

# 原点未知の 3 母数対数正規分布について

統計数理研究所 金 藤 浩 司  
広島大学\* 岩 瀬 晃 盛

(1993 年 12 月 受付)

## 1. はじめに

本稿は、計量生物学での生存時間や信頼性工学での故障時間の解析に於て用いられる分布の 1 つである対数正規分布の 3 母数化について述べている。ここで定義する 3 母数対数正規分布は岩瀬・瀬戸 (1990), 岩瀬・平野 (1990), Seto et al. (1992) が定義した 2 母数対数正規分布を拡張し, 1 つの無名数の母数を導入し, これまでの定義とは異なる原点 (分布の立上り点) の導入を行っている。通常, 2 母数対数正規分布は, 原点が零で歪度が正の値を取る分布である。この分布についての研究は Crow and Shimizu (1988) によって詳しくまとめられている。

対数正規分布の 3 母数化を無名数の母数を導入することで実現し, この分布を用いて単位を持つ事象を解析した。この無名数の母数は, 単位の異なるデータ間に於て比較できる。本稿で定義する 3 母数対数正規分布では, 単位を持つものに対して対数変換および指数変換を行っていない。また, 歪度が負の値を取る標本分布に対しても適用できる。

本稿は, Iwase and Kanefuji (1994) の概要であるが, 多くの数値計算の結果を新たに加えた。

## 2. 対数正規分布

### 2.1 対数正規分布の従来の定義

対数正規分布は歴史的には次の様に定義されてきた。確率変数  $X$  に対して, それを対数変換したものが平均  $\beta$ , 分散  $\gamma^2$  の正規分布に従うならば, 確率変数  $X$  は 2 母数対数正規分布に従う。

$$\log X \sim N(\beta, \gamma^2), \quad 0 < X < \infty.$$

また, 確率変数  $X - a$  が 2 母数対数正規分布に従うならば, 3 母数対数正規分布は,

$$(2.1a) \quad \log(X - a) \sim N(\beta, \gamma^2), \quad a < X < \infty$$

と定義されてきた。同様に, 確率変数  $a - X$  が 2 母数対数正規分布に従うならば,

$$(2.1b) \quad \log(a - X) \sim N(\beta, \gamma^2), \quad -\infty < X < a$$

となる 3 母数対数正規分布も定義できる。ここで,  $a$  は原点 (分布の立上り点) を表す母数である。また, ガンマ分布およびワイブル分布に於てもこの様な 3 母数化が行われている。

統計解析に於て解析者は, 特定の医学的処置に対する生存時間や工業製品の故障時間といっ

---

\* 工学部応用数学教室: 〒724 広島県東広島市鏡山 1-4-1.

た単位 (例えば, 時間や回数など) を持つ事象に対して, 本研究で対象とする様な分布を用いて解析を始める場合がある. 従来対数正規分布では,  $a$  の単位は  $X$  の単位と等しいことを (2.1a) は表している. 同様に, (2.1a) から  $\log X$  の単位は  $\beta$  の単位に等しく, 平均と標準偏差の単位は等しいことより,  $\log(X-a)$  の単位は  $\gamma$  の単位に等しい. 一方, (2.1a) は,  $\log((X-a)/\exp(\beta)) \sim N(0, \gamma^2)$  と書き直せる. これにより,  $\exp(\beta)$  の単位は  $X$  の単位に等しく, かつ  $\log((X-a)/\exp(\beta))$  は単位を持たない (無名数) ことを意味する. 故に,  $\gamma$  は  $\log((X-a)/\exp(\beta))$  の標準偏差なので,  $\gamma$  は単位を持たないことになる. 従って従来定義では,  $\gamma$  は単位を持つ結論が得られ, かつ  $\gamma$  は単位を持たない結論が得られる.

## 2.2 対数正規分布の新しい定義

2.1 節の解釈によって生じる矛盾を避け, 母数の役割が容易に分かるような表現を採用すべきであるという観点から, 岩瀬・瀬戸 (1990), 岩瀬・平野 (1990), Seto et al. (1992) は, 2母数対数正規分布を,

$$\frac{1}{c} \log\left(\frac{X}{\mu}\right) \sim N(0, 1), \quad 0 < X < \infty$$

と定義した. ここで,  $0 < \mu < \infty, 0 < c < \infty$  であり, 母数  $\mu$  は確率変数  $X$  の母中央値である. 確率変数  $X$  が, この2母数対数正規分布に従うことを, 彼等は  $X \sim LN(\mu, c^2)$  と表記した.

Iwase and Kanefuji (1994) は, この定義を拡張し3母数対数正規分布を定義し, 以下で述べる定理を導いた. 原点が未知の対数正規分布に従う確率変数  $X$  を,

$$(2.2) \quad \frac{1}{\lambda} \log\left(1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right) \sim N(0, 1), \quad \text{sgn}(\lambda) \cdot \left\{ X - \left( \mu - \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right\} > 0$$

と定義する.  $\log$  は自然対数とする. ここで,  $-\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma < \infty, 0 < |\lambda|$ , であり,  $\text{sgn}(\lambda)$  は  $\lambda$  の符号を表す. また, (2.2) 式で定義される確率変数  $X$  の分布を,

$$X \sim LN_{\lambda}(\mu, \sigma^2)$$

と表記する. (2.2) は (2.1a, b) をまとめて捉えるように工夫したとも捉えることができる.

**定理 1.**  $X \sim LN_{\lambda}(\mu, \sigma^2)$  ならば, 任意の実数  $a$  および  $h (\neq 0)$  に対して,

$$Y = \frac{X - a}{h} \sim LN_{\text{sgn}(h)\lambda} \left( \frac{\mu - a}{h}, \left( \frac{\sigma}{h} \right)^2 \right), \quad \text{sgn}(h\lambda) \cdot \left\{ Y - \frac{\mu - a + \frac{\sigma}{\lambda}}{h} \right\} > 0$$

が成り立つ.

**定理 2.**

$$LN_{\lambda}(\mu, \sigma^2) \begin{cases} = LN(\mu, \lambda^2) : \lambda = \frac{\sigma}{\mu}, & 0 < \mu < \infty, \\ \rightarrow N(\mu, \sigma^2) : \lambda \rightarrow 0. \end{cases}$$

上記の定理での正規分布への矢印 ( $\rightarrow$ ) は  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \log\left(1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \right\} = \frac{X - \mu}{\sigma}$  の意味である.

