこれを素直に利用して例えばチェビシェフの不等式を用いて検定を行つた方がよい．しかし現実問題で var Y^*_{ij} が一定と認め得ないことが多かろう．このことはもとの X の分布が正規型からずれていることによるのであろう．通常見逃している分布の尾の方の挙動が（Y_{ij} の原点に近い方）対数変換により拡大され，現実と仮定とのギヤップをあらわにしたものと見られよう．従つて又 (11) の式は X の分布の検定に際して利用することも出来よう．それで表を附しておく．

n	5	10	15	30	30
$\sqrt{\Psi'((n-1)/2)}$	0.8031	054987	0.3918	0.3323	0.2589

以上計画法はこの場合は使えないこと（わかりきつた事）を長々と説明したが，何にでも使えるという宣伝が行われている以上，わかりきつた例で，理由を示しておくことも意味ないことではないと思つた次第である*.

§3. 製品精度に及ぼす要因の意味

要因の解析という言葉は何気なく用いられるが，何を意味するか先づ考えよう．

プレス打抜きの如き工程の一断面のみに話を限るならば，製品の品質に及ぼす要因は，大別して ① 製造機 ② 材料（原料） ③ 操作（機械の作動条件） ④ 環境といつたものになるだろう．

今一つの機械である材料で一定の状況で（例えば speed をきめて）生産してゆく場合を考える．その場合バラツキとして次のような種類のものが考えられよう．

A：製造機のガタ等によるもの

B：材料のミクロな不均一性によるもの

C：材料のマクロな不均一性によるもの

D：製造機の condition の変化（バラツキ）によるもの

E：操作の control が十分でないために起るバラツキ

F：環境の変化が機械の condition をかえて，そのことが製品バラツキを起すもの

G：環境の変化が材料の状態をかえて……

H：環境の変化が control のバラツキに変化を与えて……

今製造機のある時刻 t に於ける状況を $x(t)$，その時に用いられている材料の状況を $y(t)$，操作状況を $z(t)$ とする．A は $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ の函数であり，B は $y(t)$ の函数である．即ち $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ が夫々きまつた値をとるものとして何度も同じものをつくることを仮想した場合に於けるバラツキである．これに対し C は $y(t)$ の長時間分布に於ける変動（厳密ではないが $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(y(t)-\overline{y(t)})^2\,dF(y(t))$ で表象されよう）の函数である．同様に D, E は夫々 $y(t)$, $z(t)$ の長時間分布の分散の函数である．更に時刻 t に於ける環境 $u(t)$ は実は $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ をきめるのに一役を買つている．即ち $u(t)$ を或る常数としてみたときの $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ の函数として A—E を考えたのであるが，これ等のものの $u(t)$ に依存する部分の長時間変動によるものが F—H である．即ち例えば材料の状況は $y(y_0(t),\ u(t))$ とみるべきでこの $u(t)=\mathrm{const}$ とした函数 $y(y_0(t))$ について考えたのが B, C であり $y_0(t)=\mathrm{const}$ とみたときの $y(u(t))$ の $u(t)$ の長時間分布による分散 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(y(u(t))-\overline{y(u(t))})^2\,dF(u(t))$ の函数として G が考えられる．

ここでこまかい概念分析を行う意図はないが，まづ次の三つの事柄に注意することは重要であろう．その一つはバラツキを考える際にそのもとになる確率の場をはつきりしておかねばならぬこと（統計理論では自明であるが実際問題のときにこれが時として忘れられ勝ちである． 又大抵の場合これを規定することは甚だ厄介である．しかし大体きめておかなければならないし．特に相異るものを同じに考えてしまつては意味をなさない）．次に上記の如く極めて常識的に考えてとり出したバラツキ成分というものは加法的でないこと（我々が常識的に考える分散成分は，条件つき分布の分散であること）．即ち確率変数を和に分解して夫々の成分の分散，相関係数を考えるという考え方の解析は容易であるが，実際的に意味が不明瞭になることがあり，基礎的知識として理解しやすいものは，変量のいくつかを const と仮想した条件の下での条件つき分布である．更にこういつた条件分布がおいた条件に関係しないように思い勝ちであるが，それは仮定に過ぎないこと，例え

