

一般化されたコッホ曲線によるレーザ回折*

北海道大学 応用電気研究所 魚 住 純
木 村 浩 行
朝 倉 利 光

(1990年5月 受付)

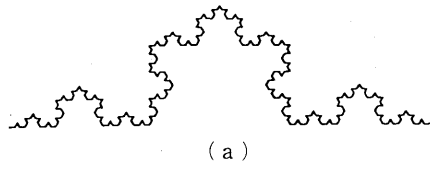
1. 序 論

物体によるコヒーレントな波動の回折・散乱という現象は、物理学および工学の諸領域における基礎的な研究課題であり、これまで多くの研究がなされてきた。たとえば電波領域では、アンテナの放射指向性、自然あるいは人工の構造物による通信電波の散乱やレーダーエコーの解析、また短波長電磁波の例では、X線散乱による結晶の構造解析などがある。一方、可視域においては、優れたコヒーレント光源であるレーザの出現を契機に、光計測、光通信、光情報処理等のレーザ応用の基礎となる重要な特性として、様々な物体による回折現象の理論的および実験的研究が行なわれてきている。

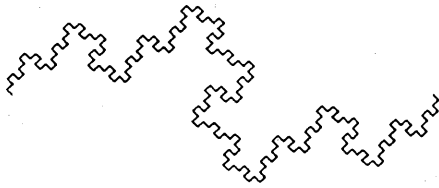
Mandelbrot (1977) によってフラクタルの概念が導入されて以来、回折や散乱の原因となる物体の多くがフラクタル的特性を持っていることが知られるようになり、フラクタル構造がコヒーレント波動の回折・散乱現象におよぼす影響の解明が必要とされるようになってきている。このような背景のもとに、フラクタルによる回折・散乱の研究が、これまでもいくつか報告されている。Berry (1979) は diffraction と fractal の合成語である diffractal という表現を用い、フラクタルによる回折現象の重要性を強調するとともに、1次元のランダムなフラクタル位相スクリーンによる回折場の強度の統計を理論的に取り扱った。Jaggard and Kim (1987) は、帯域制限されたワイエルシュトラス関数を位相とする位相スクリーンによる回折をフレネル領域を含めて理論的に考察した。また、Jakeman (1982a, 1982b) は、フラクタルな傾斜を持つ粗面からの散乱を理論的に扱っている。一方、ランダムなフラクタルによる散乱に関する実験は、X線や中性子線の領域で多く行なわれている (たとえば, Bale and Schmidt (1984), Höhr et al. (1988))。これに対し、規則的なフラクタルによる回折については、あまり多くの研究はみられない。Allain and Cloitre (1986) は、1次元フラクタルであるコントロール集合によるレーザ回折について、理論的および実験的考察を行なった。また、3次元フラクタルについては、Schmidt and Dacai (1986) がメンガースポンジなどを対象に理論解析を行なっている。しかしこれらの規則的フラクタルは、いずれもその生成に回転操作を含まないという意味で比較的単純な物体である。

この論文では、生成規則に回転操作を含む、より一般的な規則的フラクタル物体としてコッホ曲線を取り上げ、そのフラウンホーファ回折パターンについて、理論および実験により考察する。ただし、ここで言うコッホ曲線とは、Fig. 1(a)に示すよく知られた曲線のみならず、複数の線分から構成されたジェネレータによる再帰的置き換え操作によって得られるフラクタル

* 本稿は、統計数理研究所 共同研究 (1-共会-51) における発表に基づくものである。



(a)

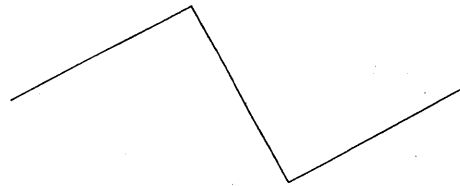


(b)

Fig. 1. (a) トリアディック, および (b) クアドラディックコッホ曲線.



(a)



(b)

Fig. 2. (a) トリアディック, および (b) クアドラディックコッホ曲線のジェネレータ.

の総称と考える。したがって、たとえば Fig. 1(b) のフラクタルもコッホ曲線の一つである。また、ジェネレータによる置き換えに際して、確率的なゆらぎを与えることによりランダム化したコッホ曲線についても考察する。

2. コッホ曲線の数学的表現

コッホ曲線は、ジェネレータと呼ばれる有限の長さの折れ線によって線分を置き換える操作を再帰的に繰り返すことによって描かれる。たとえば、Fig. 1(a) および (b) のフラクタルは、それぞれ Fig. 2(a) および (b) に示すジェネレータを1本の線分に繰り返し作用させることによって生成され、そのジェネレータの形状からトリアディックおよびクアドラディックコッホ曲線と呼ばれる。ここでは、これらを $K^{(t)}$ および $K^{(q)}$ で表わすことにする。

トリアディックコッホ曲線を例に、その生成過程を Fig. 3 に示す。まず長さ L の線分を考え、それをレベル0のコッホ曲線 K_0 と呼ぶことにする。Fig. 2(a) のジェネレータの長さを L とし、 K_0 をこのジェネレータで置き換えると、レベル1のトリアディックコッホ曲線 $K_1^{(t)}$ (Fig. 3(a)) が得られ、その各線分を $1/3$ に縮小したジェネレータで置き換えたも

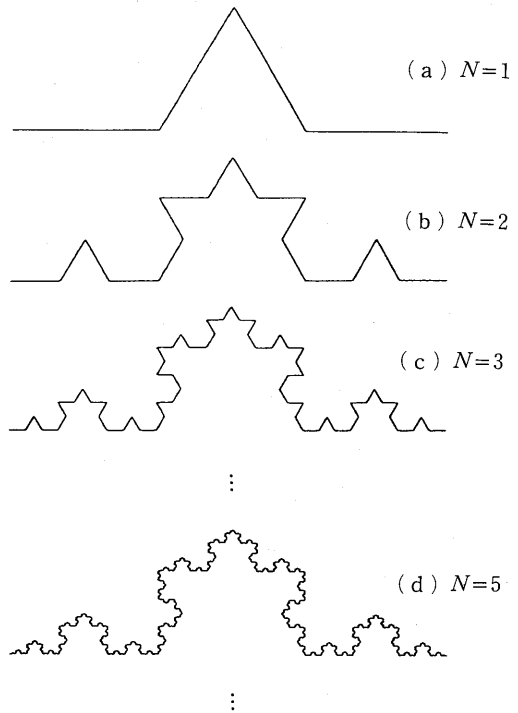


Fig. 3. トリアディックコッホ曲線の生成.

のは、レベル2の曲線 $K_2^{(t)}$ (Fig. 3(b))となる。さらに、 $K_2^{(t)}$ の各線分を、 $1/3^2$ に縮小したジェネレータで置き換えることにより、レベル3の曲線 $K_3^{(t)}$ (Fig. 3(c))が生成される。数学的に厳密な意味でのトリアディックコッホ曲線 $K^{(t)}$ は、レベル N の曲線 $K_N^{(t)}$ の $N \rightarrow \infty$ の極限として定義されるが、自然あるいは人工のフラクタルを代表するモデルとしては、有限なスケール範囲を持つ有限レベルのコッホ曲線を考える方が一般性が高く、都合がよい。

トリアディックコッホ曲線の相似性次元は、そのジェネレータが全体の $1/3$ の長さの線分4本から構成されていることから、 $D = \log 4 / \log 3 \approx 1.2619$ となる。同様に、クアドラティックコッホ曲線の相似性次元は、 $D = \log 3 / \log \sqrt{5} \approx 1.3652$ である。

上述の生成手順は、次のように言い替えることもできる。すなわち、 $K_1^{(t)}$ はジェネレータを構成する各線分を、 K_0 を $1/3$ に縮小したもので置き換えたものであり、 $K_2^{(t)}$ はジェネレータの各線分を $K_1^{(t)}$ を $1/3$ に縮小したものですべて置き換えたものである。同様に、 $K_N^{(t)}$ は、ジェネレータの各線分を $1/3$ に縮小した $K_{N-1}^{(t)}$ で置き換えたものである。

さて、いま任意の2次元図形を表わす関数として、 $f(\mathbf{p}) = f(x, y) = f(p; \psi)$ を考える。ここで $\mathbf{p} = (x, y) = (p; \psi)$ は物体面の座標ベクトルで、 x と y はその直交座標成分、 p および ψ はその極座標表示における動径および位相である。ただし、ベクトルの直交座標および極座標表示を、便宜上 $(,)$ と $(;)$ で区別している。関数 $f(\mathbf{p})$ に対して、

$$\begin{aligned} (2.1a) \quad & T[\mathbf{d}(k)]f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p} - \mathbf{d}(k)), \\ (2.1b) \quad & R[\theta(k)]f(\mathbf{p}) = f(p; \psi - \theta(k)), \\ (2.1c) \quad & M[c]f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}/c) \end{aligned}$$