**定理 3.**  $X \sim LN_{\lambda}(\mu, \sigma^2)$  ならば,

$$\text{Median}[X] = \mu,$$

$$(2.3) \quad E[X] = \left(\mu - \frac{\sigma}{\lambda}\right) + \frac{\sigma}{\lambda} \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda^2\right\} = (\text{原点}) + \frac{\sigma}{\lambda} \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda^2\right\},$$

$$\text{Var}\left[1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right] = (\exp\{\lambda^2\} - 1)\exp\{\lambda^2\},$$

$$(2.4) \quad \text{Var}[X] = \frac{\sigma^2}{\lambda^2} (\exp\{\lambda^2\} - 1)\exp\{\lambda^2\},$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 = \text{歪度} &= \frac{E[(X - E[X])^3]}{(\text{Var}[X])^{3/2}} \\ &= \text{sgn}(\lambda) \cdot (\exp\{\lambda^2\} - 1)^{1/2} (\exp\{\lambda^2\} + 2) \end{aligned}$$

が成り立つ。

また、修正された変動係数  $CV'$  を、

$$CV' = \frac{\sqrt{\text{Var}[X]}}{E[X] - \text{原点}}$$

とする。

定理3から、

$$\begin{aligned} E[X] - \text{Median}[X] &= \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right) \left(\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda^2\right\} - 1\right), \\ CV' &= \text{sgn}(\lambda) \cdot (\exp\{\lambda^2\} - 1)^{1/2} \end{aligned}$$

が成り立つ。

もし  $|\lambda| \ll 1$  ならば、 $CV' \approx \lambda$  および  $\alpha_3 \approx 3\lambda$  となり、

$$\text{sgn}(\lambda) = \text{sgn}(\alpha_3) = \text{sgn}(E[X] - \text{Median}[X]) = \text{sgn}(CV')$$

が成り立つ。

(2.2) より、次の定理を得る。

**定理 4.**

$$(2.5) \quad E\left[\log\left(1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right)\right] = 0,$$

$$(2.6) \quad E\left[\left(\log\left(1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right)\right)^2\right] = \lambda^2,$$

$$(2.7) \quad E\left[\left(1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right)^{-1}\right] = E\left[1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda^2\right\},$$

$$(2.8) \quad \begin{aligned} E\left[\left(1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right)^{-1} \log\left(1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right)^{-1}\right] \\ = E\left[\left(1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right) \log\left(1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right)\right] = \lambda^2 \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda^2\right\}. \end{aligned}$$

(2.2) の対数関数は自然対数である必要はない。通常、解析に於て常用対数を使う場合が多く、底が  $b$  の対数関数を用いた場合、本稿で定義する3母数対数正規分布は、

$$\frac{1}{|\log b|} \log_b \left(1 + \frac{\lambda}{|\log b|} \frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\lambda_b} \log_b \left(1 + \lambda_b \frac{X - \mu_b}{\sigma_b}\right) \sim N(0, 1)$$

と表される。ここで、 $0 < b < \infty$  および  $b \neq 1$  である。故に、

$$\mu_b = \mu, \quad \sigma_b = \frac{\sigma}{|\log b|}, \quad \text{および} \quad \lambda_b = \frac{\lambda}{|\log b|}$$

の関係を得る。母数  $\mu$  および  $\sigma/\lambda$  は対数関数の底に依存せず、分布の定義域は同じである。故に、表1の関係を得る。

これらの結果から、 $\lambda \cdot \mu/\sigma$  が重要な母数になることが判る。なぜなら、 $\lambda \cdot \mu/\sigma$  は観測者の都合で決定される単位に依存しない無名数で、しかも解析に於て、解析者の都合によって決定される対数関数の底に依存しない。もし、 $\lambda \cdot \mu/\sigma = 1$  ならば、定理2より3母数対数正規分布は、 $(0, \infty)$  上で定義された2母数対数正規分布に一致する。

### 3. $\mu, \sigma, \lambda$ の推定量

$X_1, X_2, \dots, X_n$  を  $LN_\lambda(\mu, \sigma^2)$  からの確率標本とする。また、 $\bar{X}, s^2, \tilde{\alpha}_3$  はそれぞれ、標本平均、標本分散、標本歪度係数とする。定理3から、次の定理を得る。

**定理5.**  $\tilde{\alpha}_3$  を零でない実数とすると、

$$(\exp\{\tilde{\lambda}^2\} - 1)^{1/2} (\exp\{\tilde{\lambda}^2\} + 2) = |\tilde{\alpha}_3|$$

は、 $\tilde{\lambda}$  に対して2つの解を持ち、その解として、 $\tilde{\lambda} = \pm \sqrt{\log t_0}$  を得る。ここで、 $t_0 (> 1)$  は、 $t^3 + 3t^2 - 4 - \tilde{\alpha}_3^2 = 0$  の唯一の実数解である。

この定理および  $\text{sgn}(\lambda) = \text{sgn}(\alpha_3)$  から、 $\lambda$  の推定量として、

$$(3.1) \quad \tilde{\lambda} = \text{sgn}(\tilde{\alpha}_3) \cdot \sqrt{\log t_0}$$

を得る。故に、 $\sigma$  と  $\mu$  の推定量として、

$$(3.2) \quad \tilde{\sigma} = |\tilde{\lambda}| s [\exp\{\tilde{\lambda}^2\} - 1]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \tilde{\lambda}^2\right\},$$

$$(3.3) \quad \tilde{\mu} = \bar{X} - \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\lambda}} \left[ \exp\left\{\frac{1}{2} \tilde{\lambda}^2\right\} - 1 \right]$$

を得る。ここで、 $s$  は、 $s^2$  の正の平方根を表す。これらの、 $\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}, \tilde{\mu}$  はそれぞれ、 $\lambda, \sigma, \mu$  のモーメント推定量である。ここで定義したモーメント推定量を、モーメント推定量1(ME1)と表記する。

$X_i$  の確率素分は、

表1. 母数と単位および対数の底の関係。

母数	確率変数 $X$ の単位	対数の底
$\mu$	依存する	依存しない
$\sigma$	依存する	依存する
$\lambda$	依存しない	依存する
$\lambda \cdot \frac{\mu}{\sigma}$	依存しない	依存しない

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \lambda \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2\lambda^2} \left(\log\left(1 + \lambda \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^2\right] \frac{dx_i}{\sigma},$$

$$\text{sgn}(\lambda) \cdot \left(x_i - \mu + \frac{\sigma}{\lambda}\right) > 0$$

と表される。また、対数尤度関数  $l(\mu, \sigma, \lambda)$  は、

$$l(\mu, \sigma, \lambda) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - n \log\left(\frac{\sigma}{x_0}\right) - \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \lambda \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{2\lambda^2} \sum_{i=1}^n \left(\log\left(1 + \lambda \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^2$$

と表される。ここで、 $x_0$  は定数で  $\sigma$  と同じ単位を持つ。最尤推定量を得るために、 $l(\mu, \sigma, \lambda)$  を各  $\mu, \sigma, \lambda$  について微分し零と置くと、以下の定理を得る。