* 統計数理研究所附属技術員養成所では，昭和 30 年度工業統計講座で“実験計画法の誤差について”林知己夫氏が批判的講義を行つた．其後筆者はそれを継承し，更に別の見解からも批判を加えている．

ば機械のガタによるバラツキといつたものも一般には材料の state, 操作条件によつて異ると考えねばならない.

さて上の考察からバラツキに及ぼす要因の解析の研究にあたり，その方向は主として極限条件設定の近迫ということになろう*. しかし乍ら分析ということのもつ意義は，新しい条件に対する予言にある. 即ちそういう予言を行うための綜合の仕方がわからなければならない. 又そもそも予言という以上すべての点にわたつて実験を行わなくてもよいことを前提にしている. こういう意味で分析の場合の対象である成分が状態 $x(t)$ 等にあまり関係しないか，或はその関係の仕方が他の根拠（理論的根拠）から大体見当のつくものでなければ意味がうすい. そういう意味で，理論，或は溯上つてその仮定は解析，綜合になければならないものであるが個々の case について慎重に行わねばならない（条件を規定するパラメータの変化は現象の平均値にきくか分散にきくかといつたことの相違，其他統計的に考えるべき多くの問題がある).

究極目的からみて分析しても仕方ないものもあるので，その意味から努力の weight の置き方を考えるべきであることは言う迄もない. 前にもことわつた如く，ここでは通常常識的に考えるバラツキというものの性格を言つただけであつて A—F のように分けて考えることが必要であるのではない.

尚ついで乍ら状態を象徴して $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ としたが，これが実際に何を意味するか，こういう莫としたものをあらわすには，実際何を考えればよいかそれが問題である. 工学では或る実用的な性格をあらわすのに適当な実際可能な検査方式をきめてその測定量を以てすることが多い. 又別の実用概念はこういつた工学的実用量の組合せとしてしか数量的には表現出来ないことが多い. この間の飜訳ということが，産業科学で常に重大な問題である. 例えば機械精度をあらわす JIS 規格と実際の製品精度の関係（関係の一意的でない所にむつかしい点がある）又実際の機械の寸法些細との関係，又消費者の要求する莫とした品質概念と検査品質との関係，こういつたものの間の飜訳の問題は重要であるが割方看過され勝ちである.

さてこれは一つの機械で一種のものをつくる場合であるが，数種のもので多種の生産を行う場合については次に考えよう.

§4.　工程単位の研究の意義

完成品の精度をよくするための研究は，工程の流れを追うやり方でなければならないが，量産といえど多種小量生産のものについては個々の工程についての optimum condition を求めているうちに，その工程による生産は終るということになる. こういう意味で作業別に一般的な研究を行うことも亦意義が大きい（工場に於ける統計的方法の新しい方向は工程を断面的にとらえるということでなくて一貫して捉えることである. その場合取扱つている一つの工程（一工場，一企業）のみの optimum condition をみつけることを目標にする. この方法も大いに発展させるべきであるがここに述べる研究方法の意義も全く消え去つたのでないことを再認識したい).

特に中小企業の多い我が国の現状や，機械工業の性格を考えると，一プラントで年中同じものをつくる化学工場に於ける Box type の optimum condition とは異つた意味での optimum condition の研究がなされねばならない.

目標は一般的な知識，即ち新しいものをつくる場合の optimum な方法を予言することである. プレス打抜きに例をとると，材料と機種の最良の組合せ，型の設計（ダイ及びポンチの寸法を材質，材原等を考えに入れてどうきめるか）等の知識である. バラツキの分析もこのための手段であろう. ただここで無条件の optimum な方法だけでは困るのであつて例えば機械の種類のごときも

* 物理工学系自然科学の伝統的方法で，こういう方法でうまくやつて来ている.

