

自己回帰型モデルの極とその重みについて

—— 情報の縮約の観点から* ——

岐阜大学工学部 岸 田 邦 治

(1988年11月 受付)

1. はじめに

有限次数の時系列モデルの範囲で考えると、自己回帰 (AR) モデルはイノベーションモデルや自己回帰移動平均 (ARMA) モデルよりも劣っているが、工学分野への適用例の多さと高速計算を利用した数値計算プログラム (例えば、赤池 他 (1972)) の整備状況から、依然として実機プラントでは AR モデルがシステム同定等によく用いられている。その際、次のような素朴な疑問が起る。つまり、同一システムを同定する時 AR モデルの次数は何らかの情報量基準で定められるが、統計誤差によってモデル次数は観測のたびにバラつくことが多い。すると、同一システムを異なった次数の AR モデルで近似してもよいという AR モデルの持つべき数理構造とはどのようなものであろうか？ この疑問の解明が本稿の動機であった。そこで、本稿では、工学プラントシステムを AR モデルで同定した時に、AR モデルの極配置に特徴のあるパターンが対象となるシステムの動的特性及びその観測方法に応じて存在することを紹介し、同定 AR モデルの持つ数理構造を解明する。

原子炉プラントのようにシステムの安全性が要請される場合、モデル同定時にはなるべく多くの時系列データ数を採用すべきである。つまり、統計誤差に惑わされることなくモデル同定から、何らかの情報を得てシステムの診断等に活用しようとすれば、積極的に多量のデータ数を扱うべきである。この場合、AR モデルは統計モデルであっても、その統計性に関する議論はデータ数の増加に伴って逆に重要でなくなる。さらに、モデル次数決定に使用される情報量基準 (FEC 又は AIC) の値は AR モデルがシステムの主要部を同定している時にはモデル次数の増加に対しては減少するが、最小になった後はデータ数が多いために情報量基準の値はほとんど変化しない。このような場合、最小の AR 次数に特別の意味はなく、その値より大きい次数であれば、どの次数でもシステム同定上の結果にはあまり差はない。例えば、大きめの AR 次数であれば、そのパワースペクトル密度 (PSD) を比較しても、あまり相違が見られないはずである。そこで、このような状況下では積極的に AR モデルの次数を変動させるという操作によって、AR モデルの持つ数理構造を把握することが可能になる。このような試みを以下で紹介する。基本的な考え方は情報の縮約であり、次章で述べる。第3章にて AR モデルの極配置ルールを解説し、さらに、PSD の判読における AR 極の持つ役割を第4章で述べる。第5章では AR 極の重みについて調べ、第6章にて上述の枠組みの理解を助けるための具体例を紹介する。第7章では PSD との関連において AR モデルの収束性を論じる。

* 本稿は昭和 61, 62 年度 統計数理研究所 共同研究 (61-共研-27, 62-共研-40) 「雑音と線形応答の数理的研究」の研究会, 昭和 51 年から 54 年度, 昭和 57 年から 61 年度までの原子力学会での一連の発表及び昭和 62, 63 年度 情報理論とその応用学会で話したものをまとめたものである。

2. 情報の縮約

工学プラントは物理的観点からすると巨視的開放系の一つと見なせ、十分な数の状態変数を選ぶことによりマルコフ過程で記述される。定常状態で運転中の工学プラントの状態変数の平均値は一定で、その周りにゆらぎを伴っている。このゆらぎの時間的変動を調べることによってシステムの動的性質が把握されれば、システムの診断に役立つ。本稿では統計モデルの持つ情報を診断へ活用することを念頭においている。

巨視系であるという特徴を利用して、その系のゆらぎを記述する確率方程式の漸近的性質を引き出す(Van Kampen(1961), Kubo et al.(1973))と、ゆらぎの確率分布関数は線形 Fokker-Planck 方程式にしたがう (Tomita, K. and Tomita, H. (1974))。これを量子力学で言うシュレディンガー表示とすれば、状態変数の時間変化を扱うハイゼンベルグ表示に相当するものが定常ガウスマルコフな物理系を記述する線形 Langevin 方程式である。さらに、これを離散時間表示すれば、次の基礎式 (Kishida and Sasakawa (1980)) (この式についての物理的な考察は付録で示す) が得られる。

$$(2.1) \quad x(n) = \Phi x(n-1) + f(n) \quad x, f \in R^d, \quad n \in Z$$

ここで、ゆらぎ $x(n)$ は時刻 n における d 次元状態変数ベクトル、 $E\{x(n)\} = 0$ 、であり、 $f(n)$ は白色の d 次元ガウス揺動力で、 $E\{f(n)\} = 0$ 、クロネッカーの δ を用いると、 $E\{f(n)f(n')^T\} = V\delta_{nn'}$ 、であり、実数成分の $d \times d$ 行列 Φ 、 V の各要素は物理的素過程より定まる物理的パラメータから成るとする。尚、 $E\{\dots\}$ は \dots のアンサンブル平均であり、 T は行列の転置を示す。(2.1) よりシステム極は $\det(I - \Phi z^{-1}) = 0$ の根として与えられる。

上述したように巨視系をマルコフ過程として記述するためには十分な数の状態変数が必要となるが、実際のプラントの監視時ではこれより少数の観測変数を扱うことが多い。このためにシステムの情報が縮約され、次のような測定方程式が必要になる。

$$(2.2) \quad y(n) = Hx(n) \quad y \in R^q$$

ここで、 y は観測可能な q 次元ベクトル ($d > q$) で、 H は実数成分の $q \times d$ 観測行列 ($\text{rank } H = q$) とする。さらに、 y の現在までの時系列データを取得し、信号処理されるものとすれば、システム同定上 (2.1), (2.2) はこの時系列データ空間へ射影されたものに変更しなければならない。つまり、それぞれの両辺にデータが与えられたという条件付き確率のもとで、(2.1), (2.2) は次式なるイノベーション表現となる (Kishida (1982a, 1982b, 1984))。

$$(2.3) \quad x(n|n) = \Phi x(n-1|n-1) + K\gamma(n)$$

$$(2.4) \quad y(n) = Hx(n|n)$$

ここで、条件付き期待値 $x(n|n) = E\{x(n) | Y(n)\}$ で、 $Y(n)$ は観測される時系列データ空間 $Y(n) := (y(n)^T, y(n-1)^T, \dots)^T$ で、イノベーション $\gamma(n) := y(n) - y(n|n-1)$ であり、定数行列 $K := PH^T\Gamma^{-1}$ 、 $\Gamma := E\{\gamma\gamma^T\} = HPH^T$ で、 P は次の Riccati 方程式を満たしている。つまり、 $P(n) := E\{(x(n) - x(n|n-1))(x(n) - x(n|n-1))^T\}$ 、 $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$ とすると、(2.1), (2.3) より、

$$(2.5) \quad P = \Phi\{P - PH^T\Gamma^{-1}HP\}\Phi^T + V$$

この式は、定常状態で十分観測データがある時、(2.1) 及び (2.3) から容易に導かれる。

(2.1), (2.2) と (2.3), (2.4) とが等価であることは両者の相関関数が同じになるということ

ある (Kishida (1984)). まず, (2.1), (2.2) より観測変数の相関関数は

$$(2.6) \quad C_{yy}(n) := E\{x(n)x(0)^T\}H^T = H\Phi^n C_{xx}(0)H^T$$

となる. ここで, $C_{xx}(0)$ は次の Einstein 関係式の解である.