**定理 6.** 局所最尤推定量 (Locally maximum likelihood estimator; LMLE)  $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda}$  は、

$$(3.4) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \hat{\lambda} \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) = 0,$$

$$(3.5) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\log\left(1 + \hat{\lambda} \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)\right)^2 = \hat{\lambda}^2,$$

$$(3.6) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \hat{\lambda} \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)^{-1} + \frac{1}{\hat{\lambda}^2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \hat{\lambda} \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)^{-1} \log\left(1 + \hat{\lambda} \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) = 0$$

を満足する。

また、(2.7) および (2.8) から、

$$(3.7) \quad E\left[\left(1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right)^{-1}\right] + \frac{1}{\lambda^2} E\left[\left(1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right)^{-1} \log\left(1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right)\right] = 0$$

を得る。また、(3.4), (3.5) および (3.6) は、(2.5), (2.6) および (3.7) にそれぞれ対応している。故に、局所最尤推定量  $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda}$  は、(2.5), (2.6) および (3.7) に基づいたモーメント推定量と見なすこともできる。

(2.6) と (2.7) から、

$$E\left[\left(\log\left(1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right)^{-1}\right)^2\right] = \log\left(E\left[\left(1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right)^{-1}\right]\right)^2$$

が成り立つ。この式は、

$$(3.8) \quad E\left[\left(\log\left(1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right)\right)^2\right] = 2 \log\left(E\left[1 + \lambda \frac{X - \mu}{\sigma}\right]\right) = \lambda^2$$

に等しい。

(2.5), (2.6) および (3.8) から、定理 5 から得られるモーメント推定量とは異なる以下のモーメント推定量を得る。

**定理 7.** モーメント推定量  $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}$  は、

$$(3.9) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \tilde{\lambda} \frac{x_i - \tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}}\right) = 0,$$

$$(3.10) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\log\left(1 + \tilde{\lambda} \frac{x_i - \tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}}\right)\right)^2 = \tilde{\lambda}^2,$$

$$(3.11) \quad \log\left(1 + \tilde{\lambda} \frac{\bar{x} - \tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}}\right) = \frac{\tilde{\lambda}^2}{2}$$

で与えられる。

ここで定義されるモーメント推定量を，モーメント推定量 2(ME2) と表記する。

(3.9), (3.10) および (3.11) はそれぞれ, (2.5), (2.6) および (2.7) に相当する。モーメント推定量 2 は以下の様に計算される。

ステップ 1:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \bar{\lambda} \text{ (ME1 の } \lambda), \\ \sigma_0 &= \bar{\sigma} \text{ (ME1 の } \sigma), \\ \mu_0 &= \bar{\mu} \text{ (ME1 の } \mu), \\ f(\mu_k) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left( 1 + \lambda_{k-1} \frac{x_i - \mu_k}{\sigma_{k-1}} \right), \\ g(\sigma_k) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \log \left( 1 + \lambda_{k-1} \frac{x_i - \mu_k}{\sigma_k} \right) \right)^2 - \lambda_{k-1}^2, \\ h(\lambda_k) &= \log \left( 1 + \lambda_k \frac{\bar{x} - \mu_k}{\sigma_k} \right) - \frac{1}{2} \lambda_k^2, \\ \varepsilon &= 10^{-2}, \\ k &= 1.\end{aligned}$$

ステップ 2:  $\mu_k$  に対して,  $\mu_{k-1}$  を初期値として,  $f(\mu_k) = 0$  をニュートン法を用いて解く。

ステップ 3:  $\sigma_k$  に対して,  $\sigma_{k-1}$  を初期値として,  $g(\sigma_k) = 0$  をニュートン法を用いて解く。

ステップ 4:  $\lambda_k$  に対して,  $\lambda_{k-1}$  を初期値として,  $h(\lambda_k) = 0$  をニュートン法を用いて解く。

ステップ 5:  $\left( \left| \frac{\mu_k - \mu_{k-1}}{\mu_{k-1}} \right| > \varepsilon \text{ または } \left| \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{\sigma_{k-1}} \right| > \varepsilon \text{ または } \left| \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k-1}} \right| > \varepsilon \right)$  ならば,  $k = k + 1$  としステップ 2, ステップ 3 およびステップ 4 へ行く。

ステップ 6:  $\bar{\mu} = \mu_k, \bar{\sigma} = \sigma_k$  および  $\bar{\lambda} = \lambda_k$  とする。

もし, 局所最尤推定値  $\bar{\mu}, \bar{\sigma}$  および  $\bar{\lambda}$  を得る場合には, ステップ 1 の初期値として,  $\mu_0, \sigma_0$  および  $\lambda_0$  に, ステップ 6 で得られたモーメント推定値  $\bar{\mu}, \bar{\sigma}$  および  $\bar{\lambda}$  を代入し, ステップ 1 の関数  $h$  を,

$$h(\lambda_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( 1 + \lambda_k \frac{x_i - \mu_k}{\sigma_k} \right)^{-1} + \frac{1}{\lambda_k^2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( 1 + \lambda_k \frac{x_i - \mu_k}{\sigma_k} \right)^{-1} \log \left( 1 + \lambda_k \frac{x_i - \mu_k}{\sigma_k} \right)$$

で置き換える。

本稿では, 単位を持つ値に対して対数変換および指数変換を行っていない。しかし, 従来の対数正規分布との比較のために,  $0 < \lambda < \infty$  の時, (2.1a) を形式的に表現し直すと,

$$\log \left( X - \left( \mu - \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right) \sim N \left( \log \frac{\sigma}{\lambda}, \lambda^2 \right)$$

となる。(2.1a) の  $(\alpha, \beta, \gamma)$  と (2.2) の  $(\mu, \sigma, \lambda)$  の関係から,

$$\alpha = \mu - \frac{\sigma}{\lambda}, \quad \beta = \log \frac{\sigma}{\lambda} \quad \text{および} \quad \gamma = \lambda$$

が得られる。

#### 4. 数値解析

本稿で定義した 3 母数対数正規分布にこれまで対数正規分布で解析されてきた実際のデータ

を適用する.

