

# 時系列のフラクタル解析

統計数理研究所 樋口知之

(1989年7月 受付)

## 1. はじめに

解析対象の乱雑さを表現する時、我々は定性的な言葉 — 例えば complex, irregular, noisy, random, turbulent, 日本語なら、複雑、乱流的、ノイズ、乱雑、不規則等 — を用いて表現するのが常である。最近ではこれらの言葉群に、カオスといった新語も仲間入りしてきた。解析対象の乱雑さを表す修飾語がいかに豊かになろうと、現実のデータ解析においては一步進んだ解釈は生まれにくい。乱雑さの定量化がなされていないことが、数値演算を基本とする現在の解析システムに不都合であるからである。もし乱雑さが定量化されれば、乱雑さを表す指数と時系列を生み出すシステムをコントロールするパラメーターとを比較検討することで、一步踏み込んだ議論が可能になる。少なくとも、定性的な言葉で表現することに終始していた段階とは雲泥の差がある。本稿では、データの基本的な形の一つである時系列データに話を絞り、いったい乱雑さとはなにか、それを捉えるにはどうすればよいのかについて考えてみたい。これらの問題に対する決定的な解答はないが、一つのアイデアの紹介が本稿の主要な目的である。

乱雑な時系列のパワースペクトルが、顕著なパワーをもった周波数成分がない連続的な構造を示すことが多々ある。普通は、低周波数成分の方が高周波数成分よりもパワーが大きい。このような時系列を一般にレッドノイズと呼ぶ。さらにこのパワースペクトルが  $P(f) \propto f^{-\alpha}$  の関数 (power law スペクトラム) で近似できる時に、この時系列を広義の  $1/f$  ノイズと呼ぶ。なぜ広義かという、別に  $\alpha$  が1でない時にも  $1/f$  と呼ぶからである。もし時系列のスペクトルが  $f^{-\alpha}$  で十分近似できる時、この時の  $\alpha$  が乱雑さを表現する一つの指数になる。実際に、流体乱流では実験、数値計算、理論そして観測値で、厳密な  $\alpha$  の評価が研究の対象となっている (Kolmogorov (1941), Patrick and Pugh (1969), 巽 (1986), Burlaga and Mish (1987))。このパワースペクトルから  $\alpha$  を求める解析のほかに、Mandelbrot の提案による  $R/S$  解析 (Mandelbrot and Wallis (1969)) などが乱雑な時系列の定量的解析に応用されていたが、多くの解析者に複雑な時系列データの解析に目を向けさせるきっかけとなったのは、やはり Mandelbrot のフラクタルのアイデアの広まりであろう (Mandelbrot (1977))。

解析的に取り扱えるようなきれいな現象の研究が一段落して、もっと複雑な現象の研究に取り組み始めたのはいいが、なかなかよい結果が出ず研究者に苛立ちと諦めが漂い始めた時に現れたのが、フラクタルとカオスである。フラクタルの概念自体は、それほど人々を驚かすものではないが、Mandelbrot の本中の島や山々のシミュレーションの再現のすばらしさに、人々は強い魅力を感じたのではないかと思う。またフラクタルやカオスが流行し始めた時期は、ちょうどコンピューターの飛躍的進歩と一致しており、この進歩がデータの大量取得と大規模解析に人々を取り組ませ始めたと言える。とくにカオスの研究の70年代後半以降の発展は、コンピューターによる非線形微分方程式の数値積分が大規模にかつ容易にできるようになったからではないかと思う。カオスとフラクタルの流行は、コンピューターの発達によるところが大き

いと言える。

フラクタルは、測度論に基づく次元の拡張である。本稿は解析法に問題を感じているので、数学的な次元の定義等に関しては、Mandelbrot (1977)の付録、Falconer (1985)やHata (1985)を参考して頂きたい。2次元、3次元データの乱雑な現象の定量化にフラクタルのアイデアはすぐに取り入れられたが、時系列のデータに対してはあまり行なわれなかった。時系列解析にフラクタル次元を取り込んだものに、Grassbergerらの提案する相関積分がある(Grassberger and Procaccia (1983))。この解析法は、観測した1次元時系列データから多次元の位相空間を構成し、その位相空間に埋め込まれた attractor のフラクタル次元を求めるものである。時系列のグラフの示す乱雑さの定量化でなく、データから再構成した位相空間上の軌跡の埋め込まれる図形の性質の定量化である。データを生み出すであろう動力学系の位相空間内において、解が構成する図形のトポロジーが解析対象となっている。彼らの方法を用いて多くの複雑な現象が解析され、様々な自然現象は実はカオス的であるという報告がなされた。とくに話題となったのは、長い時間スケールの地球気温の変化はカオスであるかないかに関する議論である(Nicolis, C. and Nicolis G. (1984), Grassberger (1986), Essex et al. (1987))。筆者は、相関積分の現実データ解析への応用結果に対しては懐疑的である。

時系列のグラフそのものが示す乱雑さに、フラクタルの考えが導入されたのは最近である(Burlaga and Klein (1986))。Burlaga and KleinはFFTを使用したパワースペクトル解析法と比較して、その計算の速度とメモリー節約の点から、彼らの提案する解析法の超大量時系列データへの応用性が高いことを強調した。筆者は彼らの方法の不適切な点を上げ、別な定義による時系列の、フラクタルのアイデアを応用した解析法を提案した(Higuchi (1988))。また筆者によって、実時間でフラクタル性を示す時系列と $1/f$ ノイズとの関係も調べられている(Higuchi (1989a, 1989b))。本稿では解析手法の紹介を以下のような構成で試みようと思う。始めに第2章でフラクタル解析の概要を説明する。第3章では、フラクタル性を示す時系列と密接な関係のある fractional Brownian 関数のいろいろな性質を論ずる。第4章では時系列の示す乱雑さの一つの measure であるフラクタル次元と位相の関係を調べた結果を示す。第5章では実際のフラクタル解析の応用に当たって留意する点を論じる。最後に第6章にて結論を行ないたい。

## 2. 解析方法

### 2.1 時系列のグラフの長さの定義

特徴的な周期変動成分をもたない(顕著なピークがない連続パワースペクトル構造を示す)複雑な様相を呈する時系列のグラフに対して、島の海岸線の長さを計りフラクタル次元を求めたような方法の適用を考えるのは自然である。つまり時系列を、海岸線のように2次元空間(平面)を埋めるパターンと捉え、時系列の示すパターンの複雑さをフラクタル次元で定量化することを試みるわけである。フラクタル次元計算には、海岸線を長さ $r$ の線分の集合で近似して、全周を覆うのに必要な線分の長さ $N(r)$ を計算する方法を採用する(高安(1986))。この時一つの線分の両端、つまり結ばれた2点間の距離は次のような普通のユークリッドノルムである。

$$(2.1) \quad r = \Delta L_i(r) = \sqrt{(F_x(S_x(i+1)) - S_x(i))^2 + (F_y(S_y(i+1)) - S_y(i))^2}$$

ここで $S_x(i)$ は $i$ 番目の点の $x$ 座標を、 $r$ は海岸線の粗視化を行なった長さを示す。また

$F_x(\cdot)$  は実際の横方向の距離値をグラフ上での値 (つまり何 cm) にする関数である. 具体的に言えば, 縮尺 10,000 分の 1 の地図であったなら,  $F_x(\Delta) = \Delta / 10^5$  の形となる. 同様に  $F_y(\cdot)$  は縦方向の縮尺を行なう. 普通地図の場合,  $F_x(\cdot) = F_y(\cdot)$  である.

$r$  のスケールで計った海岸線全体の長さ  $L(r)$  は,

$$(2.2) \quad L(r) = \frac{\sum_i \Delta L_i(r)}{r} = \frac{rN(r)}{r} = N(r)$$

で与えられる.  $r$  で割るのは, 長さ  $r$  を基準とした値にするためである. これは, 次のような例を考えれば理解できる. いま 2 m の長さの線分を, いろいろな長さのスケール (物差し) 単位で計ることにしよう. 1 m の物差しを単位として計れば, 値は 2 である (実際に線分に物差しを当ててみた時に, 線分は物差しの 2 倍). 1 cm の物差しでは 200, 1 mm では 2000 となる. また, 10 m では 0.2 というふうに,  $r$  のスケールを単位とした時の長さの値は, 実際の線分の長さを実際の物差しの長さで割 (規格化す) ればよい.

時系列を "平面を埋める線分のパターン" と認識した場合, 海岸線の長さを計った方法を単純に当てはめることはできない. 例えば長さ  $r$  で時系列のグラフを粗視化して, 構成した線分の一つの長さを上同様に定義すると, おかしなことが生ずる. 時系列の横軸は時間, 縦軸は別の単位であり, 海岸線の場合のように縦横同じ単位ではない. 従って, 時系列のグラフの縦軸の表示の仕方はそのままにしておいて, 横軸をいままで 1 秒を 1 cm で表示していたものを 1 mm にしてもかまわないわけである. そうすると平面を埋めるパターンは, 時間軸をどのように表示するか (隣合う時刻の 2 点をどれくらい離して書くか, 言い替えればサンプリングタイム  $\Delta t$  の長さを実際にいくつにして時系列のグラフを書くか) で大きく変化する. 乱雑な様相を示す時系列も,  $\Delta t$  のグラフ上の実際の長さを非常に大きくすると複雑な時系列には見えなくなる. 逆に規則正しい sin 波を示す時系列も,  $\Delta t$  を小さくするとノイズに見える. 元々は同じ時系列なのに, このようにパターン認識が変化してしまい, それを反映して乱雑さを表す指数が変化することは不都合である (Brown (1987)). 海岸線の場合は縦横ともに同じ単位なので, 現実をどう地図上に縮尺して書こうと縦横は同時に縮尺され, 従って縮尺された全ての図形は相似である. パターン認識 (フラクタル次元) も地図の縮尺度には依存しない.

与えられた時系列  $X_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) を適当なスケールで縦横縮尺し, グラフに表す.  $X_i$  の値をグラフ上の長さにする関数を  $F_v(\cdot)$ ,  $\Delta t$  を変換する関数を  $F_t(\cdot)$  と表記する. 隣合うグラフ上の 2 点 ( $X_{i+1}, X_i$ ) 間の長さは, 海岸線の定義をそのまま当てはめれば,

$$(2.3) \quad \Delta L_i(\Delta t) = \sqrt{(F_v(X_{i+1} - X_i))^2 + (F_t(\Delta t))^2}$$

となる. 縦軸の書き方はそのままにして  $F_t(\Delta t)$  を非常に大きくして時系列を書くと,  $\sqrt{\quad}$  のなかの第一項にほとんど依存しない値になる. つまり現実の時系列がどのような様相を示そうと,  $\Delta L_i(\Delta t)$  は同じような値になる. これは明らかにおかしいので, 2 点間の長さは

$$(2.4) \quad \Delta L_i(\Delta t) = |F_v(X_{i+1} - X_i)| = F_v(|X_{i+1} - X_i|)$$

で定義せねばならない. これにより全長は,

$$(2.5) \quad L(\Delta t) = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} |F_v(X_{i+1} - X_i)|}{F_t(\Delta t)} = \frac{F_v\left(\sum_{i=1}^{N-1} |X_{i+1} - X_i|\right)}{F_t(\Delta t)}$$

となる.  $F_t(\Delta t)$  で割るのは, 海岸線の時と同じ理由による.