$$(2.7) \quad C_{xx}(0) = \Phi C_{xx}(0)\Phi^T + V = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j V (\Phi^T)^j$$

ところで, (2.5) の形式解を求め, (2.7) 及び $PH^T\Gamma^{-1}HP = K\Gamma K^T$ を用いると

$$P = C_{xx}(0) - \sum_{j=1}^{\infty} \Phi^j K\Gamma K^T (\Phi^T)^j$$

なる関係式が成立する点に注意して, (2.3), (2.4) の相関関数は次のようになる. つまり, (2.3), (2.4) より

$$y(n) = \sum_{j=0}^{\infty} H\Phi^j K\gamma(n-j)$$

であるから,

$$(2.8) \quad \begin{aligned} C_{yy}(n) &:= E\{y(n)y(0)^T\} \\ &= H\Phi^n \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j K\Gamma K^T (\Phi^T)^j H^T \\ &= H\Phi^n \sum_{j=1}^{\infty} \Phi^j K\Gamma K^T (\Phi^T)^j H^T + H\Phi^n P H^T \\ &= H\Phi^n C_{xx}(0)H^T \end{aligned}$$

となる. このようにして, (2.1), (2.2) と (2.3), (2.4) の 2 種類の相関関数 $C_{yy}(n)$ は同一である. つまり, 平均が零となる二つのガウス過程は二次モーメントなる相関関数が同一であれば両者は等価である.

次に, (2.3), (2.4) において $x(n|n)$ は直接測定できないので両式から消去すると ARMA 型モデルを得る. この変数の通減により観測可能な変数のしたがうべき基礎式は非マルコフ性を帯びることになる. データ空間への射影及び変数の通減を第 1 種情報の縮約と言う. そこで, 見通しのよい議論をするためにシステム行列 S (Rosenbrock(1970), 須田(1978), 岸田 他(1983)) を用いて (2.3), (2.4) を次のように表す.

$$(2.9) \quad S(z^{-1}) \begin{pmatrix} x(n|n) \\ \gamma(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y(n) \end{pmatrix}$$

ここで,

$$(2.10) \quad S(z^{-1}) = \begin{pmatrix} \Phi z^{-1} - I & K \\ H & 0 \end{pmatrix}$$

であり, 時間もどし演算子 $z^{-1}y(n) := y(n-1)$ である. すると, 変数の通減操作を代数的に表現すれば, システム行列の両辺にある適当なユニモジュラー行列を掛けることになる. つまり, 入・出力 y と γ について次の可制御可観測性の条件

$$\begin{aligned} \text{rank} [K\Phi K \cdots \Phi^{d-1}K] &= d \\ \text{rank} [H^T\Phi^T H^T \cdots (\Phi^T)^{d-1}H^T] &= d \end{aligned}$$

をシステムが満たしているとすれば, 結果は次のようになる.

$$U(z^{-1})S(z^{-1})V(z^{-1}) = \begin{pmatrix} I & 0 & N \\ 0 & -A(z^{-1}) & B(z^{-1}) \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}$$

ここで、ユニモジュラー行列 U, V は入・出力を不変とする変換で

$$U(z^{-1})(0 \ y(n))^T = (0 \ y(n))^T, \quad V(z^{-1})^{-1}(x(n|n) \ \gamma(n))^T = (* \ \gamma(n))^T$$

を満たす。そこで、入・出力関係を直接記述する ARMA モデルは (2.9) より

$$(2.11) \quad A(z^{-1})y(n) = B(z^{-1})\gamma(n)$$

となる (Kishida (1982a, 1982b, 1984)). 通常、数学的な議論は ARMA 過程等を出発点として設定されるが、以上の考察から分かるように本稿ではその背後にある物理系を想定しているために、同一のシステムに対して観測に応じた複数の ARMA モデルを考察の対象にしている。したがって、各 ARMA モデルの係数は互いに関係があり、上述のようにして物理系と観測方法が決まると一つの ARMA モデルが定まる。

このようにして、物理システムを等価表現する ARMA モデルからシステムの極及び零点は次式より定義される。

$$(2.12) \quad \text{極} : \det(-A(z^{-1})) = \det(\Phi z^{-1} - I) = 0$$

$$(2.13) \quad \text{零点} : \det(-B(z^{-1})) = \det S(z^{-1}) = 0$$

注意すべきことは ARMA 零点は観測変数の選び方に応じて変化するが、ARMA 極は観測に依存せず不変で、元のシステム極と同じであることである。さらに、ベクトル ARMA モデル表現には AR 部と MA 部に共通のユニモジュラー行列が掛けてもよいという不定性が残っているが、極及び零点はこの変換にも不変である。

次に、この確率システムを AR モデルで同定する問題を扱う。これは、ARMA 過程を AR モデルで近似する場合に生じる問題を扱うことに対応する。まず、システムの相関関数を入力データとし、逐次計算法で AR 係数を計算する。その際、第 1 章で述べたように時系列データ数が多いため統計誤差がないとして、AR モデル同定に使用する入力相関関数は (2.6) あるいは (2.8) なる理論相関関数とする。そこで、同定した m 次の AR モデルを

$$(2.14) \quad \Psi(m, z^{-1})y(n) = \varepsilon(m, n)$$

としよう。ここで、 $\Psi(m, z^{-1}) = I + \sum_{j=1}^m \phi(m, j)z^{-j}$ であり、その残差 ε は白色と仮定し、 $E\{\varepsilon(m, n)\varepsilon(m, n')^T\} = \Sigma_m \delta_{nn'}$ を満たしている。すると、次式を満足する qm 根が AR 多項式の極として定まる。

$$(2.15) \quad \text{AR 極} : \det \Psi(m, z^{-1}) = 0$$

尚、本稿では、安定なシステムを対象としているので、システムの安定性から全ての極は、 z^{-1} を用いて記述しているため、複素平面の $|z^{-1}| > 1$ なる領域に存在している。

第 1 章で述べたように、データ数が十分多いために AR 次数が変化しても AIC 等の情報量基準にあまり変化が見られない時にこの点を逆に活用すれば、AR 極とシステム特性との対応づけが可能になるはずである。ところが、システムの相関関数は Φ, V, H から決まったが、AR モデル係数はこの相関関数を要素とする Toeplitz 行列を持つ正規方程式から定まることとなる。さらに、ARMA 過程は極及び零点を持ったモデルであるのに対して、同定 AR モデルは極

のみから成り立っている。つまり、PSDが一致するためには、零点を持たないARモデル同定では零点が縮約されてAR極で近似表現されることが必要となる。これを第2種情報の縮約と言う。このようなARMAモデルとARモデル同定との構成から明らかなように、AR極は元のシステム極(又は、等価なARMAモデルの極)及び零点との間に何らかの関係を生じるはずである。ところで、同定AR次数が変化すればAR極の個数も変化する。しかし、元のシステムの極及び零点は変動するAR次数とは無関係であるので、変化したAR極は何を意味しているのかを理解していなければならない。数学的にはARモデル同定をすることは有理関数のある多項式で近似することに対応する。そこで、結論から述べると、これらの対応関係に関するARモデルの漸近的な極配置ルール(Kishida et al. (1985a, 1987a, 1987b); Yamada et al. (1986))は次のようになる。

