

複雑な系の活性化と相関関数*

東北大学 原 啓明¹・小山 順二²

(1992 年 9 月 受付)

1. はじめに

神経回路網や地殻の断層面を構成する要素群は複雑な幾何学構造をしている。これらの体系では構造を特徴づける長さを見つけることが困難である。一般に、空間構造や、時系列パターンに特徴的な長さが欠如した体系を複雑な系という。複雑な系に外力を加えると、構成要素の状態が活性化され、この状態変化は、いろいろ興味深い確率過程として記述される (Koyama and Hara (1991, 1992))。

最近、複雑な系に関する研究がいろいろな面 (Schroeder (1991), Mehaute (1991)) から進められている。特に、断層面の活性化の問題を弱定常過程として調べると、状態変化の相関関数はべき則で緩減衰 (Koyama and Hara (1991)) の長時間振舞いをする。また、簡単な系におけるブラウン粒子の速度相関関数は指数減衰の振舞いであることが分かっている。しかし剛体球や剛体円板からなる液体モデルのコンピュータシミュレーション (Alder and Wainwright (1967)) によると速度相関関数はべき則で緩減衰する。近年、この結果に対する数学的構造 (Okabe (1986)) が解明されている。高分子の系でも複雑な体系では緩減衰の活性化が見られる。また微視的な内部状態の活性化がマクロに発現される点で興味深い生体の行動においては、摂食行動の滞在時間の分布がべき則で緩減衰すること (Shimada et al. (1989)) が観測され、そのモデルが提案されている。一方、べき則に従う長時間振舞いはフーリエ変換を行えば $1/f$ (f : 振動数) になる (Furukawa (1985a, 1985b))。これは複雑な系で広く観測されている普遍的なゆらぎ現象である。一般に、べき則で緩減衰する時間の関数は時間スケール変換に関して不変である。

本稿では、複雑な系の活性化を時間スケール変換に対して共変な Langevin 方程式で記述し、活性化による状態変化の相関関数を具体的に求める。さらに、相関関数の固有状態による Karhunen-Loève 展開で、活性化の状態変化を表現する。相関関数の固有状態はスケール変換で得られた構成要素の局所状態に対応する。最後に、平均操作を別にすれば厳密な解が求まる形に Langevin 方程式の非線形化を行う。

2. 複雑な系の活性化

複雑な系のモデルとして図 1(a) で示すユニット群の集合を考える。ユニットの内部状態は、外力によって励起された状態に活性化されるものとする。活性化されたユニット群は、図 1(b) で示すサークルで囲まれたクラスターとして表現されるものとしよう (Hara and Okayama

* 本稿は、統計数理研究所 共同研究 (3-共会-4) における発表に基づくものである。

¹ 工学部：〒 980 仙台市青葉区荒巻字青葉。

² 理学部：〒 980 仙台市青葉区荒巻字青葉。

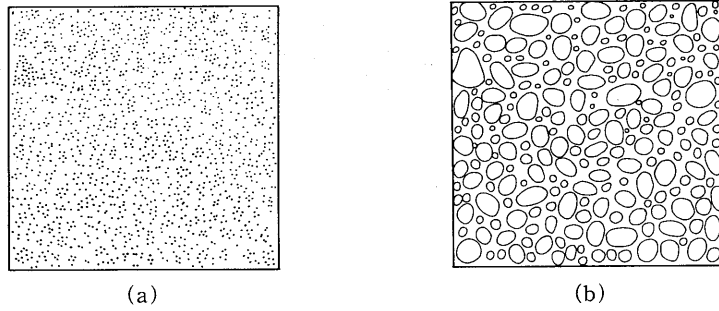


図1. 複雑な系. (a) 外力を加える前のユニット群. (b) 外力による活性化されたユニット群のパターン.

