

LÓGICA MODAL*

James Garson

Tradução de Heitor Hedler Siqueira Campos¹

Um modal é uma expressão (como 'necessariamente' ou 'possivelmente') que é usada para qualificar a verdade de um juízo. A lógica modal é, estritamente falando, o estudo do comportamento dedutivo das expressões 'é necessário que' e 'é possível que'. Entretanto, o termo 'lógica modal' pode ser usado de forma mais abrangente para uma família de sistemas similares. Estes incluem lógicas doxásticas, lógicas para expressões temporais, lógicas para expressões deônticas (morais) tais como 'é obrigatório que' e 'é permitido que', e muitas outras. O entendimento das lógicas modais é particularmente valioso na análise formal do argumento filosófico, onde expressões da família modal são tanto comuns quanto ambíguas. A lógica modal também possui importantes aplicações na ciência da computação.

1 O que é a Lógica Modal?

Interpretada de forma estrita, a lógica modal estuda o raciocínio que envolve o uso das expressões 'necessariamente' e 'possivelmente'. Entretanto, o termo 'lógica modal' é usado de forma mais abrangente para cobrir uma família de lógicas que possuem regras similares e uma diversidade de símbolos diferentes.

Segue uma lista descrevendo as lógicas mais conhecidas desta família.

Lógica	Símbolos	Expressões Simbolizadas
Lógica Modal	□	É necessário que...
	◇	É possível que...

¹ Mestrando da UFPE. Revisor 1: Márcio Moretto Ribeiro, professor doutor da EACH-USP. Revisor 2: João Marcos, professor adjunto, UFRN.

Lógica Deôntica	O	É obrigatório que...
	P	É permitido que....
	F	É proibido que...
Lógica Temporal	G	Será sempre o caso que...
	F	Será o caso que...
	H	Sempre foi o caso que...
	P	Foi o caso que...
Lógica Doxástica	Bx	x acredita que...

2 Lógicas Modais

As lógicas mais conhecidas na família modal são construídas a partir de uma lógica mais fraca **K** (em homenagem a Saul Kripke). Na leitura mais estrita, a lógica modal se preocupa com a possibilidade e a necessidade. Uma diversidade de símbolos diferentes pode ser desenvolvida para tais lógicas utilizando **K** como fundamento. Os símbolos de **K** incluem ' \sim ' para 'não', ' \rightarrow ' para 'se...então', e ' \square ' para o operador modal 'é necessário que'. (Os conectivos '&', ' \vee ' e ' \leftrightarrow ' podem ser definidos a partir de ' \sim ' e ' \rightarrow ' como na lógica proposicional.) **K** resulta da adição aos princípios da lógica proposicional o seguinte.

Regra da Necessitação: Se A é um teorema de **K**, então $\square A$ também o é.

Axioma de Distribuição: $\square(A \rightarrow B) \rightarrow (\square A \rightarrow \square B)$

(Nesses princípios utilizamos ' A ' e ' B ' como metavariáveis sobre fórmulas da linguagem.) De acordo com a Regra da Necessitação, qualquer teorema da lógica é necessário. O Axioma da Distribuição diz que se é necessário que se A então B , então se necessariamente A então necessariamente B .

O operador \diamond (para 'possivelmente') pode ser definido a partir de \square tomando $\diamond A = \sim \square \sim A$. Em **K**, os operadores \square e \diamond comportam-se de forma muito semelhante aos

quantificadores \forall (todo) e \exists (algum). Por exemplo, a definição de \diamond a partir de \square reflete a equivalência de $\forall xA$ com $\sim\exists x\sim A$ na lógica de predicados. Por conseguinte, $\square(A\&B)$ implica $\square A\&\square B$ e vice-versa; enquanto $\square A\vee\square B$ implica $\square(A\vee B)$, mas *não* vice-versa. Isso reflete os padrões exibidos pelo quantificador universal: $\forall x(A\&B)$ implica $\forall xA\&\forall xB$ e vice-versa, enquanto $\forall xA\vee\forall xB$ implica $\forall x(A\vee B)$ mas não vice-versa. Paralelos similares entre \diamond e \exists podem ser traçados. A base para essa correspondência entre os operadores modais e os quantificadores irá emergir mais claramente na seção sobre Semântica de Mundos Possíveis.

O sistema **K** é muito fraco para prover uma explicação adequada da necessidade. O seguinte axioma não é demonstrável em **K**, mas é claramente desejável.

$$(M) \square A \rightarrow A$$

(M) enuncia que o que quer que seja necessário é o caso. Note que (M) seria incorreto se \square fosse lido 'deve ser o caso que' ou 'era o caso que'. Então a presença do axioma (M) distingue a lógica modal correspondente de outras lógicas na família modal. Uma lógica modal *M* resulta da adição de (M) a **K**. (Alguns autores chamam esse sistema de **T**.)