AR 極配置に関する漸近的ルール

ARMAモデルの零点のうち、単位円に最も近い零点の絶対値を半径とし、原点を中心とする円を収束円と呼ぶ。ARモデルの次数が十分大きくなると：

- (1) 収束円内にあるシステム(ARMA)極はARモデルで同定される。
- (2) ARMA零点は、等間隔で円環状に分布するAR極の集合として等価表現される。この円の半径は零点の絶対値に等しい。又、円環の数は同一システムであっても、観測する変数の数に依存している。
- (3) ARMA極や零点との関係が単純でない、特異なAR極が存在する。その極のうち、ARモデルの次数に依存して消えたり現れたりするものと、次数に依存しないで複素平面内の定位置にとどまっているものの2種類がある。
- (4) (1)、(2)に含まれなかった残りのシステムの極やARMA零点は、(1)なるAR極のずれ、(2)の円環の歪みや(3)なるAR特異極のずれによって、等価表現されている。又、次数の増加に伴って各ずれの割合は減少する。

本章をまとめると、情報の縮約の立場から大切な式は、物理的な式(2.1)、(2.2)と数学的なイノベーションモデル(2.3)、(2.4)と3種類の時系列モデル：(a) ARMAモデル(2.11)、(b) ARモデル(2.14)及び(c)次章に出るAR型モデル(3.1)である。これらの枠組みにおいて、ARモデルの極及びその重みとモデルの収束性に関する数理構造が以下の章で説明される。

3. ARモデルの極配置ルール

この章ではARモデルの極配置ルールを証明しよう。ARモデルの係数を解析的に求めようとしても、その逐次関係は非線形変換(Durbin (1960), Levinson (1947))であるため直接取り扱えない。そこで、代わりに(2.11)の伝達関数の逆数をテイラー展開して得られる次のAR型モデル(TAR)を扱うことで我慢しよう。つまり、ARMAモデルの伝達関数の逆数は(2.11)より

$$B(z^{-1})^{-1}A(z^{-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} T_j z^{-j}$$

であり、これを m 次で打ち切った多項式を m 次のTARモデルとして定義する。つまり、

$$(3.1) \quad \text{TAR}(z^{-1})y(n) := \sum_{j=0}^m T_j z^{-j} y(n) = \gamma(n).$$

一般的な証明は紙面を要するので、第2章のAR極配置ルールを以下の簡単な場合で証明してみる。つまり、システムをスカラー変数で観測する時、等価なスカラーARMAモデルのAR部とMA部を

$$(3.2) \quad \begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = (1 - a_1 z^{-1})(1 - a_2 z^{-1}) \\ B(z^{-1}) &= 1 - \lambda z^{-1} \end{aligned}$$

とし、 $0 < a_2 < \lambda < a_1 < 1$ とする。ARMA極は a_1^{-1} , a_2^{-1} であり、ARMA零点は λ^{-1} である。そこで、 m 次の TAR モデルを次式で定義する。

$$(3.3) \quad \text{TAR}(z^{-1})y(n) = \sum_{j=0}^m t_j z^{-j} y(n) = \gamma(n)$$

ここで、 $t_0 = 1$, $t_1 = a_1 + \lambda$, $t_j = (1 + a_1 \lambda^{-1} + a_2 \lambda^{-2}) \lambda^j$ ($j \geq 2$) であり、AR 次数が大きくなると、AR モデルの係数 $\psi(m, j)$ は TAR モデルの係数 t_j に近づくことになる (Yamada et al. (1987))。さらに、この TAR モデルは次のように変形できる。

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \text{TAR}(z^{-1}) &= A(z^{-1})B(z^{-1})^{-1} - \sum_{j=m+1}^{\infty} t_j z^{-j} \\ \text{TAR}(z^{-1})B(z^{-1}) &= A(z^{-1}) - A(\lambda^{-1})(\lambda z^{-1})^{m+1} \end{aligned}$$

そこで、 z^{-1} についての多項式 TAR, A 及び B は収束円を含む領域において解析的であり、かつ (3.4) より、十分大きな次数に対して、 $|\lambda z^{-1}|^{m+1} \ll 1$ が成り立つので、複素平面 (z^{-1} 平面) 上の収束円内にある任意の円に対してルーシェの定理を適用すれば、多項式 $\text{TAR}(z^{-1}) \cdot B(z^{-1})$ の根の数は $A(z^{-1})$ の根の個数に等しくなる。ところが、収束円内では $B(z^{-1})$ は根を持たないため、収束円内にあるシステム極を中心とするある円周において同様の議論をすれば、 $A(z^{-1})$ の根の絶対値が小さい方の極 a_1^{-1} を TAR モデルが同定することになる。次に、収束円を含む任意の円に対して同様の議論をすると、今度は逆に、 $|\lambda z^{-1}|^{m+1} \gg 1$ が成り立つので、 $\text{TAR}(z^{-1}) \cdot B(z^{-1})$ の根の数は $(\lambda z^{-1})^{m+1}$ の根の個数に等しい。したがって、この円内に $m+1$ 根を持つ。ところが、この円内では $B(z^{-1})$ は1個の根を持つため、TAR モデルは、結局、この円内に m 根を持つことになる。既に、TAR モデルが収束円内のシステム極を1個同定しているから、収束円を含む円環状領域に $m-1$ 根を持つことになる。さらに、 m 次の TAR モデルは m 根を持つので、円環状領域の外側には TAR モデルの根がない。このようにして、AR 型極配置ルールが説明された。

以上が解析的な証明であるが、AR 型極配置の本質を理解するには以下の直感的な式変形の方が有用である。つまり、

$$(3.5) \quad \begin{aligned} B(z^{-1})^{-1}A(z^{-1}) &= (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda z^{-1})^j \\ &\sim (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) \sum_{j=0}^{m-2} (\lambda z^{-1})^j \\ &= (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) \prod_{j=1}^{m-2} (1 - \beta_j z^{-1})^j \end{aligned}$$

ここで、 $\beta_j^{-1} = \lambda^{-1} \omega^j$ ($j = 1, 2, \dots, m-2$) で、 $\omega = \exp(2\pi i / (m-1))$ である。すると、

$$\{\text{零点 } \lambda^{-1}\} = \{\text{AR モデルの円環状極 } \beta_j^{-1} \ (j = 1, 2, \dots, m-2)\}$$

これより、円環状極が円周上に等間隔に並び、零点の位置が抜けていることも理解される。

このようにして、同定 AR モデルの極配置の性質を支配しているのは等価 ARMA モデルの最小零点である。さらに、零点は第 2 章で注意したように確率システムの等価表現のために生じたものであることから、システムが同一であっても、観測の方法が異なると変化してしまう。したがって、AR 極配置を調べるには、ARMA モデルの零点を求めることが大切である。

尚、第 2 章の AR モデルの極配置ルール (2) にある多重円環状極配置と、ルール (3) の特異根は、もっと高次の ARMA モデルで複数以上の変数が観測される場合に、上述の証明を一般化すれば、それらの存在を示し得ることも分かっている。