で定義される平行移動オペレータ $T[\mathbf{d}(k)]$ 、回転オペレータ $R[\theta(k)]$ および拡大オペレータ $M[c]$ を用いて上述の置き換え操作を表現すると、 $K_1^{(t)}$ は、

$$(2.2) \quad K_1^{(t)}(\mathbf{p}) = M[1/3] \sum_{k=1}^4 T[\mathbf{d}(k)]R[\theta(k)]K_0(\mathbf{p}),$$

Table 1. トリアディックコッホ曲線のジェネレータのパラメータ。

k	$\varepsilon(k)$	$\alpha(k)$	$\theta(k)$
1	1	π	0
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
4	1	0	0

Table 2. クアドラティックコッホ曲線のジェネレータのパラメータ。

k	$\varepsilon(k)$	$\alpha(k)$	$\theta(k)$
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$	$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
2	0	0	$-\tan^{-1}(2)$
3	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$	$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$$(2.3) \quad K_0(\mathbf{p}) = \begin{cases} \delta(y); & |x| \leq L/2 \\ 0 & ; |x| > L/2 \end{cases}$$

と表わすことができる (Uozumi et al. (1990)). ただし, 式 (2.1a) および (2.2) において, $\mathbf{d}(k) = (L\varepsilon(k); \alpha(k))$ は距離 $L\varepsilon(k)$, 角度 $\alpha(k)$ の平行移動を表わす移動ベクトルである. トリアディックコッホ曲線およびクアドラティックコッホ曲線に対する $\varepsilon(k)$, $\alpha(k)$ および $\theta(k)$ の値を, Table 1 および Table 2 に示す.

式 (2.2) の操作を繰り返すことにより, レベル N のトリアディックコッホ曲線は,

$$(2.4) \quad K_N^{(t)}(\mathbf{p}) = M[1/3] \sum_{k=1}^4 T[\mathbf{d}(k)] R[\theta(k)] K_{N-1}^{(t)}(\mathbf{p}) \\ = \left[M[1/3] \sum_{k=1}^4 T[\mathbf{d}(k)] R[\theta(k)] \right]^N K_0(\mathbf{p})$$

と表わすことができる.

以上の議論を一般化するため, 全体の $1/\mu$ の長さの線分 m 本で構成されるジェネレータ (Fig. 4) を考える. μ と m に適当な値を用いれば, 1 から 2 の間の任意の相似性次元 $D = \log m / \log \mu$ を持つコッホ曲線 K_N を描くことができる. 式 (2.4) をこのような一般化されたコッホ曲線に拡張することにより,

$$(2.5) \quad K_N(\mathbf{p}) = \left[M[1/\mu] \sum_{k=1}^m T[\mathbf{d}(k)] R[\theta(k)] \right]^N K_0(\mathbf{p})$$

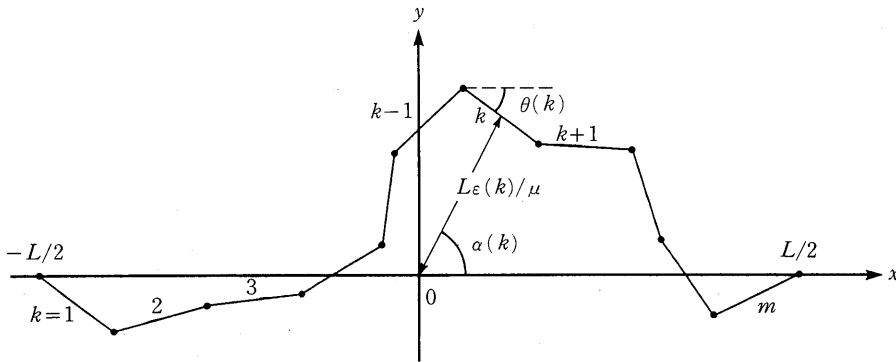


Fig. 4. 一般化されたジェネレータ.

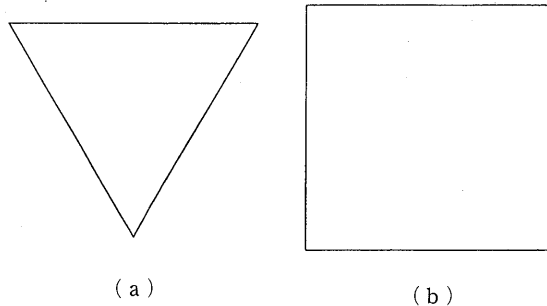


Fig. 5. (a) トリアディック, および (b) クアドラティックコッホ曲線のイニシエータ.

が得られる。

実在するフラクタルでは、その自己相似性が保たれるスケールに上限と下限がある。コッホ曲線の場合、その下限は置き換え操作の回数であるレベル N によって決まる。また、Fig. 1のコッホ曲線の場合、その上限は K_0 の長さ L であり、これより大きな構造はない。一般的には、置き換えを始める最初の図形はイニシエータと呼ばれるが、これは必ずしも1本の線分である

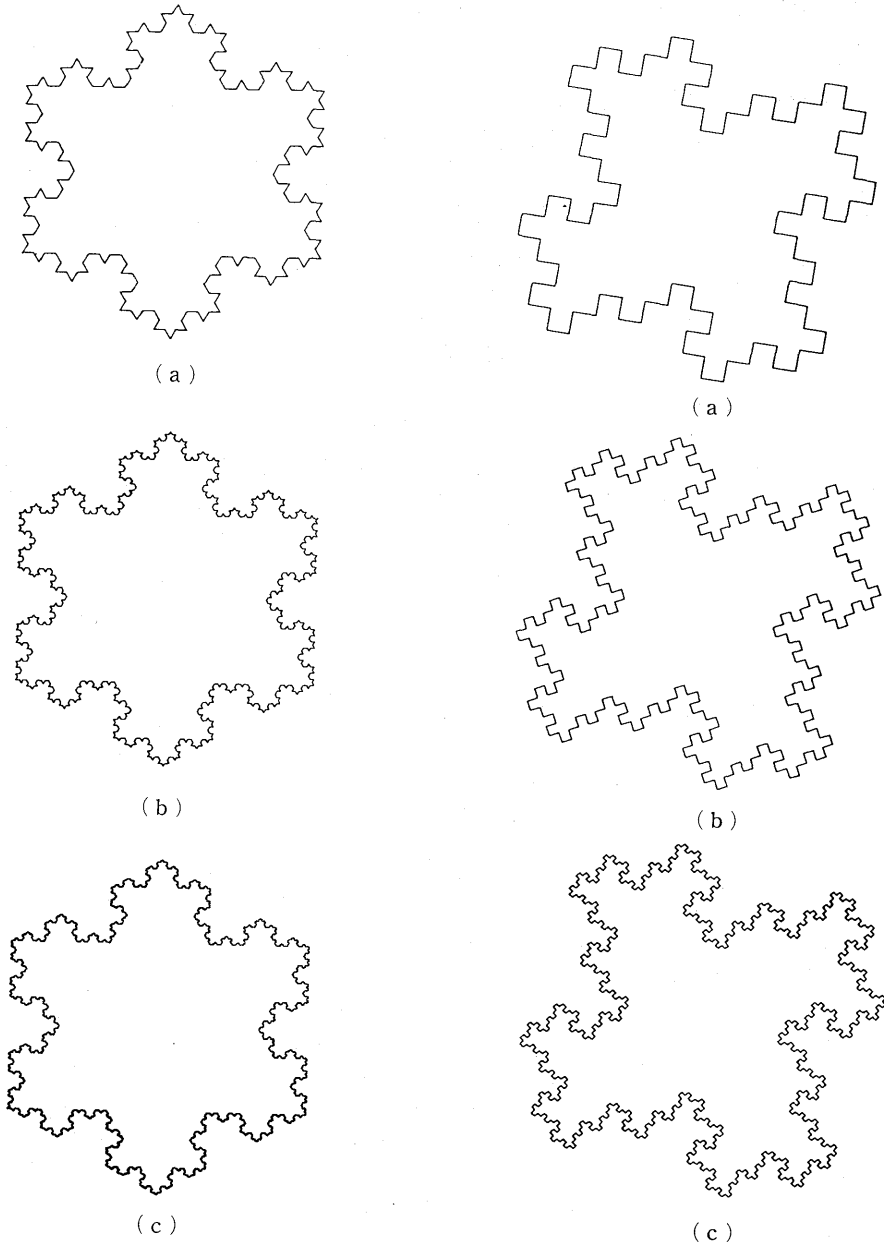


Fig. 6. 三角形イニシエータ上のトリアディックコッホ曲線: (a) $N=3$, (b) 4, (c) 5.

