Rubin(1956)). 因子数を k より大きくしたとき，特殊因子に対応する負荷が追加されるだけで共通因子行列に関しては一意であるための十分条件（Tumura and Sato (1980)).

新しい結果として以下の3点を報告した.

(1)　Anderson and Rubin による必要条件を拡張し一意であるかどうかを調べやすくした.

(2)　行列の次数が大きいと部分行列の階数がおちることがある. そこで因子負荷行列が

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & O \end{pmatrix}$$

という形に対して，Anderson and Rubin, Tumura and Sato の十分条件をみたすための必要/十分条件を与えた.

(3)「大部分の要素が一意である行列」を提案し，そのための十分条件を与え利用例を示した. 行列が一意でないときには，何を推定しているのか一般に不明となる. しかし，行列の一部の要素のみが不定で他の多くの要素が一意であることがある. 両者を区別することにより，一意でない行列のすべての要素の推定を無意味とせずに一意である要素に対する推定を有効としうるので，有意義である.

本報告はその後の進展を含めて掲載予定（Sato (1992)）である.

参　考　文　献

Anderson, T.W. and Rubin, H. (1956). Statistical inference in factor analysis, *Proc. Third Berkeley Symp. on Math. Statist. Prob.*, Vol. 5, 111-150, Univ. of California Press, Berkeley.

Konishi, S. (1979). Asymptotic expansions for the distributions of statistics based on the sample correlation matrix in principal component analysis, *Hiroshima Math. J.*, **9**, 647-700.

Sato, M. (1989). Some comments on Shapiro's paper: identifiability of factor analysis, Tech. Report, No. 249, Statistical Research Group, Hiroshima University, Hiroshima.

Sato, M. (1992). A study of an identification problem and a substitute use of principal component analysis in factor analysis, *Hiroshima Math. J.*, **22** (to appear).

Shapiro, A. (1985). Identifiability of factor analysis: some results and open problems, *Linear Algebra Appl.*, **70**, 1-7.

Tumura, Y. and Sato, M. (1980). On the identification in factor analysis, *TRU Math.*, **16**(2), 121-131.

因子分析モデルにおける不適解の発生構造

大阪電気通信大学 工学部　猪　原　正　守

大阪府立大学 工学部　狩　野　　裕

1.　はじめに

因子分析モデルによって多次元データを解析する中で，独自分散推定値の一部がゼロになる問題が出現することがある. この問題は不適解問題と呼ばれ，その発生メカニズムについては，Driel (1978) によるモンテカルロ実験を始めとして多くの実験研究が行われている. 一方，Lawley and Maxwell (1971) は，最尤因子分析モデルを用いた解析において，$p+1(=p^*$ とおく）次元観測変量 $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_{p+1})^T$ に対する k 因子分析モデルの適合によって，初めの m 変量 $x_1, \ldots, x_m$ に対する独自分散 $\psi_1, \ldots, \psi_m$ がゼロと推定されたとき，モデルを

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda_{11} & O\\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}O\\e_2\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

と変更することを考えた．ただし，$\boldsymbol{x}_1=(x_1, \ldots, x_m)^T$, $\boldsymbol{x}_2=(x_{m+1}, \ldots, x_{p+1})^T$ であり，$\boldsymbol{\Lambda}_{11}$, $\boldsymbol{\Lambda}_{21}$, $\boldsymbol{\Lambda}_{22}$ のサイズはそれぞれ $m\times m$, $(p^*-m)\times m$, $(p^*-m)\times(k-m)$ であって，誤差変量 e_2 の分散 Ψ_2 は正値定符号行列である．そして，彼等は Maxwell（1961）の $p^*=10$ 変量に対する $k=4$ 因子をもつモデルによる解析によって，第 8 変量に対する独自分散 ψ_8 の推定値がゼロとなるが，モデル（1.1）は適合していると主張した．しかし，このデータに対しては x_8 を除去した周辺データ $\boldsymbol{x}^*$ に対して $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}+\boldsymbol{e}$ の因子分析モデルを当てはめると，$k=3$ 因子分析モデルが適合し，モデル（1.1）は必ずしも識別可能でないことを明らかにする．即ち，彼等の方法論と Maxwell（1961）データに対する結果は重大な疑問が残っていることを指摘する．

2. モデルにおける幾つかの命題

ここでの議論は因子分析モデルにおける識別問題と直接関わる．この領域の研究は Anderson and Rubin（1956）を始めとして Tumura and Sato（1980）など多くの人々によって行われてきている．

因子分析において，p^* 次元観測変量 $\boldsymbol{x}$ の分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ は

$$\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T+\boldsymbol{\Psi} \tag{2.1}$$

と表現される．ここで，行列 $\boldsymbol{\Lambda}(p^*\times k)$ はランク k, p^* 次元の対角行列 $\boldsymbol{\Psi}$ は正値定符号である．

さて，我々の議論の大前提として次の仮定を導入する．

仮定． p^* 次元観測変量 $\boldsymbol{x}$ を第 1 変量 x_1 と残りの p 次元ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ に分割するとき，条件付き変量 $\boldsymbol{x}_2\,|\,\boldsymbol{x}_1$ の分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_{22\cdot1}$ に対して，

$$\boldsymbol{\Sigma}_{22\cdot1}=\boldsymbol{\Lambda}_{2\cdot1}\boldsymbol{\Lambda}_{2\cdot1}^T+\boldsymbol{\Psi}_{2\cdot1} \tag{2.2}$$