4. AR 極と PSD

AR モデルの極配置をシステムの PSD との関連において調べよう (Yamada et al. (1989))。まず、第 2 章の (2.11) なるスカラー-ARMA モデルの PSD を次のように定義する。

$$(4.1) \quad P_{yy}(z) = f(z^{-1})f(z)$$

ここで、 $f(z^{-1}) = B(z^{-1})\sigma/A(z^{-1})$ 、 $\sigma^2 = \Gamma$ 、 $z = \exp(i\theta)$ とし、 $\theta := 2\pi f/f_0$ で、 f は周波数で f_0 はサンプリング周波数である。簡単のために、AR 部と MA 部は第 3 章の多項式 (3.2) とし、(4.1) の PSD の両辺の対数を取れば

$$(4.2) \quad \log P_{yy}(z) = \log \Gamma + \log |1 - \lambda z^{-1}|^2 - \sum_{j=1}^2 \log |1 - \alpha_j z^{-1}|^2$$

となる。つまり、システムの PSD の対数は個々の極及び零点ごとの PSD の対数の和から成っている。一方、これを同定する AR モデルの極を ν_j とするとスカラー-AR モデル (2.14) の PSD の対数は

$$(4.3) \quad \log P_{AR}(z) = - \sum_{j=1}^m \log |1 - \nu_j z^{-1}|^2 + \log \Sigma_m$$

となる。ところで、第 7 章から分かることであるが、AR モデルは次数を上げると ARMA モデルに収束していく。そこで、十分大きな次数に対して (4.2) と (4.3) を比較すれば次式が成立する。

$$(4.4) \quad -\log |1 - \alpha_2 z^{-1}|^2 + \log |1 - \lambda z^{-1}|^2 \sim - \sum_{j=1}^{m-1} \log |1 - \nu_j z^{-1}|^2$$

ここで、 $\nu_m \xrightarrow[m \text{ が大}]{} \alpha_1$ とした。さらに、第 2 章の極配置ルールを念頭において、円環状にある AR 極の数が偶数である時、 $m-1 =: 2k$ とすれば、AR 極は k 個の複素共役対 $\nu_j, \bar{\nu}_j$ から成り、これらを一対のものとして扱えば、この対の PSD は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \log |1 - \nu_j z^{-1}|^2 + \log |1 - \bar{\nu}_j z^{-1}|^2 \\ & = \log \{ [1 - (\nu_{jr}^2 + \nu_{ji}^2)]^2 + 4(\nu_{jr} - \cos \theta) \{ \nu_{jr} - (\nu_{jr}^2 + \nu_{ji}^2) \cos \theta \} \} \end{aligned}$$

ここで、 $\nu_j = \nu_{jr} + i\nu_{ji}$ である。このことから、AR モデルの複素共役極の対から成る各 PSD の対数の k 個重ね合わせが元の零点と同定されなかったシステム極を等価表現することになる。そこで、第 2 章のルール (2) より $2k$ 個の AR 極 ν_j は円環状に並んでいることと、(4.4) より、

$$\log |1 - \alpha_2 z^{-1}|^2 \sim \sum_{j=1}^k (\log |1 - \nu_j z^{-1}|^2 + \log |1 - \bar{\nu}_j z^{-1}|^2) - (-\log |1 - \lambda z^{-1}|^2)$$

となる。上式の意味するものは、AR モデルで同定されないシステム極が零点を等価表現する円環状極からのずれでもって表現できることを示している。これが第2章のルール(4)に相当しており、Yamada et al. (1989) によって紹介されている。

5. AR モデルの極とその重み

AR モデルは線形確率方程式の一つであるから数学的には固有値及び固有ベクトルに相当するものを調べることが大切である。AR モデルの伝達関数の極が線形モデルの固有値に相当すると考えれば、AR モデルの伝達関数を部分分数に展開した時の各項の係数(極の重み)が固有ベクトルに相当するものと考えられよう。そこで、極配置ルールを構成するそれぞれのAR極の重みを調べることが大切となる(Kishida and Yamada (1988))。簡単のために、本章でも議論の出発点となる等価システムはスカラーARMAモデルとしよう。もちろん、ベクトルARMAモデルでも議論が複雑になるだけで同じような結果が得られる。第3章の極配置の時と同様に、直接ARモデルを扱うのではなく、解析的に定義できるAR型(TAR)モデルを扱って我慢しよう。AR型モデルの重みを解析的にかつ具体的に扱うために以下の仮定を設定する。

- ① 収束円内に全てのシステム極があること。さらに、システム極の一つは実数で、残りは一対の複素数とする。
- ② 極配置ルールで述べた特異極がないものとする。
- ③ ARMA 零点はただ一つで、実数とする。

すると、十分大きな次数を持つAR型モデルの極配置は第2章の漸近ルールにしたがうので、この極配置ルールに応じた重みの持つべき性質を考察する。つまり、前もって複素平面上でTARモデルの極の位置をシステム極と円環状極のルールにある位置に置き換えることとする。すると、対応する重みは以下のように解析的に扱うことができる。

上述の仮定より、ARMA(3,1)モデルを出発点とし、その伝達関数は

$$(5.1) \quad G(z^{-1}) := \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{1 - \lambda z^{-1}}{\prod_{j=1}^3 (1 - \alpha_j z^{-1})} \\ 0 < |\alpha_j^{-1}| < \lambda^{-1}, \quad j=1, 2, 3$$

となる。ここで、 λ^{-1} は実零点であり、 α_j^{-1} はシステム極とする。

m が十分大きい時にARモデルの伝達関数は以下のように評価できる。つまり、(5.1)より

$$(5.2) \quad G(z^{-1}) \sim \frac{1}{\prod_{j=1}^3 (1 - \alpha_j z^{-1}) \sum_{k=0}^{m-1} (\lambda z^{-1})^k} \sim \text{TAR}(z^{-1})^{-1} \sim \Psi(m+2, z^{-1})^{-1}$$

となる。そこで、第3章AR極配置の直感的理解のところ述べてのように、 $m-1$ 個の円環状極を $\beta_k^{-1} = \lambda^{-1} \omega^k$, $k=1, 2, \dots, m-1$, $\omega := \exp(i2\pi/m)$ とすれば、 $m+2$ 次のTARモデルは以下のように部分分数に展開されて、各分数の分子にある係数をTAR極の重みとして定義すればよい。

$$(5.3) \quad \text{TAR}(z^{-1})^{-1} \sim \frac{1}{\prod_{j=1}^3 (1 - \alpha_j z^{-1}) \prod_{k=1}^{m-1} (1 - \beta_k z^{-1})} \\ = \sum_{k=1}^3 \frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_k}{1 - \beta_k z^{-1}}$$

円環状極の持つ幾何学的性質を利用すれば、TAR 極の重みは以下のように計算できる。

(I) TAR モデル極の中でシステム極 α_k^{-1} に対する重み A_k は：

$$(5.4) \quad A_k = (1 - \alpha_k z^{-1}) \text{TAR}(z^{-1})^{-1} \Big|_{z^{-1} = \alpha_k^{-1}} = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^3 (1 - \alpha_j \alpha_k^{-1}) \prod_{j=1}^{m-1} (1 - \lambda \omega^{-j} \alpha_k^{-1})}$$