のは経営上簡単なことではない．すると条件付き最適ということになる．又最適 condition だけを求めたのでも困るので，部品の如きものを作る場合，そういう条件で作つた時のバラツキの程度が予測出来なければ全体の設計を行う場合に困ることになる．

こういつた性格をもつ研究であるから，極限状態への近接と，実状の調査との両面から進めてゆかねばならない．しかしこれは一応別に計画を立てなければならない．

調査目的はどのようなものがどういう機械でどの位どの程度で作られているかということであるが，実際問題として種々の困難がある．その中で普通の社会調査，経営調査と異る点だけあげると，測定はどうしても各現場に依頼しなければならず，測定方法の単一化が困難なことである．

各 case に対する個別的な知識が最終的には有用なのであるが，一口に case といつてもその内容が多岐に分れるので，やはり或程度まとめなければならず，その際平均的なものと，バラツキを示す必要がある．調査の立場に立たないと実験の行いやすい case にばかり weight がかかり結論が現実とは大分かたよつたものになる．一方精度といつたものは甚だ微妙な数値であるので，特殊 case 或は極限 case の状況をつかまないと要因との関係が傾向すらつかめない（例えば regression で両端の方の例数が少いと一次関係の推定精度がよくないのと同様な事情である）．我々が提供をうけた data は広範囲の調査，実験として最初の試みであり，恐らくはこれ以上のことは無理であると思われる程のものであるが，調査と実験のこの相違が最初明確に認識されてなかつたことにより少々遺憾な点がある．しかしこれにより実験を行うべき所，調査計画の方法が始めて明かになつて来たとも思われ，最初は恐らく何から手をつけてよいかはわからなかつたであろう．決して無駄な努力ではなかつたと思う．

§5.　寸法精度とバラツキ

バラツキは普通分散であらわされるが，物をつくる場合，目的寸法があり，平均がこれに一致している場合は分散が問題であるが平均が目的から離れているときは精度として分散だけ考えるのは意味がない．これには基準として目的寸法をとり，それからの偏差二乗平均をとればよかろう．即ち目的寸法を a とすると，$E(X-a)^2=E(X-E(X))^2+(E(X)-a)^2$ 或はこれの平方根を精度の測度とするのがよい（実の所 press 打抜きの寸法では，分散は小さく $(E(X)-a)^2$ が大きい．従つて平均値が問題である）．

目的寸法は実際上の基準ではあるが，分析途上で別の基準値が必要である．例えば press の場合，打抜き型（die set）の寸法がそれである．即ち目的のものをつくる際，先づ型をつくり，それを機械に取つけて，多量に打抜くのであるから，型が或る寸法 a' につくられた時の条件附分布を考えるのが型設計に役立つ知識を引出す唯一の方法である．

所で型寸法の測定は製品サンプルの測定より精度を要求することは言う迄もないが，これが実は逆に型寸法の測定の方が困難である所に問題がある．尚測定器間の系統的誤差の差は一つの実験点での成品のバラツキと comparable の order になつて来ているから，誤差の calibration が行われないと結果は無意味であるが，広範囲にわたる調査で，これを徹底せしめることが亦困難な仕事である．

§6.　プレス打抜きによる機械部品の精度の解析

研究の範囲は打抜かれたままの部品の主要部分の寸法精度に限られているが，これに及ぼす要因としては多くのものが考えられる．しかしそのうち定義の困難なもの，測定不能なもの，あまり影響しないと思われるものを除けば，次の如くなるであろう．