## 2.2 粗視化の方法

オリジナルの時系列の長さの定義は上に与えられたが、次に時系列を粗視化した時の長さ  $L(k\Delta t)$  を定義しなければならない。最終的に求めたいものは  $L(k\Delta t)$  の  $k$  への依存性であって、 $L(k\Delta t)$  の値そのものではないので、式(2.5)中の  $k$  に依存しない  $F_v(\cdot)$  や  $F_t(\cdot)$  の計算は必要ない。さらに具体的に言うと、最終的に作成するグラフは  $\log(k\Delta t)$  vs.  $\log(L(k\Delta t))$  であるので、 $F_v(\cdot)$  や  $F_t(\cdot)$  はこのグラフを上下左右に平行移動させるだけである。従って式(2.5)の代わりに、

$$(2.5') \quad L(\Delta t) = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} |X_{i+1} - X_i|}{\Delta t}$$

を採用すればよい。時系列の場合、粗視化のスケールは元々の時系列のサンプリングタイム  $\Delta t$  の整数倍に限られる。なぜなら時系列とは、 $\Delta t$  の整数倍の離散点だけで値の定義された構造体であるからである。いま、時系列を  $\tau = k\Delta t$  の時間で粗視化する(以後  $k$  で粗視化と略す)ことを考える。これには2通りの方法があるので、紹介する。

### 2.2.1 Burlaga and Klein (1986) の方法

オリジナルの時系列から、 $k$  で粗視化した時系列を次のように構成する。まず元々の時系列を  $k$  毎に分割し、新しいデータセットを構成する。例えば  $k=3$  の時は、

$$(2.6) \quad (X_1, X_2, X_3)(X_4, X_5, X_6)(X_7, X_8, X_9) \dots$$

当然、一つの( )には  $k$  個のデータが含まれている。もしデータ数  $N$  が  $k$  の倍数でない時でも、つまり最後のセットに  $k$  個のデータが含まれていなくてもそのままにしておいてよい。次に、各々のセット内の(データ  $k$  個の算術)平均値を求める。 $j$  番目の( ) セットの平均値を  $\bar{X}_j(k)$  で表現すると、 $k$  で粗視化した時の長さは、

$$(2.7) \quad L_{BK}(k) = \frac{\sum_{j=1}^{[N/k]} |\bar{X}_{j+1}(k) - \bar{X}_j(k)|}{k}$$

で定義される。ここで [ ] はガウス記号を表す。最後のセットの平均値  $\bar{X}_{[N/k]+1}(k)$  は、セット内に含まれたデータ数のデータの平均値でよい。長さの添字 BK は、Burlaga and Klein 法(略して BK 法と呼ぶ)の定義であることを示す。この定義のポイントは、長さを求める前にセット内で平均を行なっていることで、これが後で説明するように、この方法の精度の悪さの原因となる。

### 2.2.2 Higuchi (1988) の方法

Burlaga and Klein は  $k$  で粗視化した時系列セットを一つ作成したが、Higuchi の方法は  $k$  で粗視化した時系列のセットを次のように  $k$  個構成する。

$$(2.8) \quad \bar{X}_m(k); X(m), X(m+k), X(m+2k), \dots, X\left(m + \left[\frac{N-m}{k}\right] \cdot k\right) \\ (m=1, 2, \dots, k)$$

例えば  $k=3$ 、データ数  $N=100$  の時は、

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(3); & X(1), X(4), X(7), \dots, X(97), X(100) \\ \tilde{X}_2(3); & X(2), X(5), X(8), \dots, X(98) \\ \tilde{X}_3(3); & X(3), X(6), X(9), \dots, X(99) \end{aligned}$$

のように3個の時系列のセット  $\tilde{X}_m(3)$  ( $m=1, 2, 3$ )ができる。

この構成された一つ一つの  $\tilde{X}_m(k)$  に対して長さを求める。それを  $L_m(k)$  ( $m=1, 2, \dots, k$ ) と表そう。

$$(2.9) \quad L_m(k) = \left\{ \left( \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor} |X(m+ik) - X(m+(i-1) \cdot k)| \right) \frac{N-1}{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor \cdot k} \right\} / k$$

$(N-1) / \left[ \lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor \cdot k \right]$  の項は、データ数が有限なために、同じ  $k$  でもセット  $\tilde{X}_m(k)$  内のデータ数に違いがあり、その違いを  $L_m(k)$  の計算時に補正するためである。例えば  $k=3, N=100$  の時は、 $\tilde{X}_1(3)$  にはデータは34個含まれているが、 $\tilde{X}_2(3)$  と  $\tilde{X}_3(3)$  には33個で一つ少ない。このデータ数の違いが、 $|\cdot|$  の和をとる個数差になり、補正を要するわけである。

最後に  $k$  で粗視化された時の時系列の長さを、上で求めた  $k$  個の  $L_m(k)$  の算術平均で定義する。それを

$$(2.10) \quad \langle L(k) \rangle = \frac{\sum_{m=1}^k L_m(k)}{k}$$

で表す。

### 2.2.3 二つの方法の違い

先ほど述べたように、BK法は長さを計算する前に平均をとっているのに対し、Higuchi法は長さを計算してから、平均を行なっている。この両者の違いは、絶対値の計算と平均の計算が可換でないことにある。この事実をはっきりと示すために、 $k=3$  の場合を例にとりて考えてみよう。BK法では、

$$(2.11) \quad L_{BK}(3) = \left\{ \left| \frac{X(4)+X(5)+X(6)}{3} - \frac{X(1)+X(2)+X(3)}{3} \right| + \left| \frac{X(7)+X(8)+X(9)}{3} - \frac{X(4)+X(5)+X(6)}{3} \right| + \left| \frac{X(10)+X(11)+X(12)}{3} - \frac{X(7)+X(8)+X(9)}{3} \right| + \dots \right\} / 3$$

であるが、Higuchi法は

$$(2.12) \quad \langle L(3) \rangle = \left\{ \frac{|X(4)-X(1)| + |X(5)-X(2)| + |X(6)-X(3)|}{3} + \frac{|X(7)-X(4)| + |X(8)-X(5)| + |X(9)-X(6)|}{3} + \frac{|X(10)-X(7)| + |X(11)-X(8)| + |X(12)-X(9)|}{3} + \dots \right\} / 3$$

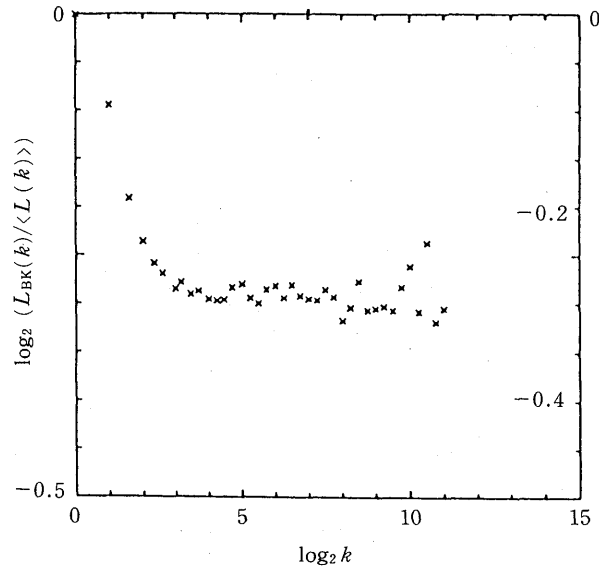


Fig. 1.  $\log(L_{BK}(k)/\langle L(k) \rangle)$  as a function of  $\log k$  is shown. It is clear that the curve length calculated by BK's method is always shorter than that of Higuchi's method.

となり、両者の違いは一目瞭然である。

BK法の定義が不適當であることを、簡単な時系列の場合で示そう。いま時系列  $X(i)$  を、平均値0分散1の正規分布  $N(0, 1)$  から次々と発生させた乱数の列だとしよう。そうすると、BK法での  $\overline{X_m(k)}$  は平均値0分散  $1/k$  の正規分布に従う確率変数となる。よって十分に大きい  $k$  の場合は、 $\overline{X_m(k)}$  はほとんど確実に0の値をとり、よって  $k$  で粗視化したこの時系列の長さは、 $L_{BK}(k)$  の分子が0となることから、0となってしまう。これは明らかにおかしい。Higuchi法で求めた時系列の長さよりも、BK法で求めた長さは常に短く、その差は  $k$  が大きくなるにつれて著しくなる。

Fig. 1にBK法とHiguchi法で求めたグラフの長さを比較したものを示す。計算に使用したデータ  $Y(i)$  は、次のようにして作成した、普通の1次元ブラウン運動を表す時系列である(飛田(1980))。

$$(2.13) \quad Y(i) = \sum_{j=1}^{1000+i} Z(j)$$

ここで  $Z(j)$  は平均値0分散1の正規分布  $N(0, 1)$  から次々と発生させた乱数である。1000の値は、始めの  $Z(1)$  の影響が  $Y(1)$  に及ばないようにとった適当な数である。使用したデータ数は  $N=2^{17}$ 。わざわざ普通のブラウン運動と言った意味は、次章に拡張した1次元ブラウン運動が出てくるからである。図から明らかなように、 $k \neq 1$  の全ての  $k$  の値に対して  $L_{BK}(k)$  は  $\langle L(k) \rangle$  よりも小さい。この傾向は、予想された通り  $k$  が大きいと著しい。

### 2.3 フラクタル次元の定義

以後、時系列の長さはHiguchi法を使って計算するものとする。前述のように求めたいろいろな  $k$  で粗視化した時系列の長さ  $\langle L(k) \rangle$  を、 $k$  に対して両対数でグラフにプロットして、グラフが一直線を示す時、この時系列  $X(i)$  はフラクタル性をもつ、あるいは時系列はフラクタルで

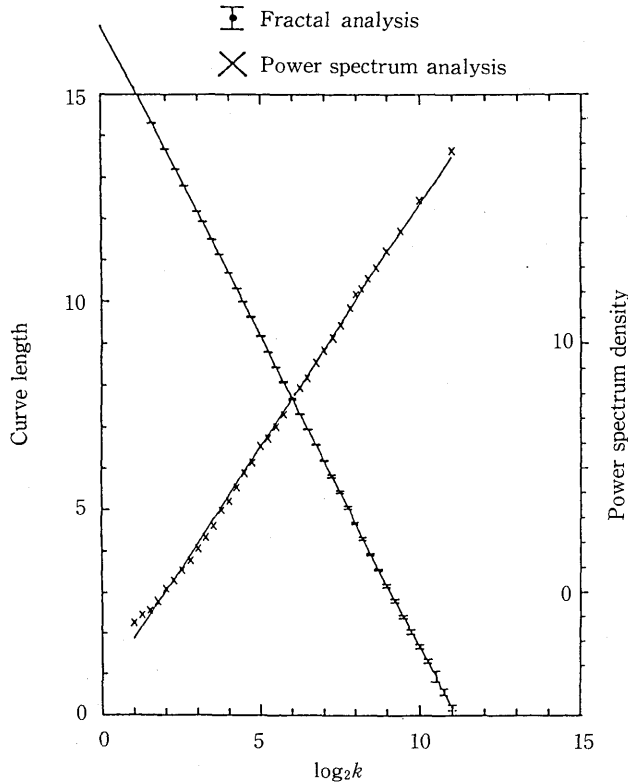


Fig. 2. The logarithm of the curve length  $\log \langle L(k) \rangle$  for the time series  $Y(i)$  as a function of  $\log k$ . The straight line is fitted to points of  $\log k$  vs.  $\log \langle L(k) \rangle$  by the least square method. The slope represents minus fractal dimension ( $D=1.500 \pm 0.0004$ ). The error bar in the fractal analysis represents the standard deviation of  $\log(L_m(k))$ . The power spectrum obtained by using FFT is denoted by crosses. From the relation of the power law index to the fractal dimension, we obtain the fractal dimension of  $1.503 \pm 0.0067$ .