**データ 1.** Dumonceaux and Antle (1973) によって報告されたアメリカのある川の20年間の最大流量 (flood): [in millions of cubic feet per sec.]

.654 .613 .315 .449 .297 .402 .379 .423 .379 .3235 .269 .740 .418 .412 .494 .416 .338  
.392 .484 .265

**データ 2.** McCool (1974) によって報告された2組の10個のベアリングの強度試験時間 (bearing1, bearing2): [in hours]

bearing1:

152.7 172.0 172.5 173.3 193.0 204.7 216.5 234.9 262.6 422.6

bearing2:

93.4 98.7 116.6 117.8 132.7 136.6 140.3 158.0 164.8 183.9

**データ 3.** Lieblein and Zelen (1956) によって解析された23個のボールベアリングの強度試験時間 (bearing3): [in number of million revolutions]

17.88 28.92 33.00 41.52 42.12 45.60 48.48 51.84 51.96 54.12 55.56 67.80  
68.64 68.64 68.88 84.12 93.12 98.64 105.12 105.84 127.92 128.04 173.40

**データ 4.** Steen and Stickler (1976) によって解析されたイギリスのある海岸で5週間おきに観測された2組の20個の汚染 (pollution1, pollution2): [in number of coliform per 100 ml]

pollution1:

200 6091 336 327 154 109 111 282 2120 1082 918 718 482 1345 53600  
5900 1918 900 1045 1454

pollution2:

1364 2154 2236 2518 2527 2600 3009 3045 4109 5500 5800 7200 8400  
8400 8900 11500 12700 15300 18300 20400

**データ 5.** 中村 他 (1991) によって解析された自動車の結合ロッド (rod): [in shoot number]

14060 12868 16000 11646 15244 16372

**データ 6.** 岩瀬 他 (1991) によって解析された2組のガスケット (gasket 1, gasket 2): [in kg]

gasket1:

1.0 0.4 0.4 0.5 3.8 1.3 2.5 0.5 0.4 0.7 1.2 3.2 2.2 0.5 19.0 14.4 5.2  
7.8 1.0 1.8 6.0 4.8 0.5 1.4 0.8 0.8 2.6 0.8 1.4 1.4 2.2 2.0 4.9 1.4  
3.2 0.7 1.4 0.5 1.6 2.3 0.8 0.5 2.0 0.5 1.0 3.6 1.2 1.2 8.8 3.5

gasket2:

3.0 6.0 3.3 4.5 3.3 12.0 3.0 2.3 5.4 2.7 4.2 3.8 4.8 4.6 7.2 5.2 3.8  
4.4 4.8 3.1 2.7 6.5 4.2 6.2 13.0 5.4 2.2 9.8 15.4 7.5 3.7 4.1 5.6 3.6

7.4 3.8 3.9 4.8 4.5 5.8 9.5 6.3 3.7 4.0 6.4 2.2 6.0 30.2 2.4 30.0

データ 7. Von Alven (1964) によって解析された機上搭載の無線機の修理時間 (repair): [in hours]

.2 .3 .5 .5 .5 .5 .6 .6 .7 .7 .7 .8 .8 1.0 1.0 1.0 1.0  
1.1 1.3 1.5 1.5 1.5 1.5 2.0 2.0 2.2 2.5 2.7 3.0 3.0 3.3 3.3 4.0 4.0  
4.5 4.7 5.0 5.4 5.4 7.0 7.5 8.8 9.0 10.3 22.0 24.5

データ 8. Birnbaum and Saunders (1969) によって解析された 6061-T6 アルミ切取り試片の強度 (life 1, life 2, life 3):

(life 1): 101 個の観測値, 1 周期当りの最大圧力 31000 psi.

(life 2): 102 個の観測値, 1 周期当りの最大圧力 26000 psi.

(life 3): 101 個の観測値, 1 周期当りの最大圧力 21000 psi.

データ 9. Jørgensen (1982) によって解析された 799 個の神経繊維のパルスの時間間隔 (fibre): [in 1/50 sec.]

データ 10. Jørgensen (1982) によって解析された 128 個のある道における自動車の通過間隔 (length): [in sec.]

データ 11. Jørgensen (1982) によって解析された 19 個の MIG 溶接の強度 (MIG)

データ 12. Jørgensen (1982) によって解析された 13 機のボーイング 720 型機の空調装置の正常動作間隔 (air 1, air 2, ..., air 13): [in hours] (air11 は測定値を 2 つしか持たないため解析から削除した)

データ 13. Seto et al. (1992) によって解析された日本のある地方の雨に含まれる 196 個の硫酸塩 (sulfate): [in  $\mu\text{g/ml}$ ] と硝酸塩 (nitrate): [in  $\mu\text{g/ml}$ ] と雨量 (rainfall): [in mm]

$LN_2(\mu, \sigma^2)$  にこれらのデータをあてはめモーメント推定値 1, モーメント推定値 2, 局所最尤推定値を計算し, その結果を表 2 にまとめた. ここで, 各母数の推定値について見ると,  $\lambda, \lambda \cdot \mu / \sigma, CV, \sigma / \mu$  および  $\alpha_3$  は無名数であるので, 単位の異なるデータ間で比較可能である. 特に,  $\lambda \cdot \mu / \sigma$  は無名数のみならず, 対数変換の底にも依存しない.

Cohen et al. (1985) は, 従来の 3 母数対数正規分布の定義に於て, モーメント推定量, 修正モーメント推定量, 局所最尤推定量を提案している. これらの推定量は, 本稿で示したモーメント推定量 1, モーメント推定量 2, 局所最尤推定量に, それぞれ対応していると思われる. 彼等は, "flood" について局所最尤推定値を計算し, 原点 = 0.185 (0.180),  $\log(\hat{\sigma}/\hat{\lambda}) = -1.561 (-1.531)$ ,  $\hat{\lambda} = 0.507 (0.493)$ ,  $\hat{\alpha}_3 = 1.78 (1.72)$ ,  $E[\hat{X}] = 0.424 (0.424)$  および  $\sqrt{\text{Var}[\hat{X}]} = 0.129 (0.128)$  と報告している. 括弧の中の値は本稿で示した局所最尤推定値である. ここで求めた値は, 彼等の求めた値とほぼ同じ値を得ている. また, 彼等は "bearing 1" に対してもモーメント推定値および修正モーメント推定値を与えている. 彼等が求めた修正モーメント推定値は原点 = 132.3 (140.8, 143.6),  $\log(\hat{\sigma}/\hat{\lambda}) = 4.19 (4.03, 3.96)$ ,  $\hat{\lambda} = 0.764 (0.832, 0.892)$ ,  $\hat{\alpha}_3 = 3.37 (4.00, 4.65)$ ,  $E[\hat{X}] = 220.5 (220.5, 221.6)$  および  $\sqrt{\text{Var}[\hat{X}]} = 78.41 (79.67, 85.99)$  である. 括弧の中の左の値は本稿で示したモーメント推定値 2 で, 右の値は局所最尤推定値である. 彼等は, "bearing 1" に対して局所最尤推定値を計算出来ていない.