Muitos lógicos acreditam que *M* ainda é fraca demais para formalizar corretamente a lógica da necessidade e da possibilidade. Eles recomendam ulteriores axiomas para governar a iteração, ou repetição, dos operadores modais. Seguem os dois mais famosos axiomas de iteração:

$$(4) \square A \rightarrow \square\square A$$

$$(5) \diamond A \rightarrow \square\diamond A$$

S4 é o sistema que resulta de adicionar (4) a *M*. De forma similar, **S5** é *M* adicionado de (5). Em **S4**, a sentença $\square\square A$ é equivalente a $\square A$. Como resultado, qualquer cadeia de quadrados pode ser substituída por um único quadrado, e o mesmo ocorre para cadeias de losangos. Isso equivale à ideia de que a iteração de operadores modais é supérflua. Dizer que *A* é necessariamente necessário é considerada uma maneira inutilmente longa de dizer que *A* é necessário. O sistema **S5** possui princípios ainda mais fortes para simplificar cadeias de operadores modais. Em **S4**, uma cadeia de operadores *do mesmo tipo* pode ser substituída por aquele operador; em **S5**, cadeias contendo tanto quadrados quanto losangos são equivalentes

ao último operador na cadeia. Assim, por exemplo, dizer que é possível que A seja necessário é o mesmo que dizer que A é necessário. Segue um sumário dessas características de **S4** e **S5**.

$$\mathbf{S4}: \Box\Box\dots\Box = \Box \text{ e } \Diamond\Diamond\dots\Diamond = \Diamond$$

$$\mathbf{S5}: 00\dots\Box = \Box \text{ e } 00\dots\Diamond = \Diamond, \text{ onde cada } 0 \text{ é um } \Box \text{ ou um } \Diamond$$

Pode-se se engajar em infundáveis discussões sobre a correção ou incorreção desses e outros princípios de iteração para \Box e \Diamond . A controvérsia pode ser parcialmente resolvida pelo reconhecimento de que as palavras 'necessariamente' e 'possivelmente' possuem muitos usos diferentes. Então, a aceitabilidade dos axiomas da lógica modal depende de quais desses usos temos em mente. Por esse motivo, não há uma lógica modal, mas ao invés disso uma família inteira de sistemas construídos a partir de M . O relacionamento entre esses sistemas é diagramado na Seção 8, e sua aplicação a diferentes usos de 'necessariamente' e 'possivelmente' podem ser mais profundamente entendida estudando sua semântica de mundos possíveis na Seção 6.

O sistema **B** (em homenagem ao lógico Brouwer) é formado adicionando o axioma (B) a M .

$$(B) A \rightarrow \Box\Diamond A$$

É interessante notar que **S5** pode ser formulado de forma equivalente adicionando (B) a **S4**. O axioma (B) levanta um ponto importante sobre a interpretação das fórmulas modais. (B) diz que se A é o caso, então A é necessariamente possível. Pode-se sustentar que (B) deveria sempre ser adotado em qualquer lógica modal, pois certamente se A é o caso, então é necessário que A seja possível. Entretanto, há um problema com essa assertiva que pode ser exposto notando que $\Diamond\Box A \rightarrow A$ é demonstrável a partir de (B). Então $\Diamond\Box A \rightarrow A$ deveria ser aceitável se (B) o for. Todavia, $\Diamond\Box A \rightarrow A$ diz que se A é possivelmente necessário, então A é o caso, e isso está longe de ser óbvio. Por que (B) parece óbvio, enquanto uma de suas consequências parece não ser realmente óbvia? A resposta é que há uma ambiguidade perigosa na interpretação em português de $A \rightarrow \Box\Diamond A$. Frequentemente utilizamos a expressão 'Se A então necessariamente B ' para expressar que o condicional 'se A então B ' é necessário. Essa interpretação corresponde a $\Box(A \rightarrow B)$. Em outras ocasiões, queremos dizer que se A , então B é necessário: $A \rightarrow \Box B$. Em português, 'necessariamente' é um advérbio, e já que

advérbios são usualmente empregados próximos a verbos, não possuímos nenhuma maneira natural de indicar se o operador modal se aplica a todo o condicional, ou a seu conseqüente. Por tais motivos, há uma tendência de confundir $(B): A \rightarrow \Box \Diamond A$ com $\Box(A \rightarrow \Diamond A)$. Mas $\Box(A \rightarrow \Diamond A)$ não é o mesmo que (B) , pois $\Box(A \rightarrow \Diamond A)$ já é um teorema de M , enquanto (B) não o é. É preciso tomar um cuidado especial para que nossa reação positiva a $\Box(A \rightarrow \Diamond A)$ não afete nossa avaliação de (B) . Uma maneira simples de nos protegermos é formular B de maneira equivalente utilizando o axioma $\Diamond \Box A \rightarrow A$, onde essas ambigüidades de escopo não aparecem.

3 Lógicas Deônticas

As lógicas deônticas introduzem o símbolo primitivo O para 'é obrigatório que', a partir do qual os símbolos P para 'é permitido que' e F para 'é proibido que' são definidos: $PA = \sim O \sim A$ e $FA = O \sim A$. O análogo deôntico do axioma modal $(M): OA \rightarrow A$ é claramente não apropriado para a lógica deôntica. (Infelizmente, o que deve ser nem sempre é o caso). Entretanto, um sistema básico **D** de lógica deôntica pode ser interpretado adicionando o axioma mais fraco (D) a **K**.

$$(D) OA \rightarrow PA$$

O axioma (D) garante a consistência do sistema de obrigações insistindo que quando A é obrigatório, A é permissível. Um sistema que nos obriga a A , mas não nos permite fazê-lo, coloca-nos numa situação difícil. Apesar do fato de que alguns sustentarão que tais conflitos de obrigação são ao menos possíveis, a maioria dos lógicos deônticos aceita (D) .