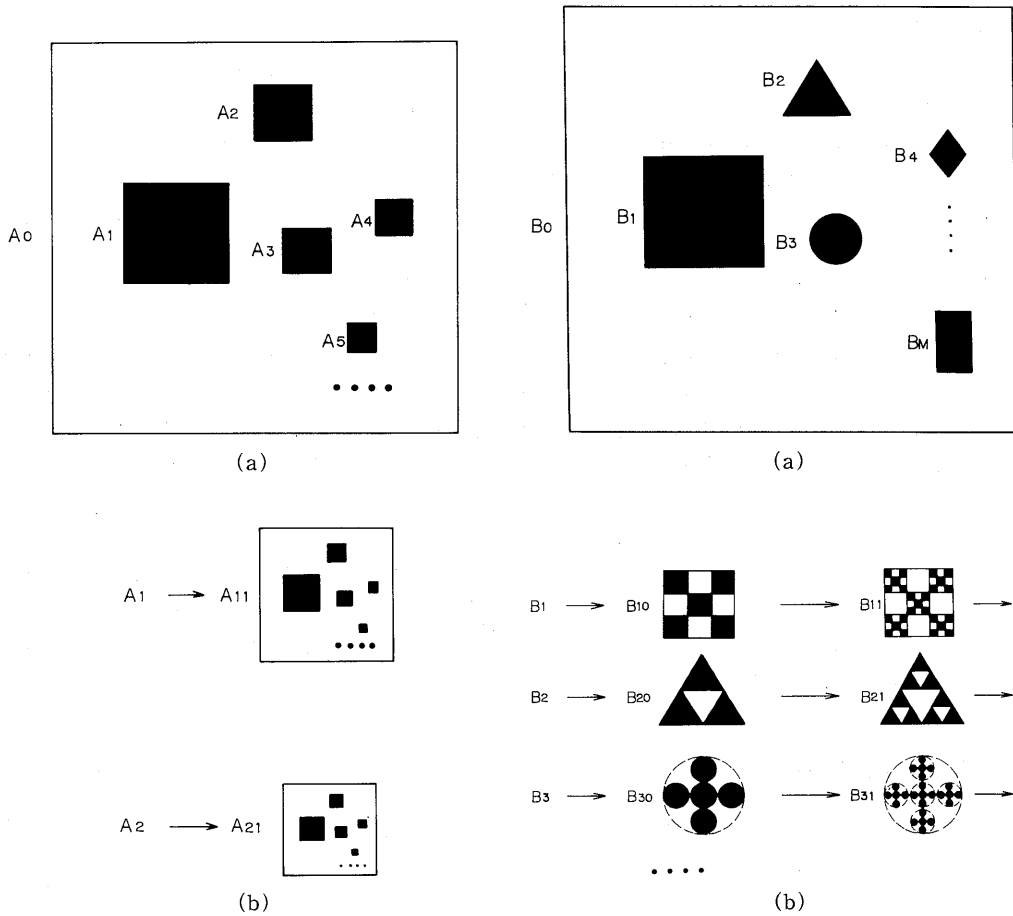


図2. 複雑な系のモデル. (a) Type Iにおけるクラスター A_i ($i=1, 2, \dots$). (b) スケール変換されたクラスターの構造.

図3. 複雑な系のモデル. (a) Type IIにおけるクラスター B_i ($i=1, 2, \dots$). (b) スケール変換されたクラスターの局所構造.

(1988), Hara et al. (1992)). サークル外の媒質中にも、精度上の問題から観測にかからない活性化されたユニット群がある。この事は、逆にクラスター内部には活性化されていないユニット群が含まれることを意味する。

図 2, 3 は活性化されたクラスターのパターンを図形化して描いた複雑な系のモデルである。 $A_i (i=1, 2, \dots)$, $B_i (i=1, 2, \dots)$ はそれぞれサークルで囲まれたクラスターを表す。Type I は各クラスター内に活性化されたユニット群が含まれ、系の構造がクラスターに内蔵される場合である。Type II は、各クラスターが後で述べるスケール則 ((2.4)-(2.6) 参照) に対する Generator になっている場合である。

2.1 Type I

Type I の場合、或精度で観測した活性化された状態 $X(t)$ は次の Langevin 方程式

$$(2.1) \quad \frac{dX(t)}{dt} + \gamma X(t) = N(t)$$

$$(2.2) \quad \langle N(t) \rangle = 0$$

$$(2.3) \quad \langle N(t_1)N(t_2) \rangle = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2)$$