Seto et al. (1992) は “sulfate”, “nitrate” および “rainfall” に対して常用対数に基づきモーメント推定量  $\bar{\mu}$  および  $\bar{\lambda}$  を計算している。そこで、今回の結果との比較の為に  $\log 10$  を掛けて調整すると, “sulfate” に対して  $\bar{\mu}=2.66$  (2.67) および  $\bar{\lambda}=0.815$  (0.804), “nitrate” に対して  $\bar{\mu}=1.36$  (1.34) および  $\bar{\lambda}=0.760$  (0.793), “rainfall” に対して  $\bar{\mu}=15.6$  (15.4) および  $\bar{\lambda}=1.21$  (1.24) となる。ここで、括弧の中は本稿で示した局所最尤推定値である。これから、標本数が多くなればモーメント推定値と局所最尤推定値の差は小さくなると思われる。

表2の局所最尤推定値 ( $\lambda, \lambda \cdot \mu / \sigma$ ) を描いたものが図1である。もし、 $|\lambda| \ll 1$  ならば、確率変数  $X$  の分布は近似的に  $N(\mu, \sigma^2)$  に等しくなる。故に、正規分布 (normal distribution line:  $\lambda=0$ ) を図中に描くことができる。もし、 $\lambda \cdot \mu / \sigma \approx 1$  ならば、確率変数  $X$  は近似的に2母数対数正規分布  $LN(\mu, \lambda^2)$  に従う。故に、2母数対数正規分布 (2-parameter lognormal distribution line:  $\lambda \cdot \bar{\mu} / \bar{\sigma} = 1$ ) も同時に図中に描ける。図1から “life 2” は正規分布からの確率標本と見なせ、“length”, “sulfate”, “nitrate”, “rainfall”, “air 3”, “air 6” および “air 13” は2母数対数正規分布と見なせる可能性が高いと思われる。

(2.2) で定義された分布の定義領域は、 $\text{sgn}(\lambda) \cdot (X - (\mu - \sigma/\lambda)) > 0$  である。故に、 $\lambda < 0$  の場合、定義領域は  $-\infty < X < \mu - \sigma/\lambda$  であることに注意しなければならない。この場合、歪度も負値である。また、事前情報により確率変数  $X$  は正值しかあり得ないことがわかっているとき  $\lambda$  の推定値が負値になる確率は本稿では否定していない。本稿で取り上げたデータでは “life 2”, “life 3”, “bearing 3”, “rod” に於て、 $\lambda$  の推定値が負値になっているが、ここでは単に(2.2)で定義される分布の当てはめを考えているだけであり、それ以上でもそれ以下でもない。

正の値を取るデータに関して、理屈上では無限区間を定義領域に持つ分布を考えることは現実の問題としておかしいように思われる場合が多い (しかも多くの現象では理屈上では無限区間を定義領域に持つ分布は想定しがたいと思われる)。しかしながら事実上は現象解明のために

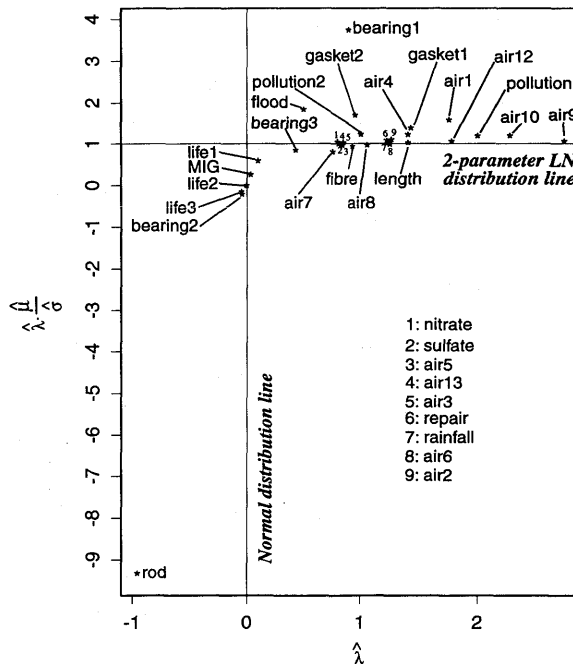


図1. データ1から13に対する  $(\lambda, \lambda \cdot \frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}})$  のプロット。

そのような分布を道具として使っている。従って、本稿で定義した分布に於て $\lambda$ の推定値が負値であっても、 $\mu - \sigma/\lambda$ の推定値が $\mu$ の推定値と比較して十分大きい場合、 $X < 0$ の領域は無視し得るとの立場を取っている。著者は、正確に $(0, \infty)$ の上で定義される分布を考えることが妥当である現象を知らない。この意味では常に有限区間の上で定義された分布しか想定できないものと思われる。(電力や電圧などの例を取っても正確には、有限区間の上で考えているものと思われる。)そこで大きな値の方(無限大)だけは寛容になりゼロに近い値の方にきびしくはなれないものと思われる。雑な言い方をすれば、分布の中心からある尺度を基準として正の方向に遠方に離れようと負の方向に遠方に離れようと、同じ程度に寛容であるべきであると考えられる。これらが容認できないときに有限区間の上で定義された分布を考えることになるものと思われる。

## 謝 辞

本論文をまとめるにあたり多くの有意義なご意見を賜った査読者の方に謝意を表します。

## 参 考 文 献

- Birnbaum, Z.W. and Saunders, S.C. (1969). Estimation for a family of life distribution with applications to fatigue, *J. Appl. Probab.*, **6**, 328-347.
- Cohen, A.C., Whitten, B.J. and Ding, Y. (1985). Modified moment estimation for the three-parameter lognormal distribution, *Journal of Quality Technology*, **17**, 92-99.
- Crow, E.L. and Shimizu, K. (1988). *Lognormal Distributions*, Marcel Dekker, New York.
- Dumonceaux, R. and Antle, C.E. (1973). Discrimination between the lognormal and the Weibull distributions, *Technometrics*, **15**, 923-926.
- 岩瀬晃盛, 平野勝臣 (1990). ベキ逆ガウス型分布とその応用, *応用統計学*, **19**, 163-176.
- Iwase, K. and Kanefuji, K. (1994). Estimation for 3-parameter lognormal distribution with unknown shifted origin, *Statistical Papers*, **35**, 81-90.
- 岩瀬晃盛, 瀬戸信也 (1990). 大気中アルミニウム濃度とスカンジウム濃度との統計的特性, 広島大学工学部研究報告, **38**(2), 153-161.
- 岩瀬晃盛, 久保田洋志, 中村信人, 平木秀作, 畝 正二 (1991). 逆ガウス型確率紙の試作と検討, *品質*, **21**, 215-225.
- Jørgensen, B. (1982). *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution*, Springer, New York.
- Lieblein, J. and Zelen, M. (1956). Statistical investigation of the fatigue life of deep-groove ball bearings, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, **47**, 273-316.
- McCool, J.I. (1974). Inferential techniques for Weibull populations, Aerospace Research Laboratories Report, ARL TR 74-0180, Wright-Patterson AFB, Ohio.
- 中村信人, 岩瀬晃盛, 畝 正二, 久保田洋志, 平木秀作 (1991). 逆ガウス型確率紙の作り方と使用例, *標準化と品質管理*, **44**(11), 46-54.
- Seto, S., Oohara, M. and Iwase, K. (1992). Some statistical characteristics of concentration and wet-deposition in relation to rainfall amount for sulfate and nitrate in rain-water, *Atmospheric Environment*, **26A**, 3029-3038.
- Steen, P.J. and Stickler, D.J. (1976). A sewage pollution study of beaches from Cardiff to Ogmere, Report January 1976, Department of Applied Biology, UWIST, Cardiff.
- Von Alven, W.H. (ed.) (1964). *Reliability Engineering by ARINC*, Prentice Hall, New Jersey.