（1）　プレス機械

①　フレーム構造　②　能力　③　精度　④　スピード（作動条件）

（2）　型

⑤ ダイセット型式　⑥ 型構造形式　⑦ 型の材質　⑧ クリアランス（間隙）　⑨ 型の摩耗程度

（3）　材　料

⑩ 材質　⑪ 板の厚さ

（4）　部品の幾何学的要素

⑫ 目的寸法　⑬ 周囲の長さ　⑭ 部品形状

（5）　組合せとして取上げねばならないもの

⑮（板の厚さ）/（クリアランス）　⑯ ロール方向

又データは各実験ブロック（場所，日及び上記要因の一定のもの）で打抜き部品 10 個を選んで主要部の寸法を測定したものからなつている．資料はその 10 個を一つの単位として 1500 程度であつた．それを上記要因に従つて整理した．それ等の中には記述が完全でないものも相当あつたが出来るだけ利用することにして* やむを得ざるものは除いてほぼ 1000 について解析することにした．

先づ夫々要因中にどのような種類のものがあるかを調べ要因内容の分類を行つた．例えば材質は 30 種位記録されていたが，これを工学的観点から 7 種類に分けた**．数量的要因（例えば板厚）は実用的分類に例数を考慮して間隔をきめた（数量的要因は分類コード以外にもとの数量そのままを常時グラフにプロットする時に用いた）こうして出来た基準に従つて資料の分類を行うことにした．

資料の性格上偏りが起るのは止むを得ないが，我々は常に偏りについて細心の注意を払わねばならない．この意味で先づ摩耗程度による影響を調べた***（この結果型の摩耗によつてバラツキの変化は認められないことが明かになつた）．多重分類の種目を多くとると個々の例数が甚だ少くなり，推定の偏りが甚大になるのでせいぜい 3 重分類にとどめ要因のいく組かについて検討した．分類種目の選定には常に内容の不釣衡から来る偏りということを考慮した．以上主として分散について夫々行つたのであるが結果はほのかに傾向のあらわれるものもあるが内分散からみて自信を持てるものはなく，この方法が有効でないことがわかつた．

標準偏差は平均値の目的寸法からの偏差よりも概して一桁小さい値となつているので我々の解析は主として平均値を主眼とすればよいことになる．今一つは測定誤差の危険をおかしても物理的意味のはつきりした量を扱うことが明瞭な結果を出すであろうという理由から，型寸法を重視することにした．

型の寸法が測定されてあり利用出来るデータは 700 程度に減少した．平均値のダイ寸法からの偏差は，目的寸法からの偏差よりも一般に小さく出ているので，もしもダイ寸法が目的寸法に正確に一致しているならば，製品の精度は甚だ高いものとなるであろう．従つて寸法精度を上げる上にダイの製作が根本的問題である．これがうまくゆけば寸法に関する限り問題は大方解決されると考えられる．解析として残る問題は材料（材質，板厚）と機械が決められた時に，ダイセットの最も良い設計法（目的寸法に対してダイ寸法，ポンチ寸法を如何に与えるべきか）を見つけることである．そのために次の段階として

$$(\text{平均値}-\text{ダイ寸法})/2\times\text{クリアランス}$$

なるノンディメンションの量が材質，板厚，クリアランス及び板厚/クリアランスとどういう関係

---

* 例えば機械精度の記述のないものも機械精度が問題ないとすれば利用出来る．どうせ釣合がとれていないから出来るだけ利用しなければ例数が著しく減少する．

** 分類にあたつてはプレス専門委員会のメンバーと常に協議した．解析途中分類を更めるべき二三のものがみつかつた．これはグラフのプロットを徴細に検討することにより明かになつた．

*** 摩耗程度は研摩直後と直前の二種類で，これについて分けるときは他の要因の内容はほぼ釣合がとれている．

にあるかを調べた．この段階になると測定誤差（特にダイ寸法のそれ）と実験ブロック間のバラツキが相当利いてきて解析は少し困難であるが，常にグラフプロットを行い，プロットの各点の他の要因内容をしらべるという微細解析により或程度の結論を得ることが出来た．工学的には興味ある結論もあるが，しかし検討を要することも多々あるので専門の技術者と協議の上場所を改めて発表する予定である．