Fig. 7. 正方形イニシエータ上のクアドラディックコッホ曲線: (a) $N=3$, (b) 4, (c) 5.

必要はなく、多くの場合、最終的に得られるフラクタル図形の対称性をよくするために、ジェネレータを構成する線分のなす角度と等しい内角を持つ正多角形が用いられる。フラクタル図形とその回折パターンの対称性を保ち、それらの特性を分かりやすくするという理由から、ここでもこの習慣に従うこととする。

Fig. 5(a), (b) は、トリアディックおよびクアドラディックコッホ曲線のイニシエータとしてよく用いられる図形で、これらの上に(a) $N=3$, (b) 4, (c) 5 の場合についてそれぞれのコッホ曲線を構成すると、Fig. 6(a)-(c) および Fig. 7(a)-(c) の図形が得られる。

3. コッホ曲線のフラウンホーファ回折

フラウンホーファ回折を実現する光学系として、Fig. 8 を考える。レーザからの出射光をレンズ L_1 および L_2 で近似的平行光に変換し、物体面 P_1 に置かれた 2 次元物体に照射すると、レンズ L_3 の焦点面 P_2 は、その物体のフラウンホーファ回折領域となる。物体面位置での照射ビーム径が物体の広がり比べて十分大きい場合には、近似的に一樣照射とみなすことができ、任意の 2 次元物体 $f(\mathbf{p})$ の観測面 P_2 における複素振幅 $\tilde{f}(\mathbf{q})$ は、

$$(3.1) \quad \tilde{f}(\mathbf{q}) = \tilde{f}(\xi, \eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-2\pi i(x\xi + y\eta)] dx dy$$

で与えられる。ここで、 $\mathbf{q} = (q; \phi) = (\xi, \eta)$ は空間周波数ベクトルで、 q および ϕ はその大きさおよび位相である。また、 $\xi = q \cos \phi = x_f / (\lambda z)$ および $\eta = q \sin \phi = y_f / (\lambda z)$ は \mathbf{q} の直交座標成分、 x_f および y_f は観測面の空間座標、 λ は照射光の波長、 z はレンズ L_3 の焦点距離である。式 (3.1) では、簡単のため、積分の前の係数 $(i\lambda z)^{-1}$ を省略してある。式 (3.1) は、2 次元フーリエ変換を表わすオペレータ Φ を用いて、

$$\tilde{f}(\mathbf{q}) = \Phi f(\mathbf{p})$$

と表わすことができる。式 (2.1a)-(2.1c) で定義した三つのオペレータは、このフーリエ変換操作に関して次のような性質を持っている。

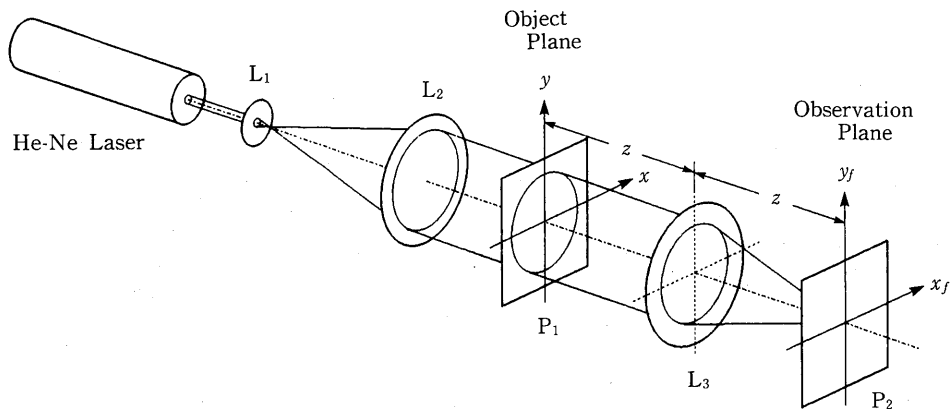


Fig. 8. フラウンホーファ回折のための光学系。

$$\begin{aligned}
 (3.2a) \quad \Phi T[\mathbf{d}]f(\mathbf{p}) &= \exp[2\pi i \varepsilon q L \cos(\phi - \alpha)] \Phi f(\mathbf{p}) \\
 &= \exp[2\pi i \varepsilon q L \cos(\phi - \alpha)] \tilde{f}(\mathbf{q}), \\
 (3.2b) \quad \Phi R[\theta]f(\mathbf{p}) &= R[\theta] \Phi f(\mathbf{p}) = \tilde{f}(\mathbf{q}; \phi - \theta), \\
 (3.2c) \quad \Phi M[c]f(\mathbf{p}) &= cM[1/c] \Phi f(\mathbf{p}) = c\tilde{f}(c\mathbf{q}).
 \end{aligned}$$

ただし、式(3.2c)において、拡大オペレータ $M[c]$ は、直線図形に対してはその線分の長さのみに作用し、 δ 関数で表わされる線分の幅には作用しないものとみなした。右辺の係数が c^2 ではなく c となっているのはこのためである。式(3.2a)-(3.2c)の性質より、式(2.5)のフーリエ変換は、

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad \tilde{K}_N(\mathbf{q}) &= \left[\mu^{-1} M[\mu] \sum_{k=1}^m \exp[2\pi i \varepsilon(k) L q \cos\{\phi - \alpha(k)\}] R[\theta(k)] \right]^N \tilde{K}_0(\mathbf{q}) \\
 &= \sum_{k_1=1}^m \sum_{k_2=1}^m \cdots \sum_{k_N=1}^m \exp \left[2\pi i L q \sum_{r=1}^N \mu^{-r} \varepsilon(k_r) \cos\{\phi - \alpha(k_r) - \Theta_{r-1}\} \right] \\
 &\quad \times R[\Theta_N] M^N[\mu] \tilde{K}_0(\mathbf{q}), \\
 \Theta_v &= \sum_{s=1}^v \theta(k_s)
 \end{aligned}$$

と表わすことができる。式(3.3)の $\tilde{K}_0(\mathbf{q})$ は、式(2.3)のフーリエ変換であり、

$$(3.4) \quad \tilde{K}_0(\mathbf{q}) = L \sin(\pi L q \cos \phi) / (\pi L q \cos \phi) = L \operatorname{sinc}(L q \cos \phi)$$

となるから、 $\tilde{K}_N(\mathbf{q})$ は最終的に、

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad \tilde{K}_N(\mathbf{q}) &= \mu^{-N} L \sum_{k_1=1}^m \sum_{k_2=1}^m \cdots \sum_{k_N=1}^m \exp \left[2\pi i L q \sum_{r=1}^N \mu^{-r} \varepsilon(k_r) \cos\{\phi - \alpha(k_r) - \Theta_{r-1}\} \right] \\
 &\quad \times \operatorname{sinc}[\mu^{-N} L q \cos(\phi - \Theta_N)]
 \end{aligned}$$

となる。ただし、式(3.4)および(3.5)の sinc は、 $\operatorname{sinc} u \equiv \sin(\pi u) / (\pi u)$ で定義される関数である。式(3.5)は、コッホ曲線のフラウンホーファ回折場における複素振幅が、 $\alpha(k)$ 、 $\varepsilon(k)$ および $\theta(k)$ に依存した位相によって変調された sinc 関数の重ね合わせであることを表わしている。トリアディックおよびクアドラディックコッホ曲線のフラウンホーファ回折場の複素振幅は、式(3.5)に Table 1 および Table 2 のパラメータを代入することにより計算される。

1次元空間内のフラクタルであるカントール集合の場合、フラウンホーファ回折場の複素振幅は、構造因子 $S(q)$ と形状因子 $F(q)$ と呼ばれる二つの関数の積として表わされることが Allain and Cloitre (1986) によって示されている。この場合、形状因子 $F(q)$ はカントール集合を構成する線分による回折を示す関数であり、構造因子 $S(q)$ はカントール集合のフラクタル的構造による寄与を表わしている。式(3.5)をみて分かるように、コッホ曲線の場合には、このような因子分解の形にはなっていない。これは、コッホ曲線では、カントール集合の場合と異なり、生成規則が回転オペレータを含む複雑なものであることに起因している。しかし、コッホ曲線の場合にも、構造因子に相当するものを導出することができる。一つの方法は、コッホ曲線を構成する線分を点に置き換えることである。このとき、線分の回折によって生じる sinc 因子は1となるから、式(3.5)は、

$$(3.6) \quad \tilde{K}_N(\mathbf{q}) = \mu^{-N} L \sum_{k_1=1}^m \sum_{k_2=1}^m \cdots \sum_{k_N=1}^m \exp \left[2\pi i L q \sum_{r=1}^N \mu^{-r} \varepsilon(k_r) \cos\{\phi - \alpha(k_r) - \Theta_{r-1}\} \right]$$