表2. 3母数対数正規分布の推定.

データ	"flood "	"bearing1 "	"bearing2 "	"bearing3 "	"pollution1 "
標本数	20	10	10	23	20
	モーメント推定値 1				
$\mu$	0.4050	205.0	135.0	67.29	624.4
$\sigma$	0.1135	63.20	27.36	34.56	7053.
$\lambda$ [1]*	0.3110	0.4647	-0.0562	0.2802	0.8010
原点	0.03992	68.97	621.9	-56.09	-8181.
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	1.109	1.507	-0.2774	0.5454	0.07091
$CV'$	0.3186	0.4909	-0.05620	0.2857	0.9484
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	0.2803	0.3083	0.2026	0.5137	11.30
$\alpha_3$ [1]	0.9883	1.591	-0.1689	0.8806	3.698
$\frac{\sigma}{\lambda}$	0.3651	136.0	-486.8	123.4	8805.
$E[X]$	0.4231	220.5	134.3	72.22	3955.
$\sqrt{V[X]}$	0.1221	74.38	27.43	36.66	11510.
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	-1.008	4.913	—	4.815	9.083
	モーメント推定値 2				
$\mu$	0.3996	197.1	135.1	65.94	704.2
$\sigma$	0.1070	46.90	27.60	33.06	1169.
$\lambda$ [1]	0.4204	0.8327	-0.05640	0.3675	1.922
原点	0.1452	140.8	624.5	-24.02	96.04
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	1.571	3.500	-0.2760	0.7330	1.158
$CV'$	0.4397	1.000	-0.05644	0.3803	6.266
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	0.2677	0.2379	0.2044	0.5014	1.660
$\alpha_3$ [1]	1.404	4.001	-0.1695	1.196	264.8
$\frac{\sigma}{\lambda}$	0.2544	56.32	-489.4	89.96	608.1
$E[X]$	0.4231	220.5	134.3	72.22	3955.
$\sqrt{V[X]}$	0.1222	79.67	27.67	36.60	24180.
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	-1.369	4.031	—	4.499	6.410
繰り返し回数	16	12	1	17	12
	局所最尤推定値				
$\mu$	0.3959	196.0	134.9	64.98	677.2
$\sigma$	0.1065	46.73	27.56	32.95	1148.
$\lambda$ [1]	0.4927	0.8920	-0.04327	0.4272	2.000
原点	0.1797	143.6	771.9	-12.15	103.3
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	1.831	3.741	-0.2117	0.8425	1.180
$CV'$	0.5242	1.103	-0.04329	0.4475	7.323
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	0.2691	0.2385	0.2043	0.5071	1.695
$\alpha_3$ [1]	1.717	4.649	-0.1299	1.4321	414.7
$\frac{\sigma}{\lambda}$	0.2162	52.39	-637.0	77.13	573.9
$E[X]$	0.4238	221.6	134.3	72.35	4345.
$\sqrt{V[X]}$	0.1280	85.99	27.60	37.81	31060.
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	-1.531	3.959	—	4.346	6.353
繰り返し回数	7	4	23	7	4

\* [1] は無名数を表す.

表2. (つづき)

データ	"pollution2 "	"gasket1 "	"gasket2 "	"repair"	"life1"
標本数	20	50	50	46	101
モーメント推定値 1					
$\mu$	6534.	1.681	4.689	2.283	132.5
$\sigma$	5215.	2.355	3.692	3.418	22.05
$\lambda$ [1]*	0.2872	0.7101	0.7339	0.6865	0.1078
原点	-11630.	-1.635	-0.3419	-2.696	-72.03
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	0.3598	0.5070	0.9320	0.4585	0.6479
$CV'$	0.2932	0.8097	0.8447	0.7759	0.1081
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	0.7982	1.401	0.7874	1.497	0.1664
$\alpha_3$ [1]	0.9048	2.960	3.137	2.795	0.3256
$\frac{\sigma}{\lambda}$	18160.	3.316	5.031	4.980	204.6
$E[X]$	7298.	2.632	6.244	3.607	133.7
$\sqrt{V[X]}$	5548.	3.455	5.563	4.890	22.24
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	9.807	1.199	1.616	1.605	5.321
モーメント推定値 2					
$\mu$	5775.	1.440	4.552	1.915	132.5
$\sigma$	4424.	1.409	2.591	2.124	22.14
$\lambda$ [1]	0.6239	1.175	1.004	1.135	0.1078
原点	-1316.	0.2401	1.972	0.04354	-72.80
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	0.8144	1.200	1.764	1.023	0.6455
$CV'$	0.6898	1.725	1.320	1.620	0.1081
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	0.7660	0.9788	0.5693	1.109	0.1671
$\alpha_3$ [1]	2.398	10.30	6.257	9.110	0.3257
$\frac{\sigma}{\lambda}$	7091.	1.200	2.580	1.872	205.3
$E[X]$	7298.	2.632	6.244	3.607	133.7
$\sqrt{V[X]}$	5942.	4.125	5.638	5.772	22.34
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	8.867	0.1822	0.9480	0.6268	5.325
繰り返し回数	26	10	7	10	1
局所最尤推定値					
$\mu$	5042.	1.310	4.593	1.841	132.6
$\sigma$	4159.	1.361	2.587	2.099	22.13
$\lambda$ [1]	1.006	1.429	0.9524	1.224	0.09780
原点	908.2	0.3574	1.876	0.1257	-93.64
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	1.220	1.375	1.691	1.073	0.5862
$CV'$	1.323	2.590	1.215	1.863	0.09803
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	0.8248	1.039	0.5633	1.140	0.1668
$\alpha_3$ [1]	6.288	25.15	5.442	12.06	0.2950
$\frac{\sigma}{\lambda}$	4134.	0.9525	2.716	1.715	226.3
$E[X]$	7765.	3.002	6.152	3.752	133.7
$\sqrt{V[X]}$	9074.	6.851	5.196	6.757	22.29
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	8.327	-0.04869	0.9993	0.5394	5.422
繰り返し回数	8	7	4	4	8