によって記述されるものとする。 γ は減衰因子を表す。これは、 $X(t)$ と活性化されていないユニット群である媒質との結合因子を表す。 $N(t)$ は白色ノイズである。さらに精度をあげて観測すると体系の微小な状態変化は、時間を t から $t' = bt (b < 1)$ へとスケール変換した方程式で記述される。つまり (2.1)-(2.3) と“共変”な方程式によって記述されるものとする。添字“0”はスケール変換の Generator、 $a (b < 1)$ は X の振幅を規定するスケール因子である (Koyama and Hara (1991), Hara and Koyama (1992a, 1992b)) とすると、共変な方程式を得るための活性化された状態、減衰因子に関するスケール則はそれぞれ

$$(2.4) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{1/2} X_0(bt) = X_1(t)$$

$$(2.5) \quad \gamma b = \gamma_1$$

$$(2.6) \quad \sqrt{ab} N_0(bt) = N_1(t)$$

で与えられる。このとき共変な方程式は

$$(2.7) \quad \frac{dX_1(t)}{dt} + \gamma_1 X_1(t) = N_1(t)$$

で与えられる。また、白色ノイズは次式で規定される。

$$(2.8) \quad \langle N_1(t) \rangle = 0$$

$$(2.9) \quad \langle N_1(t_1)N_1(t_2) \rangle = a\sigma^2 \delta(t_1 - t_2)$$

さらに、逐次高精度で観測される状態変化は、次数 n のスケール則で規定された同様な共変な方程式系で記述されるものとする。図 4 は $X_0(t)$ と $X_1(t)$ の振幅を模式的に示す。

スケール則で得られた各状態は統計的に無相関で、系全体の状態変化は各ステージのスケール変換で得られた状態の和であると仮定すると、活性化された内部状態 $X(t)$ は

$$(2.10) \quad X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^{n/2} X_0(b^n t)$$

と表される。

式 (2.10) から相関関数 $C(\tau) (= \langle X(t+\tau)X(t) \rangle)$ は

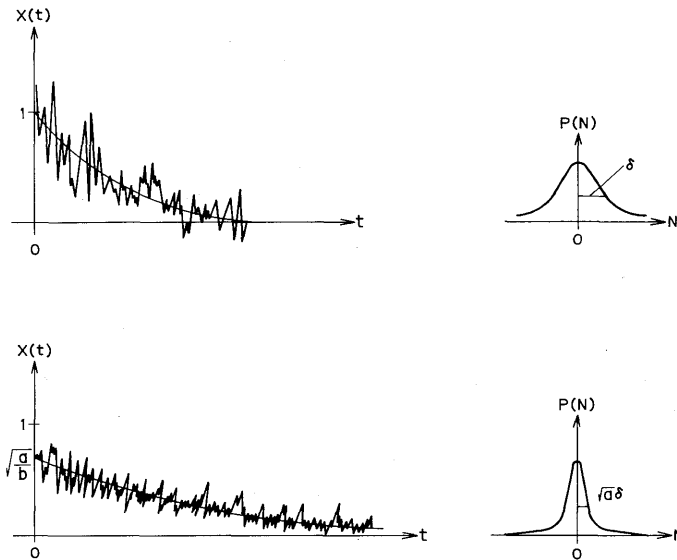


図4. 時間スケール変換による状態変化とノイズの分散.

$$(2.11) \quad C(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n C_0(b^n \tau)$$

$$(2.12) \quad C_0(\tau) = \langle X_0(t+\tau)X_0(t) \rangle \left(= \frac{\sigma^2}{2\gamma} e^{-\gamma\tau} \right)$$

と表される。ただし $X_0(0)=0$ とした。 $C_0(\tau)$ の具体的な表式は (2.1) の解を $X(t)=X_0(t)$ とし、(2.10) に代入すると、指数型として得られる。従って $C(\tau)$ の表式はこの指数型の無限和として得られる。 $n \rightarrow \infty$ で、因子 $(a/b)^n$ は減少すること、一方、因子 $\exp(-b^n \gamma \tau)$ は増加することに注意すると、無限和は鞍点法で評価できる。結果は

$$(2.13) \quad C(\tau) \sim \frac{\sigma^2}{2\gamma} A_\xi \tau^{-\xi+1}$$

$$(2.14) \quad A_\xi = e^{(\xi-1)[\ln(\xi-1)-1]}, \quad \xi = \ln a / \ln b$$

となる。

スケール因子 a, b の大きさを具体的に決定するため、 $C(\tau)$ を Fourier 変換したパワー・スペクトラム $S(\omega)$ を変数 ω に関して ω_0 から ω_∞ まで積分した“総量エネルギー”

$$(2.15) \quad E(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_\infty} S(\omega) d\omega$$

