統計数理（1990）
第 38 巻 第 2 号 243-256

Contact Process の定常状態における相転移現象について*

東京大学 理学部　香　取　眞　理
室蘭工業大学 工学部　今　野　紀　雄

（1990 年 5 月　受付）

1. はじめに

Contact Process（CP）は病人と健康人という 2 つの状態をもつ簡単な伝染病の伝播のモデルの 1 つとして，確率論の分野では Harris (1974) により最初にモデル化された．その後，数多くの確率論及びその周辺の研究者達により，無限粒子系の典型的なモデルの 1 つとして（Liggett（1985)），あるいは oriented percolation（Durrett(1984)）のモデルとの対応により精力的に研究されてきている．一方，物理の分野においても Reggeon quantum spin model あるいは Schlögl's first model との関係で研究がなされてきた（Grassberger and de la Torre (1979)）．

CP の研究対象として興味深い点はいろいろあるが，特に次の 2 点があげられる．1 つは 1 次元系ですら相転移現象を示すということである．この場合の相転移現象とは，伝染率 λ がある臨界点よりも下のときには，CP の定常状態は自明な定常状態（すべて健康人）だけであるが，臨界点よりも上ではその自明な定常状態以外の定常状態が存在することを意味する．もう 1 つは，この非自明な定常状態では詳細釣合の条件（condition of detailed balance）が満たされていないにもかかわらず大域的にみると定常状態になっており，その構造は未だ解明されていないということである．

本論文では，上記のように CP を詳細釣合の条件を満たさない，しかも相転移現象を示す典型的で最も簡単なモデルの 1 つと考え，その定常状態の臨界値及びオーダーパラメータに対して評価を与えるために行った我々の試みを報告する．

第 2 章でまず CP を構成するいくつかの数学的な準備をし，その後で CP の基本的な性質及び相転移現象の正確な定義を述べる．第 3 章ではオーダーパラメータを下から押さえる評価関数を求めるために，Holley and Liggett（1978）が更新測度（renewal measure）を用いて行った議論をまず紹介し，その結果臨界点に対して得られた厳密な上限値を示す．その後でこの手法をいかに拡張すればよいかに対する我々の考えを示す．最後に，第 4 章でまとめと今後の展望について述べる．

この論文の報告は数学的な意味における厳密な証明を示すものではない．むしろ，Holley and Liggett（1978）によって示された結果をいかに越えて，CP の真の臨界現象に迫るかという問いに対して 1 つの示唆を与えることを目的としている．筆者らは，この計算ノートが Holley and Liggett の臨界点に対する上限を本質的に改良する新しい定理の証明に役立つこと

---

* 本稿は，統計数理研究所 共同研究（1-共会-51）における発表に基づくものである．

を切に希望する.

2. CP の構成とその基本的な性質及び相転移現象の定義

以下,本論文に関係のある事項について述べるが,この章の詳しい数学的背景については Liggett (1985) を参照していただきたい.

2.1 CP の定義及び数学的準備

まず配置空間を $X=\{0,1\}^{Z^d}$ とする.ここで CP を伝染病のモデルであると解釈すると,0 は健康な人間を,1 は病人を表すことになる.場所 $x\in \boldsymbol{Z}^d$ での,配置 $\eta\in X$ に対する変化の割合を示す flip rate は以下のように定義される.

$$c(x,\eta)=\begin{cases}\lambda\cdot\sum_{y:|y-x|=1}\eta(y) & \text{if}\quad \eta(x)=0\\ 1 & \text{if}\quad \eta(x)=1\end{cases}$$

ここで,λ ($\geqq 0$) は伝染率に対応する.これを用いて生成作用素は次の Ω の閉包として与えられる.

$$\Omega f(\eta)=\sum_{x\in \boldsymbol{Z}^d}c(x,\eta)\{f(\eta^x)-f(\eta)\}$$

ここで,

$$\eta^x(y)=\begin{cases}\eta(y) & \text{if}\quad y\neq x\\ 1-\eta(x) & \text{if}\quad y=x.\end{cases}$$

即ち,$\eta^x\in X$ は,配置 $\eta\in X$ に対して場所 $x\in \boldsymbol{Z}^d$ の値を変えた配置である.

上記の生成作用素から半群 $S(t)$ が 1 対 1 に対応する.これにより決まる X 値マルコフ過程 $\{\eta_t:\ t\in[0,\infty)\}$ を「d 次元 CP」と呼ぶことにする.

以下しばらく CP をはなれて,flip rate $c(x,\eta)$ をもつ一般の X 値マルコフ過程(単に「確率過程」といったときにはこれを指すものとする)について述べる.そのためにまずいくつかの記号を定義する.

$P=X$ 上の確率測度全体
$I=\{\mu\in P:\ \mu S(t)=\mu\quad \text{for any}\quad t\in[0,\infty)\}$
　$=$ 不変測度(定常状態)全体
$I_e=I$ の端点全体
$\Phi=$ 空間に対して shift 不変な X 上の確率測度全体

定義 2.1. (ergodic) 確率過程が ergodic とは次の(1),(2)を満たすことである.