あるという。つまり  $(\log k, \log \langle L(k) \rangle)$  の点が一直線上にのる時に、フラクタルであると定義する。 $\log k$  vs.  $\log \langle L(k) \rangle$  が一直線であるということは、グラフの長さが  $\langle L(k) \rangle \propto k^{-D}$  のようにふるまうわけである。またフラクタル次元は、 $(\log k, \log \langle L(k) \rangle)$  の点に直線を当てはめ(当てはめは最小2乗法でよい)、その直線の傾きの絶対値とする。 $(\log k, \log \langle L(k) \rangle)$  のグラフは普通右下がりなので、傾きを  $-D$  で表現すればフラクタル次元は  $D$  である。

Fig. 2 に式 (2.13) で構成した時系列データの  $(\log k, \log \langle L(k) \rangle)$  を示す。最小の  $k=1$  から最大の  $k_{\max}=2^{11}$  までグラフは非常によい直線性を示し、データは  $1 \leq k \leq k_{\max}$  の範囲で self-affine (Mandelbrot (1977)) が成立していることを表している。エラーバーの長さは  $\log L_m(k)$  の標準偏差に対応する。この  $(\log k, \log \langle L(k) \rangle)$  に当てはめた直線の傾きの絶対値は  $D=1.500 \pm 0.0004$  で、従ってこの時系列データのフラクタル次元は 1.5 となる。計算された  $D$  の誤差は、 $(\log k, \log \langle L(k) \rangle)$  の当てはめた直線からの残差項の分散から計算した、直線の傾きの分散の推定量である。グラフ上に同時に示してある、同じ時系列のパワースペクトル解析の結果については、第3章で後述する。

時系列はあくまでも平面を覆う線にすぎないので、普通の意味での次元は 1 である。ところ

が、ここで導入した次元  $D$  は、平面をどのように覆うかを反映していることから、 $1 \leq D \leq 2$  の間の全ての実数値をとり得る。 $D=2$  は、時系列がほとんどびっしりとグラフを埋め尽くすようなものを表し、この時の時系列を *extreme fractal* と呼ぶ (Berry (1979))。また  $D=1$  は、グラフ上に引かれた一本の直線のような様相を示す。このような時系列を *marginal fractal* と呼ぶ。

## 2.4 解析上の注意

フラクタル性をもたない時系列も  $\log k$  vs.  $\log \langle L(k) \rangle$  はある程度の直線性を示すので、時系列がフラクタルであると仮定するためには、 $(\log k, \log \langle L(k) \rangle)$  の相関係数はほとんど1に近くなくてはならない (0.999 ぐらい)。もし  $\log k$  vs.  $\log \langle L(k) \rangle$  に途中で折れ曲がった直線を当てはめたほうがよい時は、強引に一直線を当てはめることは避けるべきである。

$(\log k, \log \langle L(k) \rangle)$  のグラフを作成する時に、 $k$  のとり方にも注意が必要である。とり得る最小の  $k$  はもちろん  $k=1$  である。最大の  $k(k_{\max})$  の値は、原理的にはデータ数  $N$  に近い大きさまでとることも可能だが、実際の計算には  $N/10 \sim N/20$  程度が適当である。また  $k$  は、1, 2, ...,  $k_{\max}-1, k_{\max}$  の値をとれるが、最終的に我々が作成するグラフは  $\log k$  vs.  $\log \langle L(k) \rangle$  なので、 $\log k$  の値が等間隔であるようにしておけばよい。例えば  $k=2^p$  ( $p=0, 1, 2, \dots$ ) のようにしておけばよい。

以上がフラクタル解析 (私はこう呼んでいる) の概要である。 $\log k$  vs.  $\log \langle L(k) \rangle$  のグラフを作成するところまではノンパラメトリック解析であり、実際の時系列がフラクタル性をもつというモデルは考慮されていない。一直線を当てはめて初めて、解析対象はフラクタル性をもつというモデルを仮定したことになる。決して「フラクタル解析=フラクタル」を意味しないことに注意したい。

## 3. Fractional Brownian 関数

フラクタル性を示す時系列と密接な関係のある fractional Brownian 関数を説明する。

### 3.1 定義

fractional Brownian 関数とは、全ての  $t$  及び  $\tau$  に対して、

$$(3.1) \quad (B(t+\tau) - B(t)) / |\tau|^H \sim N(0, 1)$$

のような性質をもった関数  $B(t)$  である。ここで  $N(0, 1)$  は平均値0分散1の正規分布、パラメーター  $H$  は  $0 < H < 1$  の値をとることができる。従って  $B(t+\tau) - B(t)$  の確率分布は、平均値0分散が  $|\tau|^{2H}$  の正規分布である。いま簡単のために  $B(0)=0$  とおくと、確率変数  $B(\tau)$  の分布は  $\tau$  が大きくなるにつれて分散が  $|\tau|^{2H}$  となるような正規分布である。Mandelbrot はこの関数を、線対線ブラウン関数と呼んでいる。

この線対線ブラウン関数は指数  $H$  で特徴付けられ、 $H=1/2$  の時  $B(\cdot)$  は、普通のランダムウォーク-ブラウン運動 (酔歩運動) の確率変数となる。 $H$  が小さくなるにつれて、時系列は激しい変動を示すようになり、定義はされていないが  $H=0$  の時に  $B(\cdot)$  はホワイトノイズ的になる。時系列は、平面全体を覆うような感じとなる。逆に  $H$  が大きくなると時系列は滑らかな様相を呈するようになり、 $H=1$  の時にはほとんど滑らかな関数となり、形式的には関数がテーラー展開できる形になる。



### 3.2 パワースペクトル構造

次にこの線対線 fractional ブラウン関数のパワースペクトルを求める。線対線 fractional ブラウン関数の差分によって生み出される時系列,  $\xi_{\Delta t}(t) = B(t + \Delta t) - B(t)$ , は定常なので定常過程のスペクトル論が応用でき, そのスペクトル密度などが解析的に求められている (矢島 (1989)).  $B(t)$  にもスペクトル密度の存在に関する議論が必要であるが, 本稿では実際の線対線 fractional ブラウン関数のデータから数値的に計算されるスペクトル密度の関数形に議論を絞りたい. 従ってここでは, まず形式的に定常過程のスペクトル論に従ってスペクトル構造を求めてみる.

線対線 fractional ブラウン関数は式 (3.1) のような性質をもつことから,

$$(3.2) \quad \langle |B(t) - B(t + \tau)|^2 \rangle = d \cdot \tau^{2H}$$

となる.  $d$  は  $\tau$  や  $H$  に依存しない正の定数である. (3.2) より自己共分散関数  $C(\tau)$  は

$$(3.3) \quad C(\tau) = \langle B(t) \cdot B(t + \tau) \rangle = \langle B(t)^2 \rangle - \frac{d}{2} \tau^{2H} = C(0) - \frac{d}{2} \tau^{2H}$$

で与えられる. さらに両辺を  $C(0)$  で規格化した量 (自己相関関数) を  $\rho(\tau)$  とすると,

$$(3.4) \quad \rho(\tau) = \frac{C(\tau)}{C(0)} = 1 - \frac{d}{2C(0)} \cdot \tau^{2H}$$

となる.  $C(0)$  は  $H$  に依存する量であることを明示するため,  $d/2C(0)$  を  $d'(H)$  と書くことにする. もちろん定義より  $d'(H) > 0$  である. また元々の定義より  $\rho(\tau)$  は偶関数であるから, 自己相関関数は

$$(3.5) \quad \rho(\tau) = 1 - d'(H) |\tau|^{2H} \quad (0 < H < 1)$$

で表される.  $\tau = 0$  の時は  $\rho(0) = 1$  であり,  $\tau$  が大きくなるにつれて相関がべき乗で減少することが解る. これによれば,  $\tau \rightarrow \infty$  で相関が  $-\infty$  に減少するが, 相関 (式 (3.4)) の定義からしてこれは明らかにおかしい ( $|\rho(\tau)| \leq 1$ ). つまり式 (3.5) はある  $\tau$  ( $\tau_{\max}$  と記す) より小さい  $\tau$  に対して ( $0 \leq \tau \leq \tau_{\max}$  の範囲) で成り立つ. さらに遡れば, 式 (3.1), (3.2) は  $0 \leq \tau \leq \tau_{\max}$  の範囲内で与えられる.

自己相関関数とパワースペクトルの関係は, 有名なウィナー-ヒンチン (Wiener-Khinchin) の定理より次のように結びついている.

$$(3.6) \quad P(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) \cdot e^{2\pi i f \tau} d\tau$$

この関係式を単純に用いれば,  $C(0)$  で規格化したパワースペクトル  $\hat{P}(f)$  は

$$(3.7) \quad \hat{P}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau) \cdot e^{2\pi i f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - d'(H) |\tau|^{2H}) \cdot e^{2\pi i f \tau} d\tau$$

で与えられる. このフーリエ変換は普通の関数では存在しないが, 超関数の意味では存在して (今井 (1981)),

$$(3.8) \quad \hat{P}(f) = \delta(f) - q d'(H) \cos\left((2H+1)\frac{\pi}{2}\right) \Gamma(2H+1) |f|^{-(2H+1)}$$

で与えられる。ただし、 $q$  は正の単なる定数、 $H$  の範囲は  $0 < H < 1$  より  $1 < 2H + 1 < 3$  となり、 $\cos((2H+1)(\pi/2)) < 0$  で、よって  $-qd'(H) \cos((2H+1)(\pi/2))\Gamma(2H+1)$  は常に正の値をとる。 $-qd'(H) \cos((2H+1)(\pi/2))\Gamma(2H+1)$  をまとめて  $Q(H)$  ( $Q(H) > 0$ ) と表すと、パワースペクトルは

$$(3.9) \quad \hat{P}(f) = \delta(f) + Q(H) \cdot |f|^{-(2H+1)}$$

になる。さらに  $f \neq 0$  の周波数では

$$(3.10) \quad \hat{P}(f) = Q(H) \cdot |f|^{-(2H+1)}$$

で、つまり線対線ブラウン関数のパワースペクトルは

$$(3.11) \quad P(f) \propto f^{-\alpha}$$

のような power law スペクトルを示す。ただし

$$(3.12) \quad \alpha = 2H + 1.$$

ここでの  $\alpha$  を power law index (スペクトルインデックス) と呼ぶ。言い替えれば線対線ブラウン関数は、広義の  $1/f$  ノイズと言える。まとめると、線対線ブラウン関数のパワースペクトルは power law スペクトルである。

### 3.3 スペクトルインデックスとフラクタル次元の関係

ここでは線対線ブラウン関数が、Higuchi 法で求めたフラクタル次元  $D$  とどのような関係があるかを示す。線対線ブラウン関数の定義式 (3.1) より、

$$(3.13) \quad \langle |B(t+\tau) - B(t)| \rangle \propto \tau^H$$

が導かれる。Higuchi 法の粗視化スケール  $k$  の時のグラフの長さの式 (2.9) は、これより

$$(3.14) \quad L_m(\tau) \approx \langle |B(t+\tau) - B(t)| \rangle \cdot \left[ \frac{N-m}{\tau} \right] / \tau \propto \frac{\tau^H}{\tau^2}$$

となる。従って

$$(3.15) \quad \langle L(\tau) \rangle \propto \tau^{H-2}.$$

よってフラクタル次元  $D$  は、

$$(3.16) \quad D = 2 - H$$

で  $H$  と結び付き、式 (3.12) を使って

$$(3.17) \quad \alpha = 5 - 2D$$

あるいは

$$(3.17') \quad D = \frac{5 - \alpha}{2}$$

でスペクトラムインデックスと関係付けられる。式 (3.12) より、 $\alpha$  は  $0 < H < 1$  から  $1 < \alpha < 3$  の範囲の値をとる。Fig. 2 で示されたフラクタル解析に用いられたデータは、 $H = 1/2$  の線対

Table 1. Results of application to simulated data ( $k_{\max}=2^{11}$ ).