を導入する。つまりスケール因子で決まる ξ は極値問題 $dE(\xi)/d\xi=0$ によって決定される。 $\xi \rightarrow 1$ のとき $E(\xi)$ は最小になり、 $S(\omega)$ の振舞いは $1/f$ となる (Koyama and Hara (1991, 1992))。

2.2 Type II

Type II の場合、Generators になるクラスター $B_i (i=1, 2, \dots)$ のパターンを表すには、さらに添字 (i) が必要となる。すなわち、Langevin 方程式は

$$(2.16) \quad \frac{dX^{(i)}(t)}{dt} + \gamma^{(ik)}X^{(k)}(t) = N^{(i)}(t)$$

となる。 $\gamma^{(ik)}$ は Generators (i, j) 間で決まる減衰因子である。 $\gamma^{(ik)}$ が対角化される変換 $X \rightarrow Y (= TX)$ を行くと (2.16) は次式で与えられる。

$$(2.17) \quad \frac{dY^{(i)}(t)}{dt} + \tilde{\gamma}^{(ii)}Y^{(i)}(t) = F^{(i)}(t)$$

$$(2.18) \quad \langle F^{(i)}(t) \rangle = 0$$

$$(2.19) \quad \langle F^{(i)}(t_1)F^{(i)}(t_2) \rangle = \tilde{\sigma}^{(i)2} \delta(t_1 - t_2)$$

ただし $\tilde{\gamma} = T\gamma T^{-1}$ 、また $F = TN$ 、 $\tilde{\sigma} = T\sigma$ はそれぞれ変換されたノイズとその分散を表す。

Generator (i) に対する数密度 $\rho^{(i)}$ を導入し、Generator (i) は (2.4)-(2.6) と同様なスケール則を満足し、活性化された状態には、方程式系 (2.17) を共変に保つ対角化された Langevin 方程式で記述されることを要請する。このとき相関関数は

$$(2.20) \quad C(\tau) = \sum_{i=1}^n \rho^{(i)} C^{(i)}(\tau)$$

$$(2.21) \quad C^{(i)}(\tau) = \langle Y^{(i)}(t+\tau)Y^{(i)}(t) \rangle \\ = \frac{\tilde{\sigma}^{(i)2}}{2\tilde{\gamma}^{(i)}} \sum_{n_i=0}^{\infty} \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^{n_i} e^{-b_i^2 \tilde{\gamma}^{(i)} \tau}$$

で与えられる。式 (2.11) と同様な鞍点法で (2.21) の和を評価し、(2.20) に代入すると

$$(2.22) \quad C(\tau) = \sum_{i=1}^n g_i \tau^{-\xi_i+1}$$

$$(2.23) \quad g_i = \rho^{(i)} \frac{\tilde{\sigma}^{(i)2}}{2\tilde{\gamma}^{(i)}} A_{\xi_i} \quad (\xi_i = \log a_i / \log b_i)$$

となる。

g_i は $\tau^{-\xi_i+1}$ の緩減衰に対する複合的な重みを表し、 A_{ξ_i} による ξ_i 依存性も含んでいる。これは、各 Generators の分布を特徴づける重要な量である。この分布が一様で ξ_i 依存性による g_i の変化が小さいとしてこれを無視すると、 g_i は i だけで決まる関数となる。

普遍則として $C(\tau)$ の Fourier 変換で決まるパワー・スペクトラムの振舞いが $1/f$ であると仮定すれば、逆に $C(\tau)$ の振舞いには $\tau^{-1-\eta}$ の緩減衰が要請される。この仮定を要請すると、 $g(x) (= g_i)$ に対する関数方程式が得られる：

$$(2.24) \quad g(x) = a_{\eta} b_{\eta} g(b_{\eta} x)$$

$$(2.25) \quad a_{\eta} = \tau^{-\eta}, \quad b_{\eta} = \eta \ln \tau.$$

これは $g(x)$ に対する非線形スケール則を与えるもので、解は

$$(2.26) \quad g(x) \sim x^{\alpha(\tau)}$$

$$(2.27) \quad \alpha(\tau) = \frac{\eta \ln \tau}{\ln |\eta \ln \tau|}$$

となる (Hara and Koyama (1992a)).