\* [1] は無名数を表す。

表2. (つづき)

データ	"life2"	"life3"	"rod"	"fibre"	"length"
標本数	102	101	6	799	128
モーメント推定値 1					
$\mu$	397.9	1410.	14440.	8.644	9.682
$\sigma$	62.02	388.8	1683.	8.651	17.35
$\lambda$ [1]*	-0.001005	-0.04592	-0.08970	0.5006	0.6370
原点	62090.	9876.	33200.	-8.636	-17.56
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	-0.006450	-0.1665	-0.7696	0.5003	0.3554
$CV'$	-0.001005	-0.04592	-0.08988	0.5337	0.7074
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	0.1559	0.2758	0.1165	1.001	1.792
$\alpha_3$ [1]	-0.003016	-0.1379	-0.2704	1.753	2.476
$\frac{\sigma}{\lambda}$	-61690.	-8466.	-18760.	17.28	27.24
$E[X]$	397.9	1401.	14370.	10.95	15.81
$\sqrt{V[X]}$	62.02	389.4	1693.	10.45	23.61
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	—	—	—	2.850	3.305
モーメント推定値 2					
$\mu$	397.9	1410.	14440.	7.866	6.697
$\sigma$	62.02	391.1	1668.	7.414	8.952
$\lambda$ [1]	-0.001005	-0.04602	-0.08955	0.7271	1.298
原点	62090.	9908.	33060.	-2.331	-0.2026
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	-0.006450	-0.1659	-0.7754	0.7714	0.9706
$CV'$	-0.001005	-0.04605	-0.08973	0.8347	2.094
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	0.1559	0.2774	0.1155	0.9427	1.337
$\alpha_3$ [1]	-0.003016	-0.1382	-0.2699	3.086	15.47
$\frac{\sigma}{\lambda}$	-61690.	-8499.	-18620.	10.20	6.899
$E[X]$	397.9	1401.	14370.	10.95	15.81
$\sqrt{V[X]}$	62.02	391.8	1678.	11.09	33.53
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	—	—	—	2.322	1.931
繰り返し回数	1	1	1	13	13
局所最尤推定値					
$\mu$	397.9	1410.	15080.	7.214	6.336
$\sigma$	62.02	391.1	1543.	7.258	8.729
$\lambda$ [1]	-0.001005	-0.04372	-0.9542	0.9303	1.404
原点	62090.	10350.	16700.	-0.5875	0.1195
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	-0.006450	-0.1576	-9.329	0.9247	1.019
$CV'$	-0.001005	-0.04374	-1.219	1.173	2.487
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	0.1559	0.2775	0.1023	1.006	1.378
$\alpha_3$ [1]	-0.003016	-0.1313	-5.468	5.134	22.84
$\frac{\sigma}{\lambda}$	-61690.	-8945.	-1617.	7.801	6.216
$E[X]$	397.9	1401.	14150.	11.44	16.78
$\sqrt{V[X]}$	62.02	391.6	3107.	14.11	41.44
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	—	—	—	2.054	1.827
繰り返し回数	1	5	54	7	4

\* [1] は無名数を表す.

表2. (つづき)

データ	"MIG"	"air1 "	"air2 "	"air3 "	"air4 "
標本数	19	6	23	29	15
モーメント推定値 1					
$\mu$	73.91	75.89	69.03	69.88	93.02
$\sigma$	8.751	73.37	94.73	60.52	131.1
$\lambda$ [1]*	0.08792	0.1698	0.5251	0.4302	0.4128
原点	-25.62	-356.1	-111.4	-70.80	-224.5
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	0.7426	0.1757	0.3826	0.4967	0.2930
$CV'$	0.08809	0.1710	0.5634	0.4509	0.4311
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	0.1184	0.9667	1.372	0.8660	1.409
$\alpha_3$ [1]	0.2650	0.5181	1.869	1.444	1.373
$\frac{\sigma}{\lambda}$	99.53	432.0	180.4	140.7	317.5
$E[X]$	74.30	82.17	95.70	83.52	121.3
$\sqrt{V[X]}$	8.802	74.97	116.7	69.57	149.0
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	4.600	6.069	5.195	4.946	5.760
モーメント推定値 2					
$\mu$	74.00	54.33	53.40	63.71	60.51
$\sigma$	8.907	51.53	58.13	51.06	66.94
$\lambda$ [1]	0.06650	0.8833	1.075	0.6878	1.222
原点	-59.94	-4.003	-0.6697	-10.53	5.708
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	0.5525	0.9314	0.9876	0.8582	1.104
$CV'$	0.06657	1.087	1.475	0.7777	1.857
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	0.1204	0.9484	1.089	0.8014	1.106
$\alpha_3$ [1]	0.2000	4.547	7.637	2.804	11.97
$\frac{\sigma}{\lambda}$	133.9	58.33	54.07	74.24	54.80
$E[X]$	74.30	82.17	95.70	83.52	121.3
$\sqrt{V[X]}$	8.937	93.69	142.2	73.14	214.6
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	4.897	4.066	3.990	4.307	4.004
繰り返し回数	25	47	12	14	16
局所最尤推定値					
$\mu$	74.16	38.97	49.13	60.40	56.04
$\sigma$	8.846	43.37	56.65	50.29	64.80
$\lambda$ [1]	0.03127	1.752	1.263	0.8478	1.404
原点	-208.7	14.22	4.262	0.7191	9.905
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	0.2622	1.574	1.095	1.012	1.215
$CV'$	0.03128	4.532	1.981	1.026	2.487
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	0.1193	1.113	1.153	0.8376	1.156
$\alpha_3$ [1]	0.09388	106.7	13.72	4.156	22.85
$\frac{\sigma}{\lambda}$	282.9	24.75	44.87	59.32	46.14
$E[X]$	74.30	129.1	103.8	85.69	133.6
$\sqrt{V[X]}$	8.853	520.6	197.3	87.15	307.7
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	5.645	3.209	3.804	4.083	3.832
繰り返し回数	48	18	6	7	5

\* [1] は無名数を表す。

表2. (つづき)