(1) $I=\{\nu\}$
(2) 任意の $\mu\in P$ に対して,$\lim_{t\to\infty}\mu S(t)=\nu$.

次に attractive の定義をする.いま任意の $x\in \boldsymbol{Z}^d$ に対して,配置 η,ξ が $\eta(x)\leqq\xi(x)$ となるとき,これを $\eta\leqq\xi$ と書くことにする.

定義 2.2.（attractive） $\eta \leqq \xi$ なる配置 $\eta, \xi \in X$ に対し，

$$
\begin{aligned}
c(x,\eta) &\leqq c(x,\xi) \qquad \text{if} \quad \eta(x)=\xi(x)=0, \\
c(x,\eta) &\geqq c(x,\xi) \qquad \text{if} \quad \eta(x)=\xi(x)=1
\end{aligned}
$$

が成立するとき，この確率過程は attractive であるという．

確率過程が attractive であるときには，確率測度の大小関係は時間発展しても変わらないということを意味する定理が成立する．これを述べるために，まず確率測度の大小関係を定義しておく必要がある．X 上の連続関数 $f(\cdot)$ が，$\eta \leqq \xi$ のとき必ず $f(\eta) \leqq f(\xi)$ となるとき，これは monotone であるという．そして，この monotone な関数全体の集合を M と書くことにする．

定義 2.3. X 上の 2 つの確率測度 μ_1, μ_2 が与えられたとき，これがすべての $f \in M$ に対して

$$
\int f d\mu_1 \leqq \int f d\mu_2
$$

を満たすとき $\mu_1 \leqq \mu_2$ と書くことにする．

ここで定理を述べることにする．

定理 2.1. attractive な確率過程に対して次のことが成り立つ．

(1) $\delta_0 S(s) \leqq \delta_0 S(t) \quad (0 \leqq s \leqq t)$

(2) $\delta_1 S(s) \geqq \delta_1 S(t) \quad (0 \leqq s \leqq t)$

(3) $\delta_0 S(t) \leqq \mu S(t) \leqq \delta_1 S(t) \quad (0 \leqq t,\ \mu \in P)$

(4) $\mu \in P,\ t_n \to \infty$ and $\lim_{n \to \infty} \mu S(t_n) = \nu \Rightarrow \underline{\nu} \leqq \nu \leqq \bar{\nu}$

ここで，それぞれ

$\underline{\nu} = \lim_{t \to \infty} \delta_0 S(t)$：下限不変測度（lower invariant measure）

$\bar{\nu} = \lim_{t \to \infty} \delta_1 S(t)$：上限不変測度（upper invariant measure）

と定義される．

この定理 2.1 と定義 2.1 より次の定理が得られる．

定理 2.2. attractive な確率過程に対して，次は同値である．

(1) 確率過程が ergodic

(2) 不変測度が唯一つ

(3) $\bar{\nu} = \nu = \underline{\nu}$

さらにもう 1 つ，確率測度について定義を与えておく．

定義 2.4.（可逆：reversible）

$$
R = \{\mu \in I:\ c(x,\eta)\,\mu\{\eta\} = c(x,\eta^x)\,\mu\{\eta^x\} \quad \text{for any} \quad x \in \boldsymbol{Z}^d,\ \eta \in X\}
$$

=可逆測度(reversible measure)全体

また，確率過程がμに対して可逆であるとは$\mu \in R$のときをいう．

註 2.1. 定義より，$R \subset I$が成立している．

2.2 CP の基本的な性質及び相転移現象の定義

CP は定義より attractive な確率過程であることがわかるので，一般論より

定理 2.3. d次元 CP に対してある臨界値$\lambda_c(d) \in [0, \infty]$が存在して，

$\lambda < \lambda_c(d) \Rightarrow$ CP は ergodic, $I = \{\delta_0\}$,
$\lambda > \lambda_c(d) \Rightarrow$ CP は ergodic でない．特に，$(I \cap \Phi)_e = \{\delta_0, \bar{\nu}\}$

の結果を得る．実際，別の議論よりd次元 CP の臨界値$\lambda_c(d)$は正の有限値であることがわかる．よって，上記の事実を我々はCPの相転移現象と理解する．このように，CP においては1次元系ですら，相転移現象が起こっていると解釈できる．

また，上限不変測度を以下ν_λとおく．

註 2.2. ごく最近になって，λが臨界値より大きい場合にもっと詳しいことが証明された(Bezuidenhout and Grimmett (1990))．即ち，一般の次元において，

$$\lambda > \lambda_c(d) \Rightarrow \text{CP は ergodic でない．特に，} I_e = \{\delta_0, \nu_\lambda\}.$$

次に，CP のオーダーパラメータρ_λを，場所$x \in \boldsymbol{Z}^d$での病人である確率を上限不変測度で測ったものとして導入する．即ち，

$$\rho_\lambda = E_{\nu_\lambda}[\eta(x)].$$

実は，上限不変測度が空間的に shift 不変であることからオーダーパラメータが場所に依らないことがわかる．また，このオーダーパラメータを用いて上記の CP の臨界値を以下のように特徴付けることも可能である．

$$\lambda_c(d) = \inf\{\lambda \geq 0 : \rho_\lambda > 0\}$$

定理 2.4. (オーダーパラメータの性質)