$O(OA \rightarrow A)$ é outro axioma deôntico que parece desejável. Apesar de ser equivocado dizer que se A é obrigatório então A é o caso $(OA \rightarrow A)$, ainda assim, essa condicional *deveria* ser o caso. Alguns lógicos deônticos acreditam que D precisa ser suplementado com $O(OA \rightarrow A)$ também.

A controvérsia a respeito da iteração (repetição) de operadores surge novamente na lógica deôntica. Em algumas concepções de obrigação, OOA coincide com OA . 'deve ser o caso que deve ser o caso' é tratado como uma espécie de repetição desnecessária, os 'deve's' adicionais não adicionam nada de novo. Axiomas então são adicionados para garantir a equivalência entre OOA e OA . A política de iteração mais abrangente incorporada em **S5**

também pode ser adotada. Entretanto, há concepções de obrigação nas quais a distinção entre OA e OOA é preservada. A ideia é de que há diferença genuína entre as obrigações que nós *realmente* temos e as obrigações que nós *deveríamos* adotar. Então, por exemplo, 'deve ser o caso que deve ser o caso que A ' comanda a adoção de alguma obrigação que pode não estar de fato estabelecida, resultando no fato de que OOA pode ser verdadeiro mesmo quando OA é falso.

4 Lógicas Temporais

Na lógica temporal, há dois operadores básicos, G para o futuro, e H para o passado. G é lido 'será sempre o caso que' e o operador definido F (lido 'será o caso que') pode ser introduzido por $FA = \sim G\sim A$. De forma similar H é lido: 'sempre será o caso que' e P (para 'foi o caso que') é definido por $PA = \sim H\sim A$. Um sistema básico para lógica temporal chamado **Kt** resulta de adotar os princípios de **K** tanto para G quanto H , juntamente a dois axiomas para governar a interação entre os operadores do passado e do futuro:

Regras de “Necessitação”:

Se A é um teorema então GA e $HÁ$ também o são.

Axiomas de Distribuição:

$$G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB) \text{ e } H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$$

Axiomas de Interação:

$$A \rightarrow GPA \text{ e } A \rightarrow HFA$$

Os axiomas de interação levantam questões a respeito das assimetrias entre o passado e o futuro. Uma intuição padrão é a de que o passado está fixo, enquanto o futuro ainda está em aberto. O primeiro axioma de interação ($A \rightarrow GPA$) está em conformidade com essa intuição em relatar que o que é o caso agora (A), irá em todos os tempos futuros, estar no passado (GPA). Entretanto, $A \rightarrow HFA$ pode parecer possuir caráter inaceitavelmente determinista, pois afirma, aparentemente, que o que é verdade agora (A) sempre foi de tal

forma que irá ocorrer no futuro (*HFA*). Entretanto, a semântica de mundos possíveis para a lógica temporal revela que essa preocupação resulta de uma simples confusão, e que os dois axiomas de interação são igualmente aceitáveis.

Note que o axioma característico da lógica modal, (*M*): $\Box A \rightarrow A$, não é aceitável nem para *H* nem para *G*, já que *A* não se segue de 'sempre foi o caso que *A*', nem de 'sempre será o caso que *A*'. Entretanto, é aceitável numa lógica temporal aparentada na qual *G* é lido como 'é e sempre será o caso que', e *H* é lido como 'é e sempre foi o caso que'.

Dependendo de quais suposições são feitas a respeito da estrutura do tempo, axiomas ulteriores precisam ser adicionados às lógicas temporais. Segue-se uma lista de axiomas comumente adotados nas lógicas temporais. Uma explicação de como eles dependem da estrutura do tempo será encontrada na seção Semântica de Mundos Possíveis.

$$GA \rightarrow GGA \text{ e } HA \rightarrow HHA$$

$$GGA \rightarrow GA \text{ e } HHA \rightarrow HA$$

$$GA \rightarrow HA \text{ e } HA \rightarrow PA$$

É interessante notar que certas combinações de operadores de passado e futuro podem ser utilizadas para expressar sentenças complexas na língua portuguesa. Por exemplo, *FPA* corresponde à sentença *A* no futuro do presente composto do indicativo, (como em 'daqui a 20 segundos a iluminação terá mudado'). Similarmente, *PPA* expressa o pretérito-mais-que-perfeito.