3. Karhunen-Loève 展開

前章まで、活性化された状態はスケール則で規定された共変な方程式系の解である“局所的活性化の状態”の線形結合によって表現されるものと考えた。つまり局所的活性化の状態は互

いに統計的に無相関であると仮定し、具体的に相関関数の振舞いを調べた。

本章では、Langevin 方程式を摂動論で取扱い、上に述べた局所的活性化の状態に対応する相関関数の固有関数を定義する。この固有状態は統計的に無相関である局所的活性化の状態と同じ直交性の構造を持っていることを証明する。つまり、これは体系の状態が Karhunen-Loève 展開による直交固有関数系の線形結合で表現されることを意味する。

まず、小さなパラメータ ε を含む次の Langevin 方程式

$$(3.1) \quad \frac{dX}{dt} + \varepsilon \gamma(t) X(t) = g(t) N(t)$$

を考える。 $g(t)$ は白色ノイズ $N(t)$ ((2.3) 参照) の振幅を表す。

式 (3.1) の解は積分過程として表現される。特に $\varepsilon=0$ の解を $X^{(0)}(t)$ 、摂動解を $X^{(1)}(t)$ で表すと

$$(3.2) \quad X(t) = X^{(0)}(t) + \varepsilon X^{(1)}(t).$$

$t \rightarrow \infty$ では、ノイズが減衰する振舞いであること、つまり、 $g(t) \sim t^{-A}$ を仮定すれば

$$(3.3) \quad \begin{aligned} C_0(t_1, t_2) &= \langle X^{(0)}(t_1) X^{(0)}(t_2) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{t_1 \wedge t_2} g(s)^2 ds \end{aligned}$$

となり、 $C_0(t_1, t_2)$ はスケール則を満たすことが分かる。記号 \wedge は t_1 と t_2 の最小値を示す。 $C_0(t_1, t_2)$ の関数形から、次の固有値積分方程式

$$(3.4) \quad \int_0^T C_0(t, s) \varphi_n(s) ds = \lambda_n \varphi_n(t)$$

を解くことが出来る。すなわち、(3.4) の両辺を t に関して微分すると、Bessel の微分方程式が得られ、その解として Bessel の固有関数系 $\{\varphi_n\}$ が得られる (Maccone (1981))。

一方、(3.1) で $\varepsilon=1$ とおいた形式解は

$$(3.5) \quad X(t) = \int_{-\infty}^t f(t, s) d\xi(s)$$

$$(3.6) \quad f(t, s) = \begin{cases} e^{-\Phi(t)} e^{\Phi(s)} & (t > s) \\ 0 & (t < s) \end{cases}$$

$$(3.7) \quad d\xi(s) = [g(s)N(s) + X(-\infty)\delta(s)] ds$$

$$(3.8) \quad \Phi(t) = \int_0^t \gamma(s) ds$$

と表される。

固有関数系 $\{\varphi_n(t)\}$ による $f(t, s)$ の展開から

$$(3.9) \quad f(t, s) = \sum_n x_n(t) \varphi_n(s)$$

が得られ、 $X(t)$ は

$$(3.10) \quad X(t) = \sum_n x_n(t) Z_n(T)$$

$$(3.11) \quad Z_n(T) = \int_0^T \varphi_n(s) d\xi(s)$$

と表される。

$Z_n(T)$ の直交性は、白色ノイズ $N(t)$ が直交するガウス過程であることと $\{\varphi_n(t)\}$ の直交性

を使用して証明される：

$$(3.12) \quad \langle Z_n(T)Z_m(T) \rangle = \delta_{n,m} .$$

式 (3.12) の直交性によって、(3.10) は $Z_n(T)$ による $X(t)$ の直交分解を表現していることが分かる。

次に、 $C(t, s)$ の性質を使って $X(t)$ の直交分解を実行する。つまり $C(t, s)$ の固有関数展開を行う。

$$(3.13) \quad C(t, s) (= \langle X(t)X(s) \rangle) = \sum_n x_n(t)x_n(s)$$

両辺で $\varepsilon \rightarrow 0$ をとり、(3.4) から得られた $C_0(t, s)$ の表式と極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ をとった (3.10) を比べると

$$(3.14) \quad X_n^{(0)}(t) = \sqrt{\lambda_n} \varphi_n(t) Z_n(T)$$

が得られる。これを (3.2) に代入すると

$$(3.15) \quad X(t) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \left[\int_0^t (\delta(t-s) - \varepsilon \gamma(s)) \varphi_n(s) ds \right] Z_n(T)$$