附　　録

I　母集団分布がガウス型のとき，標本標準偏差，標本分散を変数変換してガウス型分布に従うようにするとき変換が未知パラメタ $\sigma_{ij}{}^2$ に依存することの証明．

$$I(v\,;\,p)=\int_0^v t^p e^{-t}\,dt/\Gamma(p+1) \tag{1}$$

$$G(u)=\int_{-\infty}^{u}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt/\sqrt{2\pi} \tag{2}$$

とすれば，標本分散を y，新変数を x，所要の変換を $y=f(x)$ とすると

$$I\left(\frac{n-1}{2\sigma_{ij}}f(x)\,;\,\frac{n-1}{2}-1\right)=G\left(\frac{x-A}{B}\right) \tag{3}$$

がすべての x について成立たねばならない．((3) の右辺を $1-G\left(\dfrac{x-A}{B}\right)$ でおきかえたものも可能であるが，B の負の値を許せば，それも (3) に帰着する．又 y が標準偏差の場合同様の式となり以下の証明は分散の場合も標準偏差の場合も共通である)．簡単のために (3) を

$$I\left(\frac{1}{k}y\,;\,p\right)=G(\lambda x+\mu)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3')$$

と書く．p は sample size n のみに関係するだけだから，これは固定して考えて差支えない．k は σ_{ij} の正の常数倍だから，k は正の範囲で任意に動くものと考えねばならない．問題は λ と μ を k の函数として適当に選べば (3′) をみたす $y=f(x)$ なる函数が k に無関係に定るか否かである．以下これが無関係になると仮定して矛盾を導こう．

p をきめると　$I(v\,;\,p)=G(u)$　(4)

をみたす $v=g(u)$ は連続函数として唯一つ存在するから $f(x)/k=g(\lambda x+\mu)$ である．従つて我々の仮定は $kg(\lambda x+\mu)$ が k に無関係となることである．即ち $kg(\lambda(k)x+\mu(k))=g(ax+b)$，(但し $a=\lambda(1)$，$b=\mu(1)$) である．x の変域は $(-\infty,\ \infty)$ であり，$a=0$ ならお話にならないから $ax+b$ を更めて x と置き λ/a，$\mu-b\lambda$ を更めて λ，μ と置いて差支えない．結局 $\lambda(k)$，$\mu(k)$ を適当に選べば (4) をみたす g なる函数はすべての x に対し

$$kg(\lambda x+\mu)=g(x) \tag{5}$$

従つて亦，

$$\left.\begin{aligned} k\lambda g'(\lambda x+\mu)&=g'(x),\\ k\lambda^2 g''(\lambda x+\mu)&=g''(x)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

をみたさねばならない（肩符は導函数の記号）

さて具体的な式 (1), (2) を用い，$I(g(x)\,;\,p)=G(x)$ を x に関して微分することにより，$g(x)$ は（非線型）微分方程式

$$g''(x)\,g(x)+pg'(x)^2-g(x)g'(x)^2+xg(x)\,g'(x)=0 \tag{7}$$

をみたさねばならないことが容易にわかる．

(5) (6) の関係を (7) に入れると，

$$\lambda\{g''(\lambda x+\mu)\,g(\lambda x+\mu)+pg'(\lambda x+\mu)^2\}$$
$$-k\lambda g(\lambda x+\mu)\,g'(\lambda x+\mu)^2+xg(\lambda x+\mu)\,g'(\lambda x+\mu)=0 \tag{8}$$

又 (7) の x を $\lambda x+\mu$ と置いて，然る後 (5) (6) を適用すると

$$k\{g''(x)\,g(x)+pg'(x)^2\}-g(x)\,g'(x)^2$$
$$+k\lambda(\lambda x+\mu)\,g(x)\,g'(x)=0 \tag{9}$$

