Ogasawara, H. (1990). Covariance structure model when the factor means and the covariances are functions of the third variable, *Japanese Psychological Research*, **32** (1), 19–25.

主成分分析で計算した因子負荷の性質 —— 単因子の場合 ——

広島大学 工学部 佐 藤 学

主成分分析 (PCA) は因子分析 (FA) の代用とされることが多い．そこでその妥当性を論じたい．PCA で FA の代用をするときには，相関行列 P を

$$P=(QD^{1/2})(QD^{1/2})'$$

と分解し，$QD^{1/2}$ の初めの k 列からなる行列を FA における因子負荷行列とみなす．ここで D は P の固有値が大きい順に対角に並んだ対角行列，Q は $Q'PQ=D$ とする直交行列である．k が未知のときには，P の 1 より大きい固有根の個数を因子数とすることが多い．

論ずる対象を述べよう．母集団での性質を論ずる；標本からの因子分析による推定値を陽的に表現するのは困難である．ここでは単因子，つまり因子数が 1，の場合に焦点をあてる；データが完全な単純構造，つまり因子負荷行列のどの行にも非零要素が唯一である構造，をもつことを想定することが実際上多く，その形は単因子構造に帰着できるので，簡単な形ではあるが有意義である．

接近法・仮定を説明しよう．PCA で FA の代用をするときには，FA の模型の成立を暗に仮定していると思われる．そこで母相関行列 P が FA の模型から導かれる構造

$$P=\underset{\sim}{\lambda}\underset{\sim}{\lambda}'+\Psi$$

をもつと仮定しよう．ここで $\underset{\sim}{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)'$ は因子負荷ベクトル，Ψ は誤差分散を表わす対角行列である．観測ベクトルの第 i 変量の符号を逆転させることにより λ_i の符号は反転でき，また変量の順序もかえることができるので一般性を失うことなく $\lambda_1\geqq\cdots\geqq\lambda_p>0$ を仮定できる．$p\geqq 3$, $\lambda_i\neq 0$ を仮定しよう．すると Anderson and Rubin (1956) による因子負荷行列が一意であるための十分条件がみたされるので FA では真値が得られる (Ihara and Kano (1986))．したがって代用をすることの吟味は，PCA で計算した因子負荷ベクトル $\tilde{\underset{\sim}{\lambda}}=(\tilde{\lambda}_1,\ldots,\tilde{\lambda}_p)'$ を $\underset{\sim}{\lambda}$ と比べることに帰着される．

定理. P が構造

$$P=\underset{\sim}{\lambda}\underset{\sim}{\lambda}'+\Psi,$$

ただし $\underset{\sim}{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)'$, $1>\lambda_1\geqq\cdots\geqq\lambda_p>0$, $p\geqq 3$, $\Psi=\mathrm{diag}(I-\underset{\sim}{\lambda}\underset{\sim}{\lambda}')=\mathrm{diag}(\psi_1,\ldots,\psi_p)$ をもち，Pの固有根を $\theta_1\geqq\cdots\geqq\theta_p$ としよう．このとき，(1)～(5) が成立つ．

(1) $$\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}+\psi_p\geqq\theta_1\geqq\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}+\psi_1>1>\psi_p\geqq\theta_2\geqq\psi_{p-1}\geqq\cdots\geqq\theta_p\geqq\psi_1.$$

(2) $$1\geqq\tilde{\lambda}_1\geqq\cdots\geqq\tilde{\lambda}_p>0.$$

(3) $$\tilde{\underset{\sim}{\lambda}}=(1+O(1/(\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda})))\underset{\sim}{\lambda}.$$

(4) $$\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\cdot\frac{\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}-\lambda_1^2+\lambda_j^2}{\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}-\lambda_1^2+\lambda_i^2}\leqq\frac{\tilde{\lambda}_i}{\tilde{\lambda}_j}\leqq\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\cdot\frac{\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}-\lambda_p^2+\lambda_j^2}{\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}-\lambda_p^2+\lambda_i^2},\qquad i<j.$$

$$(5) \qquad \underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}+\psi_p \geqq \tilde{\underset{\sim}{\lambda}}'\tilde{\underset{\sim}{\lambda}} \geqq \underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}+\psi_1.$$

定理の意味を説明しよう．(1) 相関行列の1より大きい固有根の個数を“因子数”とすることの正当化．変量数をふやす，あるいは $\lambda_i(i=2, \ldots, p)$ の増加は θ_1 の下限を増加させる．ψ_p の減少，つまり λ_p の増加は θ_2 の上限を減少させる．(2) $\tilde{\lambda}_i$ の順序と符号は，λ_i のそれと一致する．(3) $\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}$ が大きいとき，$\tilde{\underset{\sim}{\lambda}}$ は $\underset{\sim}{\lambda}$ を反映している．(4) $\tilde{\lambda}_i/\tilde{\lambda}_j$ は λ_i/λ_j を過小評価している．(5) 個々の要素 $\tilde{\lambda}_i$ と λ_i の大小関係は一般に論じにくいが，$\tilde{\underset{\sim}{\lambda}}'\tilde{\underset{\sim}{\lambda}}$ は $\underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{\lambda}$ より大きく，上記の不等式が成立つ．

本報告の一部と実データでの検証は Sato (1990) に掲載，大部分と報告後の進展は掲載予定 (Sato (1992)) である．

参　考　文　献

Anderson, T.W. and Rubin, H. (1956). Statistical inference in factor analysis, *Proc. Third Berkeley Symp. on Math. Statist. Prob.*, Vol. 5, 111-150, Univ. of California Press, Berkeley.

Ihara, M. and Kano, Y. (1986). A new estimator of the uniqueness in factor analysis, *Psychometrika*, **51**, 563-566.

Sato, M. (1990). Some remarks on principal component analysis as a substitute for factor analysis in monofactor cases, *J. Japan Statist. Soc.*, **20**, 23-31.

Sato, M. (1992). A study of an identification problem and a substitute use of principal component analysis in factor analysis, *Hiroshima Math. J.*, **22** (to appear).

因子分析模型の identification について

広島大学 工学部　佐　藤　　学

因子分析模型から導出される母分散共分散行列 Σ の分解

$$\Sigma=\Lambda_k\Lambda_k'+\Psi_k$$

(Λ_k は p 行 k 列で rank $\Lambda_k=k<p$，Ψ_k は対角成分が正の対角行列) について論ずる．因子分析における identifiability (識別可能性) の問題は，任意に正定値対称行列が与えられたとき，

・分解が存在するか？
・分解が存在したとき，一意か？

の双方である．母集団において分解が存在しない，あるいは一意でないとき，因子分析による母数推定には困難が伴う．Shapiro (1985) は一意性について論じているが，十分とはいいがたい (Sato (1989))．

分解の存在：$p=3, k=1$ のときには詳しく論ずることができる．母相関行列 P の狭義下三角行列の3つの要素が互いに独立に一様分布するとしよう．「P が正定値行列である確率」に対する「分解が一意である確率」の比を求めると，0.203 である．一意に分解が存在する母相関行列を与えたとき，標本相関行列から解が一意に得られる確率は，多変量正規分布のもとで Konishi (1979) による漸近展開の結果を用いて評価することができる．

分解の一意性：因子数 k で分解が存在したとして一意性を論ずる．すでに知られている結果は次の条件である．k を固定したとき，一意であるための必要条件，十分条件 (Anderson and