$D$	$N=2^{15}$	$N=2^{16}$	$N=2^{17}$
Theoretical value	1.5	1.5	1.5
Higuchi's method	$1.513 \pm 0.0007$	$1.508 \pm 0.0011$	$1.500 \pm 0.0004$
BK's method	$1.528 \pm 0.0027$	$1.522 \pm 0.0025$	$1.511 \pm 0.0028$
FFT	$1.520 \pm 0.0120$	$1.503 \pm 0.0097$	$1.503 \pm 0.0067$

線ブラウン関数であるから、式 (3.16) よりフラクタル次元は  $D=3/2$  となるはずである。実際のフラクタル解析結果は  $D=1.500$  なので理論値と完全に一致している。

Fig. 2 にフラクタル解析の結果 ( $(\log k, \log \langle L(k) \rangle)$ ) とともに示されているのが、フラクタル解析を行なった時系列のパワースペクトル密度 (PSD) である。安定した PSD の推定のため、まずデータを分割し、次に各々分割されたデータの PSD を求めて、それらの平均値をグラフに表示した。ただしスペクトル解析には FFT を用いた。この時系列は、普通の 1 次元ブラウン運動に対応する、つまり  $H=1/2$  をもつものであった。従って式 (3.12) より、PSD は  $\alpha=2$  をもつ power law スペクトラムとなる。上に示された通り、Fig. 2 に示された PSD は  $\alpha \approx 2$  をもつ power law スペクトルとなっている。PSD に最小 2 乗法で当てはめた直線の傾きから、式 (3.17') を用いて推定したフラクタル次元の値は  $D=1.503 \pm 0.0067$  である。次元の誤差は、フラクタル解析の時と同様にして求めた。ただし式 (3.17') を使っているため、誤差の伝播も考慮している。

理論値  $D=3/2$  の場合の線対線ブラウン関数 (つまり普通の 1 次元ブラウン運動) の時系列データのフラクタル次元を、3 通りの方法—Higuchi 法, BK 法, そして FFT を用いた PSD による方法—で求めた結果を Table 1 にまとめている。PSD 法と比較して、フラクタル解析の推定値が安定している (分散が小さい) のが目につく。データ数が増えるにつれて推定値が理論値に近づくのは、すべての方法に共通している。BK 法が理論値より常に大きいバイアスがかかっているのは、グラフの長さの定義が不適當であったためである。つまり BK 法は Higuchi 法と比較して  $k$  が大きくなると、曲線の長さが短くなる傾向があった (Fig. 1 を参照)。従って、 $\log k$  vs.  $\log L_{BK}(k)$  に当てはめた直線の傾きは、Higuchi 法よりも小さくなる (絶対値は大きくなる)。よって負の傾きで定義されるフラクタル次元は、理論値よりも大きくなる。この傾向は、 $D$  が大きくなるにつれて著しくなる。とくに  $H \approx 0$  の時、BK 法は  $D \approx 5/2$  の値を与えてしまい、どのような時系列のグラフのフラクタル次元も  $1 \leq D \leq 2$  であるから、BK 法は明らかに不適切である。

#### 4. 位相エントロピーとフラクタル次元

##### 4.1 位相の乱雑さとフラクタル次元

式 (3.17) ((3.17')) が普段よく使われるフラクタル次元とスペクトラムインデックス (power law index) との関係式である。ここで注意しておかねばならないことは、この式 (3.17) は式 (3.2) の性質をもつ関数に成立する関係式であるということである。よく式 (3.17) が一人歩きして元々の成立条件を忘れ、誤った結果を導いていることがある (Higuchi (1989a))。線対線ブラウン関数ならば、式 (3.17) で 1 対 1 にフラクタル次元とスペクトラムインデックスが対応している。時系列が power law スペクトラムを示すからといって、即そのスペクトルインデックスから式 (3.17) を使ってフラクタル次元を求めるのは正しくない。では、一般の power law

スペクトラムの構造をもつ時系列に対してフラクタル解析を行なったらどうなるか、その結果を次に示す。

まず power law スペクトラムに従う時系列を構成する。有限  $N$  個 ( $N$  は偶数とする) のデータは FFT により、次のように有限離散フーリエ分解できる。

$$(4.1) \quad X(j) = \sum_{k=0}^{N/2} A_k \cos\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) + \sum_{k=1}^{N/2-1} B_k \sin\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N/2} C_k \cos\left(\frac{2\pi jk}{N} - \theta_k\right)$$

ここで周波数  $k \neq 0, N/2$  に対して振幅  $C_k$  と位相  $\theta_k$  は

$$(4.2) \quad \begin{aligned} C_k &= \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \\ \theta_k &= \tan^{-1} \frac{B_k}{A_k} \end{aligned}$$

となる。また、明らかに  $\theta_{N/2}$  と  $\theta_0$  は 0 である。この時、パワーは

$$(4.3) \quad P(k) = C_k^2 / N$$

で定義され、この  $P(k)$  が power law スペクトラムに従うように構成すればよい。注目して欲しいことは、位相の情報 が式 (4.3) から消えていることである。 $P(k)$  を  $k \neq 0$  に対し、

$$(4.4) \quad P(k) = C \cdot k^{-\alpha}$$

で与える。定数  $C$  は適当に決めればよい。 $k=0$  の時は  $P(k)$  は定義できないが、 $C_0$  は、式 (4.1) を見れば解るように時系列全体の平均値を決めるものであるから、時系列のフラクタル次元を計算するにはまったく影響しないので、簡単のために 0 とおく。つまり  $C_0$  は、時系列の様相は変化させず、グラフ全体を上下させる定数である。

power law スペクトラムに従う時系列を構成するためには、さらに位相を与えなければならない。位相は簡単のため次のように与えた。

$$(4.5) \quad P(\theta_k) \sim U([0, \theta_{\max}])$$

$$(4.6) \quad \langle \theta_k \cdot \theta_{k'} \rangle = \delta_{kk'}$$

ここで  $U([x, y])$  は  $[x, y]$  の範囲の一樣乱数、 $\delta_{ij}$  はクロネッカー記号 (Kronecker delta) を表す。 $\theta_{\max}$  は 0 から  $2\pi$  の間の値をとることができる。これ以後  $\theta_{\max}$  は度で表示することにしよう。 $\theta_{\max}$  をパラメーターとして変化させることで、同じスペクトルインデックス (同じ power law スペクトラム構造) をもつが、まったく様相の違う時系列が表現できる。Fig. 3 に  $\alpha=2$  の時、 $\theta_{\max}$  をいろいろ変化させた時系列データを示す： $\theta_{\max}=0, 30, 60, 120$  そして  $360$ 。 $\theta_{\max}=0$  だと非常に滑らかな時系列を表し、 $\theta_{\max}$  が大きくなると段々複雑な様相となっていく。 $\theta_{\max}=360$  の時、時系列は線対線ブラウン関数になる。特にこの場合は  $\alpha=2$  なので、Fig. 3 (e) は 1 次元ブラウン運動を表している。

位相の乱雑さを、シャノンの情報エントロピーで計ってみよう (Akaike (1985))。  $P(\theta_k)$  を簡単な一樣分布で与えておいたので ( $P(\theta_k) \sim 1/\theta_{\max}$ )、エントロピーは計算できて

$$(4.7) \quad E(\theta_{\max}) = - \sum_{k=1}^{N/2-1} \int_0^{\theta_{\max}} P(\theta_k) \log(P(\theta_k)) d\theta = \left(\frac{N}{2} - 1\right) \log(\theta_{\max})$$

となり、 $\log(\theta_{\max})$  に比例する量になる。これを位相の乱雑さを表現する量として、位相エント

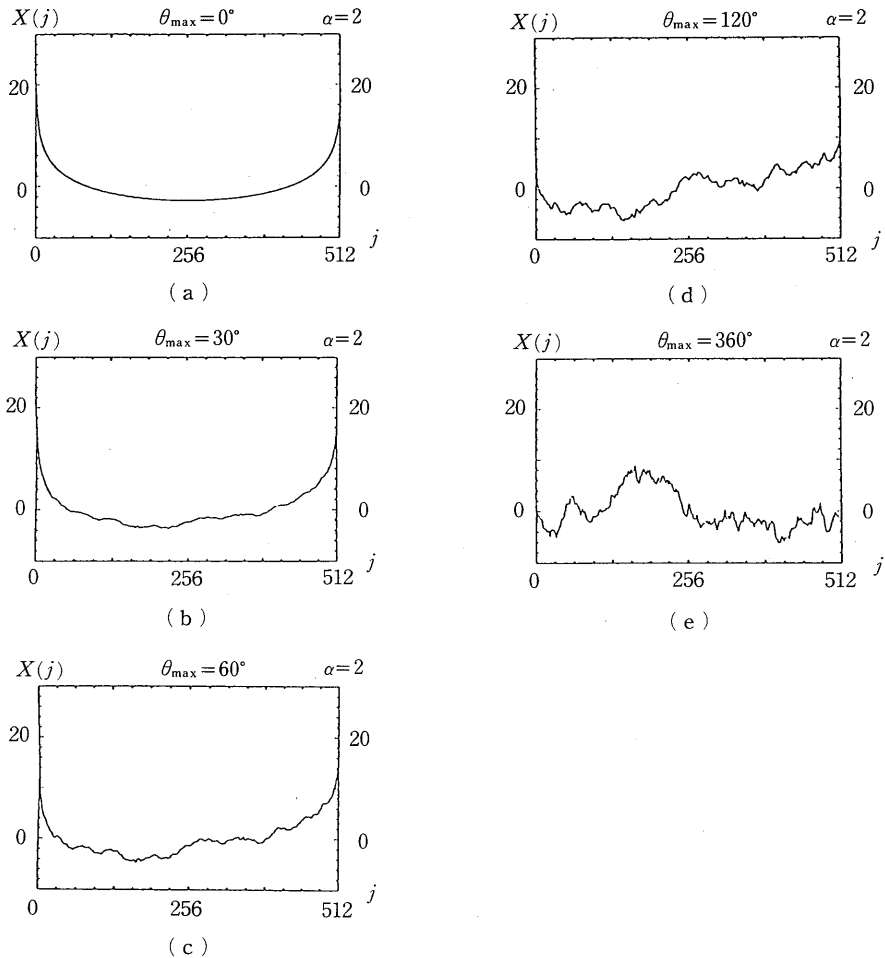


Fig. 3. The simulated time series with a power law index,  $\alpha=2$ , for several values of  $\theta_{\max}$ , where  $\theta_{\max}$  is a parameter describing a distribution of the phase with the wave number of  $k$ . Panels (a)~(e) correspond to the time series with  $\theta_{\max}=0, 30, 60, 120, 360$ , respectively.