(1) $\rho_\lambda = 0$, for $\lambda < \lambda_c(d)$
(2) $\rho_\lambda > 0$, for $\lambda > \lambda_c(d)$
(3) ρ_λは$[\lambda_c(d), \infty)$上で連続関数
(4) ρ_λは$\lambda(\geq 0)$の非減少関数
(5) 特に，1次元系では

$$1.539 < \lambda_c(1) \leq 2,$$
$$\rho_\lambda \geq \rho_\lambda^{(1)},$$

但し

$$\rho_\lambda^{(1)}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2\lambda}}, \qquad \lambda \geqq 2.$$

（最近（1）に対して，$\rho_{\lambda_c(d)}=0$という結果が報告されている（Bezuidenhout and Grimmett（1990).）

このような結果が得られているにもかかわらず，例えば以下のような本質的な点でまだ解明されていないことが多く残されている．

（1） CPの臨界値$\lambda_c(d)$の厳密解は1次元系ですら知られていない．
（2） CPのオーダーパラメータの関数の形もわかっていない．
（3） CPの下限不変測度は自明なδ_0であるが，上限不変測度の形はわかっていない．

これらの未解決の点に対して，第3章では1次元系に対して，その臨界値を上から押さえると同時にオーダーパラメータをある関数で下から押さえる議論をする．一方，一般の次元で逆に，臨界値を下から押さえると同時にオーダーパラメータをある関数系で上から押さえる新しい手法については，Katori and Konno（1990, 1991a, 1991b, 1991c）で議論されている．
その前に，以下第3章で用いられる基本的な定理をここであげておく．

定理 2.5.
$$Y=\{A\subset \boldsymbol{Z}^d : |A|<\infty\} \quad （ここで|A|はAの要素の数）$$

$A\in Y$に対して，$\sigma(A)=1-E_{\nu_\lambda}\left[\prod_{x\in A}(1-\eta(x))\right]$とおく．$h: Y\to[0,1]$は次の(1)，(2)，(3)を満たす関数とする．

（1） $h(\phi)=0$
（2） $0<h(A)\leqq 1$ for any $A\neq\phi$
（3） $\lim_{|A|\to\infty} h(A)=1$

このとき，

$$\sigma(A)=\lim_{t\to\infty} E^A[h(A_t)]$$

が成立する．但し，A_tはYに値を取るd次元CPのdual processである．

ここで，一般の確率過程に対してそのdual processはどのように定義されるかについてはLiggettの教科書（Liggett（1985））のChapter III. 4及びIII. 5をみていただきたい．但し，この定理2.5で述べられたdual process A_tは，有限なd次元CPから次のように簡単に作れる．いま任意の時刻tにおいて$\eta_t(x)=1$のsiteが有限個であるようなCPを有限CPと呼ぶことにする．このとき，$\eta_t(x)=1$であるsiteからなる集合をA_tと書くことにする．すると，もとのCPが配置空間X上の確率過程であったのに対して，このA_tは$\boldsymbol{Z}^d$上の有限な集合の集まりであるY上の確率過程となる．定理2.5のA_tは，このY上の確率過程のことである．
上記の$\sigma(A)$は，実はdual process A_tが初期状態$A\,(\subset\boldsymbol{Z}^d)$から出発したときの生存確率を表すもので，次のいくつかの性質を満たす．

定理 2.6.

(1) $\sigma(A)=\lim_{t\to\infty} P^A[A_t \neq \phi]$ (上記の説明に対応する性質)

(2) $A \subset B \Rightarrow \sigma(A) \leqq \sigma(B)$

(3) $\sigma(A\cup B)+\sigma(A\cap B) \leqq \sigma(A)+\sigma(B)$

(4) $\sigma(A)=\nu_\lambda\{\eta:\ \eta(x)=1 \quad \text{for some} \quad x\in A\}$

(5) 特に, $\sigma(\{x\})=\rho_\lambda$.

我々は, この最後の性質 (5) を用いて, オーダーパラメータの評価を行う.

また, この $\sigma(A)$ は, 次の $\sigma_t(A)$ $\left(=1-E_{\nu_\lambda}\left[\prod_{x\in A}(1-\eta_t(x))\right]\right)$ に対する時間発展方程式の定常解として特徴付けられる. この方程式は, 生成作用素より得られる.

定理 2.7.

(1) $\sigma_t(A)$ は次の時間発展方程式を満たす.

$$\frac{d}{dt}\sigma_t(A)=-\lambda\sum_{x\in A}\left(\sum_{\{\pm e_i\}}1_A(x+e_i)\right)[\sigma_t(A)-\sigma_t(A\cup\{x\})]$$
$$+\sum_{x\in A}[\sigma_t(A\setminus\{x\})-\sigma_t(A)]$$

ここで, $\{e_i\}$ は $\boldsymbol{Z}^d$ 上の単位ベクトル, $1_A(x)$ は A の定義関数である.