を得る．(7) で $x=0$ と置いた式と，(8) で $x=-\mu/\lambda$ と置いた式と，(9) で $x=0$ と置いた式とから

$$k\lambda^2DC^2=DC^2+\frac{\mu}{\lambda}DC=k\lambda^2(kDC^2-\lambda\mu DC) \tag{10}$$

を得る．ここに $D=g(0)$，$C=g'(0)$ である．$D\neq 0$，$C\neq 0$ とすれば，(10) から $k>0$ を用いて

$$\lambda=k^{\frac{1}{3}},\qquad \mu=C(k-1)/k^{\frac{1}{3}} \tag{11}$$

を得るが，実際 g は単調で変数 x は $(-\infty,\ \infty)$ でうごき $g(x)\geqq 0$ だから $g(0)=D\neq 0$. 又 (1)，(2)，(4) から

$$g'(0)=g(0)^{-p}\exp\{g(0)\}\Gamma(p+1)/\sqrt{2\pi}$$

であるが，$p>0$　$g(0)\neq 0$ だから $g'(0)\neq 0$. 従つて (11) が成立つ．

一方 (7) で $x=\mu$ と置いた式，(8) で $x=0$ と置いた式，(9) で $x=\mu$ と置いた式から $g(\mu)$，$g'(\mu)$ が恒等的には 0 でないことを用いて $\lambda(\lambda+1)=k+1$ でなければならないことがわかる．これと (11) から $\lambda=\pm 1$ 従つて又 k の値として 1 しかとれないこととなる．これは k の任意性に反す（証終り）．

II　$S^*{}_i{}^2$，$S^*{}_{(ij)}{}^2$ の分散，相関係数．

$Y_{ij}=\exp\{Y^*{}_{ij}\}$．$\chi=(n-1)Y_{ij}/(2\sigma_{ij}{}^2)$ とするとχ の密度函数は $\chi^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-\chi}\Big/\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$ となる．このことから容易に本文の (10) 及び (11) を得る．さて本文の (15) 式以後の議論は

$$\left.\begin{aligned}&Y^*{}_{ij}=\mu+\xi_i+\eta_i+\varepsilon_{ij}\quad \sum_{i=1}^{p}\xi_i=\sum_{j=1}^{q}\eta_j=0\\&E(\varepsilon_{ij})=0\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

から出発したのでこれから

$$\varepsilon_{ij}=\log\chi-E(\log\chi)=\log\chi-\Gamma'\left(\frac{n-1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \tag{2}$$

従つて又 ε_{ij} が互いに独立に変動し κ 次の積率は

$$E(\varepsilon_{ij}{}^{\kappa})=\sum_{k=0}^{\kappa}(-1)^k\binom{\kappa}{k}E((\log\chi)^{\kappa-k})(E(\log\chi))^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\kappa}(-1)^k\binom{\kappa}{k}\Gamma^{(\kappa-k)}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left\{\Gamma'\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\}^k\Big/\left\{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\}^{k+1} \tag{3}$$

ここに $\Gamma^{(\kappa-k)}$ は Γ 函数の $\kappa-k$ 次の導函数である．平均 0 のガウス分布のときは二次の積率 m_2 と四次の積率 m_4 との間に $m_4=3m_2{}^2$ なる関係があり，その関係が分散分析にあらわれる種々の平方和の間の相関を 0 ならしめているのであるが，我々の場合の ε_{ij} ではこの関係がないから当然相関が生じて来る．すなわち (3) から $m_4-3m_2{}^2=E(\varepsilon_{ij}{}^4)-3E(\varepsilon_{ij}{}^2)^2$

$$=\left(\frac{\Gamma^{(4)}}{\Gamma}-4\frac{\Gamma^{(3)}\Gamma'}{\Gamma^2}+6\frac{\Gamma''\Gamma'^2}{\Gamma^3}-3\frac{\Gamma'^4}{\Gamma^4}\right)-3\left(\frac{\Gamma''}{\Gamma}-\frac{\Gamma'^2}{\Gamma^2}\right)^2$$

$$=\frac{\Gamma^{(4)}}{\Gamma}-4\frac{\Gamma^{(3)}\Gamma'}{\Gamma^2}-3\frac{\Gamma''^2}{\Gamma^2}+12\frac{\Gamma'^2\Gamma''}{\Gamma^3}-6\frac{\Gamma'^4}{\Gamma^4} \tag{4}$$

