子上のイジング模型を考えた．図1の上の点線が“適応的サンプリング”によるもので，データ点1個を追加するごとにそれまでのデータ全体を使って周辺確率を計算し，次のデータ点をとるという方法で得た結果である（周辺確率は50MCSを捨てたあとの100MCSで計算．また，周辺確率が0.5に“もっとも近い”点をとるかわりに，“もっとも近い点に近い”点を複数候補に選んで，その中からランダムに選んだ)．下の折線は比較用の“ランダムサンプリング”によるもので，単にその時点で残った点のなかからランダムに次のデータ点を選んでいった場合である．“適応的サンプリング”の方がすぐれていることがわかる．

図1の結果は，模擬データやサンプリングのプロセスについて平均したものではないが，もう少し大きさが小さくて結合定数の小さい系で何回も平均をとって調べた結果もあり，同じような結論が得られている．報告会ではそれについても話した．

また，格子上の33％の点が観測されており，66％の点が未知であるという時点での“適応的サンプリング”のデータ点（既知の画素）の分布を図2に示した（推定されたパターンの図ではないことに注意）．不規則なリング状の分布が現れているが，これは真のパターン（図3）の黒のクラスターと白のクラスターの境界に対応すると考えられる．

関数空間上の線形計画問題に対する主双対内点法

伊　藤　　　聡

文部省在外研究員として米国ノース・キャロライナ州立大学滞在中，同大学数学科C.T. Kelley教授およびドイツ・トリア大学数学科E.W. Sachs教授とともに，関数空間上の線形計画問題に対する主双対内点法の理論および実装に関する研究を行った．

1984年にKarmarkarが多項式オーダーの新しい解法を発表して以来，内点法と呼ばれる一連のアルゴリズムは線形計画問題その他に対する有力な計算手法として認識されている．内点法は反復法であり，各反復において連立1次方程式を解くことにより探索方向を求める．計算時間の多くがこの連立1次方程式を解くことに費やされるため，これを如何に効率的に解くかが内点法の実装の鍵を握っている．また大規模な問題に対しては係数行列の疎構造を積極的に利用することも必要不可欠である．

一方，ここ数年集中定数系や分布定数系における離散時間の最適制御問題を，SQP（逐次2次計画法）の枠組みの中で，内点法を用いて解こうとする試みもいくつか行われている（S. Wright (1993) およびLeibfritz and Sachs (1994) 参照)．対象となっている問題は連続時間の最適制御問題を時間的・空間的に離散化して得られた潜在的に大規模な有限次元の非線形計画問題であり，彼らはSQPの各反復に現われるラグランジュ関数のヘッセ行列および制約関数のヤコビアン行列の疎構造を利用したアルゴリズムを提案している．

以上を背景にして，本研究では，連続時間の最適制御問題に直接適用することを目的として，まず関数空間上の線形計画問題に対する内点法アルゴリズム（特に主双対内点法）について考察した（主双対内点法については，Megiddo (1989), Kojima et al. (1989), Monteiro and Adler (1989) 等を参照)．ただし，ヒルベルト空間L^2の正錐および負錐は内点を持たないため，内点の定義として通常とは異なるものを用いる必要がある．また無限次元空間上で考えているため，内点法の各反復における連立1次方程式（正確には，双対変数の探索方向を求めるための1次方程式）を直接法で厳密に解くことはもはや意味を持たず，反復法を用いて近似的に解くことが必要となる．

反復法を用いる際，初期段階では粗く，最適解に近づいていくにつれて高い精度で解いてい

くのが得策である．このような観点から，本研究ではDembo et al. (1982) による近似ニュートン法の考えを取り入れ，相対誤差を制御することにより内点法の近似的な実装を試みた．双対変数の探索方向を反復法を用いて近似的に求めた影響は主問題の実行可能条件のみに現われる．したがって，初期点として双対問題に対する許容解を選べば，上述の意味での近似的な実装を行っても，その許容性は維持される．このような初期点を用いた場合について双対ギャップ列の局所的収束性に関する考察を行った．

反復法として具体的には共役勾配法 (CG法) を用いるが，近似的な実装を行う際には係数作用素に対する前処理 (preconditioning) が不可欠である．一般的に有効なpreconditionerは存在しないと思われるが，最適制御問題に適用する場合，係数作用素は一般に状態方程式および状態制約条件に起因する密な部分と制御変数に関する制約条件に起因する疎な部分が存在し，後者を用いたpreconditionerの構成は容易である．研究報告会当日は，制御変数および状態変数に関して上下限制約を持つ線形最適制御問題に対する数値実験結果を報告した．

参考文献

Dembo, R., Eisenstat, S. and Steihaug, T. (1982). Inexact Newton methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, **19**, 400-408.

Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A. (1989). A primal-dual interior point algorithm for linear programming, *Progress in Mathematical Programming, Interior Point and Related Methods* (ed. N. Megiddo), 29-47, Springer, New York.

Leibfritz, F. and Sachs, E.W. (1994). Numerical solution of parabolic state constrained control problems using SQP- and interior-point-methods, *Large Scale Optimization: State of the Art* (eds. W.W. Hager, D.W. Hearn and P.M. Pardalos), 251-264, Kluwer, Dordrecht.

Megiddo, N. (1989). Pathways to the optimal set in linear programming, *Progress in Mathematical Programming, Interior Point and Related Methods* (ed. N. Megiddo), 131-158, Springer, New York.

Monteiro, R.C. and Adler, I. (1989). Interior path following primal-dual algorithms, part 1: linear programming, *Math. Programming*, **44**, 27-42.

Wright, S.J. (1993). Interior point methods for optimal control of discrete-time systems, *J. Optim. Theory Appl.*, **77**, 161-174.