5 Lógicas Condicionais

O fundador da lógica modal, C. I. Lewis, definiu uma série de lógicas modais que não possuíam \Box como símbolo primitivo. Lewis estava ocupado em desenvolver uma lógica dos condicionais que estivesse livre dos chamados Paradoxos da Implicação Material, a saber os teoremas clássicos $A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$ e $B \rightarrow (A \rightarrow B)$. Ele introduziu o símbolo \supset para “implicação estrita” e desenvolveu lógicas onde nem $A \supset (\sim A \supset B)$ nem $B \supset (A \supset B)$ são demonstráveis. A prática moderna tem sido a de definir $A \supset B$ como $\Box(A \rightarrow B)$, e usar as lógicas modais governando \Box para obter resultados similares. Entretanto, a

demonstrabilidade de fórmulas tais como $(A \& \sim A) \rightarrow B$ em tais lógicas parece ir de encontro à preocupação com os paradoxos. Anderson e Belnap (1975) desenvolveram os sistemas **R** e **E** (para Lógica Relevante) que foram desenvolvidas para superar tais dificuldades. Esses sistemas requerem a revisão dos sistemas padrão de lógica proposicional. (Para uma discussão mais detalhada da Lógica de Relevância, veja o verbete Lógica Relevante).

David Lewis (1973) desenvolveu lógicas condicionais especiais para lidar com expressões contrafatuais, isso é, expressões da forma 'se A acontecesse, então B aconteceria'. (Kvart (1980) é outro ótimo recurso sobre o tópico). Lógicas contrafatuais diferem daquelas baseadas na implicação estrita porque as primeiras rejeitam enquanto as últimas aceitam a contraposição.

6 Semântica de Mundos Possíveis

O propósito da lógica é caracterizar a diferença entre argumentos válidos e argumentos inválidos. Um sistema lógico para uma linguagem é um conjunto de axiomas e regras designado para demonstrar *exatamente* os argumentos válidos enunciáveis na linguagem. Criar tal lógica pode ser uma tarefa difícil. O lógico precisa ter certeza de que o sistema é *correto*, isto é, que cada argumento demonstrado utilizando as regras e axiomas é de fato válido. Além disso, o sistema precisa ser *completo*, isto é, cada argumento válido deve possuir uma demonstração no sistema. Verificar a correção e completude de sistemas formais é uma preocupação central dos lógicos.

Tal verificação não pode ser realizada até que o conceito de validade seja definido rigorosamente. As semânticas formais para uma lógica fornecem uma definição de validade caracterizando o comportamento da verdade das sentenças do sistema. Na lógica proposicional, a validade pode ser definida utilizando tabelas de verdade. Um argumento válido é simplesmente um argumento em que cada linha da tabela de verdade que torna suas premissas verdadeiras também torna sua conclusão verdadeira. Entretanto, tabelas de verdade não podem ser utilizadas para fornecer uma explicação da validade nas lógicas modais porque não há tabelas de verdade para expressões como 'é necessário que', 'é obrigatório que', e similares. (O problema é que o valor de verdade de *A* não determina o valor de verdade de

$\Box A$. Por exemplo, quando A é 'Cães são cães', $\Box A$ é verdadeira, mas quando A é 'Cães são animais de estimação', $\Box A$ é falsa.) Não obstante, semânticas para lógicas modais podem ser definidas introduzindo mundos possíveis. Iremos ilustrar a semântica de mundos possíveis para uma lógica da necessidade contendo os símbolos \sim , \rightarrow e \Box . Em seguida iremos explicar como a mesma estratégia pode ser adaptada para outras lógicas da família modal.

Na lógica proposicional, uma valoração para sentenças atômicas (ou uma linha na tabela de verdade) atribui um valor de verdade (V ou F) para cada variável proposicional p . Daí os valores de verdade das sentenças complexas são calculados com tabelas de verdade. Nas semânticas modais, um conjunto M de mundos possíveis é introduzido. Uma valoração então dá um valor de verdade para cada variável proposicional *em cada mundo possível* de M . Isso quer dizer que o valor atribuído a p para o mundo m pode diferir do valor atribuído a p para outro mundo m' .

O valor de verdade da sentença atômica p no mundo m dado pela valoração v pode ser escrito como $v(p, m)$. Dada esta notação, os valores de verdade (V para verdadeiro, F para falso) de sentenças complexas da lógica modal para uma dada valoração v (e o membro m do conjunto de mundos M) pode ser definida pelas seguintes cláusulas de verdade. ('sse' abrevia 'se somente se'.)

$$(\sim) v(\sim A, m) = V \text{ sse } v(A, m) = F.$$

$$(\rightarrow) v(A \rightarrow B, m) = V \text{ sse } v(A, m) = F \text{ ou } v(B, m) = V.$$

$$(5) v(\Box A, m) = V \text{ sse para cada mundo } m' \text{ em } M, v(A, m') = V.$$

As cláusulas (\sim) e (\rightarrow) simplesmente descrevem o comportamento padrão da tabela de verdade para a negação e a implicação material, respectivamente. De acordo com (5), $\Box A$ é verdadeiro (em um mundo m) exatamente quando A é verdadeiro em *todos* os mundos possíveis. Dada a definição de \Diamond , (a saber, $\Diamond A = \sim \Box \sim A$) a condição de verdade (5) garante que $\Diamond A$ é verdadeiro no caso de A ser verdadeiro em *algum* mundo possível. Já que as cláusulas de verdade para \Box e \Diamond envolvem os quantificadores 'todo' e 'algum' (respectivamente), os paralelos entre o comportamento lógico entre \Box e $\forall x$, e entre \Diamond e $\exists x$ ressaltados na Seção 2, são esperados.