が得られる。式 (3.14) と (3.15) の表式は Karhunen-Loève 展開である。同様な議論は Type II に対しても可能である (Hara and Koyama (1992b))。

4. Langevin 方程式

一般に非線形微分方程式を解くことは困難である。本章では、これまで考えた状態変化の線形発展方程式を平均操作を別にすれば解が厳密に求まる形に非線形化する。つまり、Bernoulli の微分方程式と見なすことが出来る非線形 Langevin 方程式

$$(4.1) \quad \frac{dX(t)}{dt} + \gamma(t)X(t) = -\lambda(t)X^3(t) + X^\nu(t)\tilde{N}(t) \quad (\nu=1, 3)$$

$$(4.2) \quad \langle \tilde{N}(t) \rangle = 0$$

$$(4.3) \quad \langle \tilde{N}(t_1)\tilde{N}(t_2) \rangle = \Gamma_\varepsilon(t_1 - t_2)$$

を提案して、 $X(t)$ の状態変化を考える。右辺の $X^\nu(t)$ ($\nu=1, 3$) はガウスノイズ $\tilde{N}(t)$ に対する振幅の変調を与える。式 (4.1) に平均操作を施すと (4.1) はスピンの動的特性を調べたときの非線形 Langevin 方程式 (Suzuki (1978)) と同じ効果を与える。式 (4.1) は $Z(t) = X^{-2}(t)$ の変換で $Z(t)$ に関する線形 Langevin 方程式になる。以下 $\nu=1$ の場合を考え、 $X(0)$ を x_0 で表すと、解は

$$(4.4) \quad X(t) = \pm x_0 \exp\left(\int_0^t [\gamma(t') - \tilde{N}(t')] dt'\right) \cdot [1 + x_0^2 Q_1(t)]^{-1/2}$$

$$(4.5) \quad Q_1(t) = 2 \int_0^t \lambda(t') \cdot \exp\left(-\int_0^{t'} [\gamma(t'') - \tilde{N}(t'')] dt''\right) dt'$$

となる。特に、 $t \rightarrow \infty$, $\gamma(t), \lambda(t)$ が定数 γ, λ である場合、 $e^{-2\Gamma(t)}$ に含まれる $e^{-2\gamma t}$ のために、 $Q_1(t)$ の寄与が小さくなる。このことに注意して、(4.2) の $\langle \rangle$ を

$$(4.6) \quad \langle e^{i\int \tilde{N}(s) ds} \rangle \langle [1 + x_0^2 Q_1(t)]^{-1/2} \rangle$$

で近似し、さらにノイズの相関 $\Gamma_\varepsilon(t_1 - t_2)$ を白色で近似し

$$(4.7) \quad \langle e^{\int_0^t \tilde{N}(s) ds} \rangle \approx 1 + \frac{\sigma^2}{2} t \approx e^{(\sigma^2/2)t}$$

で表すと、最終的な解は

$$(4.8) \quad x(t) = \begin{cases} x_0 e^{-(\gamma-\gamma_c)t} + o(e^{-3(\gamma-\gamma_c)t}) & (\gamma > \gamma_c) \\ \pm \left(\frac{\gamma_c - \gamma}{\lambda} \right)^{1/2} + o(e^{2(\gamma-\gamma_c)t}) & (\gamma < \gamma_c) \end{cases}$$

$$(4.9) \quad \gamma_c \equiv \frac{\sigma^2}{2}$$

と求められる。

$\nu=3$ の場合に対しても、同様な議論が可能である (Hara and Obata (1992)). 従って式 (4.1) で $\nu=0$ とした非線形微分方程式の代わりに、本章で述べた形式でノイズ項を表現すれば、解が求められる。勿論、平均操作のもとでは、これらの非線形微分方程式は従来のゆらぎを含む式 (4.1) で $\nu=0$ 非線形方程式と同じ状態変化を表現する。

5. 結 論

本論文では、神経回路網や地殻の断層面の構造で代表される複雑な系に外力を加え、体系の内部状態が励起された、いわゆる活性化された状態の時間発展を調べた。複雑な系のモデルとして2つのタイプ (Type I と Type II) を考えた。体系の状態変化は、時間のスケール則に対して共変な Langevin 方程式で記述されるものとした。さらに、解である状態変数の相関関数を求め、その長時間の振舞いがべき則によって表現されることを示した。C(τ) の具体的な計算を実行するには、各クラスターの部分集合に関して時間のスケール変換で得られた局所的活性化の状態変化の表現式が必要になる。とくに、体系の状態は Langevin 方程式を摂動論で取扱うと、相関関数の固有関数の線形結合である Karhunen-Loève 展開で表現されることを証明した。最後に、以上の Langevin 方程式が厳密に解かれる形に非線形効果を取り入れる方法を提案した。

