Robustness of the Normal Theory Inference in Linear Latent Variate Models

大阪府立大学 工学部　狩　野　　裕

1. 線形潜在変数モデルと正規理論

線形潜在変数モデルにおいては，$p\times 1$ ベクトルの観測変量 x が次のように表現される (Anderson (1987, 1989))：

$$x=\mu+\sum_{g=0}^{G}\Lambda_g(\gamma)z_g.$$

ここで，μ は一般平均を表すパラメタ，z_g は $k_g\times 1$ の潜在変数で次を満たす：

$$E(z_g)=0,\qquad E(z_g z_h')=0\qquad (g\neq h)$$
$$E(z_0 z_0')=\Phi_0(\tau)$$
$$E(z_g z_g')=\Phi_g\qquad (g=1, \ldots, G).$$

また，γ と τ はそれぞれ $r\times 1$ と $s\times 1$ 未知パラメタベクトルである．このとき，観測変量 x の共分散行列 $\Sigma(\theta)$ は

$$\Sigma(\theta)=\Lambda_0(\gamma)\Phi_0(\tau)\Lambda_0(\gamma)'+\sum_{g=1}^{G}\Lambda_g(\gamma)\Phi_g\Lambda_g(\gamma)'$$

となり，ここで

$$\theta=(\lambda', \tau', v(\Phi_1)', \ldots, v(\Phi_G)')'$$

である．$v(A)$ は $p\times p$ 対称行列 A の重複しない要素からなる $p(p+1)/2\times 1$ のベクトルである．$p(p+1)/2$ を p^* と書くことがある．従って，線形潜在変数モデルは共分散構造モデルである．

このように定義された線形潜在変数モデルは因子分析モデルを始めとして，変量内誤差モデル，LISREL や EQS によるモデル等を含んでいる．特殊な場合として独立性の検定問題もこの枠組みに入る．

パラメタ θ の推定は，通常，多変量正規分布を仮定して最尤法により行われる．n 個の標本に基づく尤度は

$$l(\theta)=\log|\Sigma(\theta)|-\log|S|+\mathrm{tr}\,[\Sigma^{-1}(\theta)S]-p$$

に同値であり，最尤推定量 $\hat{\theta}$ は

$$\underset{\theta}{\mathrm{MIN}}\ l(\theta)$$

の解として定められる．ここで，S は不偏標本分散行列である．適当な仮定のもとで $\hat{\theta}$ は一致性を有し漸近正規分布する．つまり，

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)\xrightarrow{L} N_q(0, (\Delta'\Gamma_N^{-1}\Delta)^{-1}).$$

ここで

$$\Delta = \frac{\partial v(\Sigma(\theta))}{\partial \theta'}, \qquad \Gamma_N = 2D_p^+\{\Sigma(\theta) \otimes \Sigma(\theta)\}D_p^{+\prime}$$

である．また，D_p はtransition行列，$D_p^+ = (D_p' D_p)^{-1} D_p'$ である（例えばMagnus and Neudecker (1988) を見よ）．

共分散構造解析では仮定された構造がデータに合致しているかどうかを統計的に判断することが重要であり，これはモデルの適合度検定と言われる．仮説

$$H_0: \Sigma = \Sigma(\theta), \qquad \text{versus} \qquad H_1: \Sigma > 0$$

に対する尤度比検定統計量 $-2 \log \lambda$ においては

$$-2 \log \lambda = n \cdot l(\hat{\theta}) \xrightarrow{L} \chi^2_{p^*-q} \tag{1.1}$$

が帰無仮説の下で成立し，検定統計量として利用できる．

2. ロバストネス

前章の結果は観測変量 x の分布が多変量正規分布であることを前提にしている．しかし，最近のロバストネスの研究によれば母集団分布は必ずしも正規分布でなくても良いことが示されている．Browne and Shapiro (1988)，Anderson and Amemiya (1988) や Amemiya and Anderson (1990) は潜在変数 $z_0, \ldots, z_G$ が互いに独立でありさえすれば (1.1) が成り立つことを示した．潜在変数の4次モーメントが存在しなくても良いことも重要である．この分布のクラスを C_I と書くことにする．

一方，Browne (1982, 1984)，Tyler (1983) や Shapiro and Browne (1987) は正規分布の拡張として楕円分布をとり上げた．楕円分布においては周辺分布の尖度はすべて等しく，それは Mardia (1970) による多変量尖度

$$\eta_E = E[\{(x-\mu)' \Sigma^{-1} (x-\mu)\}^2] / p(p+2)$$

にも等しい．そして，この η_E が正規分布との関連において重要な役割を果たすのである．実際，正規分布に基づく尤度比検定統計量はそれ自身はカイ2乗分布に収束しないが，η_E で割ったものはカイ2乗分布に収束するのである．つまり，

$$-2 \log \lambda / \eta_E = n \cdot l(\hat{\theta}) / \eta_E \xrightarrow{L} \chi^2_{p^*-q} \tag{2.1}$$