As cláusulas (\sim), (\rightarrow) e (5) nos permitem calcular o valor de verdade de qualquer sentença em qualquer mundo possível numa dada valoração. Uma definição de validade está agora muito próxima. Um argumento é *5-válido para um dado conjunto* W (de mundos possíveis) se e somente se cada valoração das sentenças atômicas que atribui V às premissas num mundo em M também atribuem V à conclusão no mesmo mundo. Um argumento é dito *5-válido* sse é válido para cada conjunto não-vazio M de mundos possíveis.

Mostrou-se que **S5** é correto e completo para *5-validade* (por isso nosso uso do símbolo '5'). Os argumentos 5-válidos são exatamente os argumentos demonstráveis em **S5**. Esse resultado sugere que **S5** é a forma correta de formular uma lógica da necessidade.

Entretanto, **S5** não é uma lógica razoável para todos os membros da família modal. Na lógica deôntica, na lógica temporal, e outras, o análogo da condição de verdade (5) claramente não é apropriado; além disso há até mesmo outras concepções de necessidade para as quais (5) também deveria ser rejeitada. O ponto é mais fácil de entender no caso da lógica temporal. Aqui, os membros de M são momentos do tempo, ou mundos “congelados”, por assim dizer, em um instante. Por questões de simplicidade vamos considerar uma lógica temporal *do futuro*, uma lógica onde $\Box A$ é lido '*será sempre o caso que*'. (Formulamos o sistema usando \Box ao invés do tradicional G para que as conexões com outras lógicas modais sejam mais facilmente apreciadas.) A cláusula correta para \Box deveria dizer que $\Box A$ é verdadeira no momento m sse A é verdadeiro em todos os momentos *no futuro de* m . Para restringir a atenção ao futuro, a relação R (pRecedência temporal) precisa ser introduzida. Assim, a cláusula correta pode ser formulada como se segue.

$$(K) v(\Box A, m) = V \text{ sse para cada } m', \text{ se } mRm', \text{ então } v(A, m') = V.$$

Isso diz que $\Box A$ é verdadeira em m somente no caso de A ser verdadeira em todos os momentos *depois de* m .

A validade para este tipo de lógica temporal pode agora ser definida. Um *enquadramento* $\langle M, R \rangle$ é um par consistindo de um conjunto não-vazio M (de mundos) e uma relação binária R em M . Um *modelo* $\langle E, v \rangle$ consiste num enquadramento E , e uma valoração v que atribui valores de verdade a cada sentença atômica em cada mundo de M . Dado um modelo, os valores de todas as sentenças complexas podem ser determinados utilizando (\sim), (\rightarrow) e (K). Um argumento é **K-válido** caso cada valoração das sentenças atômicas que atribui

V às premissas num mundo também atribui V à conclusão no mesmo mundo. Como o leitor pode ter adivinhado a partir do nosso uso de ‘**K**’, mostrou-se que a lógica modal mais simples **K** é tanto correta quanto completa para **K**-validade.

7 Axiomas Modais e Condições sobre Enquadramentos

Pode-se assumir nesta discussão que **K** é a lógica correta quando o \Box é lido como ‘será sempre o caso que’. Entretanto, há razões para pensar que **K** seja fraca demais. Uma característica lógica óbvia da relação R (pRecedência temporal) é a transitividade. Se wRv (w precede temporalmente v) e vRu (v precede temporalmente u), então se segue que wRu (w precede temporalmente u). Vamos definir então um novo tipo de validade que corresponde a essa condição sobre R . Seja um *4-modelo* qualquer modelo cujo enquadramento $\langle M, R \rangle$ é tal que R é uma relação transitiva em M . Então um argumento é 4-válido sse todo 4-modelo cuja valoração atribui V às premissas em um mundo também atribui V à conclusão no mesmo mundo. Usamos ‘4’ para descrever tal modelo transitivo porque a lógica que é adequada (tanto correta quanto completa) para 4-validade é **K4**, a lógica que resulta da adição do axioma (4): $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ a **K**.

A transitividade não é a única propriedade que poderíamos querer exigir do enquadramento $\langle M, R \rangle$ se R é lido como ‘pRecedência temporal’ e M é um conjunto de momentos. Uma condição (que é apenas levemente controversa) é que não há um último momento no tempo, i.e. para cada mundo m há algum mundo n tal que mRn . Essa condição sobre os enquadramentos é chamada *serialidade*. A serialidade corresponde ao axioma (D): $\Box A \rightarrow \Diamond A$, da mesma maneira que a transitividade corresponde a (4). Um **D**-modelo é um **K**-modelo com um enquadramento serial. A partir do conceito de **D**-modelo a noção correspondente de **D**-validade pode ser definida, exatamente como fizemos no caso da 4-validade. Como você provavelmente adivinhou, o sistema que é adequado com relação à **D**-validade é **KD**, ou **K** adicionado de (D). Não apenas isso, mas o sistema **KD4** (isso é, **K** adicionado de (4) e (D)) é adequado a respeito da **D4**-validade, onde um **D4**-modelo é um modelo no qual $\langle M, R \rangle$ é serial e transitivo.

