$$(5)\qquad \underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}+\psi_p \geqq \underset{\sim}{\tilde{\lambda}}'\underset{\sim}{\tilde{\lambda}} \geqq \underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}+\psi_1.$$

定理の意味を説明しよう．(1) 相関行列の1より大きい固有根の個数を“因子数”とすることの正当化．変量数をふやす，あるいは $\lambda_i(i=2, \ldots, p)$ の増加は θ_1 の下限を増加させる．ψ_p の減少，つまり λ_p の増加は θ_2 の上限を減少させる．(2) $\tilde{\lambda}_i$ の順序と符号は，λ_i のそれと一致する．(3) $\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}$ が大きいとき，$\underset{\sim}{\tilde{\lambda}}$ は $\underset{\sim}{\lambda}$ を反映している．(4) $\tilde{\lambda}_i/\tilde{\lambda}_j$ は λ_i/λ_j を過小評価している．(5) 個々の要素 $\tilde{\lambda}_i$ と λ_i の大小関係は一般に論じにくいが，$\underset{\sim}{\tilde{\lambda}}'\underset{\sim}{\tilde{\lambda}}$ は $\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}$ より大きく，上記の不等式が成立つ．

本報告の一部と実データでの検証は Sato (1990) に掲載，大部分と報告後の進展は掲載予定 (Sato (1992)) である．

参 考 文 献

Anderson, T.W. and Rubin, H. (1956). Statistical inference in factor analysis, *Proc. Third Berkeley Symp. on Math. Statist. Prob.*, Vol. 5, 111-150, Univ. of California Press, Berkeley.

Ihara, M. and Kano, Y. (1986). A new estimator of the uniqueness in factor analysis, *Psychometrika*, **51**, 563-566.

Sato, M. (1990). Some remarks on principal component analysis as a substitute for factor analysis in monofactor cases, *J. Japan Statist. Soc.*, **20**, 23-31.

Sato, M. (1992). A study of an identification problem and a substitute use of principal component analysis in factor analysis, *Hiroshima Math. J.*, **22** (to appear).

因子分析模型の identification について

広島大学 工学部 佐 藤 学

因子分析模型から導出される母分散共分散行列 Σ の分解

$$\Sigma = \Lambda_k \Lambda_k' + \Psi_k$$

(Λ_k は p 行 k 列で rank $\Lambda_k = k < p$, Ψ_k は対角成分が正の対角行列) について論ずる．因子分析における identifiability (識別可能性) の問題は，任意に正定値対称行列が与えられたとき，

・分解が存在するか？
・分解が存在したとき，一意か？

の双方である．母集団において分解が存在しない，あるいは一意でないとき，因子分析による母数推定には困難が伴う．Shapiro (1985) は一意性について論じているが，十分とはいいがたい (Sato (1989))．

分解の存在：$p=3, k=1$ のときには詳しく論ずることができる．母相関行列 P の狭義下三角行列の3つの要素が互いに独立に一様分布するとしよう．「P が正定値行列である確率」に対する「分解が一意である確率」の比を求めると，0.203である．一意に分解が存在する母相関行列を与えたとき，標本相関行列から解が一意に得られる確率は，多変量正規分布のもとで Konishi (1979) による漸近展開の結果を用いて評価することができる．

分解の一意性：因子数 k で分解が存在したとして一意性を論ずる．すでに知られている結果は次の条件である．k を固定したとき，一意であるための必要条件，十分条件 (Anderson and

Rubin(1956))．因子数を k より大きくしたとき，特殊因子に対応する負荷が追加されるだけで共通因子行列に関しては一意であるための十分条件（Tumura and Sato（1980））．

新しい結果として以下の3点を報告した．

（1） Anderson and Rubin による必要条件を拡張し一意であるかどうかを調べやすくした．

（2） 行列の次数が大きいと部分行列の階数がおちることがある．そこで因子負荷行列が

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & O \end{pmatrix}$$

という形に対して，Anderson and Rubin, Tumura and Sato の十分条件をみたすための必要/十分条件を与えた．

（3）「大部分の要素が一意である行列」を提案し，そのための十分条件を与え利用例を示した．行列が一意でないときには，何を推定しているのか一般に不明となる．しかし，行列の一部の要素のみが不定で他の多くの要素が一意であることがある．両者を区別することにより，一意でない行列のすべての要素の推定を無意味とせずに一意である要素に対する推定を有効としうるので，有意義である．

本報告はその後の進展を含めて掲載予定（Sato（1992））である．

参 考 文 献

Anderson, T.W. and Rubin, H. (1956). Statistical inference in factor analysis, *Proc. Third Berkeley Symp. on Math. Statist. Prob.*, Vol. 5, 111-150, Univ. of California Press, Berkeley.

Konishi, S. (1979). Asymptotic expansions for the distributions of statistics based on the sample correlation matrix in principal component analysis, *Hiroshima Math. J.*, **9**, 647-700.

Sato, M. (1989). Some comments on Shapiro's paper : identifiability of factor analysis, Tech. Report, No. 249, Statistical Research Group, Hiroshima University, Hiroshima.

Sato, M. (1992). A study of an identification problem and a substitute use of principal component analysis in factor analysis, *Hiroshima Math. J.*, **22** (to appear).

Shapiro, A. (1985). Identifiability of factor analysis : some results and open problems, *Linear Algebra Appl.*, **70**, 1-7.

Tumura, Y. and Sato, M. (1980). On the identification in factor analysis, *TRU Math.*, **16**(2), 121-131.

因子分析モデルにおける不適解の発生構造

大阪電気通信大学 工学部 猪 原 正 守
大阪府立大学 工学部 狩 野 裕

1. はじめに

因子分析モデルによって多次元データを解析する中で，独自分散推定値の一部がゼロになる問題が出現することがある．この問題は不適解問題と呼ばれ，その発生メカニズムについては，Driel（1978）によるモンテカルロ実験を始めとして多くの実験研究が行われている．一方，Lawley and Maxwell（1971）は，最尤因子分析モデルを用いた解析において，$p+1(=p^*$ とおく）次元観測変量 $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_{p+1})^T$ に対する k 因子分析モデルの適合によって，初めの m 変量 $x_1, \ldots, x_m$ に対する独自分散 $\psi_1, \ldots, \psi_m$ がゼロと推定されたとき，モデルを