となる。これが $S(q)$ に相当するものである。また、点への置き換えをしなくても、回折場にお

いて

$$(3.7) \quad q \ll \mu^N/L$$

が成立する領域では、式(3.6)が成立している。この領域は N が増大するとともに拡大し、 $N \rightarrow \infty$ の極限においては、観測面の全域においてこの式が成り立つ。

次にイニシエータについて考える。Fig. 5(a) および (b) のイニシエータもオペレータで表現することが可能である。イニシエータの各辺の長さを L とすると、これらのイニシエータ上に構成されたコッホ曲線のフラウンホーファ回折パターンは、式(3.5)にオペレータ

$$(3.8a) \quad I^{(T)} = \sum_{j=-1}^1 R[2\pi j/3] \exp(\sqrt{3}/3\pi i L q \sin \phi),$$

$$(3.8b) \quad I^{(S)} = \sum_{j=0}^3 R[\pi j/2] \exp(\pi i L q \sin \phi)$$

を作用させることにより計算される。これらのイニシエータ上のトリアディックおよびクアドラディックコッホ曲線を $K_N^{(t,T)}(\mathbf{p})$ および $K_N^{(q,S)}(\mathbf{p})$ で、またそれらのフラウンホーファ回折場の複素振幅を $\tilde{K}_N^{(t,T)}(\mathbf{q})$ および $\tilde{K}_N^{(q,S)}(\mathbf{q})$ で表わすことにする。

4. 数値計算および実験

回折場の強度分布、すなわち回折パターン $W_N(\mathbf{q})$ は、複素振幅 $\tilde{K}_N(\mathbf{q})$ を用いて

$$W_N(\mathbf{q}) = |\tilde{K}_N(\mathbf{q})|^2$$

で定義される。Fig. 6(a)-(c) の正三角形イニシエータ上のトリアディックコッホ曲線について、式(3.5)、(3.8a) および Table 1 から計算した $W_N(\mathbf{q})$ を Fig. 9(a)-(c) に示す。図の(a)-(c) は、それぞれレベル (a) $N=3$, (b) 4, (c) 5 に対応しており、いずれも $(2\pi L\xi, 2\pi L\eta) = (-900, -900)$ および $(900, 900)$ の2点を結ぶ線分を対角線とする正方領域内の強度分布を示している。

一方、Fig. 10 は Fig. 8 の光学系を用いて実験的に求めたトリアディックコッホ曲線のフラウンホーファ回折パターンの写真である。実験では、Fig. 6(a) のフラクタルをコンピュータと XY プロッタを用いて白紙の上に黒い線画として描き、35 mm ミニコピーフィルム上にネガとして焼き付けたものを物体として用いた。Fig. 10 の (a)-(c) は、Fig. 9 と同様、レベル (a) $N=3$, (b) 4, および (c) 5 に対応している。

Fig. 9(a)-(c) と Fig. 10(a)-(c) にみられるように、コッホ曲線のフラウンホーファ回折パターンの第一の特徴は、自己相似構造が存在することである。これは、Allain and Cloitre(1986) が、カントール集合の回折パターンに自己相似構造をみいだしたことの2次元的な検証となる。さらに注目すべきことは、大規模な自己相似構造が現われる領域は回折パターンの中心部に限られており、その外側には周期構造が現われる点である。この二つの領域を、便宜上フラクタル領域および周期的領域と呼ぶことにする。物体フラクタルのレベル N が1増加すると、フラクタル領域の大きさと周期的領域の周期は、ともに $\mu (=3)$ 倍となる。また、特にFig. 9(b)やFig. 10(b)に顕著にみられるように、周期的領域は、一段小規模な自己相似パターンが周期的に直線状につながった構造をしており、その直線の方法は、物体フラクタルを構成する線分の方法と垂直である。フラクタル領域と周期的領域の境界付近には比較的強度の低いリング状の領域がみられる。Fig. 9を詳しく調べることにより、このリングの半径は $q = \mu^N/L$ にほぼ等し

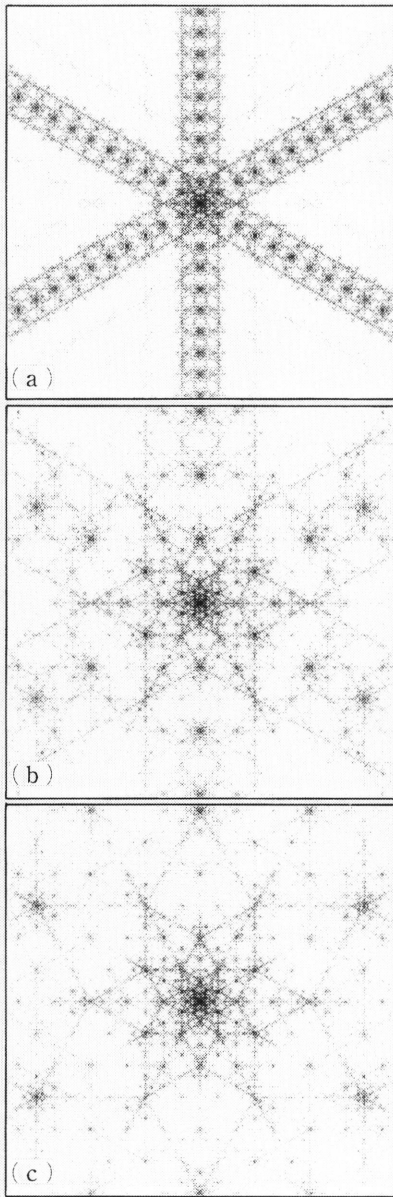


Fig. 9. トリアディックコッホ曲線のフラウンホーファ回折パターン (理論結果): (a) $N=3$, (b) 4, (c) 5.

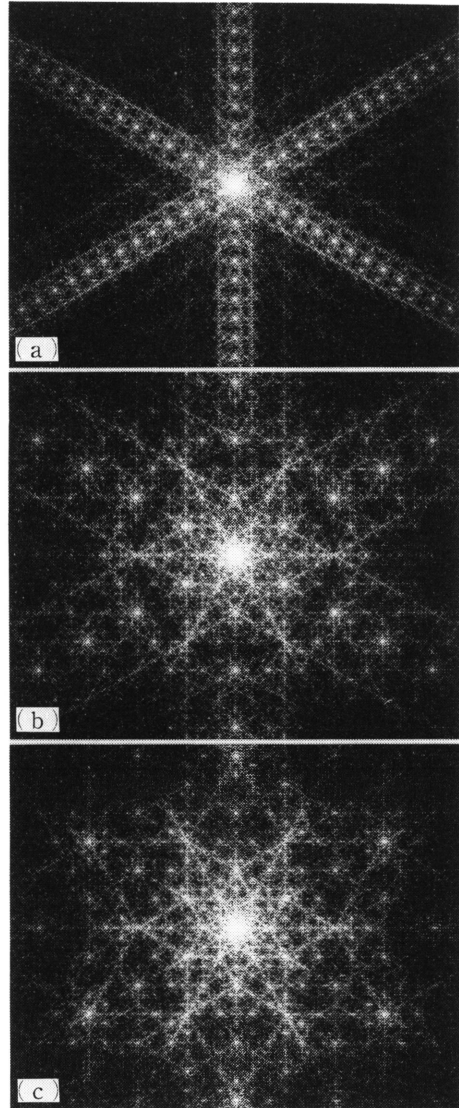


Fig. 10. トリアディックコッホ曲線のフラウンホーファ回折パターン (実験結果): (a) $N=3$, (b) 4, (c) 5.

いことが分かる. 式 (3.5) より, この値は, コッホ曲線の構成線分の回折によって生じる sinc 関数の第 1 零点に一致しており, したがって, 式 (3.7) はフラクタル領域の中心付近を表わしている.

厳密に言うならば, フラクタル領域にみられる自己相似構造は完全ではない. このことは, Fig. 9(b)の第 1 象限の部分をも $\mu (=3)$ 倍ずつ拡大して並べた Fig. 11 に明白に示されている. すなわち, パターンを μ 倍拡大するごとに, より粗い構造のパターンが出現し, 最終的には, イ

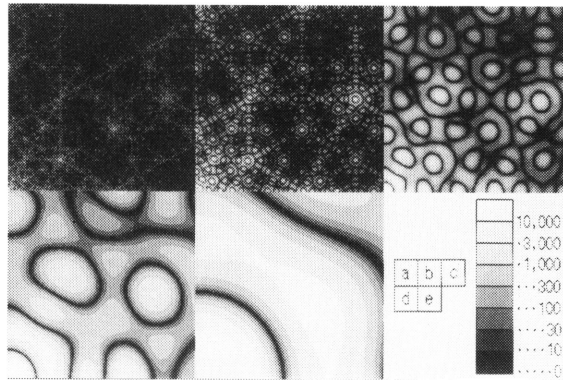


Fig. 11. トリアディックコッホ曲線のフラウンホーファ回折パターン (3倍ごとの拡大図).