(2) さらに,

$$\sigma(A)=\lim_{t\to\infty}\sigma_t(A)$$

が成立しているので,

(3) $\sigma(A)$ に対しては, 次の相関等式が成り立つ.

$$\lambda\sum_{x\in A}\left(\sum_{\{\pm e_i\}}1_A(x+e_i)\right)[\sigma(A)-\sigma(A\cup\{x\})]=\sum_{x\in A}[\sigma(A\setminus\{x\})-\sigma(A)].$$

以上の定理 2.5, 2.6, 2.7 は以下第3章の議論のポイントとなる定理である.

3. 臨界値に対する上限値及びオーダーパラメータに対する下からの評価

以下本章は途中より1次元 CP に限って話を進めるが, それに対応する高次元の議論は現在存在せず, 今後の課題となろう.

3.1 Holley and Liggett の議論の紹介

Holley and Liggett (1978) は, $h(A)$ を第2章定理 2.5 の条件 (1), (2), (3) の他にさらに

(4) $E^A[h(A_t)] \geqq h(A)$ for any $A\in Y$, $t\geqq 0$

を満たすように選ぶことを考えた. すると, 定理 2.5 より

$$\sigma(A)=\lim_{t\to\infty}E^A[h(A_t)]\geqq h(A) \qquad \text{for any} \quad A\in Y$$

即ち,

$$\sigma(A) \geqq h(A) \qquad \text{for any} \quad A \in Y$$

なる結論を得るので，特に $A=\{x\}$（＝1点）としたときに，前章の定理 2.6 の（5）より，

$$\rho_\lambda \geqq h(\{x\})>0$$

となり，オーダーパラメータ ρ_λ を下から押さえることができるという議論を行った．

具体的な議論の前に，上記のことを定理としてまとめておくと，

定理 3.1.

$$Y=\{A \subset \boldsymbol{Z}^d : |A|<\infty\} \quad （ここで\,|A|\,はAの要素の数）$$

$A \in Y$ に対して，$\sigma(A)=1-E_{\nu_\lambda}\left[\prod_{x\in A}(1-\eta(x))\right]$ とおく．$h: Y \to [0,1]$ は次の（1），（2），（3），(4)を満たす関数とする．

（1）　$h(\phi)=0$

（2）　$0<h(A) \leqq 1$　for any　$A \neq \phi$

（3）　$\lim_{|A| \to \infty} h(A)=1$

（4）　$E^A[h(A_t)] \geqq h(A)$　for any　$A \in Y$,　$t \geqq 0$

このとき，

$$\sigma(A) \geqq h(A) \qquad \text{for any} \quad A \in Y$$

が成り立つ．特にオーダーパラメータに対しては，

$$\rho_\lambda \geqq h(\{x\})>0$$

の評価を得る．

註 3.1.　条件（4）は次の（4′）あるいは（4″）と同値である．

（4′）　$\frac{d}{dt}E^A[h(A_t)]|_{t=0} \geqq 0$　for any　$A \in Y$

$$\Updownarrow$$

（4″）　$\lambda \sum_{x \notin A}\left(\sum_{\{\pm e_i\}} 1_A(x+e_i)\right)[h(A)-h(A\cup\{x\})] \geqq \sum_{x\in A}[h(A\setminus\{x\})-h(A)]$

ここで，(4″)は $E^A[h(A_t)]$ が定理 2.7 の（1）で与えられているのと同型の時間発展方程式に従うことから明らかである．

Holley and Liggett は 1 次元系の場合に定理 3.1 の仮定 (1)-(4) を満たすべき $h(A)$ として，次のものを選んだ．

（1）　$h(A)$ はある更新測度（renewal measure）μ に対して，

$$h(A)=1-E_\mu\left[\prod_{x\in A}(1-\eta(x))\right]$$

なる形をしている．これは，σ の形が上の μ を ν_λ に変えたものであることに注意すれば妥当なものといえよう．

(2) 上記の更新測度 μ を，註3.1の(4″)の等号が $A=\{1,2,\ldots,n\}$ ($n\in\boldsymbol{N}$) のタイプの A に対して成立するように決める．

ここでいう更新測度 μ とは，任意の $x_1<x_2<\cdots<x_n$ ($n\geqq 2$) なる集合 $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ に対して，平均が有限であり，かつ次の等式が成立するような $\{1,2,\ldots\}$ 上の確率密度 $f(\cdot)$ をもつ確率測度である；

$$\mu\{\eta:1\leqq i\leqq n \text{ に対して } \eta(x_i)=1 \text{ であり，} x_1<x<x_n \text{ で } x\notin A \text{ であるすべての } x \text{ において } \eta(x)=0\}$$
$$=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}f(x_{i+1}-x_i)}{\sum_{k=1}^{\infty}kf(k)}$$

このようにして選んだ $h(A)$ より，彼らは1次元CPの臨界点の上限値 $\lambda_c^{(1)}=2$, 及びオーダーパラメータを下から押さえる関数 $\rho_\lambda^{(1)}$；

$$\rho_\lambda^{(1)}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2\lambda}},\qquad \lambda\geqq 2$$