ロピーと呼ぼう。

上で構成した時系列のフラクタル解析を行ない、フラクタル次元を求めた結果を Fig. 4 に示す。横軸は位相エントロピーに比例するように、 $\theta_{\max}$  を log スケールで表示してある。図から明らかなように、フラクタル次元はスペクトラムインデックス  $\alpha$  と位相の乱雑さ（位相エントロピー）の関数となっている。 $\theta_{\max}$  が 120 以下の範囲では、 $D$  は  $\alpha$  で決まる傾きをもって  $\log(\theta_{\max})$  とともにほぼ線形に増える。120  $\leq \theta_{\max}$  の範囲では、 $D$  は  $\log(\theta_{\max})$  に依存せず式 (3.17') で与えられる  $\alpha$  だけの関数となっている。 $\theta_{\max}$  が 0 に近付くと、 $D$  は 1 に収束するように見える。実際の計算は数値計算誤差により、完全に  $D=1$  にはなっていない。

#### 4.2 スペクトラムインデックスの定義域

式 (3.17') の関係式の  $\alpha$  の定義域は  $1 < \alpha < 3$  であったが、現実には  $\alpha=0$  のようなホワイトノイズの時系列も、また  $3 \leq \alpha$  のパワースペクトル構造をもつ時系列もあるわけで、ここにさら

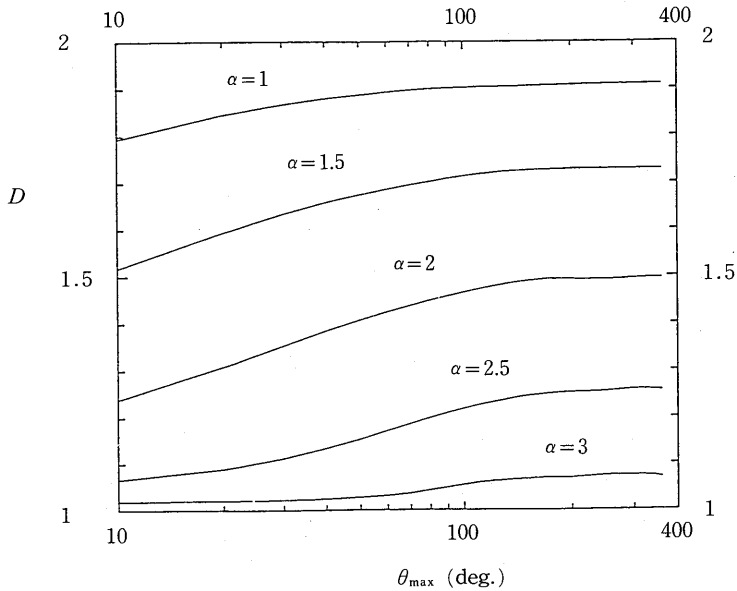


Fig. 4. The fractal dimension,  $D$ , as a function of  $\log(\theta_{\max})$  for several power law indices:  $\alpha=1, 3/2, 2, 5/2$  and  $3$ .

に  $\alpha$  と  $D$  の関係を一般的なレッドノイズに対して ( $0 \leq \alpha \leq 4$  の時) 数値計算で調べてみた。ただし、 $\theta_{\max}=360$  とする。Fig. 5 にその結果を示す。図中の直線は式 (3.17') の理論式である。 $\alpha=3/2 \sim 5/2$  では、数値計算は理論式とよく一致しているが、 $\alpha$  が  $3$  に近づくにつれて  $D$  は理論式よりも大きくなり、逆に  $\alpha$  が  $1$  に近づくにつれて  $D$  は理論式よりも小さくなる。さらに、 $0 \leq \alpha \leq 1$  の時系列のフラクタル次元は  $2$  に縮退してしまう傾向が見える。これは、ホワイトノイズと  $1/f$  ノイズの区別をフラクタル解析でもって行なうことはできないことを意味する。

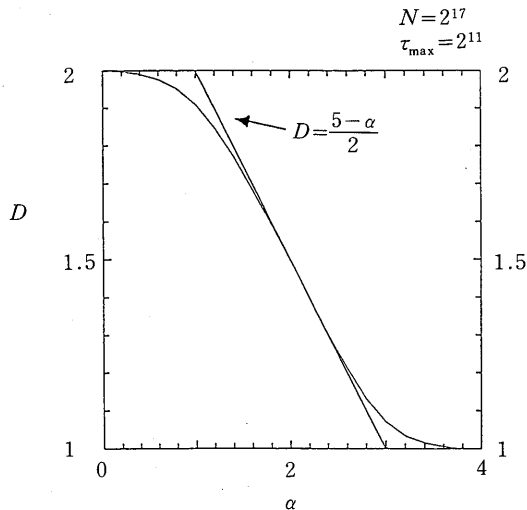


Fig. 5. The calculated fractal dimension as a function of the power law index,  $\alpha$ . The straight line indicates the relationship of equation (3.17') between the fractal dimension and the power law index.

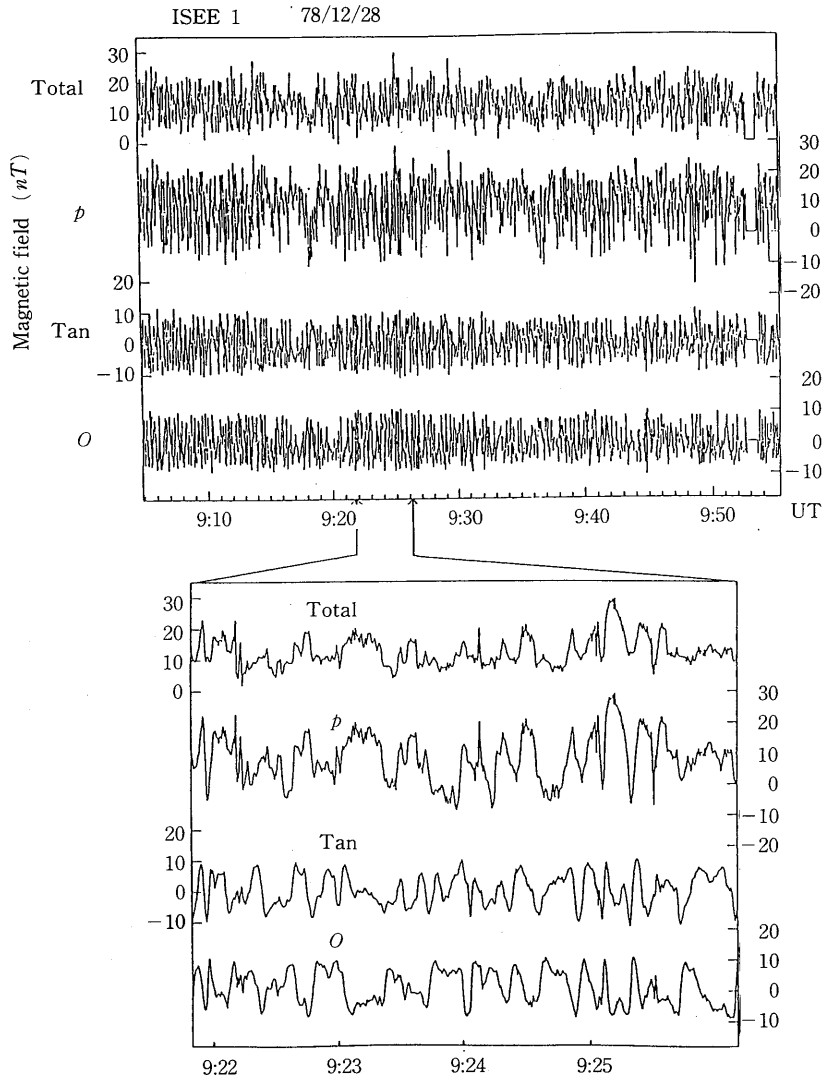


Fig. 6. Satellite frame fluctuations in the magnetosheath obtained with the ISEE 1 on December 28, 1978. Total represents the magnitude of the magnetic field.  $P$  is parallel to the average magnetic field, Tan is in the plane tangent to the model shock surface, and  $O$  completes the orthogonal system.

また  $3 \leq \alpha$  の power law スペクトル構造をもつものは、全て  $D=1$  になる傾向がある。従ってスペクトラムインデックスとフラクタル次元が1対1に対応するのは、 $1 < \alpha < 3$  の範囲、とくに  $\alpha = 3/2 \sim 5/2$  である。データ数が有限であるために、計算に使用したデータの PSD は真の power law スペクトラムの低周波数側と高周波数側を切り落とした PSD になっている (truncated system になっている) ため、理論式と実際の数値計算とのずれが生ずるのではないかと考えられる。データが有限である限り、必ず truncated system となってしまうので、 $\alpha$  が1や3近傍の計算は、数値計算で厳密に求められず、解析的な計算によって行なわれなければならない。これらの問題はまだ手つかずである。

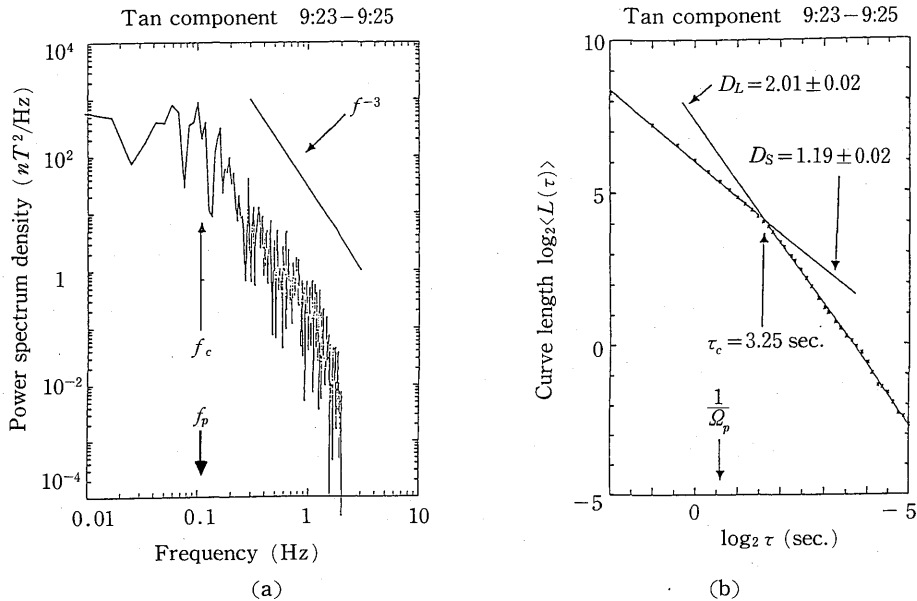


Fig. 7. (a) The power spectrum for the Tan component in the *PTO* coordinates during the interval from 09:23 to 09:25 UT shown in the bottom panel of Fig. 6. (b) The length  $\langle L(\tau) \rangle$  for the Tan component as the same data set used in the power spectrum analysis as a function of  $\tau$  on doubly logarithmic scale. The curve breaks at  $\tau = 3.25$  ( $\log_2 \tau = 1.7$ ). In the time scale of longer than  $\tau = 3.25$  sec., the curve is linear with a slope equal to  $-2.01$ . The slope of curve equals to  $-1.19$  in the shorter time scale.