ニシエータの回折パターンのオーダーの大きさを持つ中心ピークとなる。この自己相似構造の不完全性は、有限レベルのコッホ曲線自体が完全な自己相似性を持たないことの当然の帰結である。コッホ曲線に完全な自己相似性を持たせるには、 N と L がともに無限の極限を考える必要がある。このとき、そのフラウンホーファ回折パターンのフラクタル領域は無限の空間周波数にまで広がり、その中には無限小幅のピークの集合体からなる完全な自己相似構造が現われると考えられる。

回折領域に現われるフラクタルの特徴の一つは、その自己相似性に中心があることである。このことは、コッホ曲線自体が一様な自己相似性を示すことと対照的である。これは、明らかにフラウンホーファ回折のフーリエ変換特性によるものである。

トリアディックコッホ曲線のフラウンホーファ回折パターンにみられるもう一つの興味深い特徴として、2重の自己相似性がある。すなわち、Fig. 11に示した3倍の自己相似性に加えて、 $\sqrt{3}$ 倍の拡大と $\pi/6$ の回転による自己相似性が存在する。これは、トリアディックコッホ曲線を生成するもう一つの規則であるチェザロのジェネレータ (Mandelbrot(1977)) によって説明できる。

もう一つのコッホ曲線の例として、Fig. 7(a)-(c)の正方形イニシエータ上のクアドラティックコッホ曲線の場合について、数値計算および実験の結果を、Fig. 12(a)-(c)およびFig. 13(a)-(c)に示す。トリアディックコッホ曲線の場合とほぼ同様の特徴が認められる。ただし、この場合には $\mu=\sqrt{5}$ であるから、 N の増加によるフラクタル領域の径および周期的領域の周期の増加率は $\sqrt{5}$ である。また、周期構造はジェネレータの形に対応して4方向に伸びており、 N が増加するとともに、その方向は角度 $\tan^{-1}(1/2)$ ずつ回転する。さらに、フラクタル領域の自己相似性にも、 $\sqrt{5}$ 倍の拡大に加えて $\tan^{-1}(1/2)$ の回転が伴っている。

5. フラクタル次元について

フラクタル物体による回折現象を計測的な観点から考えると、物体のフラクタル性を表わすパラメータを非接触かつ遠隔的に測定する原理を提供するものとみることができる。重要なパラメータとしては、フラクタル次元、自己相似性の存在するスケール範囲(上限と下限)などがあげられよう。このうち、自己相似性の存在する下限は、前章の議論からも明らかのように、回折パターンのフラクタル領域の半径から推定することができる。一方、物体の自己相似性の

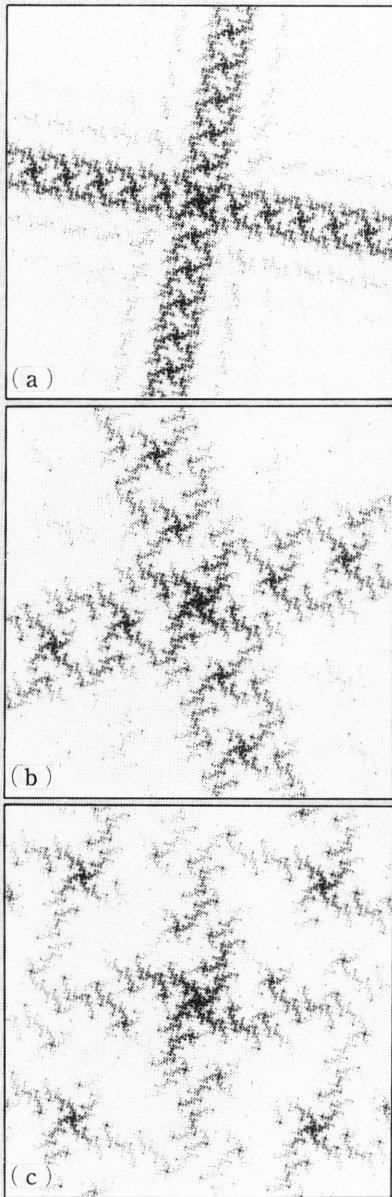


Fig. 12. クアドラティックコッホ曲線のフラウンホーファ回折パターン (理論計算結果): (a) $N=3$, (b) 4, (c) 5.

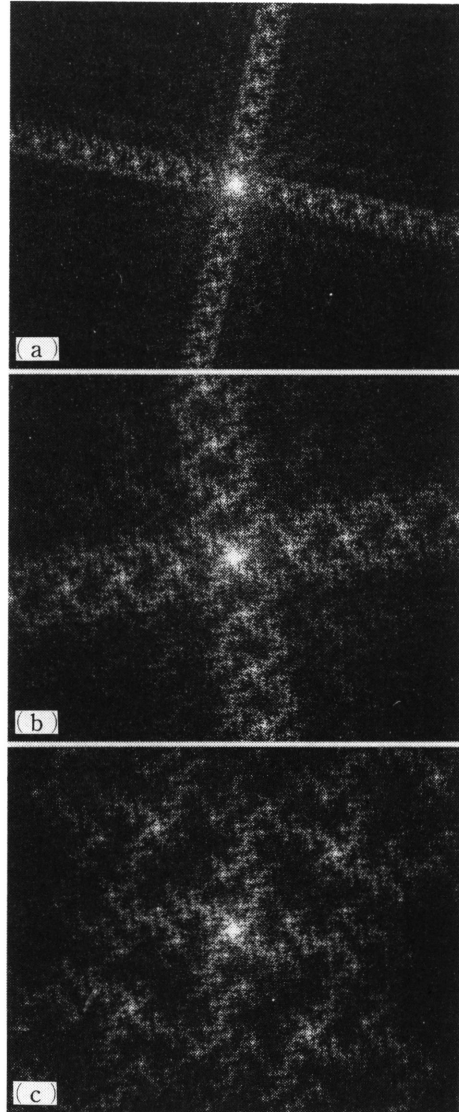


Fig. 13. クアドラティックコッホ曲線のフラウンホーファ回折パターン (実験結果): (a) $N=3$, (b) 4, (c) 5.

上限はイニシエータの大きさによって規定されるが、それは、回折パターンにおいては、中心ピークの大きさとして現われる (Fig. 11 参照)。実際には、回折に伴う非散乱成分 (specular 成分) による強いピークがこの中心ピークに重畳することから、回折パターンの中心構造を詳細に知ることは通常困難である。しかし、回折現象の特性から明らかなように、回折パターンを構成するすべてのピークは、この中心ピークとほぼ同じ大きさを持っており、その大きさを測定することは容易である。

もし、物体が複雑な非フラクタル的上位構造（複雑なイニシエータ）や下位構造を持つならば、状況はやや複雑になる。上位構造の影響は、回折パターンを構成するすべてのピークに細部構造を生じさせることから、回折パターンの微細構造から物体フラクタルの自己相似性の上限を求めるのは必ずしも容易ではなくなる可能性がある。一方、物体の非フラクタル的下位構造は、回折パターンの周期的領域に影響をおよぼし、この領域の構造は必ずしも周期的ではなくなるものと考えられる。したがって、一般的には、物体の自己相似構造の下限は回折パターンから求め、上限は物体を直接観察することにより求めるのが適当であろう。

つぎに、フラクタル次元 D を求める方法について考える。シリカのコロイド状凝集体などのランダムなフラクタルでは、その散乱強度が $I(q) \sim q^{-D}$ となることが知られており（Feder (1988)）、この $I(q)$ の減衰よりフラクタル次元 D を求めることができる。一方、Allain and Cloitre (1986) が示したように、規則的なフラクタルである1次元カントール集合では、回折パターンはランダムフラクタルの場合のような簡単なべき乗則には従わない。この場合、空間周波数 q を3倍ごとに広がる帯域に分割すると、帯域 i ($i=1, 2, \dots, N$)における構造因子の平均強度 $\langle |S(q)|^2 \rangle_i$ が、

$$\langle |S(q)|^2 \rangle_i = \langle |S(q)|^2 \rangle_1 q^{-D}$$

のべき乗則で減衰する。この関係から、カントール集合のフラクタル次元 D を求めることができる（Allain and Cloitre (1986)）。

コッホ曲線についてこれら二つの方法を検討してみる。2次元フラクタルであるコッホ曲線では、クアドラティックコッホ曲線の場合のように、その自己相似性に回転が伴う場合がある。したがって、ある一定の角度 ϕ における $K_N(q)$ を考えるよりも、その角度平均