を得た．

Holley and Liggett が更新測度をもち出してきた理由は，1次元CPが最近接粒子系（nearest-particle system）の特別な場合であることによる．一般に，詳細釣合の条件を満たす可逆（reversible）な最近接粒子系の不変測度（もっと強くいうと可逆測度）が更新測度であることが知られているからである．もっとも，我々がいま注目している1次元CPは非可逆（non-reversible）である．このため上述の $\rho_\lambda^{(1)}$ は真のオーダーパラメータとは当然異なったものとなっている．Holley and Liggett (1978) は，彼らの得た関数 $\rho_\lambda^{(1)}$ が $\lambda\geqq 2$ において真のオーダーパラメータ ρ_λ の下限になっていることを証明した．この証明は更新測度の性質をうまく用いた美しいものであるが，真のオーダーパラメータ ρ_λ に迫るためには，むしろ更新測度にこだわることなく，これに代わる真の非自明な不変測度により近い測度を考案することが大切と考えるのは自然であろう．

我々は，上記の更新測度とCPの上限不変測度の間のギャップを埋めるべき測度を系統的にみつける見通しのよいと思われる議論を行うために，次節で紹介する K-型相関関数を導入する．以下，1次元系のみを扱う．

3.2 K-型相関関数

定義 3.1.（K-型相関関数）1次元系の確率測度 μ に対して，

$$K(k_1)=E_\mu\left[\eta(1)\prod_{i=2}^{k_1+1}(1-\eta(i))\,\eta(k_1+2)\right],$$
$$K(k_1,k_2)=E_\mu\left[\eta(1)\prod_{i=2}^{k_1+1}(1-\eta(i))\,\eta(k_1+2)\prod_{j=k_1+3}^{k_1+k_2+2}(1-\eta(j))\,\eta(k_1+k_2+3)\right]$$
$$\vdots$$

として，K-型相関関数のクラス $\{K(k_1,k_2,\ldots,k_n):k_1,k_2,\ldots,k_n\geqq 0\}$ を定義する（但し，$\prod_{i=a}^{b}(1-\eta(i))$ において $b<a$ のときはこれを1とみなすことにする）．

註 3.2. 1 次元 CP の ν_λ に対して，次のような sum rule が成立する．

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} K(k_1)=\rho_\lambda,\ \sum_{k_2=0}^{\infty} K(k_1, k_2)=K(k_1),\dots,\ \sum_{k_n=0}^{\infty} K(k_1, k_2,\dots, k_n)=K(k_1, k_2,\dots, k_{n-1})$$

さらに，1 次元 CP の不変測度に対して K-型相関関数の間に次のような相関等式が成立することを，生成作用素を用いて示すことができる．

定理 3.2. （K-型相関等式）

$$2\lambda K(m_1)-2(1+\lambda)K(m_1-1)+\sum_{p=1}^{m_1-1} K(p-1, m_1-p-1)=0, \quad (m_1 \geqq 2)$$

$$\begin{aligned}&\lambda K(m_1, m_2-1)+\lambda K(m_1-1, m_2)-(3+4\lambda)K(m_1-1, m_2-1)\\ &\quad+\sum_{p_1=1}^{m_1-1} K(p_1-1, m_1-p_1-1, m_2-1)+\sum_{p_2=1}^{m_2-1} K(m_1-1, p_2-1, m_2-p_2-1)=0, \quad (m_1, m_2 \geqq 2)\\ &\qquad\vdots\end{aligned}$$

一般に，任意の $n=2, 3,\dots$ に対して，

$$\begin{aligned}&\lambda K(m_1, m_2-1,\dots, m_n-1)+\lambda K(m_1-1, m_2-1,\dots, m_{n-1}-1, m_n)\\ &\quad-\{n+1+2n\lambda\}K(m_1-1, m_2-1,\dots, m_n-1)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}\sum_{p_i=1}^{m_i-1} K(m_1-1,\dots, p_i-1, m_i-p_i-1,\dots, m_n-1)=0 \quad (m_1, m_2,\dots, m_n \geqq 2)\end{aligned}$$

が成立する．

3.3 更新切断（renewal decoupling）

3.1 節で紹介した Holley and Liggett（1978）の議論を前節で述べた K-型相関関数の言葉で翻訳すると，K-型相関等式のヒエラルキーの第 1 式，つまり定理 3.2 の最初の式で

$$K(m_1, m_2)=\rho_\lambda \cdot f_1(m_1) f_1(m_2)$$

と近似（「更新切断」とも呼べよう）していることに他ならない．この式より，$\lambda \geqq 2$ のときに $f_1(\cdot)$ が実関数として explicit に求まる．つまり $f(n)=f_1(n-1)$ とおくと，この f が先に述べた更新測度の確率密度になっていて，具体的に f（即ち f_1）の形は次で与えられる．

$$\begin{aligned}f(n)&=F(n)-F(n+1)\\ F(n)&=\frac{(2(n-1))!}{(n-1)!\,n!}\frac{1}{(2\lambda)^{n-1}} \qquad (n \geqq 1)\end{aligned}$$