## 5. フラクタル解析の実際の応用に当たって

### 5.1 特徴的な周波数をもつ時系列への応用

前にも述べたが、フラクタル解析自体はノンパラメトリック解析法なので、解析対象の時系列がフラクタルかどうかには関係しない。  $\log k$  vs.  $\log \langle L(k) \rangle$  プロットのグラフに、1直線を当てはめて初めて解析対象はフラクタル性をもつというモデルを考えたことになる。今までは、  $\log k$  vs.  $\log \langle L(k) \rangle$  が直線にのるような、つまり  $1 \leq k \leq k_{\max}$  の範囲で自己相似性をもつ時系列を考えてきた。現実の解析では  $\log k$  vs.  $\log \langle L(k) \rangle$  に、ある  $k$  で折れ曲がるような直線を当てはめたほうがよいような時もある（いまこのような  $k$  を  $k_c$  と表す）。これは、  $1 \leq k \leq k_c$  と  $k_c \leq k \leq k_{\max}$  の各々の範囲で自己相似性が成立して、その範囲内で定義されるフラクタル次元が違うことを意味する。  $1 \leq k \leq k_c$  (Small time scale) で定義されるフラクタル次元を  $D_s$ 、また  $k_c \leq k \leq k_{\max}$  (Large time scale) の範囲のものは  $D_L$  と表記しよう。このような時系列のパワースペクトルは、ある特徴的な周波数  $f_c$  で power law index が変化して、  $f_c$  より高周波数側では  $P(f) \propto f^{-a_1}$  と、  $f_c$  より低周波数側では  $P(f) \propto f^{-a_2}$  となることが予想される。

Fig. 6 にアメリカの人工衛星 ISEE 1 によって得られた磁場データを示す (Russell and Elphic (1978)). サンプル時間は 0.25 秒である。太陽風と地球固有の磁場との作用によって、地球前面 10~15  $R_e$  ( $R_e$  は地球半径) あたりに無衝突ショックができる。ショックのできる位置は太陽風中の諸パラメーター（基本的には太陽風の動圧）によって変化する。このショックの背後の領域には、磁気流体乱流的な様相を示す磁場データが得られているが、Fig. 6



に示したものはその磁場データの典型的な例である (Fairfield (1976)). 磁場の 3 成分と磁場ベクトルの大きさ(ノルム)—total 成分—が示してあるが, 本稿では物理的な観点からの議論は行わないので, 各成分にどのような物理的な意味があるのかについては割愛させてもらう. 物理的な側面からの議論は Higuchi (1989a) を参考にして頂きたい.

この Fig. 6 に示されたデータの Tan 成分の 9:23~9:25 のデータの FFT によるパワースペクトル解析と, フラクタル解析の結果を Fig. 7 の (a) と (b) にそれぞれ示す. 解析区間にデータは 480 個含まれている. ここで  $k$  の代わりに  $\tau$  を導入した.  $\tau$  は  $\tau = k\Delta t$  で, 実際の時間(この場合, 秒)の単位である. Fig. 7 (a) の PSD にも見られるように, 0.1 Hz あたりに  $f_c$  が存在し,  $\alpha_L \approx 0 \sim 1$ , また  $\alpha_H \approx 2 \sim 4$  であることが, 数多くの観測によって明らかにされている ( $f_c, \alpha_L, \alpha_H$  は上で定義した量). このように現実のデータの PSD は,  $f_c, \alpha_L, \alpha_H$  で記述されるような power law スペクトル構造をもつものが結構多い. 太陽風のパラメーターの変化にともない, 磁場の乱れ方が違うことが定性的な言葉で表現されはしていたが, これ以上の議論はほとんど進まなかった. というのも Fig. 7 (a) から明らかのように,  $\alpha_H$  や  $\alpha_L$  及び  $f_c$  の値が, それらを求めるための直線の当てはめ方に非常に敏感であるため, 解析者の恣意に結果が大きく依存してしまうことがまず上げられる. またデータのスペクトル構造が短時間内に太陽風パラメーターの変化にともない変化するため短い時間内で PSD を求めなければならないが, 時間内に含まれるデータ数では安定した PSD 推定ができないことも原因と考えられる. 我々が欲しい情報は, 厳密な PSD の推定値ではなく,  $f_c, \alpha_L, \alpha_H$  の刻々と変化する諸太陽風パラメーターへの依存性である. Fig. 7 (b) のフラクタル解析は安定した  $D_S, D_L, \tau_c$  を与える. フラクタル解析から得られた  $D_S, D_L, \tau_c$  から  $f_c, \alpha_L, \alpha_H$  などを推定し, 諸太陽風パラメーターとの対応付けを考えるのは自然であろう. ただし  $D_S, D_L, \tau_c$  と  $f_c, \alpha_L, \alpha_H$  の関係は示されていないので, 以下に数値計算の結果を示す (Higuchi (1989b)).

### 5.1.1 $f_c$ と $\tau_c$ との関係

$f_c, \alpha_L, \alpha_H$  を与えて, 逆 FFT により時系列を構成し, それに対してフラクタル解析を行ない  $D_S, D_L, \tau_c$  を求める方法をとった. 逆変換の時に必要な位相分布は,  $\theta_{\max} = 360$  をもつ一様分布とした. いま  $1/f_c$  を  $T_c$  と表そう. ( $\alpha_L, \alpha_H$ ) は  $0 \leq \alpha_L \leq 4$  及び  $0 \leq \alpha_H \leq 4$  に 0.1 刻みに変化させるが,  $T_c$  は  $2^6$  で, またデータ数は  $N = 2^{13}$  に固定した.  $f_c$  より高周波数側では  $P(f) = C_H f^{-\alpha_H}$  で,  $f_c$  より低周波数側では  $P(f) = C_L f^{-\alpha_L}$  となるが, ただし  $C_H f_c^{-\alpha_H} = C_L f_c^{-\alpha_L}$  が成立するように適当に  $C_H$  や  $C_L$  を与えればよい.

Fig. 8 に ( $\alpha_L, \alpha_H$ ) = (1, 3) の時系列のフラクタル解析の結果を示す.  $\tau_c = 19$  で  $\log \tau$  vs.  $\log \langle L(\tau) \rangle$  は折れ曲がり,  $\tau \leq \tau_c, \tau_c \leq \tau$  の各々の範囲内でよい直線性を示している. ある  $\tau_c$  で折れ曲がるような直線をこの  $\log \tau$  vs.  $\log \langle L(\tau) \rangle$  に当てはめ,  $\tau \leq \tau_c$  の範囲では  $D_S = 1.24$ , また  $\tau_c \leq \tau$  の範囲では  $D_L = 1.78$  を得る. 当てはめは最小 2 乗法で十分である. 当てはめたこのような直線を, 今後 two-segments curve と呼ぶ.

Fig. 9 に様々な ( $\alpha_L, \alpha_H$ ) の時の  $\tau_c$  を  $T_c$  で規格化した値を等値線で示す.  $\alpha_H = \alpha_L$  の時 ( $\tau_c$  が存在しない時) は, two-segments curve でなく 1 直線で当てはめるべきであるので,  $\Delta\alpha = |\alpha_H - \alpha_L| \leq 0.5$  の時の結果は図中から除いてある. 実際のデータは  $\alpha_H > \alpha_L$  の場合が多いので, 今後このような場合に絞って議論してみたい (図中に三角で囲ってある).  $\tau_c/T_c$  の値は 0.25~0.3 の範囲にあり,  $\Delta\alpha$  が等しい時, 同じ値を示す傾向が見える. また  $\Delta\alpha$  が増えるにつれて,  $\tau_c/T_c$  も増加する. まとめると,  $f_c$  と  $\tau_c$  の関係は ( $\alpha_L, \alpha_H$ ) によってある程度変化しますが, だいたい

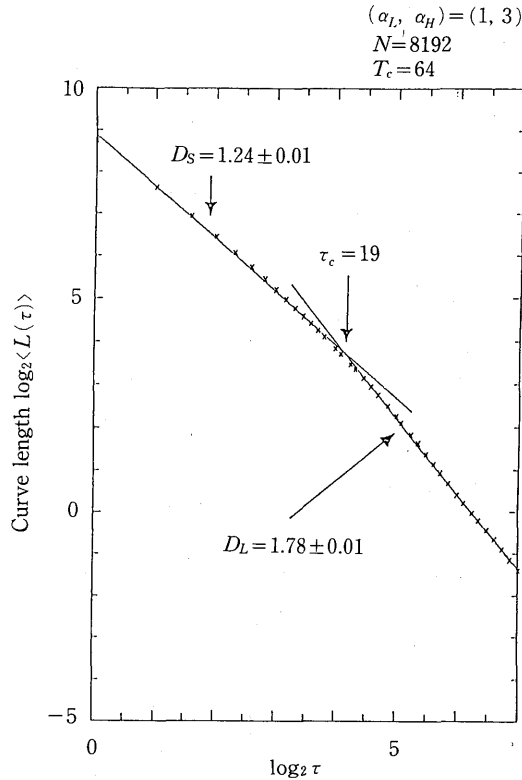


Fig. 8. The curve length  $\langle L(\tau) \rangle$  as a function of  $\tau$  on doubly logarithmic scale. The curve breaks at  $\tau = 19$ . In the time scale of longer than  $\tau = 19$ , the curve is linear with a slope equal to  $-1.78$ . The slope of curve equals to  $-1.24$  in the shorter time scale below  $\tau = 19$ .

$$(5.1) \quad \frac{1}{f_c} \simeq 4\tau_c$$

のようになっている。Table 2 にいくつかの  $(\alpha_L, \alpha_H)$  に対して、 $\tau_c/T_c$  の値をまとめてある。

### 5.1.2 $(\alpha_L, \alpha_H)$ と $(D_L, D_S)$ の関係

長い時間スケールのフラクタル次元  $D_L$  が低周波数のスペクトラムインデックス  $\alpha_L$  に、また、短い時間スケールのフラクタル次元  $D_S$  が高周波数のスペクトラムインデックス  $\alpha_H$  に密接に関係していることは予想できるが、 $D_L$  や  $D_S$  が  $(\alpha_L, \alpha_H)$  にどのように依存しているかについては自明でない。従って  $D_L$  及び  $D_S$  が  $(\alpha_L, \alpha_H)$  のどのような関数になっているかについて数値計算で調べてみた。計算法は上の 5.1.1 節と同じく、様々な  $(\alpha_L, \alpha_H)$  に対してフラクタル解析を行ない  $(\log \tau, \log \langle L(\tau) \rangle)$  の点に two-segments curve を当てはめ、 $D_L$  及び  $D_S$  を求めた。 $D_L$  と  $D_S$  を Fig. 10 (a) と (b) にそれぞれ等値線で示す。ただし  $\tau_c/T_c$  の時と同様に、 $\alpha_H = \alpha_L$  の時 ( $D_L = D_S$  となる時) は two-segments curve でなく 1 直線で当てはめるべきであるので、 $\Delta\alpha \leq 0.5$  の時の結果は図中には示していない。また、我々が興味あるのは、図中に三角で囲ってあるような  $\alpha_H > \alpha_L$  の場合なので、このような場合に絞って以下話を進める。

予想通り、 $D_L$  はあまり  $\alpha_H$  には依存せず、主に  $\alpha_L$  で決まっていることが、Fig. 10 (a) に示さ

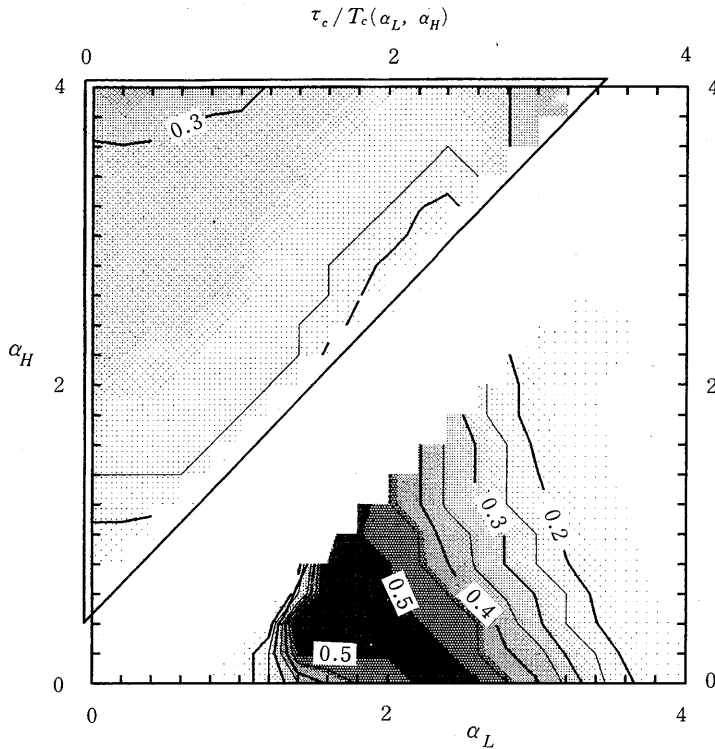


Fig. 9. Equi-contours of  $\tau_c/T_c$  in the  $(\alpha_L, \alpha_H)$  plane with a 10 step gray scale. Note that  $\tau_c/T_c$  is almost 0.25~0.3 for  $\alpha_H > \alpha_L$ .