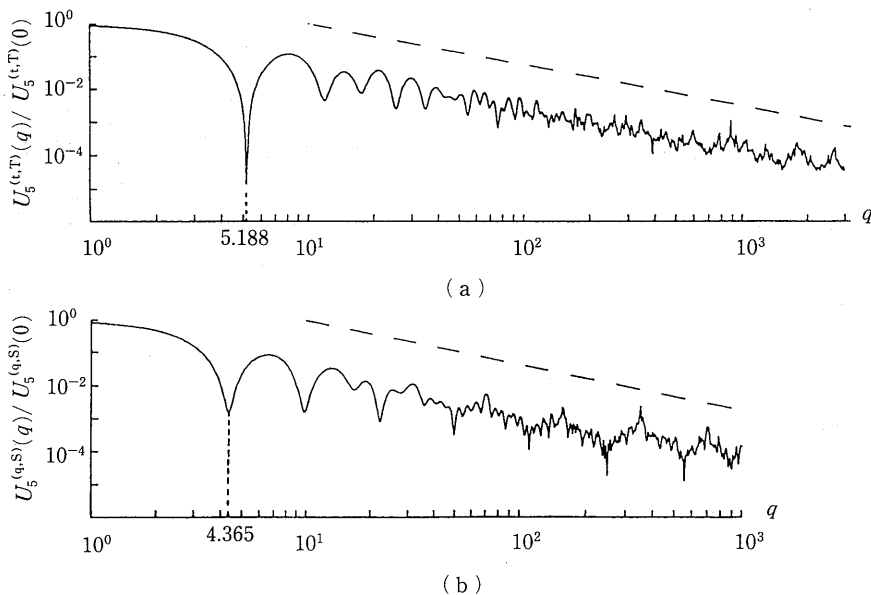


Fig. 14. 回折パターンの角度平均強度分布：(a) トリアディック、および (b) クアドラティックコッホ曲線。

$$U_N(q) = \langle W_N(\mathbf{q}) \rangle_\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\bar{K}_N(\mathbf{q})|^2 d\phi$$

を考える方が適切である。\$N=5\$ のトリアディックおよびクアドラティックコッホ曲線について、数値計算により求めた \$U_N(q)\$ を、\$q=0\$ における値で規格化して Fig. 14 に示す。\$U_N(q)\$ は、それぞれのフラクタル次元 \$D\$ に対する \$q^{-D}\$ の曲線（図中の破線）にはほぼ等しい減衰を示している。しかし、その強度変動には大きな振動がまだ残っており、コッホ曲線の規則的かつ離散的自己相似性によって \$W_N(\mathbf{q})\$ に配置された幾何学的な強度ピークの影響が、角度平均だけでは除去できないことを表わしている。

つぎに、\$\mathbf{q}\$ 平面を \$\mu\$ 倍ずつ幅の広がる一連の円環領域

$$(5.1) \quad B_{N,i} = \{q_{\min} \mu^{i-1} < q \leq q_{\min} \mu^i, 0 < \phi \leq 2\pi\}, \quad i=1, 2, \dots, N$$

で分割し、各領域内での \$W_N(\mathbf{q})\$ の平均

$$V_{N,i} = \iint_{B_{N,i}} W_N(\mathbf{q}) d\mathbf{q} / \iint_{B_{N,i}} d\mathbf{q}$$

を考える。ただし、式(5.1)において \$q_{\min}\$ は \$U_N(q)\$ が最初に極小となる \$q\$ であり、トリアディック

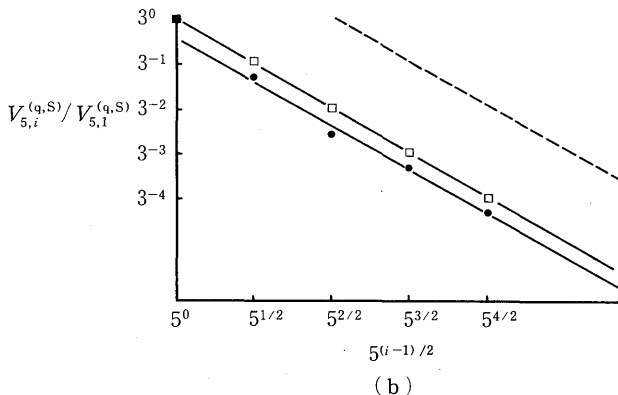
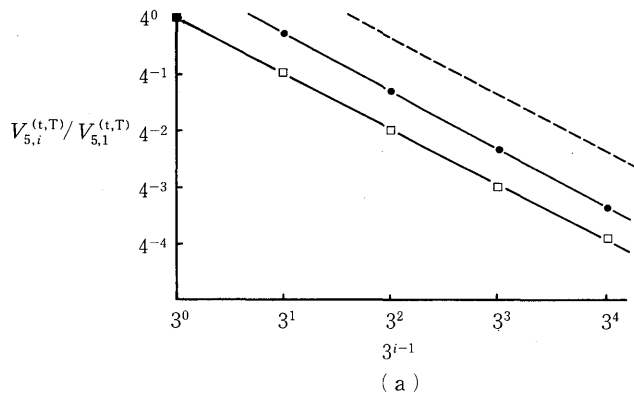


Fig. 15. 円環帯域 \$B_{N,i}\$ 内の平均強度。□は理論結果，●は実験結果を表わす：(a)トリアディック，および (b) クアドラティックコッホ曲線。

クコッホ曲線では $q_{\min}=5.188$, クアドラティックコッホ曲線では $q_{\min}=4.365$ である. 前述の議論から明らかのように, 領域 $B_{N,i}$ 内の $W_N(\mathbf{q})$ は互いに自己相似である. Fig. 15 の \square 印は, $V_{N,i}$ を $N=5$ の二つのコッホ曲線について数値計算により求め, μ^{i-1} に対してプロットしたもので, 破線で示した q^{-D} の減衰にはほぼ一致している. したがって, コッホ曲線のフラウンホーファ回折パターン強度分布は, 離散的な円環内での局所平均においてのみべき乗則に従っており, この関係を使えば, $W_N(\mathbf{q})$ から D を推定することが可能である.

この離散的べき乗則を実験的に確認することを考える. Fig. 8 の光学系の観測面 P_2 にスクリーンを置き, スクリーン上の強度分布をその背後に設置したテレビカメラにより, 2次元フレイムメモリ (512×512 画素, 8ビット量子化) に入力し, さらにマイクロコンピュータに取り込み解析する. しかし, Fig. 14 から分かるように, コッホ曲線のフラウンホーファパターンを取り込むには, 8ビット (=256 階調) よりもはるかに大きなダイナミックレンジが必要である. そこで He-Ne レーザの出射口の直後に ND フィルタを挿入し, 物体を照射するレーザー光の強度を順次変化させ, コンピュータに強度分布を取り込んだ後, ND フィルタによる減衰の補正演算を施すことにより, 実効的に大きなダイナミックレンジを実現した.

$N=5$ の二つのコッホ曲線のフラウンホーファ回折パターンについて, このようにして測定した強度分布から求めた円環帯域内の平均強度 $V_{s,i}$ を Fig. 15 に \bullet 印で示す. $i=2, 3, 4, 5$ の4領域の $V_{s,i}$ は両対数プロットにおいてほぼ直線に乗っており, この直線の傾きから求めたトリアディックおよびクアドラティックコッホ曲線のフラクタル次元は, それぞれ $D=1.29$ および 1.34 である. 真の値は $D=1.2618$ および 1.3652 であるから, 誤差は 2.58 および 1.56% である. なお, Fig. 15 の実験結果において, $V_{s,1}$ が直線から大きくはずれている原因としては, 物体のネガフィルムの背景部分の透過率が完全にゼロではないために, 直接透過成分による中心ピークが存在すること, $i=1$ の帯域は面積がきわめて小さいために, 光学的な干渉ノイズやフレイムメモリの量子化ノイズなどの影響を受けやすいことなどが考えられる.