となる。ところで、任意の z について、次の恒等式

$$(5.5) \quad \prod_{j=1}^{m-1} (z - \omega^j) = \sum_{j=0}^{m-1} z^j$$

が成立し、 ω は 1 の m 乗根であるという性質を使い、さらに、 $\zeta_k := \lambda \alpha_k^{-1}$ とおいて整理すると

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{m-1} (1 - \lambda \omega^{-j} \alpha_k^{-1}) &= \prod_{j=1}^{m-1} (\lambda \omega^{-j}) \prod_{i=1}^{m-1} \{-\alpha_k^{-1} + (\lambda \omega^{-i})^{-1}\} \\ &= (-\lambda)^{-m+1} \prod_{j=1}^{m-1} (\lambda \omega^{-j}) \prod_{i=1}^{m-1} (\zeta_k - \omega^i) = \frac{\zeta_k^m - 1}{\zeta_k - 1} \end{aligned}$$

となるので、TAR モデルのシステム極に対する重みは

$$(5.6) \quad A_k = \frac{\zeta_k - 1}{(\zeta_k^m - 1) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^3 (1 - \alpha_j \alpha_k^{-1})}$$

となる。一方、元のシステム極の重みは ARMA モデルの伝達関数 (5.1) より

$$(5.7) \quad (1 - \alpha_k z^{-1}) G(z^{-1})^{-1} \Big|_{z^{-1} = \alpha_k^{-1}} = \frac{1 - \zeta_k}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^3 (1 - \alpha_j \alpha_k^{-1})}$$

である。すると、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \zeta_k^m = 0$ より、(5.6) と (5.7) は漸近的に一致する。つまり、同定 TAR モデルの次数が十分大きくなれば、収束半径内にあるシステム極は TAR モデルで同定されること、さらに、その TAR 極の重みは元の ARMA モデルの重みに収束することが分かった。

(II) TAR モデルの円環状極 β_k^{-1} に対する重み B_k は：

$$(5.8) \quad B_k = (1 - \beta_k z^{-1}) \text{TAR}(z^{-1})^{-1} \Big|_{z^{-1} = \beta_k^{-1}} = \frac{1}{\prod_{j=1}^3 (1 - \alpha_j \beta_k^{-1}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m-1} (1 - \omega^{k-j})}$$

である。円環状極の幾何学的関係を利用すれば

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m-1} (1 - \omega^{k-j}) = \frac{\prod_{j=1}^m (1 - \omega^{k-j})}{1 - \omega^{k-m}} = \frac{\prod_{j=1}^{m-1} (1 - \omega^j)}{1 - \omega^k}$$

となり、恒等式 (5.5) において $z=1$ とすると

$$\prod_{j=1}^{m-1} (1 - \omega^j) = m$$

となるので、TAR モデルの同一の位相角を持つ円環状極に対する重みは

$$(5.9) \quad B_k = \frac{1 - \omega^k}{m \prod_{j=1}^3 (1 - \alpha_j \lambda_k^{-1})} \propto \frac{1}{m}$$

と評価できる。これより、同定 AR 型モデルの極が円環状の極に相当する時、極の重みはモデル次数に反比例して減衰することが分かった。

そこで、(5.6) と (5.9) を比較すると AR 型モデルの極の重みについて興味ある結論が引き出される。つまり、次のような極の重みに対する漸近的性質が得られる (Kishida and Yamada (1988))。

AR 極の重みの次数依存性に関する漸近ルール

同定 AR 型モデルの次数が十分大きい時：

- (1) もし、モデル次数が変化した時、重みが一定であれば、その重みに対応する極はシステム極である。
- (2) もし、重みの値が次数に反比例して減衰すれば、重みに対応する極は AR モデルを同定に使用するために生じた円環状極の一つである。

このような重みの性質を利用すれば、同定 AR 型モデルの極はその重みの次数依存性を調べることでシステム極と円環状極とに分離できることが分かる。そこで、これを重みによる極の分離ルールと呼ぼう。

収束円内にあるシステム極の重みはモデル次数が十分大きい時には一定となることが分かった。しかし、実際のプラントに適用してみると、なかなか一定に近づかないことがある。このような過渡的な場合の次数依存性も上記の重み評価から以下のように説明される。つまり、システム極に対する AR モデルの重みは (5.6), (5.7) より、

$$(5.10) \quad \frac{1}{1 - \xi^m} \quad (\text{システム極の重み})$$

である。ここで、 $\xi := (\text{システム極}) / (\text{零点})$ である。したがって、モデル次数に依存している項は

$$(5.11) \quad (1 - \xi^m)^{-1}$$

だけであるので、これが重みの過渡的な次数依存性を示している。その特徴を大別すると次の二通りとなる。一つは ξ が実数であり、他方は ξ が複素数の場合である。どちらにしても、AR モデルの極配置から $|\xi| < 1$ となるので十分大きな次数に対して (5.11) が 1 に収束する点は同じである。ところが、 ξ の絶対値が 1 に近い場合、AR 次数を上げてても重みは一定値に収束しているように見えないことがある。この現象を支配しているのは (5.11) なる次数依存性である。つまり、零点は実数としたので、システム極が実数である時、重みの絶対値は単調に収束するだけであるが、 ξ の絶対値が 1 に近い時は次数をかなり上げてても重みが一定になりにくいことが説明できる。次に、システム極が複素数の時には重みは振動しながら収束するが、 ξ の絶対値が 1 に近いと重みは次数を上げててもいつまでもふらふらとしているように見える。以上がシステム極の重みが持つべき過渡的な次数依存性である。

6. 具体例

システムが3変数からなるマルコフ過程で記述できるものとしよう ($d=3$)。観測方法として、スカラー変数だけが測定されているとする。そこで、(2.11)の等価 ARMA モデルを AR モデルで同定する具体例を以下で数値的に考察しよう。

$$(6.1) \quad \begin{aligned} A(z^{-1})y(n) &= B(z^{-1})\gamma(n) \\ A(z^{-1}) &:= 1 - 2.0611z^{-1} + 1.6728z^{-2} - 0.5864z^{-3} \\ B(z^{-1}) &:= 1 - 1.4697z^{-1} + 0.5359z^{-2} \end{aligned}$$

つまり、(6.1)が以下の議論の出発点となる等価確率システムである。ここで、システム極または ARMA 極は、(6.1)より、 z^{-1} 平面で実極 1.0526 及び複素極 $0.9 \pm 0.9i$ (絶対値は 1.272) であり、ARMA 零点は 1.25 及び 1.49 である。したがって、収束円は $|z^{-1}| = 1.25$ であることから、共役複素極は収束円外にあり、実数極は収束円内にある。

この ARMA 過程を AR モデルで同定する。つまり、(6.1)の理論的相関関数 (2.8) または、データ数が十分大きい時の相関関数は Fig. 1 のようになり、これが AR モデル係数を逐次計算するための入力データである。参考までに、仮に、データ数を 4096 個とすれば、AIC または FPC が 16 次の時に最小であった。そこで、20 次及び 30 次の AR モデルの係数を逐次数値計算で求め、その係数に対応する AR モデルの極配置を Fig. 2 に示した。Figure 2 を見れば収束円上に AR 極が等間隔に並んでおり、ARMA 零点の位置には極が存在しないことが分かる。そして、収束円内にある実数極は、20 次の時は 1.0624 で 30 次の時 1.0541 となり、元のシステム極の位置に収束している。これらは第 2 章のルール通りである。尚、この場合、AR モデルが特異根を持たなかったのはスカラー ARMA モデルの最小零点が実数のためであって、複素零点の場合には出現することもある。そして、観測変数がスカラーであるために円環状極は多重円ではなく単一円上に分布していた。

