率域の存在を意味し，ペンローズ紋様では，これらの二域が局所中和せず，曲率のゆらぎがかなり大きいことを意味している．なお，直進路はAmman格子[3)]状になっている．

なお，グラフ測地線は，いわゆる「あみだ」に関係がある．普通の「あみだくじ」は，一方向に向かう異方的なものであり，予め二分された組の間で対を作る籤である．N個の辺が周上に並ぶ三角形網を用意し，N個の周の中から各々2方向に向かう合計$2N$個の道に対応する$2N$要素をN対に分ける「等方的あみだ」とみなすこともできる．「あみだ」は元来，二つの道の置換であるが，普通のものはいわば重力のかかったもの，という見立てである．

注

1）三角形網がDelaunay的であるか否かは，連続量的な差異であってグラフ論的な区別ではない．ここでは，実際の問題としての意識を指している．
2）小川　泰（1982）．数理科学，**231**．
3）それぞれが，一次元準格子の間隔をもつ平行線群5組が，72°刻みの5方向を向いて構成されている．それらの相対位相は多数の正五角形を組むようなものである．

幾何学的グラフ理論

東京工業大学理学部　根　上　生　也

グラフ理論は1736年のオイラーの「ケーニヒスベルクの橋の問題」の解決とともに誕生したと言われている．その問題はケーニヒスベルクの町を横切るプレーゲル川に架けられた7つの橋をちょうど1回ずつ通る経路はあるか否かというものだった．川によって分割された各地区に対して頂点（点）を設け，橋が架けられている地区に対応している頂点どうしを辺（線）で結んで得られる図形を考えれば，この問題は図1の図形は一筆書きできるかという問題に変換される．このような頂点と辺からなる図形がグラフである．

オイラー自身はこの問題がそれまでの幾何学（ユークリッド幾何学，解析幾何学等）とは全く異なるタイプの幾何学に属していることを指摘し「位置の幾何学」とでも呼ぶべき分野を創設しようと試みていた．しかし，彼の一筆書き問題の解法は各頂点に接続する辺の本数を数えるという極めて組合せ論的行為によっていたため，そこからは幾何学としてではなく組合せ論的色彩の強いグラフ理論が誕生してしまった．

勿論，「位置の幾何学」を作ろうという彼の意志はトポロジー（位相幾何学）に受け継がれているが，今日のトポロジーは素朴なグラフという対象からは遠くかけ離れたところで発展している．一体，幾何学としてのグラフ理論はどこに行ってしまったのだろうか….

こういう思いから，最近になって幾何学的なグラフ理論の再発見に努めてきた．昔から曲面上のグラフを研究するトポロジー的グラフ理論はあったわけだが，いろいろ模索してみると必

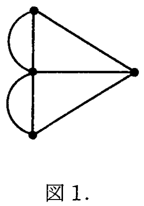

図1.

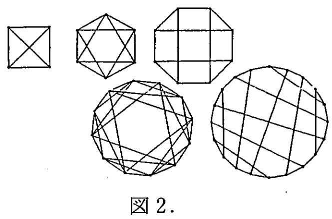

図2.

ずしもトポロジーの範疇に収まりきれない幾何学的な問題がたくさんあることが分かってきた．ここではそのいくつかの例を紹介する．

その最初はグラフの形の問題である．グラフを組合せ的対象として捉えるならば，無造作に頂点を配置して辺どうしが交わるようにグラフの絵を書いてもいっこうに差し支えない．しかし私達はグラフの望ましい形を求めて試行錯誤することが多い．

例えば，プラトン・グラフ（図2）と呼ばれる5つの正多面体のフレームの部分のグラフなのだが，その正体は直ちには分からない．一方，図3のように描けばそれがプラトン・グラフであることは一目で分かるし，誰しもこの方が図2よりも美しく望ましい姿だと感じるだろう．それは単なる美意識の問題ではなく，図3の方がプラトン・グラフをより忠実に表現しているからである．

その忠実さはグラフの対称性をどこまで実現しているかに関わっている．図2のような平面的な表現では回転と裏返しからなる二面体群の対称性しか実現できないが，図3の表現ではプラトン・グラフのすべての対称性が実現されている．この例のように，ある空間にグラフのもつ対称性をすべて実現するようにグラフを埋め込むことをグラフの忠実な埋蔵という．

忠実な埋蔵を考えるとそれに付随してグラフがある形を持つようになるが，その形が埋め込み方を変えてしまうと変わってしまうようなら，それをグラフ本来の形であるというのは適切ではない．そこで，埋蔵の一意性も議論する必要がある．

プラトン・グラフの場合，球面上のどんな埋め込みも図3の角を丸めてえられるものに位相同型写像で重ねられる．この意味で図3はプラトン・グラフの球面上への唯一の埋め込みを与えていると考えられる．更にそれは忠実な埋蔵だから，プラトン・グラフは正多面体という2次元もしくは3次元的な固有な形を持っていると言ってもよいだろう．

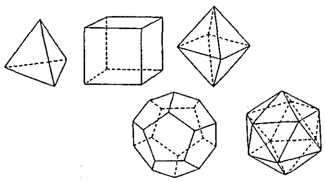

図3.