つぎに, 自己相似である回折パターン自体のフラクタル次元について考えてみる. 前述のように, 回折パターンの自己相似性は一様ではなく, コッホ曲線自体の場合のようにしてその相似次元を求めることはできない. そこで, 質量次元 (Feder (1988)) の考え方を適用してみる. 式(5.1)で定義される円環 $B_{N,i}$ の外円の内部に含まれる全強度 $M_N(q_i)$ を考えると, Fig. 15 の関係から, q_i が大きいところでは近似的に

$$M_N(q_i) \propto q_i^{2-D}, \quad q_i = q_{\min} \mu^i, \quad i=1, 2, \dots, N$$

となることが分かる. この関係から, コッホ曲線のフラウンホーファ回折パターンのフラクタル次元は $2-D$ であるという結論が導かれる. したがって, Fig. 10 および Fig. 13 のフラクタル領域の次元は, それぞれ 0.7382 および 0.6348 である. これは, 理想的点物体 (0次元) は, 一様な強度の回折パターン (2次元) を生じ, 直線状の透過物体 (1次元) は, それに垂直な直線状の回折パターン (1次元) を生じるという関係の自然な拡張であり, フラウンホーファ回折パターンのフーリエ変換特性による性質であると考えられることができる.

6. コッホ曲線のランダム化

自然界に存在するフラクタルの多くはランダムな性質を持っており, ランダムフラクタルによる回折・散乱現象は特に興味深い問題である. しかし, 従来のランダムフラクタルによる回折・散乱の研究は, 1次元位相物体に関するものがほとんどであり (Berry (1979), Jakeman (1982a, 1982b), Jaggard and Kim (1987)), また, 植物体などにみられるフラクタルのよう



Fig. 16. ジェネレータのランダム化.

に、わずかなランダム性を伴ったほぼ規則的なフラクタルに関する研究はほとんどみられない。そこで本章では、前章まで考察してきたコッホ曲線にランダム性を付与し、ランダム化の程度によってその回折パターンがどのように変化するかについて考察する。

コッホ曲線の幾何学的な自己相似性は、ジェネレータの線分の長さ $1/\mu$ 、線分の本数 m 、および線分の配置により決定される。しかし、そのフラクタル次元（相似性次元） D は、 μ と m のみによって定義される。したがって、 μ および m を変えずに線分の配置を変えれば、同じフラクタル次元を持つ様々なコッホ曲線が得られる。さらに、ジェネレータによる置き換えごとにジェネレータの形状をランダムに変化させることにより、 D を変えずにランダムなコッホ曲線を構成することができる。ただし、このようなコッホ曲線の次元 D は、本来の相似性次元ではなく、統計的な意味での相似性次元、あるいは被覆次元ないしは粗視度を変える方法で定義される次元（高安（1986））と考える方が適切である。

ここでは、トリアディックコッホ曲線を取り上げる。ランダム化の方法として、Fig. 2(a)のジェネレータの両端点を固定し、左右の水平な線分に、平均値 0、標準偏差 δ のガウス分布に従う角度ゆらぎを与える (Fig. 16)。この 2 線分の配置が決まれば、内部の二つの線分の配置は自動的に決定される。 δ を 1° から 15° まで変えながら、固定した正三角形イニシエータ上に構成したレベル 5 のランダムなトリアディックコッホ曲線の例を Fig. 17 に示す。この図では、 δ の増加による曲線の変化を分かりやすくするために、標準偏差 1 の同一の乱数列を順次 δ 倍して用いた。

Fig. 18 は、Fig. 17 の図形を物体として実験的に求めたフラウンホーファ回折パターンである。Fig. 17(a) と Fig. 18(a) を比較すると、 $\delta = 1^\circ$ の小さなゆらぎを与えた場合、コッホ曲線の形は一見したところ、Fig. 6(c) に示した非ランダムコッホ曲線とほとんど変わらないのに比べ、その回折パターンでは、Fig. 10(c) と比較して、幾何学的パターンの崩れが明らかに認められる。これは、鋭い強度ピークによって構成された幾何学的な回折パターンの出現には、物体フラクタルを構成する線分の正確な空間配置が必要であることを示している。また、Fig. 18 (a) において、周辺部の方ほどパターンの崩れ方が大きい。これは、物体の最小構成要素である個々の線分では、 N 回の置き換え操作に伴う角度ゆらぎが累積して大きなゆらぎとなり、それが高い空間周波数領域である回折パターンの周辺部の乱れを大きくしているためと考えられる。 δ が大きくなるに従い、コッホ曲線の幾何学的自己相似性は徐々に崩れ始め、フラウンホーファ回折パターンでは、空間周波数の高い領域にみられた構造の乱れが徐々に中心部におよぶようになり、 $\delta = 15^\circ$ ではフラウンホーファ回折パターンの自己相似構造はほぼ完全に崩壊している。

ランダム化されたトリアディックコッホ曲線の回折パターンから、物体フラクタルのフラクタル次元を推定することを考える。ランダム化されたコッホ曲線の場合、フラクタル回折パターンの幾何学的自己相似性は、存在しないかあるいは非常に曖昧であり、式 (5.1) のような円環

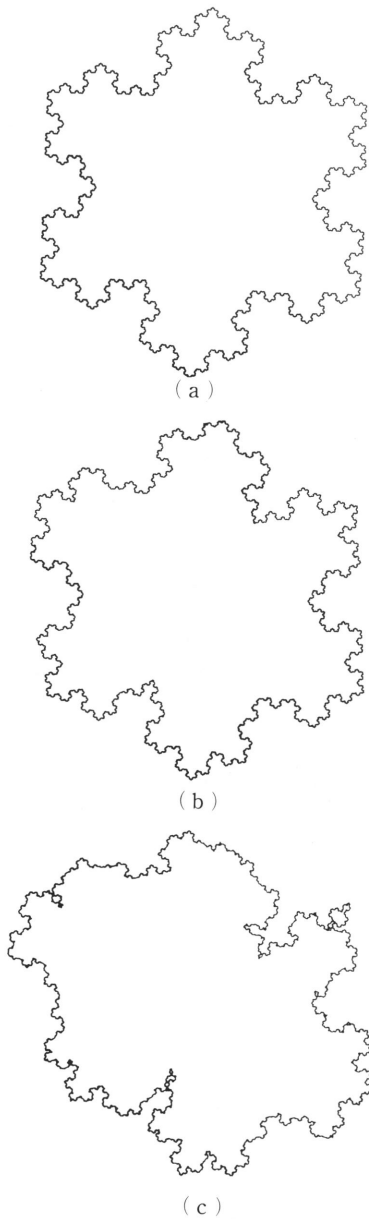


Fig. 17. ランダム化されたトリアディックコッホ曲線: (a) $\delta=1^\circ$, (b) 5° , (c) 15° .

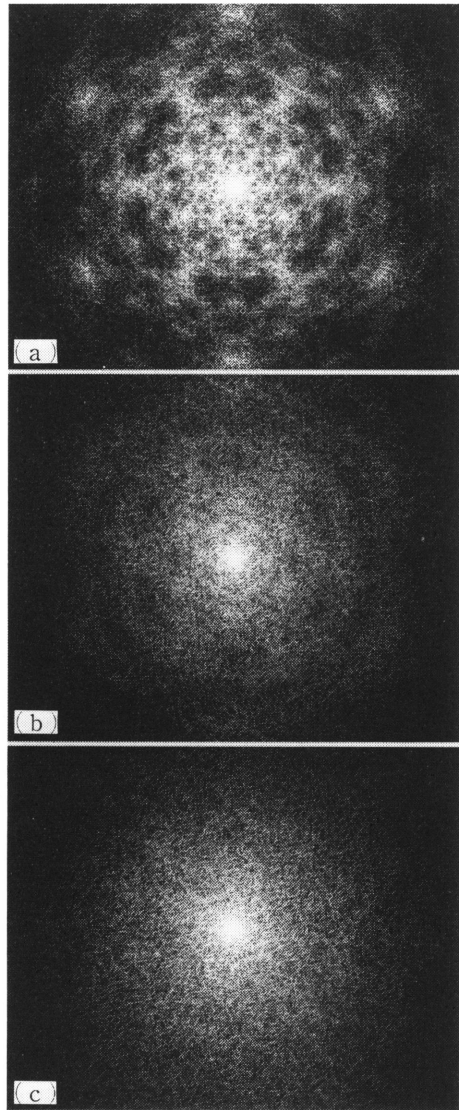


Fig. 18. ランダム化されたトリアディックコッホ曲線の回折パターン: (a) $\delta=1^\circ$, (b) 5° , (c) 15° .

領域を定めることはできない. しかし, Fig. 18 にみられるように, ランダム性の強いコッホ曲線の回折パターンは, その局所的平均強度が, q の増加に対してべき関数的な減衰を示すものと予想される.