Table 2.  $\tau_c/T_c$  for several  $(\alpha_L, \alpha_H)$ .

$\alpha_H \backslash \alpha_L$	0	1	2	3
4	0.34	0.31	0.26	0.34
3	0.29	0.29	0.21	
2	0.26	0.25		
1	0.18			

れている。ただし  $\alpha_L$  が小さいと  $(\alpha_L \approx 0 \sim 1)D_L$  は  $\alpha_H$  の値に影響を受け、同じ  $\alpha_L$  でも  $\alpha_H$  が減少するにつれて  $(\Delta\alpha \rightarrow 0)D_L$  は大きくなる傾向がはっきりとしてくる。例えば  $\alpha_L=1$  の時、 $\alpha_H$  が  $4.0 \rightarrow 1.6$  と変化するにつれて  $D_L$  は  $1.75 \rightarrow 1.85$  に増加する。また、 $D_S$  がほぼ  $\alpha_H$  で与えられることが、Fig. 10 (b) から解る。ただし  $\alpha_H$  が大きい場合、例えば  $3 \leq \alpha_H$  のような時は  $D_S$  の値は強く  $\alpha_L$  に依存し、 $\alpha_L$  が大きくなるにつれて  $D_S$  は小さくなる傾向が顕著となる。具体的に言えば、 $\alpha_H=3$  の時  $\alpha_L: 0 \rightarrow 2$  で  $D_S: 1.26 \rightarrow 1.18$  となっている。Fig. 10 に示されている結果をまとめると、 $D_L$  は  $\alpha_L$  で、 $D_S$  は  $\alpha_H$  で主に定まり、 $D_L(D_S)$  の  $\alpha_H(\alpha_L)$  への依存性は小さい。ただし、 $D_S$  や  $D_L$  は  $(\alpha_L, \alpha_H)$  の関数であり、 $D_L=D_L(\alpha_L)$  や  $D_S=D_S(\alpha_H)$  でないことに留意すべきである。

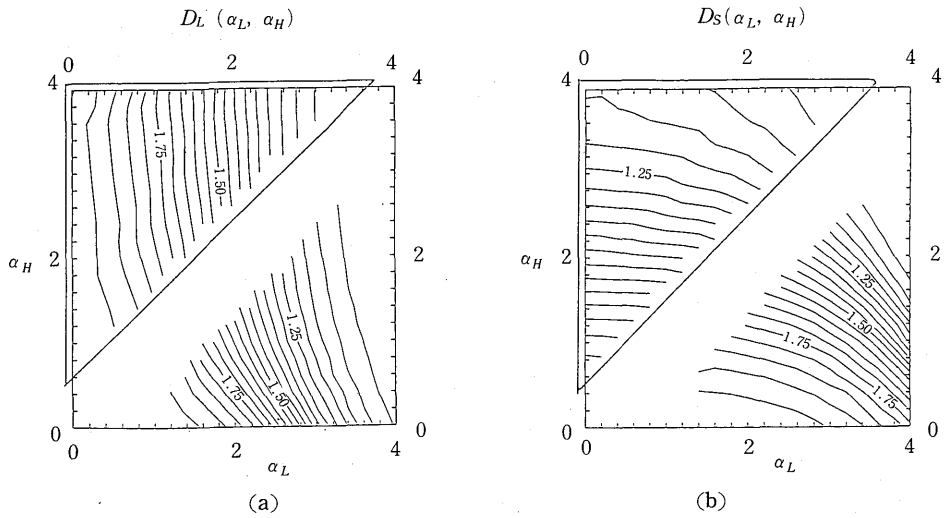


Fig. 10. (a) Equi-contours of  $D_L$  in the  $(\alpha_L, \alpha_H)$  plane. (b) Equi-contours of  $D_S$  in the  $(\alpha_L, \alpha_H)$  plane.

5.1.3  $\tau_c$  の推定に必要なデータ数  $N$

パワースペクトルの推定に用いるデータ数が少ない場合、安定したパワースペクトル構造が得られないため、強引に PSD に two-segments curve を当てはめて得られた  $f_c$  は、その当てはめ方に非常に左右され信頼性が低い。とくに解析者に予めモデルが念頭にある時、適当に two-segments curve を fit させる周波数領域を制限することで、 $f_c$  の位置を恣意的に動かすことが可能である。 $f_c$  に関係している  $\tau_c$  はフラクタル解析により安定に定まるので、PSD から  $f_c$  を推定しにくいような場合は、 $f_c$  の代わりに  $\tau_c$  でもって解析対象の特徴を捉えることが適

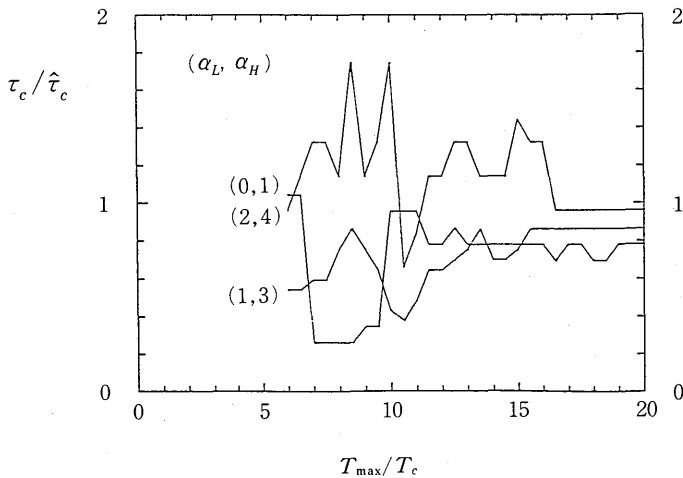


Fig. 11. The characteristic time scale,  $\tau_c$ , normalized by  $\hat{\tau}_c$  for several values of the power law indices set  $(\alpha_L, \alpha_H) = (0, 1), (1, 3)$  and  $(2, 4)$ , are plotted as functions of  $T_{\max}/T_c$ , where  $\alpha_L$  and  $\alpha_H$  are the power law index within the frequency range below and above the characteristic frequency  $f_c$ , respectively, and  $T_c$  is given by  $1/f_c$ .  $T_{\max}$  is the total interval used for the fractal analysis.  $\hat{\tau}_c$  is  $\tau_c$  for  $T_{\max}/T_c = 128$ . All curves have fairly flat behaviors above  $T_{\max}/T_c \geq 15$ .

当であろう。とくに  $f_c$  が時間の推移とともにどのように変化していくかに興味があるような時は、PSDを計算する代わりにフラクタル解析で  $\tau_c$  を求めたほうが、非定常な性質をデータからくみ取れる。というのも、フラクタル解析では少ないデータ数で  $\tau_c$  及び  $\alpha_L, \alpha_H$  が安定して推定できるため、定常性を仮定せねばならないデータ区間を短くできることによる。では、どれくらいのデータ数で  $\tau_c$  が安定して推定できるのか、数値実験で探ってみた。

いまフラクタル解析に使用するデータ数を  $N$  とすると、解析区間時間は  $T_{\max} = N\Delta t$  で与えられる。 $T_{\max}$  を  $T_c$  と比較して十分長くとった時に推定した  $\tau_c$  の値を  $\hat{\tau}_c$  と表そう。ここでは  $T_{\max}/T_c = 128$  の時の  $\tau_c$  の推定値を  $\hat{\tau}_c$  にした。ただし、 $T_c$  は既に上で定義されたように  $f_c$  の逆数である。いま  $T_{\max}$  を変化させて  $\tau_c$  を計算し、 $\tau_c/\hat{\tau}_c$  の  $T_{\max}/T_c$  への依存性を調べてみた。Fig. 11 に3通りの ( $\alpha_L, \alpha_H$ ) に対しての結果を示す。3線とも  $T_{\max}/T_c \leq 10$  ではかなり変動しているが、 $15 \leq T_{\max}/T_c$  の範囲では落ち着き、1に収束していく。安定した  $\tau_c$  の推定には、少なくとも  $T_c$  の約15倍以上の長さのデータ区間が必要であることが示されている。 $T_c$  は  $1/f_c$  であるから、(式(5.1)から得られた)  $\tau_c$  の約60倍以上の  $T_{\max}$  の時のフラクタル解析結果には信頼がおけると言える。予め  $f_c$  がどれくらいなのか解っている時は、最低でも  $T_c = 1/f_c$  の15倍以上の長さのデータ区間でフラクタル解析を行ないたい。

### 5.2 フラクタル次元の定義の拡張

以上は  $\log \tau$  vs.  $\log \langle L(\tau) \rangle$  が  $\tau_c$  を一つもつ時であったが、もし  $\log \tau$  vs.  $\log \langle L(\tau) \rangle$  で2カ所  $\tau_c$  がある時には、上の拡張を行なえばよい。つまり、このような時は two-segments curve の代わりに three-segments curve を当てはめ、短い時間スケールの  $\tau_c$  から  $\tau_{c,1}$  と  $\tau_{c,2}$  ( $\tau_{c,1} < \tau_{c,2}$ ) とすれば、 $\Delta t \leq \tau \leq \tau_{c,1}$ ,  $\tau_{c,1} \leq \tau \leq \tau_{c,2}$  そして  $\tau_{c,2} \leq \tau \leq \tau_{\max}$  の各々の範囲で自己相似性が成立しているモデルを考えることになる。各々の時間スケール内で当てはめた直線の傾きでもって、フラクタル次元を定義すればよい。以上のような直線を当てはめて、その傾きでフラクタル次元を定義する方法から、さらに次元定義の拡張を行なうこともできる。それは  $\log \tau$  vs.  $\log \langle L(\tau) \rangle$  の点を二回差分が小さくなるように、滑らかな曲線で結び、その曲線の一回差分（一次微分）で次元を定義するわけである。つまり

$$(5.2) \quad S^2 = \sum_{k=1}^{k_{\max}} (\log \langle L(k) \rangle - l_k)^2$$

を、

$$(5.3) \quad M^2 = \sum_{k=3}^{k_{\max}} (l_k - 2l_{k-1} + l_{k-2})^2$$

で定義される量  $M^2$  を小さくするような拘束条件のもとで、同時に小さくするような解  $l_i$  を求め、その  $l_i$  の一次差分（微係数）でフラクタル次元  $-D(k)$  を定義する。フラクタル次元は、もちろん  $k$  の関数となっている。 $l_i$  を当てはめる最適化は赤池氏の提案した最尤法に基づく情報量  $-ABIC$  などによればよい (Akaike (1980))。

最後に、フラクタル解析は長さを計るといった一種の積分操作を行なっているため、細かい情報が消され、その上  $\log k$  vs.  $\log \langle L(k) \rangle$  のグラフは結構直線性を示すので、直線を当てはめることには十分注意する必要があることを述べておきたい。実際、coherent な周期的構造をもつ時系列に対して、フラクタル解析は誤った結果を導く可能性があることが指摘されている (Roberts and Goldstein (1987))。解析対象の  $\log k$  vs.  $\log \langle L(k) \rangle$  に1直線や two-segments curve (three-segments curve) を当てはめることが難しい時は、この時系列はフラクタル性を