次に、AR 極に対応する重みを計算する。本章では極の位置を数値的に扱うことができるので、AR 極の位置そのものを用いて計算する。収束円内にあるシステム極に相当する AR 極と、円環状極の代表として実負の AR 極を選び、その重みを Fig. 3 に示した。図から分かるように円環状極の重みは AR モデル次数に反比例して減衰しており、他方、システム極は AR モデル次数が十分大きくなると、ある一定値に漸近している。そこで、同定システム極の重みの理論

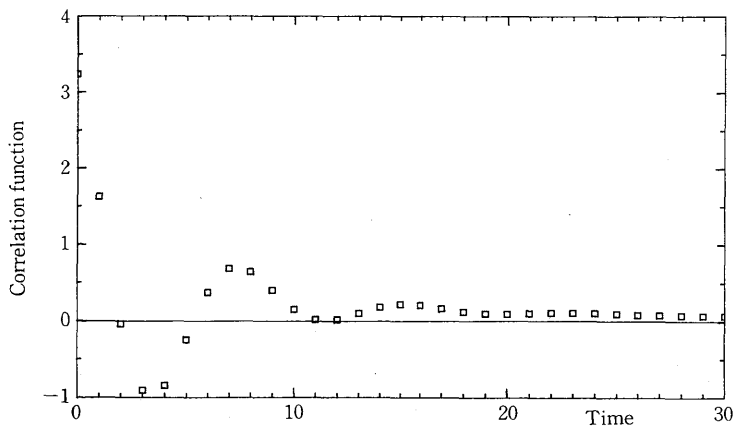


Fig. 1. Correlation function of stochastic system

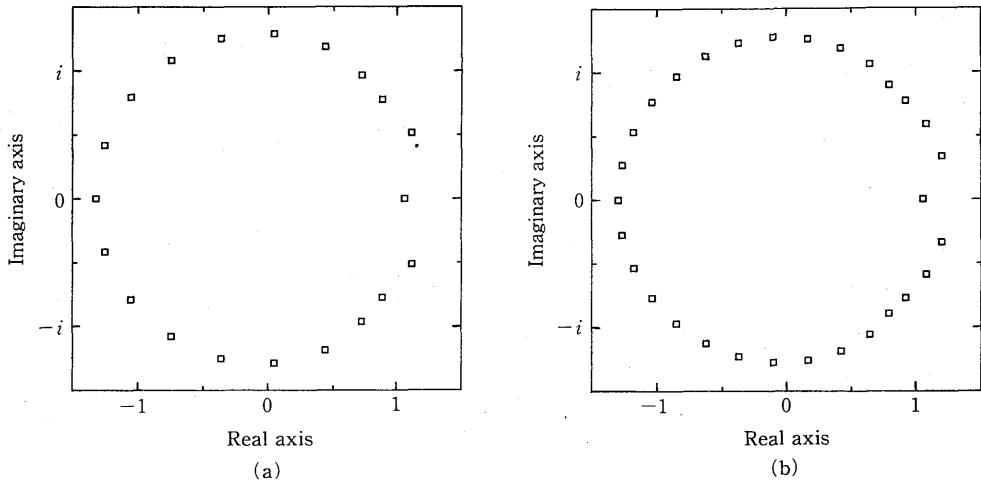


Fig. 2. AR pole locations in the z^{-1} plane: (a) AR (20) model, (b) AR (30) model.

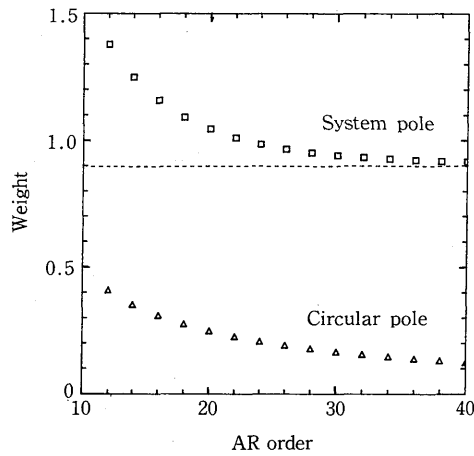


Fig. 3. Weights of AR poles. \square : weight of system pole inside the convergence circle. \triangle : weight of negative real circular pole.

値を計算すると

$$(6.2) \quad \left(1 - \frac{19}{20}z^{-1}\right) \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=\frac{20}{19}} = 0.901$$

であるから、同定 AR モデルの対応する重みはこの値に収束していることになる。これらは全て第5章の重みの漸近ルール通りである。さらに、Fig. 3において次数が20以下である時、システム極の重みに過渡的な次数依存性が見られる。この場合、システム極も零点も実数であるため、 ξ は実数で、(5.11)から重みは単調に指数的な減衰をすることが分かる。

上述の ARMA モデルの極及び零点の配置は収束円外にシステム極が存在するために第5章の仮定を満足していないが、AR 極の重みルールはそれでも成立している。

7. AR モデルの収束性について

AR モデルの収束性を調べるために、単位円周上で解析的である多項式 $h_1(z^{-1})$, $h_2(z^{-1})$ について次のノルムと内積を定義する。

$$(7.1) \quad \begin{aligned} (h_1(z^{-1}), h_2(z^{-1})) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} h_1(z^{-1}) h_2(z) P_{yy}(z) \frac{dz}{z} \\ \|h_1(z^{-1})\|_2^2 &= (h_1(z^{-1}), h_1(z^{-1})) \end{aligned}$$

ここで、 $P_{yy}(z)$ は第 4 章の (4.1) とした。すると、工学システム (ARMA モデル) をスカラー AR モデル (2.14) で同定し、AR モデル $\Psi(m, z^{-1})$ が最小多項式であるという性質 (Kailath (1974)) から次の定理が成り立つ。

定理 1. 任意の m 次の多項式 $g(m, z^{-1})$ に対して $g(m, 0) \geq \sigma_m^{-1}$, $\sigma_m^2 = \Sigma_m$, であるとする

$$(7.2) \quad \|g(m, z^{-1}) - f(z^{-1})^{-1}\|_2 \geq \|\tilde{\Psi}(m, z^{-1}) - f(z^{-1})^{-1}\|_2 = [2(1 - \sigma\sigma_m^{-1})]^{1/2}$$

が成り立つ。ここで、 $\tilde{\Psi}(m, z^{-1}) := \sigma_m^{-1} \Psi(m, z^{-1})$ は規格化された AR 多項式である。

定理 1 で、 $g(m, z^{-1})$ として、特にスカラー-TAR モデル (3.1) を選べば、(7.2) を評価することができて、次の定理を得る。

定理 2. 任意の次数 m に対して、次式が成立する、ある有界な複素数 μ_{ij} が存在する。

$$(7.3) \quad \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=1}^{d-1} \mu_{ij} (\lambda_i^{-1} \bar{\lambda}_j^{-1})^{-m} \geq \|\tilde{\Psi}(m, z^{-1}) - f(z^{-1})^{-1}\|_2^2$$