データ	"air5 "	"air6 "	"air7 "	"air8 "	"air9 "
標本数	14	30	27	24	9
モーメント推定値 1					
$\mu$	124.3	44.76	69.41	54.18	182.3
$\sigma$	93.24	59.87	59.79	56.10	208.5
$\lambda$ [1]*	0.1401	0.4689	0.2440	0.3443	0.1687
原点	-541.3	-82.92	-175.6	-108.8	-1054.
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	0.1867	0.3506	0.2833	0.3325	0.1475
$CV'$	0.1408	0.4959	0.2477	0.3547	0.1699
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	0.7501	1.338	0.8613	1.036	1.144
$\alpha_3$ [1]	0.4251	1.610	0.7582	1.109	0.5145
$\frac{\sigma}{\lambda}$	665.6	127.7	245.0	163.0	1236.
$E[X]$	130.9	59.60	76.81	64.12	200.0
$\sqrt{V[X]}$	94.62	70.68	62.52	61.33	213.0
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	6.501	4.850	5.501	5.094	7.120
モーメント推定値 2					
$\mu$	117.4	33.89	63.72	45.50	148.3
$\sigma$	89.12	39.84	54.84	45.09	183.3
$\lambda$ [1]	0.2945	0.9967	0.4536	0.7227	0.5263
原点	-185.2	-6.089	-57.18	-16.89	-200.0
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	0.3881	0.8477	0.5270	0.7293	0.4258
$CV'$	0.3010	1.304	0.4779	0.8282	0.5649
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	0.7589	1.176	0.8606	0.9910	1.236
$\alpha_3$ [1]	0.9303	6.129	1.543	3.053	1.875
$\frac{\sigma}{\lambda}$	302.6	39.98	120.9	62.40	348.2
$E[X]$	130.9	59.60	76.81	64.13	200.0
$\sqrt{V[X]}$	95.13	85.66	64.04	67.10	226.0
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	5.713	3.688	4.795	4.134	5.853
繰り返し回数	58	15	29	20	54
局所最尤推定値					
$\mu$	95.42	29.87	56.22	39.06	37.77
$\sigma$	83.70	37.99	53.18	43.11	97.88
$\lambda$ [1]	0.8390	1.248	0.7516	1.059	2.735
原点	-4.348	-0.5643	-14.53	-1.647	1.982
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	0.9564	0.9815	0.7946	0.9595	1.055
$CV'$	1.011	1.936	0.8714	1.439	42.14
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	0.8772	1.272	0.9459	1.104	2.592
$\alpha_3$ [1]	4.065	13.06	3.276	7.296	74940.
$\frac{\sigma}{\lambda}$	99.77	30.44	70.75	40.71	35.78
$E[X]$	137.5	65.75	79.31	69.68	1510.
$\sqrt{V[X]}$	143.4	128.4	81.77	102.6	63550.
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	4.603	3.416	4.259	3.706	3.577
繰り返し回数	17	6	11	9	28

\* [1] は無名数を表す.

表2. (つづき)

データ	"air10"	"air12"	"air13"	"nitrate"	"sulfate"	"rainfall"
標本数	6	12	16	196	196	196
モーメント推定値 1						
$\mu$	96.91	79.69	72.37	1.368	2.762	18.53
$\sigma$	113.4	108.7	59.59	1.101	2.482	26.14
$\lambda$ [1]*	0.1679	0.4915	0.3153	0.7147	0.6760	0.7776
原点	-578.1	-141.4	-116.6	-0.1721	-0.9089	-15.09
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	0.1436	0.3604	0.3829	0.8883	0.7524	0.5512
$CV'$	0.1691	0.5227	0.3233	0.8165	0.7612	0.9113
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	1.170	1.364	0.8234	0.8046	0.8985	1.411
$\alpha_3$ [1]	0.5122	1.711	1.004	2.994	2.725	3.491
$\frac{\sigma}{\lambda}$	675.1	221.1	189.0	1.540	3.671	33.62
$E[X]$	106.5	108.1	82.00	1.817	3.705	30.40
$\sqrt{V[X]}$	115.8	130.4	64.21	1.624	3.512	41.46
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	6.515	5.399	5.242	0.4320	1.301	3.515
モーメント推定値 2						
$\mu$	64.39	65.03	64.45	1.349	2.676	16.86
$\sigma$	81.35	78.14	50.29	1.027	2.165	19.26
$\lambda$ [1]	0.8569	0.8957	0.6309	0.7796	0.8044	1.053
原点	-30.56	-22.21	-15.26	0.03080	-0.01559	-1.437
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	0.6782	0.7454	0.8085	1.023	0.9942	0.9215
$CV'$	1.041	1.109	0.6993	0.9145	0.9538	1.425
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	1.264	1.202	0.7804	0.7618	0.8091	1.143
$\alpha_3$ [1]	4.252	4.693	2.440	3.508	3.729	7.164
$\frac{\sigma}{\lambda}$	94.94	87.24	79.71	1.318	2.692	18.29
$E[X]$	106.5	108.1	82.00	1.817	3.705	30.40
$\sqrt{V[X]}$	142.7	144.5	68.01	1.633	3.549	45.35
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	4.553	4.469	4.378	0.2760	0.9903	2.907
繰り返し回数	49	13	21	6	7	9
局所最尤推定値						
$\mu$	30.74	41.22	59.67	1.342	2.670	15.44
$\sigma$	58.92	69.35	49.23	1.027	2.165	18.80
$\lambda$ [1]	2.278	1.777	0.8444	0.7932	0.8039	1.240
原点	4.872	2.185	1.362	0.04751	-0.02373	0.2839
$\lambda \frac{\mu}{\sigma}$ [1]	1.188	1.056	1.023	1.037	0.9912	1.019
$CV'$	13.35	4.744	1.020	0.9360	0.9530	1.912
$\frac{\sigma}{\mu}$ [1]	1.917	1.683	0.8251	0.7651	0.8110	1.218
$\alpha_3$ [1]	2418.	121.0	4.120	3.628	3.725	12.73
$\frac{\sigma}{\lambda}$	25.87	39.03	58.31	1.294	2.693	15.16
$E[X]$	351.1	191.4	84.64	1.820	3.697	33.00
$\sqrt{V[X]}$	4622.	897.7	84.93	1.659	3.546	62.57
$\log\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)$	3.253	3.664	4.066	0.2580	0.9908	2.719
繰り返し回数	23	18	8	2	1	6

\* [1] は無名数を表す。



## On Estimation of a 3-parameter Lognormal Distribution with Unknown Shifted Origin

Koji Kanefuji

(The Institute of Statistical Mathematics)

Kōsei Iwase

(Department of Applied Mathematics, Hiroshima University)

Iwase and Seto (1990), Iwase and Hirano (1990), and Seto et al. (1992) proposed a 2-parameter lognormal distribution without the application of logarithmic transformation to a value which has a physical dimension. Iwase and Kanefuji (1994) used this idea to construct a 3-parameter lognormal distribution with unknown shifted origin. Two types of moment estimators and locally maximum likelihood estimator were derived from this 3-parameter lognormal distribution, and were confronted with 13 sets of data.