K-型相関関数を用いた議論の利点は，更新測度が上限不変測度を近似する測度であると考えたときに，その密度関数は上記の定理 3.2 の K-型相関等式の第 1 式を用いて，直ちに計算することができることである．換言すれば，更新測度は K-型相関等式のヒエラルキーの第 1 式を更新切断することによって得ることができるといえる．そして，密度関数が求まれば近似的なオーダーパラメータ $\rho_\lambda^{(1)}$ もすぐに得られるわけだから，なぜ更新測度が第 1 近似として登場したかを理解する上で見通しのよい議論ができていることになっている．

そこで我々は，更新測度よりも真の上限不変測度に近いと思われる測度の候補をみつけることを考えて，厳密にオーダーパラメータを下から押さえるという議論（これは定理 3.1 の (4) に相当するのだが）をとりあえずせずに，K-型相関等式のヒエラルキーの第 1 式を含めたいくつ

かの等式を，適切な切断を行うことにより閉じさせるような新しい測度をみつける工夫をする．

3.4 K-型母関数と更新切断の改良

まず準備のためにK-型相関関数に対して，次のようなK-型母関数を導入する．

定義 3.2. （K-型母関数）

$$\Psi(u)=\sum_{q=1}^{\infty}u^{q}K(q-1),$$

$$\Psi(u_1,\ u_2)=\sum_{q_1=1}^{\infty}\sum_{q_2=1}^{\infty}u_1^{q_1}u_2^{q_2}K(q_1-1,\ q_2-1),$$

$$\vdots$$

$$\Psi(u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n)=\sum_{q_1=1}^{\infty}\sum_{q_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{q_n=1}^{\infty}u_1^{q_1}u_2^{q_2}\ \cdots\ u_n^{q_n}K(q_1-1,\ q_2-1,\ldots,\ q_n-1).$$

次に，定理 3.2 と上記のK-型母関数の定義より次の関係式を得る．

定理 3.3. 1次元 CP の不変測度に対して次の関係式が成立する．

(1) $u\Psi(u,\ u)+2\{\lambda-(1+\lambda)u\}\ \Psi(u)-u\{(2\lambda-1)-2\lambda u\}\rho_\lambda=0$

(2) $[u(2u+3)-2(1-2u)\lambda]\ \Psi(u,\ u)-2u[2u-(1-3u)\lambda]\ \Psi(u)$
$+2u(1-u)\lambda\Psi(u\,|\,1)-2u\Psi(u,\ u,\ u)+u^2\{1-2(1-2u)\lambda\}\ \rho_\lambda=0$

(3) $3u\Psi(u,\ u,\ u,\ u)-2u^2\Psi(u,\ u\,|\,1\,|\,u)+2\ [(1-3u)\lambda-2u(1+u)]\ \Psi(u,\ u,\ u)$
$-2u[(1-3u)\lambda-2u]\ \Psi(u\,|\,1\,|\,u)-2u[(1-u)\lambda-u^2]\ \Psi(u,\ u\,|\,1)$
$-u[2(1-5u)\lambda-u(6+u)]\ \Psi(u,\ u)+2u^2[2(1-3u)\lambda-3u]\ \Psi(u\,|\,1)$
$+2u^2(1-u)\lambda\Psi(u\,|\,1,1)-2u^3(1-u)\lambda K(0,0)-2u^3(2\lambda+1)\ \Psi(u)$
$+2u^4(2\lambda+1)\ K(0)=0$

ここで，$\Psi(u\,|\,1)=\sum_{q=1}^{\infty}u^{q}K(q-1,0)$, etc.

註 3.3. 前節の更新切断はこのK-型母関数を使って

$$\Psi(u,\ u)=\rho_\lambda\cdot(\Phi(u))^2,\qquad \text{但し,}\qquad \Phi(u)=\sum_{q=1}^{\infty}u^{q}f_1(q-1)$$

と表すことができることがわかる．

註 3.4. またK-型母関数とオーダーパラメータとの間には次の関係がある．

$$\frac{d}{du}(\Psi(u)/\rho_\lambda)|_{u=1}=\frac{1}{\rho_\lambda}$$

次に，以下で定義される更新切断を拡張した新しい切断を導入する．

定義 3.3. 新しい切断は，$\{0,1,2,\ldots\}$ 上の1変数及び2変数関数 $f_1(\cdot)$ と $f_2(\cdot)$ を導入してK-型相関関数を次の等式が成立するように近似することをいう．

$$K(k_1)=\rho_\lambda\cdot f_1(k_1),$$
$$K(k_1, k_2)=\frac{1}{2}\rho_\lambda\cdot[f_2(k_1, k_2)+f_1(k_1)f_1(k_2)],$$
$$K(k_1, k_2, k_3)=\frac{1}{2}\rho_\lambda\cdot[f_1(k_1)f_2(k_2, k_3)+f_2(k_1, k_2)f_1(k_3)],$$
$$K(k_1, k_2, k_3, k_4)=\frac{1}{2}\rho_\lambda\cdot[f_2(k_1, k_2)f_2(k_3, k_4)+f_1(k_1)f_2(k_2, k_3)f_1(k_4)],$$
$$\vdots$$