Outra propriedade que poderíamos desejar na relação de precedência temporal é a densidade, a condição que diz que entre dois momentos quaisquer, podemos sempre encontrar

outro. A densidade seria falsa se o tempo fosse atômico, isto é, se houvesse intervalos de tempo que não pudessem ser divididos em partes menores. A densidade corresponde ao axioma (C4): $\Box\Box A \rightarrow \Box A$, a recíproca de (4). Então, por exemplo, o sistema **KC4**, o qual corresponde a **K** adicionado de (C4), é adequado com relação aos modelos cujo enquadramento $\langle M, R \rangle$ é denso, e **KDC4**, adequado a respeito dos modelos cujos enquadramentos são seriais e densos, e assim por diante.

Cada um dos axiomas da lógica modal que discutimos anteriormente corresponde da mesma maneira a uma condição sobre os enquadramentos. O relacionamento entre condições sobre os enquadramentos e os axiomas correspondentes é um dos tópicos centrais no estudo das lógicas modais. Uma vez que a interpretação do operador intensional \Box foi decidida, as condições apropriadas sobre R podem ser determinadas para se ajustarem às correspondentes noções de validade. Por sua vez, isto nos permite selecionar o conjunto certo de axiomas para aquela lógica.

Por exemplo, considere uma lógica deôntica, na qual \Box é lido como ‘é obrigatório que’. Aqui a verdade de $\Box A$ não requer a verdade de A em *todos* os mundos possíveis, mas apenas num subconjunto desses mundos onde as pessoas fazem o que devem. Então também desejaremos introduzir a relação R para este tipo de lógica, e iremos utilizar a cláusula de verdade (K) para avaliar $\Box A$ em um mundo. Entretanto, nesse caso, R não é ‘precedência temporal’. Ao invés disso, mRm' vale caso o mundo m' seja uma variante moralmente aceitável de m , isto é, um mundo no qual nossas ações podem realizar o que é moralmente correto, ou certo, ou justo. Sob tal leitura, seria para ficar claro que os enquadramentos relevantes deveriam obedecer à serialidade, a condição que requer que cada mundo possível possua uma variante moralmente aceitável. A análise das propriedades desejadas para R torna claro que uma lógica deôntica básica pode ser formulada adicionando o axioma (D) a **K**.

Mesmo na lógica modal, pode-se desejar restringir o leque de mundos possíveis que são relevantes para determinar se $\Box A$ é verdadeiro num dado mundo. Por exemplo, posso dizer que é necessário para mim pagar minhas contas, mesmo que eu saiba perfeitamente que há um mundo possível no qual eu falho em pagá-las. No discurso ordinário, a assertiva de que A é necessário não requer a verdade de A em *todos* os mundos possíveis, mas apenas numa subclasse de mundos que eu tenho em mente (por exemplo, mundos onde evito as sanções por falhar em pagar as contas). Para fornecer um tratamento genérico da necessidade, precisamos

Neste diagrama, os sistemas são dados pela lista de seus axiomas. Assim, por exemplo, **M4B** é o resultado de adicionar (*M*), (4) e (*B*) a **K**. Em negrito, indicamos os nomes tradicionais de alguns desses sistemas. Quando o sistema **S** aparece abaixo e/ou à esquerda de **S'** conectado por uma linha, então **S'** é uma extensão de **S**. Isso significa que cada argumento demonstrável em **S** é demonstrável em **S'**, mas **S** é mais fraco que **S'**, i.e. nem todos os argumentos demonstráveis em **S'** são demonstráveis em **S**.

A lista a seguir indica os axiomas, seus nomes, e as correspondentes condições sobre a relação de acessibilidade *R* para os axiomas até agora discutidos neste verbete da enciclopédia.

Nome	Axioma	Condição sobre os Enquadramentos	R é...
(<i>D</i>)	$\Box A \rightarrow \Diamond A$	$\exists u mRo$	Serial
(<i>M</i>)	$\Box A \rightarrow A$	mRm	Reflexiva
(4)	$\Box A \rightarrow \Box \Box A$	$(mRn \& nRo) \Rightarrow mRo$	Transitiva
(<i>B</i>)	$A \rightarrow \Box \Diamond A$	$mRn \Rightarrow nRm$	Simétrica
(5)	$\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$	$(mRn \& mRo) \Rightarrow nRo$	Euclidiana
(<i>CD</i>)	$\Diamond A \rightarrow \Box A$	$(mRn \& mRo) \Rightarrow n=o$	Funcional
($\Box M$)	$\Box(\Box A \rightarrow A)$	$mRn \Rightarrow nRn$	Reflexiva Deslocada
(<i>C4</i>)	$\Box \Box A \rightarrow \Box A$	$mRn \Rightarrow \exists o(mRo \& oRn)$	Densa
(<i>C</i>)	$\Diamond \Box A \rightarrow \Box \Diamond A$	$mRn \& mRp \Rightarrow \exists o(nRo \& pRo)$	Convergente

Na lista de condições sobre os enquadramentos, as variáveis '*m*', '*n*', '*o*', '*p*' e o quantificador ' $\exists o$ ' têm como domínio *M*. '&' abrevia 'e' e ' \Rightarrow ' abrevia 'se...então'.