もたないことを表している。このようなデータの  $\log k$  vs.  $\log \langle L(k) \rangle$  に強引に 1 直線や two-segments curve (three-segments curve) を当てはめて求めた結果は意味がない。

## 6. まとめ

本稿では、新しいノンパラメトリック時系列解析法 — “フラクタル解析法” — の概要を紹介した。この解析法の特徴は、時系列を一種の平面内に描かれた図形のパターンとして認識することにある。そのために、グラフ上で時系列が示す曲線の長さを、時系列を粗視化する時間スケール  $\tau$  の関数で定義した。さらに曲線の長さがフラクタル性 —  $\langle L(\tau) \rangle \propto \tau^D$  — を示すならば、時系列のフラクタル次元を定めることができ、この次元  $D$  をもって時系列の乱雑さを特徴付けた。言い替えると、 $(\log \tau, \log \langle L(\tau) \rangle)$  の点がいま解析対象の時間スケール  $\tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max}$  で 1 直線になるならば、この時間スケール内で時系列はフラクタルであると言える。

次に、self-affine な代表的時系列である fractional Brownian 関数のスペクトル構造を調べ、以下のような性質を示した。

- (1) fractional Brownian 関数の power spectrum density —  $P(f)$  — は power law スペクトラムで(つまり  $P(f) \propto f^{-\alpha}$ )、fractional Brownian 関数を特徴付ける指数  $H$  と power law index  $\alpha$  は、 $\alpha = 2H + 1$  で結び付いている。このような時系列の Higuchi 法で求めた時系列のフラクタル次元  $D$  は、 $D = (5 - \alpha)/2$  で与えられる。

また、power law スペクトラム構造をもつ一般的な時系列について詳しく調べた。そして、

- (2) power law スペクトラムが  $f_{\min}$  から  $f_{\max}$  の範囲の周波数領域で成立するような時系列は、 $\tau_{\min} = 1/2f_{\max}$  から  $\tau_{\max} = 1/f_{\min}$  の時間スケールで self-affine が成立する。
- (3) 位相の乱雑さを定量的に表現する量 — 位相エントロピー — を新たに導入して、同じ power law スペクトラム構造をもつ時系列の中で位相エントロピーが最大の時のものが、fractional Brownian 関数に対応することを示した。ただし power law index  $\alpha$  が  $1 < \alpha < 3$  の範囲に限る。
- (4) 同じ power law スペクトラム構造をもった時系列でも、位相エントロピーが増えるにつれて時系列は乱雑な様相を呈し、フラクタル次元も大きくなる。
- (5) さらに、時系列の中で位相エントロピーが最大の power law スペクトラム構造をもつ時系列のうち、power law index  $\alpha$  が  $0 \leq \alpha \leq 1$  のフラクタル次元は 2 に収束する。  $3 \leq \alpha$  は 1 に収束する。

以上は、解析対象時間スケール内 —  $\tau_{\min}$  から  $\tau_{\max}$  の時間スケール — で同じ self-affine が成立する時系列に対する考察であったが、本稿ではさらにある時間スケール  $\tau_c$  を境にして、それより短い時間スケールとそれより長い時間スケールで各々 self-affine が成立するような時系列についても考察を加えた。つまり  $(\log \tau, \log \langle L(\tau) \rangle)$  が  $\tau_c$  で折れ曲るような直線的な様相を示す時系列で、 $\tau \leq \tau_c$  で当てはめられた直線の傾きで、短い時間スケールを特徴付けるフラクタル次元  $D_S$  を、 $\tau_c \leq \tau$  の直線の傾きで、長い時間スケールを特徴付けるフラクタル次元  $D_L$  を定義した。このような時系列に対して、以下のような性質を明らかにした。

- (6) この時系列の PSD は、ある周波数  $f_c$  より低い周波数領域では  $P(f) \propto f^{-\alpha}$  のように、またそれより高い周波数領域では  $P(f) \propto f^{-\alpha'}$  のようにふるまう power law スペクトラムである。

- (7) このような power law スペクトルをもつ時系列で、さらに位相エントロピーが最大の時は、 $D_S$  は  $a_H$  で、また  $D_L$  は  $a_L$  でだいたい決まる。さらに  $\tau_c$  は  $1/4f_c$  で与えられる。ただし厳密に言うと、 $D_S, D_L, \tau_c$  は全て  $(a_L, a_H)$  の関数であり、 $a_L, a_H$  両変数に依存している。

最後に、フラクタル解析を行なう上で注意する点をいくつか述べた。

本稿では数値実験による解析が中心であったが、今後は解析的な研究が望まれる。とくに  $0 \leq \alpha \leq 1$  の power law スペクトル構造をもつ時系列のフラクタル次元が、どのように  $D=2$  に収束していくのが重要な問題として残されている。この問題の解析的な研究が、 $1/f$  ノイズを発生するメカニズムの研究に役立つであろう。

## 付 録

### (2.9) 式中のノルムの定義について

式 (2.5') 中で、隣合う 2 点間の距離を  $|\cdot|$  ( $L1$  ノルム) で定義する代わりに  $|\cdot|^2$  ( $L2$  ノルム) で定義してもよい。そうすると、式 (2.9) は

$$(A.1) \quad L_m^2(k) = \left\{ \left[ \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor} |X(m+ik) - X(m+(i-1) \cdot k)|^2 \right] \frac{N-1}{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor \cdot k} \right\}^{1/2} / k$$

となる。この定義によれば、式 (3.14) は式 (3.2) を考慮して

$$(A.2) \quad L_m^2(\tau) \approx \left( \langle |B(t+\tau) - B(t)|^2 \rangle \cdot \left[ \frac{N-m}{\tau} \right] \right)^{1/2} / \tau \propto \frac{\tau^{H-1/2}}{\tau}$$

で、

$$(A.3) \quad \langle L^2(\tau) \rangle \propto \tau^{H-3/2}$$

となる。従って、この  $(\log \tau, \log \langle L^2(\tau) \rangle)$  の点に当てはめた直線の傾きの絶対値  $\beta$  は  $\beta = 3/2 - H$  の関係式で、fractional Brownian 関数を特徴付ける指数  $H$  と結び付いている。式 (3.16) で  $H$  と  $D$  が関係しているのので、 $\beta$  を使って

$$(A.4) \quad D = \beta + \frac{1}{2}$$

で  $L2$  ノルムを使ってフラクタル次元  $D$  が求められる。

## 謝 辞

大学院修士及び博士課程において御指導して頂いた東京大学 国分教授に、また人工衛星データを快く提供して下さった U.C.L.A. の Russell 教授に深く感謝致します。FFT のプログラムには NCAR のパッケージ (NCARL) を、また東京大学大型計算機センターとの通信ソフトには Eterm++ を使用しました。この研究は文部省科学研究費 奨励研究 (A) 63790198 の援助のもとに行なわれました。

## 参 考 文 献

- Akaike, H. (1980). *Likelihood and the Bayes Procedure*, 143-165, University press, Valencia, Spain.
- Akaike, H. (1985). Prediction and entropy, *A Celebration of Statistics* (eds. A.C. Atkinson and S.E. Fienberg), 1-24, Springer, New York.
- Berry, M.V. (1979). Diffractals, *J. Phys. A Math. Gen.*, **12**, 781-797.
- Brown, S.R. (1987). A note on the description of surface roughness using fractal dimension, *Geophys. Res. Lett.*, **14**, 1095-1098.
- Burlaga, L.F. and Klein, L.W. (1986). Fractal structure of the interplanetary magnetic field, *J. Geophys. Res.*, **91**, 347-350.
- Burlaga, L.F. and Mish, W.H. (1987). Large-scale fluctuations in the interplanetary medium, *J. Geophys. Res.*, **92**, 1261-1266.
- Essex, C., Lookman, T. and Nerenberg, M.A.H. (1987). The climate attractor over short timescales, *Nature*, **326**, 64-66.
- Fairfield, D.H. (1976). Magnetic fields of the magnetosheath, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **14**, 117-134.
- Falconer, K.J. (1985). *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, London.
- Grassberger, P. (1986). Do climatic attractor exit?, *Nature*, **323**, 609-612.
- Grassberger, P. and Procaccia, I. (1983). Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D*, **9**, 189-208.
- Hata, M. (1985). On the structure of self-similar sets, *Japan J. Appl. Math.*, **2**, 381-414.
- 飛田武幸 (1980). ブラウン運動, 数学セミナー, **19**, 29-34.
- Higuchi, T. (1988). Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory, *Physica D*, **31**, 277-283.
- Higuchi, T. (1989a). Quantitative analysis of turbulent fluctuations in the magnetosheath, Doctor thesis, University of Tokyo.
- Higuchi, T. (1989b). Relationship between the fractal dimension and the power law index for a time series: A numerical investigation, *Physica D* (submitted).
- 今井 功 (1981). 応用超関数論 I, サイエンス社, 東京.
- Kolmogorov, A.N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **30**, 301-305.
- Mandelbrot, B. (1977). *Fractals: Form, Chance and Dimension*, Freeman, San Francisco.
- Mandelbrot, B. and Wallis, J.R. (1969). Some long-run properties of geophysical records, *Water Resource Research*, **5**, 321-340.
- Nicolis, C. and Nicolis, G. (1984). Is there a climatic attractor?, *Nature*, **311**, 529-532.
- Patrick, R.M. and Pugh, E.R. (1969). Laboratory study of turbulence in collision-free shocks, *Phys. Fluids*, **12**, 366-378.
- Roberts, D.A. and Goldstein, M.L. (1987). Spectral signatures of jumps and turbulence in interplanetary speed and magnetic field data, *J. Geophys. Res.*, **92**, 10105-10110.
- Russell, C.T. and Elphic, R.C. (1978). Initial ISEE magnetometer results: Magnetopause observations, *Space. Sci. Rev.*, **22**, 681-715.
- 高安秀樹 (1986). 『フラクタル』, 朝倉書店, 東京.
- 巽 友正 (1986). 乱流の統計理論, 『乱流現象の科学(巽 友正 編)』, 165-221, 東京大学出版会, 東京.
- 矢島美寛 (1989). Long-Memory モデルとその統計的性質, 日本統計学会誌, **19**, 21-38.



## Fractal Analysis of Time Series

Tomoyuki Higuchi

(The Institute of Statistical Mathematics)

We show a newly developed method for a time series analysis, *Fractal Analysis*, which is useful and effective for quantitatively analyzing a time series possessing a continuous power spectrum density such as a red noise type. This method is based on the concept of measuring the irregular objects by the fractal dimension, and is characterized by considering the set of points  $(t, f(t))$  forming the graph of a function  $f$  defined on the unit interval. In this paper, a hierarchy of curve length for the graph of the time series is defined by the present author, and our method based on this is compared with the similar method by Burlaga and Klein to show the superiority of ours.

In addition, we examine the time series possessing a power law spectrum ( $P(f) \propto f^{-\alpha}$ ), which is one of the typical red noise type, in order to investigate the relation to its trajectory showing a self-affine behavior in a time domain. In particular, the relationship between the fractal dimension and a power law index  $\alpha$  is analytically derived and confirmed by numerical experiments. It is demonstrated that the non-stationary time series with the same power spectrum can show clearly distinctive feature of trajectory in a time domain according to its distribution of phases, and so gives a different value of the fractal dimension. This means that the phase distribution strongly affect the irregularity represented in terms of the fractal dimension. We also examine the time series data whose power law index abruptly changes at a characteristic frequency. It is also shown that the characteristic time scale defined from our fractal analysis corresponds to one quarter of the inverse of the characteristic frequency: one quarter of the characteristic wavelength. Moreover, some remarks upon applying our fractal analysis to the actual data are made in order to facilitate a quantitative analysis of the time series.