ここで、 $\bar{\lambda}$ は λ の複素共役である (岸田 他 (1985b))。

証明は (3.4) のように変形した TAR モデルを代入し、ノルムを計算すれば明かである。さらに、(7.3) の不等式は次数 m が十分大きい時、左辺は最も絶対値が小さい ARMA 零点 λ_i^{-1} で代表することができる。つまり、(7.3) は次のように漸近的に評価される。

$$(7.4) \quad \|\tilde{\Psi}(m, z^{-1}) - f(z^{-1})^{-1}\|_2^2 \leq \mu_0 |\lambda_1^{-1}|^{-2m}$$

この不等式は次数が増えると、同定 AR モデルとシステムの等価モデルとのずれが単位円に最も近い ARMA 零点に応じて、指数的に収束することを示している (Kishida et al. (1985a), Yamada et al. (1987))。

8. 結論及び議論

一般に定常確率システムのゆらぎの動特性は極及び零点で定まるが、同定に用いた AR モデルの特徴は極のみを持っている。このような特徴を持つ AR モデルの数理構造を理解する上で、重要となる考え方の基本は情報の縮約である。この情報の縮約の例として、状態変数の通減と零点の消去の 2 種類を本稿に紹介した。つまり、前者の操作によって確率システムが ARMA 過程で等価表現され、後者によって零点が円環状の AR 極配置で等価表現されることを述べた。AR モデルの極配置のパターンを主に定める要因として、システム極のみならず、入

・出力関係から定まる零点が重要な働きをしていた。これらを利用して AR モデルの極配置に関する漸近的ルールをまとめ上げた。零点のうち、複素平面での単位円に最も近い零点が、同定 AR モデルの収束性を主に規定していた。さらに、AR モデルは線形モデルの一つであるから、数学的には固有値と固有ベクトルに相当するものが重要である。固有値に相当するものを AR モデルの極とすれば、固有ベクトルは極の重みに相当する。本稿では次のような重みの数理的性質を述べた。つまり、AR モデルの次数を変化させた時に、もし重みが一定であれば対応する同定極はシステム極であり、さらに、重みがモデル次数に反比例して減衰すれば対応する極は AR モデル同定によって生じる円環状極の一つである。したがって、このような重みの持つ性質を活用して AR 極に対する漸近的な分離ルールを得た。さらに、システム極に対応する場合の重みが持つ漸近的な性質だけでなく、その過渡的な次数依存の性質についても調べた。

以上の結論から ARMA 零点は AR モデルを用いたシステム解析において大切な概念になることが分かった。つまり、観測による情報の縮約の結果、システムの等価表現のために ARMA 零点が必要になったが、AR モデルで同定する時、ARMA 零点は縮約されて、円環状の極の集合で等価表現された。この円環状に並ぶという幾何学的性質から重みに関する漸近的ルールが導出できた。そして、次数が十分大きくない時でも重みの過渡的な振舞いにおいても ARMA 零点が大切な働きをしていたし、また、AR モデルの収束性も規定していた。さらに、ベクトル ARMA モデルには表現上の一意性がないが、ARMA 零点はこのモデル表現上、AR 部と MA 部に共通する不定性たるユニモジュラー行列にも不変となる優れた基本量である。したがって、システム同定を扱う上で ARMA 零点は大切な量であり概念である。それ故、これらの数理的性質を理解した上でシステムの AR モデルを同定すれば、得られた情報及びその診断結果はより信頼性を向上するはずである。

本稿にて、AR 型として解析的な TAR モデルを主に扱ったが、AR モデルでも同様な数値結果が、既に得られている。また、第 6 章に述べたように、重みを解析的に扱うために導入した第 5 章の諸仮定はきびし過ぎて、重みルールはもっと広範囲で成立することも分かっている。しかし、どのような範囲まで条件を緩めるべきかは現在分かっていない。さらに、実機システムでの適用例でも重みルールが成り立っていることが、既に Kishida and Yamada (1988) によって報告されている。その際、次数が十分大きくない時の過渡的な重みのルールも観測されていることを付け加えておく。

参 考 文 献

- 赤池弘次, 中川東一郎 (1972). ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンスライブラリ情報電算機, **9**, サイエンス社, 東京.
- Durbin, J. (1960). The fitting of time-series models, *Revue Inst. Int. de Stat.*, **28**, 233-244.
- Kailath, T. (1974). A view of three decades of linear filtering theory, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **IT-20**, 146-181.
- Kishida, K., Kanemoto, S. and Sekiya, T. (1976). Reactor noise theory based on system size expansion, *J. Nucl. Sci. Technol.*, **13**, 19-29.
- Kishida, K. and Sasakawa, H. (1980). Hidden state variables and AR-MA formulation of reactor noise, *J. Nucl. Sci. Technol.*, **17**, 16-25.
- Kishida, K. (1982a). Physical Langevin model and the time-series model in systems far from equilibrium, *Phys. Rev. A*, **25**, 496-507.
- Kishida, K. (1982b). Contraction of information and models in reactor noise analysis, *Prog. Nucl. Energy.*, **9**, 313-323.
- 岸田邦治, 山田 澄, 戸次圭介 (1983). AR 同定とその極について (II), 第 6 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 263-268.

- Kishida, K. (1984). Equivalent random force and time-series model in systems far from equilibrium, *J. Math. Phys.*, **25**, 1308-1313.
- Kishida, K., Yamada, S. and Bekki, K. (1985a). Application of AR model to reactor noise analysis, *Prog. Nucl. Energy*, **15**, 841-848.
- 岸田邦治, 山田 澄, 戸次圭介 (1985b). AR 型モデルの数理的構造について, *Mathematical Theory of Control and Systems*, 京大数理研講究録 562, 48-65.
- Kishida, K., Yamada, S. and Bekki, K. (1987a). Notes on poles of autoregressive type model part I: Non-robust singular pole, *J. Math. Anal. Appl.*, **124**, 98-116.
- Kishida, K., Yamada, S. and Bekki, K. (1987b). Notes on poles of autoregressive type model part II: Robust singular pole, *J. Math. Anal. Appl.*, **123**, 480-493.
- Kishida, K. and Yamada, S. (1988). Poles and their weights of AR type model, *Prog. Nucl. Energy*, **21**, 679-686.
- Kubo, R., Matsuo, K. and Kitahara, T. (1973). Fluctuation and relaxation of macrovariables, *J. Stat. Phys.*, **9**, 51-96.
- Lax, M. (1960). Fluctuations from the nonequilibrium steady state, *Rev. Mod. Phys.*, **32**, 25-64.
- Levinson, N. (1947). The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction, *J. Math. Phys.*, **25**, 261-278.
- Rosenbrock, H. H. (1970). *State-Space and Multivariable Theory*, Nelson, London.
- 須田信英 (1978). 極と零点(I)及び(II), 計測と制御, **17**, 460-472 及び 622-635.
- Tomita, K. and Tomita, H. (1974). Irreversible circulation of fluctuation, *Prog. Theor. Phys.*, **51**, 1731-1749.
- Van Kampen, N. G. (1961). A power series expansion of the master equation, *Can. J. Phys.*, **39**, 551-567.
- Yamada, S., Kishida, K. and Bekki, K. (1986). Notes on poles and convergence rate of autoregressive model, *J. Statist. Comput. Simul.*, **25**, 273-293.
- Yamada, S., Kishida, K. and Bekki, K. (1987). Properties of autoregressive model in reactor noise analysis (I): Convergence of parameters and power spectral density, *J. Nucl. Sci. Technol.*, **24**, 1009-1021.
- Yamada, S., Kishida, K. and Sumita, K. (1989). Properties of autoregressive model in reactor noise analysis (II) (to be submitted to *J. Nucl. Sci. Technol.*).