ところでガウスの Ψ 函数 $\Psi(x)=\Gamma'(x)/\Gamma(x)$ を用いると (4) は

$$m_4-3m_2^2=\left(\frac{d^3\Psi(x)}{dx^3}\right)_{x=\frac{n-1}{2}} \tag{5}$$

これは又 $m_2=\Psi'\left(\frac{n-1}{2}\right)$ であるから Y^*_{ij} をつくるサンプルの個数 n を連続的にみたとき

$$m_4-3m_2^2=4\frac{d^2}{dn^2}m_2(n) \tag{6}$$

m_2 のグラフからも明かに (5) が 0 でないことがわかる．

さて (1) から

$$S^*_{i.}{}^2=q\sum_{i=1}^{p}(Y^*_{i.}-\bar{Y}^*)^2=q\sum_i\left(\xi_i+\frac{1}{q}\sum_i\varepsilon_{ij}-\frac{1}{pq}\sum_{ij}\varepsilon_{ij}\right)^2$$

$$S^*_{(ij)}{}^2=\sum_{ij}(Y^*_{ij}-Y^*_{i.}-Y^*_{j.}+\bar{Y}^*)^2$$

$$=\sum_{ij}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{q}\sum_j\varepsilon_{ij}-\frac{1}{p}\sum_i\varepsilon_{ij}+\frac{1}{pq}\sum_{ij}\varepsilon_{ij}\right)^2$$

ε_{ij} が互いに独立であることを用いて (3) を適用すれば本文の (16), (17) 式を得る．又 (5) により

$$\mathrm{var}\,(S^*_{i.}{}^2)=E(S^*_{i.}{}^2-E(S^*_{i.}{}^2))^2$$

$$=\frac{(p-1)^2}{pq}(m_4-3m_2^2)+2(p-1)m_2^2+4q\sum_i\xi_i^2m_2$$

$$=\frac{(p-1)^2}{pq}\Psi^{(3)}\left(\frac{n-1}{2}\right)+2(p-1)\left(\Psi'\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)^2+4q\Psi'\left(\frac{n-1}{2}\right)\sum_i\xi_i^2$$

$$\mathrm{var}\,(S^*_{(ij)}{}^2)=E(S^*_{(ij)}{}^2-E(S^*_{(ij)}{}^2))^2$$

$$=\frac{(p-1)^2(q-1)^2}{pq}(m_4-3m_2^2)+2(p-1)(q-1)m_2^2$$

$$=\frac{(p-1)^2(q-1)^2}{pq}\Psi^{(3)}\left(\frac{n-1}{2}\right)+2(p-1)(q-1)\left(\Psi'\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)^2$$

$$\mathrm{cov}\,(S^*_{i.}{}^2,\ S^*_{(ij)}{}^2)=E((S^*_{i.}{}^2-E(S^*_{i.}{}^2))(S^*_{(ij)}{}^2-E(S^*_{(ij)}{}^2))$$

$$=\frac{(p-1)^2(q-1)}{pq}(m_4-3m_2^2)=\frac{(p-1)^2(q-1)}{pq}\Psi^{(3)}\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

従つて相関係数は $\sum\xi_i^2=0$ のときでもで

$$\rho=\Psi^{(3)}\Big/\left\{\Psi^{(3)2}+2\frac{q^2}{(p-1)(q-1)}\Psi'^2\Psi^{(3)}+4\frac{p^2q^2}{(p-1)(q-1)}\Psi'^4\Psi^{(3)2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

であるから小さい．しかし 0 ではない．