回折パターンを, Fig. 15 を求めたのと同様の方法で測定し, その角度平均強度分布 $U_N(q)$ を計算した結果を Fig. 19 に示す. 図中の破線は, q^{-D} の減衰曲線である. Fig. 19 が示すように, δ が大きくなるにつれて Fig. 14 にみられる強度変動が次第に弱くなり, $\delta=10^\circ$ 以上では, ほぼ

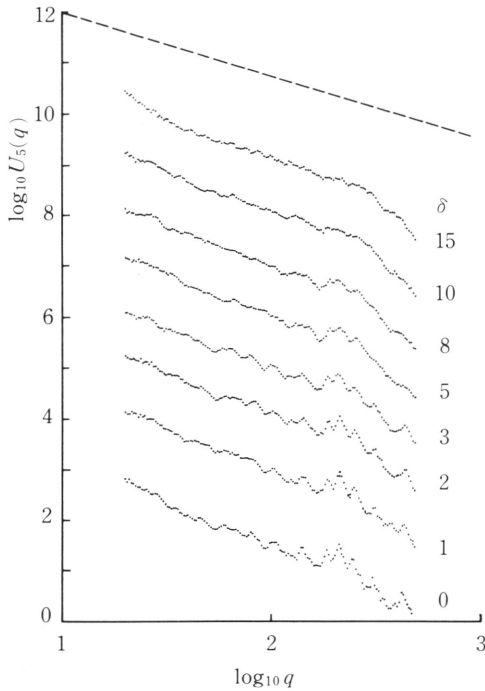


Fig. 19. ランダム化されたトリアディックコッホ曲線の回折パターンの角度平均強度. パラメータは角度ゆらぎの標準偏差 δ .

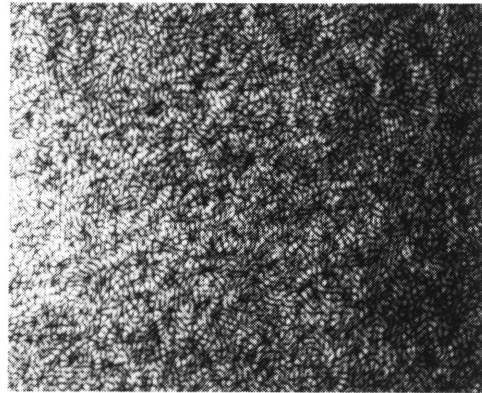


Fig. 20. ランダム化されたトリアディックコッホ曲線の回折パターン (Fig.18(c)) にみられるスペックル.

q^{-D} に近い滑らかな曲線になることが分かる. なお, Fig. 19の $\delta=0^\circ$ の曲線は, 対応する理論曲線である Fig. 14(a)のような微細な変動を示していない. すでに述べたように, 実際の回折パターンの中心部を精度よく測定することは困難であり, その中心点の推定には誤差が伴うことから, 角度平均が十分な精度で行なわれなかったことがその理由であると考えられる.

本章で用いたランダム化の方法では, フラクタル次元を明確にするために, 線分の長さを固定した. このため, ランダムなコッホ曲線においても, そのレベルは明確に定義されている. それにも関わらず, Fig. 18および Fig. 19が示すように, その回折パターンには, 離散的な特徴がまったく認められないことは興味深いことである.

Fig. 20は, Fig. 18(c)の一部を拡大したものである. この図には, ランダムな散乱体による散乱に特有のスペックルパターンが現われている. 非ランダムなコッホ曲線の回折パターンが幾何学的自己相似性を持つことから, このスペックルパターンも原点を中心とするランダムな自己相似性を持つフラクタルであると考えられる. このスペックルは, ガウス統計に従う通常のスペックル (たとえば, Dainty (1975)) とは様相が異なるように見える. ある種のフラクタル的ランダム位相スクリーンによって生じるスペックルの強度変動は, 代表的な非ガウスのスペックル強度の統計分布である K 分布に従うことが知られている (Jakeman(1982b)). しかし, Fig. 20のような, 振幅型のフラクタル散乱体によるスペックルの統計については, これまであまり議論がなされていない. この問題は, 今後の検討を要する課題である.

7. 結 論

一般化されたコッホ曲線のフラウンホーファ回折場の特徴について、理論および実験により考察した。コッホ曲線を、平行移動、回転、および拡大の三つのオペレータで表現することにより、回折場の複素振幅を表わす式を導出した。数値計算の結果は、レーザ回折実験によって得られるパターンとよい一致を示し、以下のような特徴が確認された。

有限のスケール範囲を持つコッホ曲線のフラウンホーファ回折パターンには、中心部に大規模な自己相似性を持つフラクタル領域が現われ、その外部には小規模な自己相似パターンが直線上に周期的に配置した構造が存在する。フラクタル領域の大きさは、コッホ曲線の最小構成線分が形作る回折パターンの第1零点に等しい。一方、フラクタル領域を構成する微小な強度ピークの大きさは、イニシエータの回折パターンの主要ピークのオーダーである。フラクタル領域の自己相似性には一つの中心が存在し、そのフラクタル次元は、コッホ曲線の相似性次元を D として、 $2-D$ で与えられる。フラクタル領域における強度の変化は、互いに自己相似なパターンを含む一連の円環領域内における局所的な平均強度の意味においてのみ、べき乗則に従う。

ジェネレータの構成線分に角度ゆらぎを導入することにより、コッホ曲線にランダム性を付与することができる。このランダム性は、コッホ曲線自体には見かけ上変化を与えないほどわずかなものでも、その回折パターンの幾何学的模様に変化をもたらす。角度ゆらぎが大きくなるにつれて、回折パターンの周辺部から中心部へと、自己相似パターンが次第に崩れてゆき、大きなゆらぎに対しては、回折パターン全体がスペックル状のランダムフラクタルへと変化する。

参 考 文 献

- Allain, C. and Cloitre, M. (1986). Optical diffraction on fractals, *Phys. Rev. B*, **33**, 3566-3569.
- Bale, H.D. and Schmidt, P.W. (1984). Small-angle x-ray-scattering investigation of submicroscopic porosity with fractal properties, *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 596-599.
- Berry, M.V. (1979). Diffractals, *J. Phys. A*, **12**, 781-797.
- Dainty, J.C. (1975). Introduction, *Laser Speckle and Related Phenomena* (ed. J.C. Dainty), 1-7, Springer, New York.
- Feder, J. (1988). *Fractals*, Plenum, New York.
- Höhr, A., Neumann, H.-B., Schmidt, P.W. and Pfeifer, P. (1988). Fractal surface and cluster structure of controlled-pore glasses and Vycor porous glass as revealed by small-angle x-ray and neutron scattering, *Phys. Rev. B*, **38**, 1462-1467.
- Jaggard, D.L. and Kim, Y. (1987). Diffraction by band-limited fractal screens, *J. Opt. Soc. Amer. A*, **4**, 1055-1062.
- Jakeman, E. (1982a). Scattering by a corrugated random surface with fractal slope, *J. Phys. A*, **15**, L55-L59.
- Jakeman, E. (1982b). Fresnel scattering by a corrugated random surface with fractal slope, *J. Opt. Soc. Amer. A*, **72**, 1034-1041.
- Mandelbrot, B. (1977). *Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York.
- Schmidt, P.W. and Dacai, X. (1986). Calculation of the small-angle x-ray and neutron scattering from nonrandom (regular) fractals, *Phys. Rev. A*, **33**, 560-566.
- 高安秀樹 (1986). 『フラクタル』, 朝倉書店, 東京.
- Uozumi, J., Kimura, H. and Asakura, T. (1990). Fraunhofer diffraction by Koch fractals, *Journal of Modern Optics*, **37**, 1011-1031.

Laser Diffraction by Generalized Koch Curves

Jun Uozumi, Hiroyuki Kimura and Toshimitsu Asakura

(Research Institute of Applied Electricity, Hokkaido University)

Fraunhofer diffraction by generalized Koch curves with a finite range of self-similarity is studied theoretically and experimentally. Results of the numerical evaluation for the intensity distribution in the Fraunhofer diffraction pattern coincide with the experimental results. Both results show that the diffraction pattern is divided into fractal and periodic areas and that the former is surrounded by the latter. The inner and outer cutoffs of self-similarity of the object fractal can be estimated by the outer and inner cutoffs, respectively, of self-similarity of the Fraunhofer diffraction pattern. The fractal dimension of the object is determined from a variation of the intensities averaged locally over the annular areas whose width increases successively by the discrete scaling factor of the object fractal. Randomization of Koch curves is performed by introducing the angular fluctuation into the segments of a generator. This randomization process destroys gradually the self-similarity in the Fraunhofer diffraction pattern with an increase of the standard deviation of the angular fluctuation of the generator. For a moderate standard deviation of the phase fluctuation, the diffraction pattern becomes a random fractal which takes a form of the speckle pattern having an unordinary appearance.