tコピュラについて

野津　昭文　総合研究大学院大学　統計科学専攻　博士後期課程１年

本発表では，tコピュラの既知の性質を紹介し，さらに今後取り組みたい問題について述べる．

コピュラとその使用例

コピュラとは周辺分布が$[0,1]$上の一様分布である多変量分布関数のことである．その使用例として，David X. Li は二つの金融商品がデフォルトするまでの時間をT_1,T_2とし，その同時・周辺分布関数F,F_1,F_2のモデルとして，ガウシアンコピュラ$C_\rho^{\mathrm{Ga}}(u_1,u_2)=\Phi_2(\Phi^{-1}(u_1),\Phi^{-1}(u_2))$を用いて，

$$F(t_1,t_2)=\Phi_2(\Phi^{-1}(F_1(t_1)),\Phi^{-1}(F_2(t_2)))\ ,\ (\Phi_2\text{は二次元正規分布の分布関数},\Phi\text{は標準正規分布の分布関数})$$

とした．しかし，C_ρ^{Ga}は二つの商品が同時にすぐにデフォルトしてしまう確率を過小に評価する(図1の(3)参照)．

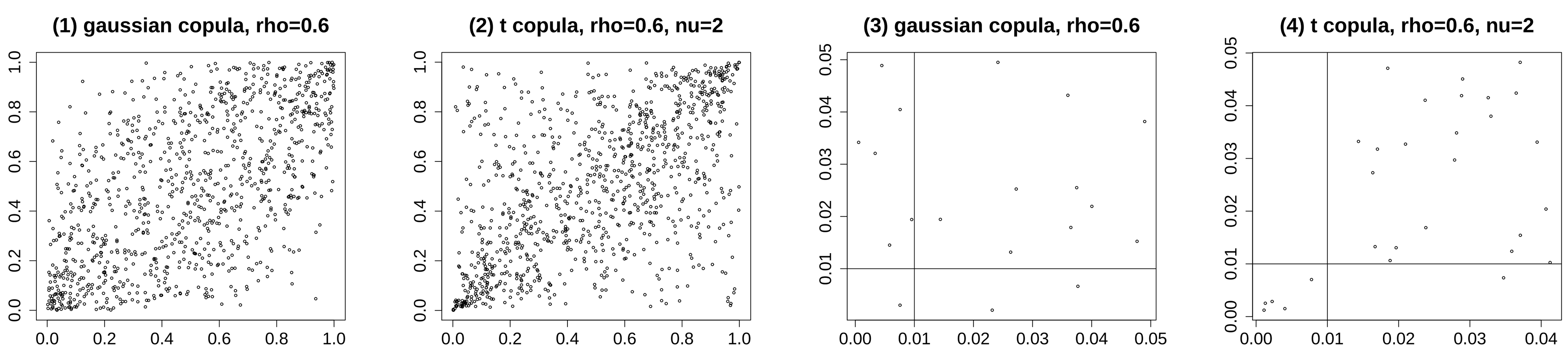

図１：(1)，(2)はそれぞれガウシアン, t コピュラから発生させた1000個の乱数の散布図．(3)，(4)はそれぞれの裾の部分の拡大図．

裾の重いコピュラ：tコピュラとその派生コピュラについて

- tコピュラ$C_{\nu,P}^t(u_1,\ldots,u_d)$は，パラメータとして相関行列$P$，自由度$\nu$を持ち，

$$C_{\nu,P}^t(u_1,\ldots,u_d)=\int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_1)}\cdots\int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_d)}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{(\pi\nu)^d|P|}}\left(1+\frac{\boldsymbol{x}'P^{-1}\boldsymbol{x}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}}d\boldsymbol{x}$$