A noção de correspondência entre os axiomas e condições sobre enquadramentos que está em questão aqui foi explicada na seção anterior. Quando S é uma lista de axiomas e $F(S)$ é o conjunto correspondente de condições sobre enquadramentos, então S corresponde a $F(S)$ precisamente quando o sistema $K+S$ é adequado (correto e completo) para $F(S)$ -validade, isso é, um argumento é demonstrável em $K+S$ sse ele é $F(S)$ -válido. Várias noções mais fortes de correspondência entre axiomas e condições sobre enquadramentos emergiram da pesquisa sobre lógica modal.

9 O Axioma Geral

A correspondência entre axiomas e condições sobre enquadramentos pode parecer um mistério. Um belo resultado de Lemmon e Scott (1977) explica muito bem esse relacionamento. O teorema deles diz respeito aos axiomas que possuem a seguinte forma:

$$(G) \diamond^h \square^i A \rightarrow \square^j \diamond^k A$$

Utilizamos a notação ‘ \diamond^n ’ para representar uma cadeia de n losangos. Assim, por exemplo, ‘ \diamond^3 ’ abrevia uma cadeia de três losangos: ‘ $\diamond\diamond\diamond$ ’. De forma similar, ‘ \square^n ’ representa uma cadeia de n quadrados. Quando os valores de h, i, j e k são todos 1, temos o axioma (C):

$$(C) \diamond \square A \rightarrow \square \diamond A = \diamond^1 \square^1 A \rightarrow \square^1 \diamond^1 A$$

O axioma (B) resulta de atribuir 0 a h e a i , e atribuir 1 a j e a k :

$$(B) A \rightarrow \square \diamond A = \diamond^0 \square^0 A \rightarrow \square^1 \diamond^1 A$$

Para obter (4), podemos atribuir 0 a h e a k , atribuir 1 a i e 2 a j :

$$(4) \square A \rightarrow \square \square A = \diamond^0 \square^1 A \rightarrow \square^2 \diamond^0 A$$

Muitos (mas não todos) os axiomas da lógica modal podem ser obtidos dando os valores corretos aos parâmetros em (G).

Nossa próxima tarefa será dar as condições sobre enquadramentos que correspondem a (G) para uma dada seleção de valores para h, i, j e k . Para fazê-lo, vamos precisar de uma

definição. A composição de duas relações R e R' é uma relação $R \circ R'$ que é definida como se segue:

$$mR \circ R' v \text{ sse para algum } u, mRu \text{ e } uR'v.$$

Por exemplo, se R é a relação de ser um irmão, e R' é a relação de ser um pai ou mãe, então $R \circ R'$ é a relação de ser um tio ou tia, (pois m é o tio de v sse para alguma pessoa u , é o caso que m é o irmão de u e u é pai ou mãe de v). Uma relação pode ser composta consigo própria. Por exemplo, quando R é a relação de ser um pai ou mãe, então $R \circ R$ é a relação de ser um avô ou avó, e $R \circ R \circ R$ é a relação de ser um bisavô ou bisavó. Será útil escrever ' R^n ', para o resultado de compor R consigo própria n vezes. Então R^2 é $R \circ R$, e R^4 é $R \circ R \circ R \circ R$. Vamos considerar que R^1 é R e R^0 é a relação de identidade, isto é, $mR^0 v$ sse $m=v$.

Podemos agora enunciar o resultado de Scott-Lemmon. Ele nos diz que a condição sobre enquadramentos que corresponde exatamente a um axioma arbitrário da forma (G) é a seguinte.

$$(hijk\text{-Convergência}) mR^h v \ \& \ mR^i u \Rightarrow \exists x (vR^j x \ \& \ uR^k x)$$

É interessante notar como as condições familiares em R resultam de se atribuir valores para h, i, j e k de acordo com os valores no axioma correspondente. Por exemplo, considere (5). Nesse caso $i=0$, e $h=j=k=1$. Assim, a condição correspondente é

$$mRv \ \& \ mRu \Rightarrow \exists x (vR^0 x \ \& \ uRx).$$

Explicamos que R^0 é a relação de identidade. Assim, se $vR^0 x$ então $v=x$. Mas $\exists x (v=x \ \& \ uRx)$, é equivalente a uRv , e desta forma a condição Euclidiana é obtida:

$$(wRv \ \& \ wRu) \Rightarrow uRv$$

No caso do axioma (4), $h=0$, $i=1$, $j=2$ e $k=0$. Assim a correspondente condição sobre o enquadramento é

$$(m=v \ \& \ mR^2 u) \Rightarrow \exists x (vRx \ \& \ u=x).$$

Resolvendo as identidades obtemos:

$$vR^2 u \Rightarrow vRu$$

Pela definição de R^2 , vR^2u sse $\exists x (vRx \ \& \ xRu)$, então isso leva a:

$$\exists x(vRx \ \& \ xRu) \Rightarrow vRu,$$

o que pela lógica de predicados, é equivalente à transitividade.

$$vRx \ \& \ xRu \Rightarrow vRu.$$

O leitor pode achar um exercício apazível verificar como as condições correspondentes saem da *hijk*-Convergência quando os valores dos parâmetros *h*, *i*, *j* e *k* são dados por outros axiomas.