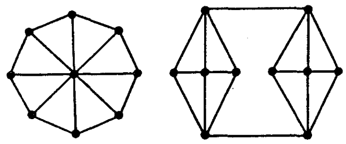

図4.

一般に，グラフの高次元的な形を問うために，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ へのグラフ G の忠実な埋蔵を考える．但し，G の各辺は互いに端点以外では交わらない直線分になっており G の自己同型群に関する対称性がすべて $\mathbb{R}^n$ の等長変換により実現されているものとする．そのような G の忠実な埋蔵が存在する $\mathbb{R}^n$ の最低の次元 n を G の忠実埋蔵次元と呼び $\mathrm{FED}(G)$ と書く．

例えば，n 個の頂点からなる完全グラフ K_n（どの2頂点も辺で結ばれているグラフ）や n-立方体グラフ Q_n に対しては

$$\mathrm{FED}(K_n)=n-1, \qquad \mathrm{FED}(Q_n)=n$$

が成り立つ．これは K_n, Q_n がそれぞれ $(n-1)$ 次元単体，n 次元立方体のフレームになっているので自然である．更にそれらの最低次元の忠実な埋蔵は相似なものを除いて一意的であることが示されるので，その埋蔵によって K_n, Q_n の固有の形が表面されていると考えてよいだろう．

平面的グラフ（平面内に埋め込めるグラフ）の場合，忠実埋蔵次元がいつも2になってくれ

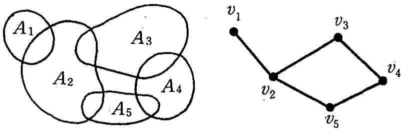

図5.

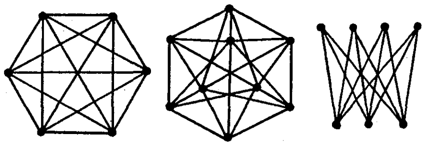

図6.

るとありがたいが，残念ながらそうとは限らない．実際，2以上の任意の値を忠実埋蔵次元に持つ平面的グラフが存在する．これは，平面的グラフには平らなもの(FED(G)=2）と丸いもの(FED(G)=3）とそれ以外のもの（FED(G)≧4）があると解釈すればよい．

例えば，図4-左のグラフは平らで，プラトン・グラフは丸い．その他のタイプは図4-右のように節（切断頂点集合）が何カ所かにあり，そこを固定して一部を裏返せるようになっている．こういう事実から平面的グラフの形も忠実埋蔵次元によって分類されると考えてもよさそうである．

ここまでの話はグラフに内在する幾何学の問題だったが，グラフの外にある幾何学をグラフで表現して解析するという方向もある．その一例として平面交グラフを紹介する．

一般に，集合族 $\mathscr{F}=\{A_1,\cdots,A_2\}$ の交グラフ $G(\mathscr{F})$ とは各集合 A_i に対して頂点 v_i を設けて2つの集合 A_i, A_k が空でない交わりを持つとき頂点 v_i と v_k を辺で結んで得られるグラフである．特に，A_i が平面 $\mathbb{R}^2$ の連結閉集合のとき $G(\mathscr{F})$ を平面交グラフと呼ぶ（図5参照)．

平面的グラフは平面交グラフになるが，平面的でないグラフでも平面交グラフになるものはいくらでも存在する．例えば，図6に示した非平面的グラフはすべて平面交グラフになる．どのように平面に集合を配置したらよいのか，クイズを解くつもりで考えてみると面白いだろう．勿論，数学的には平面交グラフの特徴付けを与えることが最終目標だが，それはかなりの難問である．

以上，簡単に幾何学的グラフ理論の例を紹介してきたが，まだまだいろいろな問題が考えられる．そういう問題を何千回，何万回と議論するうちに，私達の頭の中にグラフがリアリティを持って存在するようになることを夢見ている．図2と図3が同じグラフを表しているということは言葉の上で理解することはできるが，グラフというリアリティを獲得した人間にとってはそれらが同じグラフか否かという問いはナンセンスである．どんな絵の描き方をしても初めから同じグラフは同じに見えてしまうような感性を持った新人類がいつの日か現れてこないとも限らないだろう．

最短木の長さの推定問題

京都工芸繊維大学工芸学部　古　山　正　雄

1. 問題の提示

本稿の目的は，最短木の長さを推定することである．最短木の長さについては，2種類の問題が考えられる（図1)．

問1．1×1 の正方形内に n 個の点をランダムに置く．これら n 個の点を結ぶ最短木の長さは如何？

問2．n 個の頂点をもつ完全グラフの各辺に，1×1 の正方形内の任意の2点間の距離をランダムに重みとして付加する．この時，n 個の点を張る最小木の重さは如何？

この2つは異なる問題だが，外見が相似しているのみならず，実は結果においても似ている