一般に，$m=0, 1, 2,\ldots$ に対して，

$$K(k_1, k_2,\ldots, k_{2m+1})=\frac{1}{2}\rho_\lambda\cdot\left[f_1(k_1)\prod_{s=1}^{m}f_2(k_{2s}, k_{2s+1})+\prod_{s=1}^{m}f_2(k_{2s-1}, k_{2s})f_1(k_{2m+1})\right],$$
$$K(k_1, k_2,\ldots, k_{2m})=\frac{1}{2}\rho_\lambda\cdot\left[\prod_{s=1}^{m}f_2(k_{2s-1}, k_{2s})+f_1(k_1)\prod_{s=1}^{m-1}f_2(k_{2s}, k_{2s+1})f_1(k_{2m})\right]$$

とする．

註 3.5. 更新切断の場合には，一般に

$$K(k_1, k_2,\ldots, k_n)=\rho_\lambda\cdot\prod_{s=1}^{n}f_1(k_s)$$

が成立していた．

註 3.6.

$$\sum_{q_2=0}^{\infty}f_2(q_1, q_2)=f_1(q_1)$$

という sum rule を課すと，註 3.2 で述べた，CP の ν_λ におけるK-型相関関数が満たすべき sum rule を満たすことがわかる．

更新切断の場合には，K-型母関数でみると，その $f_1(\cdot)$ を註 3.3 の関係より，K-型母関数のヒエラルキーの一番最初の (1) 式より求めたことになっていた．そこで，我々はこの新しい切断における $f_1(\cdot)$ と $f_2(\cdot,\cdot)$ とを，定理 3.3 のK-型母関数のヒエラルキーの第(1)式を含めた第(2)，(3)式の 3 つの等式を満たすように決めることを考えた．その結果，註 3.4 を用いることにより次の結果を得ることができた．

結果 3.1. 定理 3.3 の(1)-(3)式に対し，定義 3.3 で定まる切断を施すとその切断(即ち $f_1(\cdot)$ と $f_2(\cdot,\cdot)$)は一意的に決まり，その結果得られる近似的なオーダーパラメータ $\rho_\lambda^{(2)}$ は次の 3 次方程式を満たす実根で与えられる．

$$\alpha_1\rho_\lambda^3+\alpha_2\rho_\lambda^2+\alpha_3\rho_\lambda+\alpha_4=0$$

ここで，各係数 α_i は次の λ の関数として与えられる．

$$\alpha_1 = -2(64\lambda^4 + 72\lambda^3 + 14\lambda^2 - 5\lambda - 2)$$
$$\alpha_2 = 256\lambda^4 + 208\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + 5$$
$$\alpha_3 = -2(4\lambda + 3)(16\lambda^3 - 4\lambda^2 + 9\lambda + 4)$$
$$\alpha_4 = 4(4\lambda + 1)(4\lambda + 3)$$

このとき，上記の ρ_λ に対する3次方程式は，

$$\lambda < \lambda_c^{(2)} = 1.789894\cdots \text{ では，1実根，2虚根}$$
$$\lambda > \lambda_c^{(2)} \text{ では，3実根 } (\rho_\lambda^{(2-1)} < \rho_\lambda^{(2-2)} < \rho_\lambda^{(2-3)})$$

をもつ．このうち $\rho_\lambda^{(2-2)}$ が図1で示すように，物理的に意味のある解となっているのみならず，更新切断から得られた近似的なオーダーパラメータ $\rho_\lambda^{(1)}$ に対して，

$$\rho_\lambda^{(1)} \leqq \rho_\lambda^{(2-2)} \qquad (\lambda \geqq \lambda_c^{(2)})$$

が成立していることが数値的にわかる．我々は，これを1次元CPの真のオーダーパラメータに対する第2近似 $\rho_\lambda^{(2)}$，そして $\lambda_c^{(2)} = 1.789894\cdots$ を真の臨界値に対する第2番目の近似値と考える．

4. まとめと今後の展望

第3章でみてきたように，Holley and Liggett (1978) の議論をK-型相関関数，K-型相関等式，K-型母関数で議論することにより，彼らのストーリーを見通しよくとらえることが可能になった．その上で，我々はK-型相関関数が満たすべき sum rule を満足するように，更新切断を拡張した新しい切断を導入し，オーダーパラメータに対して更新切断の場合の結果を改良した近似を得た．それでは，Holley and Liggett の得た $\rho_\lambda^{(1)}$ が ρ_λ の下限になっていたように，我々の得た $\rho_\lambda^{(2-2)}$ が ρ_λ の下限になっていることを証明することは可能であろうか．この証明を実現するためには，我々がここで導入した新しい測度のもつ性質について詳しく調べることがまず必要であると考えられる．この方向の研究は，目下筆者らによって進行中である．

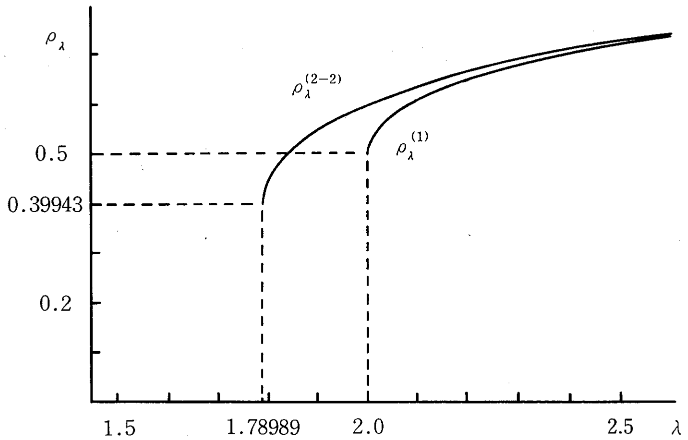

図1.