の分解が存在する．ただし，行列 $\boldsymbol{\Lambda}_{2\cdot1}$ は $(p\times k)$ であり，$\boldsymbol{\Psi}_{2\cdot1}$ は正値定符号対角行列である．また，(2.2) における行列 $\boldsymbol{\Lambda}_{2\cdot1}$ は，任意の 1 行を削除しても互いに素なランク k の 2 つの部分行列が存在する．

このとき，次の 3 つの命題を証明することができる．なお，以降において $m=1$ とし，$\sigma_{11}=E(x_1^2)$, $\boldsymbol{\sigma}_{21}=E(\boldsymbol{x}_2x_1)$, $\boldsymbol{\Sigma}_{22}=E(\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2^T)$ とする．

命題 1． 仮定の下 $\boldsymbol{\sigma}_{21}$ がただ 1 つの non-zero 要素をもつならば $\boldsymbol{x}_2$ に対する分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ は識別可能な k 因子分解をもつが，$\boldsymbol{\Sigma}$ に対して存在する因子分解はあらゆる因子数に対して識別不可能である．

命題 2． 仮定の下で，次の 3 条件は互いに同値である．

（i） $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Lambda}_{2\cdot1}, \boldsymbol{\sigma}_{21})=k$
（ii） 行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ が k 因子分解をもつ：$\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T+\boldsymbol{\Psi}$
（iii） 行列 $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ が k 因子分解をもつ：$\boldsymbol{\Sigma}_{22}=\boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{\Lambda}_{22}^T+\boldsymbol{\Psi}_{2\cdot1}$

このとき，（ii）と（iii）の分解は識別可能である．

命題 3. 仮定および $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ が k 因子分解

$$\boldsymbol{\Sigma}_{22}=\boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{\Lambda}_{22}^{T}+\boldsymbol{\Psi}_{2}$$

をもち，行列 $\boldsymbol{\Lambda}_{22}(p\times k)$ は，任意の 2 行を削除しても互いに素なランク k の 2 つの部分行列が存在するとする．このとき，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Lambda}_{2\cdot 1},\ \boldsymbol{\sigma}_{21})=k+1$ となるのは適当なスカラー $d(>0)$ と添字 j $(2\leqq j\leqq p+1)$ が存在して，

$$\boldsymbol{\Psi}_{2}=\boldsymbol{\Psi}_{2\cdot 1}+d\boldsymbol{e}_{j}\boldsymbol{e}_{j}^{T}$$

が成り立つときであり，かつこのときに限る．ここに，$\boldsymbol{e}_{j}$ は第 j 要素のみ 1 の p 次元単位ベクトルである．

系. 命題 2 の条件の下で，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Lambda}_{2\cdot 1},\ \boldsymbol{\sigma}_{21})=k+1$ ならば，行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ のあらゆる因子数に対する分解は識別可能でない．

3. データへの適用と討論

以上，我々は p^{*} 次元観測変量 $\boldsymbol{x}$ の特定の 1 変量 x_1 に関する残りの p 変量 $\boldsymbol{x}_2$ の条件付き変量 $\boldsymbol{x}_2\,|\,x_1$ が k 因子分析モデルに従うという前提条件の下に，観測変量 x に対する分散共分散行列がどのような構造をしているかを明らかにしてきた．とくに，Lawley and Maxwell (1971) によるモデル (1.1) に対して，変量 $\boldsymbol{x}_2$ 自身が同じ因子数をもつ因子分析モデルに従う場合の疑問点を明らかにした．実際，得られた命題を Maxwell (1961) データおよび Davis (1944) データに適用するならば，それぞれにおいて，モデル (1.1) による解析には重大な疑問のあることが明らかになる．

ここでの議論は，多次元観測変量 $\boldsymbol{x}$ の分散構造が因子分析モデルに従うかどうかを $\boldsymbol{x}$ の 2 つの部分要素ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の条件付き変量 $\boldsymbol{x}_2\,|\,\boldsymbol{x}_1$ が因子分析モデルに従うという条件のもとで考えたものであった．しかし，得られた命題は x_1 がスカラーである場合に限定されている．応用面からの要求は満たされるかもしれないが，理論的には一般のベクトルにまで拡張できるかどうかを検討するべきであり，今後の課題として残っている．

参 考 文 献

Anderson, T.W. and Rubin, H. (1956). Statistical inference in factor analysis, *Proc. Third Berkeley Symp. on Math. Statist. Prob.*, Vol. 5, 111-150, Univ. of California Press, Berkeley.
Davis, F.B. (1944). Fundamental factors of comprehension in reading, *Psychometrika*, **9**, 185-197.
Driel, O.P. von (1978). On various causes of improper solutions in maximum likelihood factor analysis, *Psychometrika*, **43**, 225-243.
Lawley, D.N. and Maxwell, A.E. (1971). *Factor Analysis as a Statistical Method*, 2nd ed., Butterworth, London.
Maxwell, A.E. (1961). Recent trends in factor analysis, *J. Roy Statist. Soc. Ser. A*, **124**, 49-59.
Tumura, Y. and Sato, M. (1980). On the identification in factor analysis, *TRU Math.*, **16**, 121-131.