付 録

(2.1) 式の物理的考察:

巨視的変数によって記述されるシステムを考える。以下の議論は統計物理の非線形非平衡開放系における理論として、既に Van Kampen (1961), Kubo et al. (1973), Tomita et al. (1974), Kishida et al. (1976) 等によって開発されたものである。つまり、この系の時間発展がマルコフ過程と見なすことができれば、システムの時間発展は次のマスター方程式によって記述される。

$$(A1) \quad \frac{\partial}{\partial t} P(X, t) = \int d(\Delta X) \{ P(X - \Delta X, t) W(X - \Delta X, \Delta X) - P(X, t) W(X, \Delta X) \}$$

ここで、 $W(X, \Delta X)$ は状態 X から $X + \Delta X$ への遷移確率である。この式を形式的に展開すると

$$(A2) \quad \frac{\partial}{\partial t} P(X, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial X} \right)^n C_n(X) P(X, t)$$

となる。ここで、 $C_n(x) := \int d(\Delta X) (\Delta X)^n W(X, \Delta X)$ は遷移確率に関するモーメントである。ところで、巨視系の反応は、通常局所的であるので、遷移確率はシステムの大きさ Ω を用いて

次のように書くことができる。

$$(A3) \quad W(X, \Delta X) = \Omega w(x, \Delta X)$$

ここで、 Ω はシステムサイズであり、 $x := \varepsilon X$ 、 $\varepsilon = \Omega^{-1}$ である。さらに、 X が巨視的変数であるから、そのゆらぎは中心極限定理にしたがうと仮定すると、分散は平均値に対して $\varepsilon^{1/2}$ 程度の量になる。これは次のように表現できる。

$$x = y(t) + \varepsilon^{1/2} \xi$$

この状態変数の変換に対応して、さらに、(A3) より、 $c_n(x) := \varepsilon C_n(X)$ と $p(x, t) := \varepsilon^{-d} P(X, t)$ を導入するとマスター方程式 (A2) は次のようになる。

$$(A4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(\xi, t) - \varepsilon^{-1/2} \dot{y}(t) \frac{\partial}{\partial \xi} p(\xi, t) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{(n-2)/2}}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^n c_n(y + \varepsilon^{1/2} \xi) p(\xi, t) \end{aligned}$$

これは微小パラメータ ε についての展開になっている。この両辺において ε の同次数の項を等しいとおけば、最低次の項から

$$(A5) \quad \frac{dy(t)}{dt} = c_1(y(t))$$

を得る。これは平均値の時間発展方程式になっている。次に、残りの最低次 ε^0 の項から次の Fokker-Planck 方程式を得る。

$$(A6) \quad \frac{\partial}{\partial t} p(\xi, t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} K(t) \xi p(\xi, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \{D(t) p(\xi, t)\}$$

ここで、 $K(t) := \frac{\partial}{\partial y(t)} c_1(y(t))$ 、 $D(t) := c_2(y(t))$ である。さらに、システムが定常にあると、ゆらぎ ξ は次の定数係数行列を持った線形偏微分方程式にしたがうことが分かる。

$$(A7) \quad \frac{\partial}{\partial t} p(\xi, t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} K \xi p(\xi, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \{D p(\xi, t)\}$$

ここで、 $K := \frac{\partial}{\partial y_s} c_1(y_s)$ 、 $D := c_2(y_s)$ であり、 $c_1(y_s) = 0$ なる平均値 y_s を用いた。この解はガウス型分布であり、ゆらぎ ξ の期待値は零である。したがって、システムサイズに基づく展開の結果、非線形性は平均値の方程式 (A5) に取り込まれている。一方、ガウス分布では、相関関数が大切であり、この量を扱うには、分布の時間発展を議論する代わりに状態変数の時間発展を考えるとよい。つまり、ゆらぎ $\xi(t)$ なる状態ベクトルのしたがう式は次の線形 Langevin 方程式である。

$$(A8) \quad \begin{aligned} d\xi &= K \xi dt + db \\ \frac{d\xi}{dt} &= K \xi + r(t) \quad r(t) := \frac{db}{dt} \end{aligned}$$

ここで、 $E\{r(t)r(s)^T\} = D\delta(t-s)$ 。尚、(A8) を導出する他の方法は Lax (1960) が定常系にて平均値の周りで展開するという準線形化法によって示されている。その際、ガウス性を要請すれば (A8) を得る。

さらに、コンピュータの処理上どうしても離散時間表示をする必要がある。そこで、(A8) を

$(n-1)\Delta t$ から $n\Delta t$ まで積分すると基礎式 (2.1) を得る.

$$\begin{aligned}
 (A9) \quad & x(n) := \xi(n\Delta t), \\
 & f(n) := \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \exp[K(n\Delta t - s)] r(s) ds \\
 & \Phi := \exp(K\Delta t), \\
 & V := \int_0^{\Delta t} \exp(Ks) D \exp(K^T s) ds
 \end{aligned}$$

ここで、時間について粗視化されたため、 $n\Delta t = t$ で、サンプリング時間を Δt とおいた。このようにして、基礎式 (2.1) のパラメータ行列 Φ , V は物理過程と結び付いている。

Asymptotic Rules for Poles and Weights of Autoregressive Type Model

— Contraction of Information —

Kuniharu Kishida

(Faculty of Engineering, Gifu University)

An AR model is all pole type, though a steady stochastic process is, in general, described by both poles and zeros. When we apply the AR model analysis to system identification or diagnosis, we must pay attention to the above property of AR model. Then AR poles have intimate relations to both poles and zeros.

The contraction of information is an important concept in understanding properties of AR model. There are mainly two types of contraction of information: One is the contraction of state variables of system and the other is the elimination of zeros. The former is needed for the ARMA representation of stochastic system, and the latter has an important role in the pole location of AR model. The eliminated zero nearest to the unit circle in the complex plane has an important role in the convergence of AR models.

Pole locations of AR models are determined mainly by not only system poles but also zeros. There are typical pole locations of AR type model with a large model order, and the "pole location rule" of AR type model is introduced. That is, the AR type model have (a) multiple circular poles equally spacing on circles, (b) some of system poles and (c) robust or non-robust singular poles.

Properties of weights of AR poles can be examined by taking advantage of geometrical AR pole location. As to system poles and circular poles of AR model, we have the "pole separation rule": (a) If the weight of an AR pole is constant for AR model order change, the AR pole is a system pole and (b) if the weight of an AR pole is inversely proportional to the AR model order, the AR pole is one of circular poles. This asymptotic property of AR weight is useful in system identification or diagnosis. We also examine transient behaviors of AR weight for model order change.