より本質的な問題提起としては，次のことが指摘されるべきである．上のような議論は，あくまでもK-型相関関数を基盤においた１次元系での議論なので，このままでは高次元のCPに適用することはできない．よって，今後多次元の場合にどう拡張していくかがこれからの課題である．他方，真の臨界値の下限値及び真のオーダーパラメータの上限関数を求める議論は多次元の場合にも存在するので（Katori and Konno（1990, 1991a, 1991c)），この論文で紹介した議論が実はそれに対する相補的なものとして理解され，系統的にその拡張が進められる可能性もある．

参　考　文　献

Bezuidenhout, C. and Grimmett, G. (1990). The critical contact process dies out, *Ann. Probab.*, **18**, 1462-1482.

Durrett, R. (1984). Oriented percolation in two dimensions, *Ann. Probab.*, **12**, 999-1040.

Grassberger, P. and de la Torre, A. (1979). Reggeon field theory (Schlögl's first model) on a lattice: Monte Carlo calculations of critical behavior, *Ann. Physics*, **122**, 373-396.

Harris, T.E. (1974). Contact interaction on a lattice, *Ann. Probab.*, **2**, 969-988.

Holley, R. and Liggett, T.M. (1978). The survival of contact processes, *Ann. Probab.*, **6**, 198-206.

Katori, M. and Konno, N. (1990). Correlation inequalities and lower bounds for the critical value λ_c of contact processes, *J. Phys. Soc. Japan*, **59**, 877-887.

Katori, M. and Konno, N. (1991a). An upper bound for survival probability of infected region in the contact processes, *J. Phys. Soc. Japan*, **60**, 95-99.

Katori, M. and Konno, N. (1991b). Three-point Markov extension and improved upper bound for survival probability of the one-dimensional contact processes, *J. Phys. Soc. Japan*, **60**, 418-429.

Katori, M. and Konno, N. (1991c). Upper bounds for survival probability of the contact process, *J. Statist. Phys.*, **63**, 115-130.

Liggett, T.M. (1985). *Interacting Particle Systems*, Springer, New York.

Phase Transition in Stationary States of Contact Process

Makoto Katori
(Faculty of Science, University of Tokyo)

Norio Konno
(Faculty of Engineering, Muroran Institute of Technology)

The contact process (CP) is a $\{0, 1\}^{Z^d}$-valued continuous Markov process. In the mathematical field, this process is first introduced by Harris (1974). CP can be interpreted as a simplest model for spread of an infection of disease. In this model, 0 and 1 represent a healthy and an infected individual respectively. Healthy individuals become infected at a rate which is proportional to the number of infected neighbors. This proportional constant defines infection rate $\lambda \geqq 0$. On the other hand, infected individuals recover at a constant rate, which is normalized to be 1.

CP is equivalent to the Reggeon quantum spin model in high-energy physics. Another interpretation of CP is a simplified version of Schlögl's first model on the d-dimensional lattice for some autocatalytic chemical reactions. And it is also closely related to oriented percolation.

CP has two interesting features. The first one is the existence of phase transition even for one-dimensional case. The phase transition of CP means that there is a finite positive critical value $\lambda_c(d)$ such that for any $\lambda < \lambda_c(d)$, this process has unique trivial invariant measure δ_0 (a pointmass for configuration of all healthy individuals) and for any $\lambda > \lambda_c(d)$, it has another nontrivial invariant measure in addition to δ_0. The second interesting feature is that CP does not satisfy the condition of detailed balance with respect to the above mentioned nontrivial invariant measure.

The order parameter ρ_λ for CP is defined as the probability for existence of an infected individual at a site. In one-dimensional case, Holley and Liggett (1978) obtained the upper bound for $\lambda_c(1)$ and the lower bound for the order parameter by using a renewal measure. The objective of the present paper is to report an improvement of the above result by introducing a new notion of K-type correlation functions.

Section 2 deals with rudiments of the theory of interacting particle systems and gives several fundamental results and rigorous definition of phase transition of CP. Section 3 consists of four parts. The first one is dedicated to the review of argument by Holley and Liggett. The second one introduces K-type correlation functions and gives K-type correlation identities. The third one shows that renewal decoupling of first K-type correlation identity is equivalent to renewal measure of Holley and Liggett's argument. The last one gives K-type generating functions. And finally by the aid of a new decoupling procedure and three identities for K-type generating functions, improved results are reported. The last section is devoted to the conclusion and discussion.

Key words: Contact process, phase transition, critical value, condition of detailed balance, renewal measure, K-type correlation function.