と表わされる．t_νは自由度νのt分布の分布関数である．一般に二次元コピュラCの裾の重さを測る指標として，$\lambda_\ell=\lim_{q\to+0}\frac{C(q,q)}{q}$があり，ガウシアンの場合$\lambda_\ell^{\mathrm{Ga}}=0$であり，$t$コピュラの場合$\lambda_\ell^t=2t_{\nu+1}(-\sqrt{\nu+1}\sqrt{1-\rho}/\sqrt{1+\rho})$ (ρは相関係数)となる．$\lambda_\ell^t>0$より

$$\lambda_\ell^t=\lim_{q\to+0}\underbrace{\frac{C_{\nu,\rho}^{\mathrm{t}}(q,q)}{C_\rho^{\mathrm{Ga}}(q,q)}}_{\to\infty}\underbrace{\frac{C_\rho^{\mathrm{Ga}}(q,q)}{q}}_{\to 0}$$

となるので，裾の部分でtコピュラはガウシアンコピュラより確率が大きい，すなわち，裾の重い分布となる．

- $\nu/W\sim\chi_\nu^2$, $\boldsymbol{Z}\sim N_d(\boldsymbol{0},\Sigma)$かつ$W,\boldsymbol{Z}$は独立で，$\boldsymbol{X}=\sqrt{W}\boldsymbol{Z}$とする．$\boldsymbol{X}$は多変量$t$分布に従い，$\boldsymbol{X}$の同時・周辺分布関数を$F,F_1,\ldots,F_d$とすると，$F(F_1^{-1}(u_1),\ldots,F_d^{-1}(u_d))$は$t$コピュラとなる．この表現の中で，$\boldsymbol{Z}$に$\sqrt{W}$をかける代わりに，$\boldsymbol{Z}$の成分を$s$個に分け$\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{Z}_1',\boldsymbol{Z}_2',\ldots,\boldsymbol{Z}_s')'$とし，それぞれに対し，自由度の異なる$\sqrt{W_1},\ldots,\sqrt{W_s}$をかけることで，すなわち$\boldsymbol{X}=(\sqrt{W_1}\boldsymbol{Z}_1',\sqrt{W_2}\boldsymbol{Z}_2',\ldots,\sqrt{W_s}\boldsymbol{Z}_s')'$とすることで，$\boldsymbol{X}$から$t$コピュラに似た新しいコピュラを作ることができる．これをgrouped tコピュラという．
- 二次元コピュラに従うi.i.d.な確率ベクトル列に対し，n番目までの確率ベクトルにおいて，各成分の最大値を並べたベクトルを$\boldsymbol{M}_n$とする．$\boldsymbol{M}_n$の極値分布関数をEVコピュラという．一般に，EV コピュラは次の形に限定される．

$$C_0(u_1,u_2)=\exp\left(\log(u_1u_2)A\left(\frac{\log(u_1)}{\log(u_1u_2)}\right)\right).$$

関数Aにだけ自由度がある．特に，tコピュラの場合のC_0をt EVコピュラという．EVコピュラであるグンベルやガランボスコピュラのA関数は，t EVコピュラのA関数とグラフの形が似ている．

今後の課題

- コピュラを実際にモデルに使用する際，周辺分布をコピュラによって結合してモデルを立てる．その推定の問題において，周辺分布をノンパラメトリックに推定し，その後で，コピュラパラメータを推定するIFMという方法がある．フィッシャー情報行列を計算することで，周辺分布の推定とコピュラパラメータの推定の関係を調べ，IFMという推定方法の妥当性を確認する．
- 上述の派生コピュラを推定に用いるには問題が残っている．grouped$t$コピュラの場合は，$\boldsymbol{Z}$のグループ分けの問題が残っており，その方法を提案する．また，t EVコピュラの場合，密度関数が複雑で，そのままでは実用的ではない．グラフの類似性のみから，t EVコピュラの代わりに，グンベルやガランボスコピュラを用いる方法が提案されているが，この方法の理論的妥当性を調べる．
- 期待値ベクトルと分散共分散行列が一定の分布の中で，以下のタリス・エントロピーを最大にする分布は多変量t分布である．

$$\frac{1}{q-1}\left(1-\int f(x)^q dx\right).$$

では，コピュラに限定した場合，最大分布はtコピュラになるのか，などこれらの関係について調べる．