Langevin 方程式の共変性は Fokker-Planck 方程式で表現した場合にどうなるか? また、このとき分布関数族による計量空間の α 接続係数 (Amari (1985)) とスケール因子 (フラクタル次元) との関係 (原 (1991)), さらに複素確率過程に拡張した場合におけるスケール変換とゲージ変換の関係など興味深い問題がある。

参 考 文 献

- Alder, B.J. and Wainwright, T.E. (1967). Velocity autocorrelations for hard spheres, *Phys. Rev. Lett.*, **18**, 988-990.
- Amari, S. (1985). *Differential Geometrical Methods in Statistics*, Springer, Berlin.
- Furukawa, H. (1985a). $1/f$ noise spectrum on self-similar cascade of bifurcation processes, *Phys. Lett. A*, **110**, 316-318.
- Furukawa, H. (1985b). $1/f$ noise and turbulence from a self-similar decay of fluctuation, *Progr. Theoret. Phys.*, **73**, 1141-1150.
- 原 啓明 (1991). Weber-Fechner 則の一般化, 物性研究, **57**, 58-62.
- Hara, H. and Koyama, J. (1992a). Scaled Langevin equation for complex nonlinear scaling rule for weight function (投稿中).
- Hara, H. and Koyama, J. (1992b). Karhunen-Loève expansion for Langevin equation (投稿準備).
- Hara, H. and Obata, T. (1992). Role of fluctuations in thermodynamic system: exact solution of nonlinear Langevin equation (投稿準備).

- Hara, H. and Okayama, S. (1988). Fractal dimension and scaling behavior of cracks in a random medium "frequency-rank" distribution function described by generalized random walks, *Phys. Rev. B*, **37**, 9504-9511.
- Hara, H., Chung, O.K. and Koyama, J. (1992). Dynamical activation processes described by generalized random walks, *Phys. Rev. B*, **46**, 838-845.
- Koyama, J. and Hara, H. (1991). $1/f$ and $1/f^\alpha$ spectra from activation of random system by scaling Langevin equation, *Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations* (eds. T. Musha, S. Sato and M. Yamamoto), 549-553, Ohmsha, Tokyo.
- Koyama, J. and Hara, H. (1992). Scaled Langevin equation for complex system to describe $1/f^\alpha$ spectrum, *Phys. Rev. A*, **46**, 1844-1849.
- Maccone, C. (1981). Eigenfunction expansion for fractional Brownian motions, *Nuovo Cimento B*, **61**, 229-248.
- Mehaute, A.L. (1991). *Fractal Geometries. Theory and Applications*, Penton Press, London.
- Okabe, Y. (1986). On the theory of Brownian motion with the Adler-Wainwright effect, *J. Statist. Phys.*, **45**, 953-981.
- Schroeder, M. (1991). *Fractals, Chaos, Power Laws. Minutes from an Infinite Paradise*, Freeman, New York.
- Shimada, I., Kawazoe, Y. and Hara, H. (1989). ショウジョウバエの摂食行動のフラクタル性, *動物生理*, **6**, 101-107.
- Suzuki, M. (1978). Scaling theory of transient non-linear fluctuations and formation of macroscopic order, Supplement to *Progr. Theoret. Phys.*, **64**, 402-424.

Activation Processes of Complex System and Correlation Function

Hiroaki Hara

(Faculty of Engineering, Tohoku University)

Junji Koyama

(Faculty of Science, Tohoku University)

As a complex system, we propose a system composed of units. The units are grouped into clusters according to the respective activation processes for external forces. Total activation processes are assumed to be expressed by a sum of states for the clusters.

Here we consider activation processes which are described by a set of scaled Langevin equations (SLE). The SLE are given in "covariant" form. The states of the clusters are governed by the set of SLEs, and they are orthogonalized. Based on the present model, we get a response function corresponding to "Weierstrass function", which leads us to a long-time tail behavior or $1/f$ behavior in the Fourier transform. Finally, an exact soluble nonlinear form of Langevin is given to study the phase transition.