が成立する．いま，楕円分布族を C_E と書くことにする．

さて，ここに2つのロバストネスの枠組みがある．分布族 C_E に対しては η_E による修正が必要であり，一方，分布族 C_I に対しては何の修正も要らない．これは実際家を悩ませるであろう．ここでは，これら2つの分布族の両方に対して適用できる簡単な修正法を提案する．

L を $L'\Delta = O$, $\mathrm{rank}(L) = m$ を満たす任意の $p^* \times m$ 行列とする．η を次で定義する：

$$\eta = \mathrm{tr}\{(L'\Gamma L)(L'\Gamma_N L)^{-1}\} / m. \tag{2.2}$$

ここで，Γ は4次モーメント行列を表す．次のことが簡単に確かめられる：

$$\eta = 1 \qquad \text{for} \quad C_I$$
$$\eta = \eta_E \qquad \text{for} \quad C_E.$$

従って

$$-2 \log \lambda / \eta = n \cdot l(\hat{\theta}) / \eta \xrightarrow{L} \chi^2_{p^*-q}$$

が両方の分布族 C_I と C_E に対して成り立つ．従って，(2.2) に基づく修正を行えば，両方の分布族に対して正しい推測が行えることになる．

この結果を独立性の検定問題に応用してみよう．観測変量 x を $x=[x_1', x_2']'$ と分割し，これに対応させて，$\Sigma=(\Sigma_{ij})$, $S=(S_{ij})$ とする（x_1 と x_2 は，それぞれ $k_1\times 1$, $k_2\times 1$）．このとき，独立性の検定は

$$H_0:\ \Sigma_{12}=O, \qquad \text{versus} \qquad H_1:\ \Sigma_{12}\neq O$$

であり，尤度比検定統計量は

$$-2\log\lambda=n\{\log|S_{11}|+\log|S_{22}|-\log|S|\}$$

と表現される．分布族 C_I の下で，すなわち，x_1 と x_2 が互いに独立に分布するとき，

$$-2\log\lambda \xrightarrow{L} \chi^2_{p^*-k_1k_2}.$$

また，x が共通の尖度 η_E を持つ楕円分布に従っているとき，

$$-2\log\lambda/\eta_E \xrightarrow{L} \chi^2_{p^*-k_1k_2}.$$

となる．いま，(2.2) を使えば，新しい η は

$$\eta=E\{(x_1-\mu_1)'\Sigma_{11}^{-1}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2)\}/k_1k_2$$

と表現される．この η を使えば，C_I と C_E の両方に対して

$$-2\log\lambda/\eta \xrightarrow{L} \chi^2_{p^*-k_1k_2}.$$

が成り立つ．

参考文献

Amemiya, Y. and Anderson, T.W. (1990). Asymptotic chi-square tests for a large class of factor analysis models, *Ann. Statist.*, **18**, 1453-1463.

Anderson, T.W. (1987). Multivariate linear relations, *Proc. 2nd Inter. Tampere Con. Statist.* (eds. T. Pukkila and S. Puntanen), 9-36, University of Tampere, Finland.

Anderson, T.W. (1989). Linear latent variable models and covariance structures, *J. Econometrics*, **41**, 91-119.

Anderson, T.W. and Amemiya, Y. (1988). The asymptotic normal distribution of estimators in factor analysis under general conditions, *Ann. Statist.*, **16**, 759-771.

Browne, M.W. (1982). Covariance structures, *Topics in Applied Multivariate Analysis* (ed. D.M. Hawkins), 72-141, Cambridge University Press, England.

Browne, M.W. (1984). Asymptotically distribution-free methods for the analysis of covariance structures, *British J. Math. Statist. Psych.*, **37**, 62-83.

Browne, M. and Shapiro, A. (1988). Robustness of normal theory methods in the analysis of linear latent variate models, *British J. Math. Statist. Psych.*, **41**, 193-208.

Magnus, J.R. and Neudecker, H. (1988). *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, Wiley, New York.

Mardia, K.V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications, *Biometrika*, **57**, 519-530.

Shapiro, A. and Browne, M. (1987). Analysis of covariance structures under elliptical distributions, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **82**, 1092-1097.

Tyler, D.E. (1983). Robustness and efficiency properties of scatter matrices, *Biometrika*, **70**, 411-420.