$$g(\boldsymbol{x};\ \theta)=n/\theta\ -\ \sum(x_i-\bar{x})^2/\theta^2=0$$

の解として与えられるが，これは不偏ではない．

例 2. 母数 θ が変動係数として表わされるとき，モーメント推定量は通常 $\hat{\theta}=\sum(x_i-\bar{x})^2/(n-1)\bar{x}^2$ で与えられる．これに対応する推定方程式は

$$g(\boldsymbol{x};\ \theta)=\sum(x_i-\bar{x})^2/(n-1)\ -\ \bar{x}^2\theta=0$$

となるが，これも不偏ではない．

3. 不偏性の役割

理論的には当然と思われる要請が実際には気安く無視されている事実がある．一方，理論的な研究では理論の構成の前提としている．演者の経験と理解では，理論的に自然な要請は統計量の構成で頼れる指針となるはずである．

不偏性の要請は

1) 推定量の偏りを小さくする
2) 層が増加したときに推定量が不一致となる現象を回避できる

ことが容易に分かる．少し細かく調べると

3) 推定方程式を不偏化することによって推定量が改善されることが多い
4) 条件付，周辺最大尤度推定量は不偏化尤度推定方程式の解とみなされる

ことが分かる．従って，モーメント法，修正尤度法，疑似尤度法に１つの新しい視点を与える．

本研究は山本英二氏（岡山理科大，当研究所客員）との共同研究（1-共研-100）である．“The role of unbiasedness in estimating equations” として論文集（Godambe 編）に発表予定である．

生存競争系の格子模型

伊 藤 栄 明

生存競争系の格子模型は渦と渦糸についての定常的なパターンをつくりだす(Tainaka (1989))．n 個の種の粒子からなる気体モデルを考える．種 i の１粒子と種 j の１粒子は衝突により確率 $1/2+a_{ij}$ で種 i の２粒子になり，確率 $1/2+a_{ji}$ で種 j の２粒子になるものとする．ここで $a_{ij}+a_{ji}=0, |a_{ij}|\leqq 1/2$ とする．格子模型においては衝突は記憶をもち，２体の衝突のみでなく３体以上の衝突も考えにいれるほうが適切であることが理解できる．格子模型を近似したものとして２体の衝突模型を考え，粒子の数が十分に大であるとして種 i の割合を P_i とすると次の様な常微分方程式系を得る．

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}P_i=P_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}P_j\right),\qquad i=1,\ 2,\ldots,\ n.$$

この方程式に不動点 $q=(q_1, q_2,\ldots, q_n)$ があるとすると，この系は保存量 $I=\sum_{i=1}^{n}q_i\log P_i$ をもつことがわかる．２体の衝突模型の系において保存量であった量 I は３体の衝突を考えにいれた場合リアプノフ関数になり，系 (1) の不動点に解が近づいてゆく（Itoh (1981)）．

格子模型の場合，衝突は記憶をもち，３体の衝突を考慮にいれたモデルが自然である．上記の定理より格子模型が定常なパターンを示すことが理解できる（Tainaka and Itoh (1990)）．

上記のモデルにおいて $n=3,\ i-j\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ について $a_{ij}=1/2$ とする．この場合に得られる空間的なパターンについての解釈を試みる．離散的でサイクリックな高さをもつ pressure を考える．すなわち，

2は1より高く，3は2より高く，1は3よりも高いものとする．各格子点を中心とする正方形のタイルばりを考える．各正方形の頂点の作る新しい格子を考える．各正方形にはその中心にあるもとの格子点の pressure を与える．となりあう正方形の辺の中点に pressure の差を値としてもつベクトルを高いほうから低いほうへ引く．この様にして各辺の中点に pressure force を定義する．これらについて正方形のタイルの各頂点，すなわち新しい格子の各格子点 (i, j) に流体力学における $\mathrm{rot}(i, j)$ を自然に離散化した量を定義することができる．右渦，左渦を定義することができる．周期境界条件のもとで右渦の数と左渦の数は等しい．3次元格子模型にこの議論を拡張することができる．この場合，渦糸を定義することができる．周期境界条件のもとでは渦糸はとぎれない等の性質がある．系はこれらの性質をみたしながら変化してゆく（Tainaka and Itoh (1990)).

参考文献

Itoh, Y. (1981). Non-associative algebra for a Lotka-Volterra system with ternally interaction, *Nolinear Anal.*, **5**, 53-56.

Tainaka, K. (1988). Lattice model for the Lotka-Volterra system, *J. Phys. Soc. Japan*, **57**, 2588-2590.

Tainaka, K. (1989). Stationary pattern of vortices or string in biological systems: Lattice version of the Lotka-Volterra model, *Phys. Rev. Lett.*, **63**, 2688-2691.

Tainaka, K. and Itoh, Y. (1990). Vortex excitations in biological systems of the Lotka-Volterra system (投稿中).

相乗的外乱を受けるシステムの確率分布

岡 崎 卓

1. 外乱を受けるシステムと Fokker-Planck 方程式

雑音の混入する電気回路や波浪を受けて動揺する船体など，不規則な外力を受けて確率的に発展する系について，その系変数の確率分布を求めるには Fokker-Planck (FP) 方程式が用いられる．しかし，この FP 方程式が正しく成立するのは系に加わる外乱が正規白色過程となる場合に限られ，一般の外乱に対しては近似的結果を与えるに過ぎない．それは，外乱の特性を精密に反映する項を欠くためである．以下では統計力学の射影子法を援用して，相乗的，即ち系変数との積の形で影響する任意の外乱に対し正確な結果を与えるようこの FP 方程式を一般化する方法について概略を記す．

2. 一般化 Fokker-Planck 方程式の導出

系変数 U の時間的発展を記述する方程式を

$$\frac{dU}{dt}=M(U)+m(U, W)$$

とする．ここに $M(U)$ は系の構造を規定し，$m(U, W)$ は外乱 W の影響を表わす関数である．外乱 W が白色正規過程 $\zeta(t)$ $(\langle\zeta\rangle=0, \langle\zeta(t)\zeta(s)\rangle=\sigma^2\delta(t-s))$ によって駆動される確率過程

$$\frac{dW}{dt}=N(U)+\zeta(t)$$

であるとすれば，結合確率密度 $\rho(U, W)$ の満たす方程式（合成系の FP 方程式）

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-iL\rho \qquad \left(-iL=-\frac{\partial}{\partial U}(M(U)+m(U, W))-\frac{\partial}{\partial W}N(W)+\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial W}\right)^2\right)$$

と，任意の位相関数 $X(U, W)$ を $\phi_u(U)=\delta(U-u)$ の線型結合に写す射影子 $\boldsymbol{p}(t)$ $(\boldsymbol{p}(t)X=\int du\phi_u\mathrm{tr}\{g(W,t)\phi_uX\}$, 但し $g(W, t)$ は外乱 W の確率密度であり，また $\mathrm{tr}\{\cdots\}=\int\cdots dUdW$ である）