Os resultados de Scott-Lemmon fornecem um método rápido para estabelecer resultados sobre o relacionamento entre os axiomas e as correspondentes condições sobre os enquadramentos. Dado que eles mostraram a adequação de qualquer lógica que estende **K** pela adição de uma combinação de axiomas da forma (*G*) com relação aos modelos que satisfazem o conjunto correspondente de condições sobre os enquadramentos, eles forneceram demonstrações de adequação “no atacado” para a maioria dos sistemas na família modal. Sahlqvist (1975) descobriu generalizações importantes do resultado de Scott-Lemmon, cobrindo um escopo muito mais amplo de axiomas.

10 Lógicas da demonstrabilidade

A lógica modal foi útil para clarificar nosso entendimento de resultados centrais a respeito da demonstração nos fundamentos da matemática (Boolos, 1993). As lógicas da demonstrabilidade são sistemas onde as variáveis proposicionais *p*, *q*, *r*, etc. dizem respeito a fórmulas de algum sistema matemático, por exemplo, o sistema **PA** de Peano para a aritmética. (O sistema escolhido para a matemática pode variar, mas assuma que é **PA** para essa discussão). Gödel mostrou que a aritmética possui forte capacidade expressiva. Utilizando códigos numéricos para sentenças aritméticas, ele foi capaz de demonstrar uma correspondência entre sentenças da matemática e fatos sobre quais sentenças são e quais não são demonstráveis em **PA**. Por exemplo, ele demonstrou que há uma sentença *C* que é verdadeira exatamente quando nenhuma contradição é demonstrável em **PA** e há uma

sentença C (a famosa sentença de Gödel) que é verdadeira exatamente quando ela não é demonstrável em \mathbf{PA} .

Nas lógicas da demonstrabilidade, $\Box p$ é interpretada como uma fórmula (da aritmética) que expressa que o que p denota é demonstrável em \mathbf{PA} . Usando essa notação, as sentenças das lógicas da demonstrabilidade expressam fatos sobre demonstrabilidade. Suponha que $\Box\Box$ seja uma constante na lógica da demonstrabilidade denotando uma contradição. Então $\sim\Box\Box$ diz que \mathbf{PA} é consistente e $\Box A \rightarrow A$ diz que \mathbf{PA} é correto no sentido de que quando \mathbf{PA} demonstra A , A é de fato verdadeira. Por conseguinte, o quadrado pode ser iterado. Assim, por exemplo, $\Box\sim\Box\Box$ faz a dúvida a asserção de que \mathbf{PA} é capaz de demonstrar sua própria consistência, e $\sim\Box\Box \rightarrow \sim\Box\sim\Box\Box$ afirma (corretamente como Gödel provou) que se \mathbf{PA} é consistente então \mathbf{PA} é incapaz de demonstrar sua própria consistência.

Apesar das lógicas da demonstrabilidade formarem uma família de sistemas aparentados, o sistema \mathbf{GL} é de longe o mais conhecido. Ele resulta de adicionar o seguinte axioma a \mathbf{K} :

$$(GL) \Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$$

O axioma (4): $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ é demonstrável em \mathbf{GL} , portanto \mathbf{GL} é na verdade mais forte que $\mathbf{K4}$. Entretanto, axiomas como (M): $\Box A \rightarrow A$, e mesmo o mais fraco (D): $\Box A \rightarrow \Diamond A$ não estão disponíveis (nem são desejáveis) em \mathbf{GL} . Na lógica da demonstrabilidade, a demonstrabilidade não deve ser tratada como uma forma de necessidade. O motivo é que quando p é demonstrável em um sistema arbitrário para a matemática \mathbf{S} , não se segue que p seja verdadeiro, já que \mathbf{S} pode ser incorreto. Além disso, se p é demonstrável em \mathbf{S} ($\Box p$) não precisa nem mesmo seguir-se disso que $\sim p$ não possua uma demonstração ($\sim\Box\sim p = \Diamond p$). \mathbf{S} pode ser inconsistente e portanto demonstrar tanto p quanto $\sim p$.

O axioma (GL) captura o conteúdo do Teorema de Loeb, um resultado importante nos fundamentos da aritmética. $\Box A \rightarrow A$ diz que \mathbf{PA} é correto para A , isto é, que se A fosse demonstrada, A seria verdadeira. (Tal assertiva poderia não estar assegurada para um sistema \mathbf{S} arbitrariamente escolhido, já que A poderia ser demonstrável em \mathbf{S} e ser falsa.) (GL) afirma que se \mathbf{PA} consegue demonstrar a sentença que postula a correção para uma dada sentença A , então A já é demonstrável em \mathbf{PA} . O Teorema de Loeb denuncia um certo tipo de modéstia por parte de \mathbf{PA} (Boolos, 1993, p. 55). \mathbf{PA} nunca insiste (demonstra) que uma demonstração

de A implica na verdade de A , a não ser que **PA** já possua uma demonstração de A para dar suporte a tal afirmação.

Já foi demonstrado que **GL** é adequado para a demonstrabilidade no seguinte sentido. Digamos que uma sentença **GL** é *sempre demonstrável* exatamente quando a sentença da aritmética que ela denota é demonstrável, não importando quais valores são atribuídos às sentenças de **PA**. Então as sentenças demonstráveis de **GL** são exatamente as sentenças que são sempre demonstráveis. Esse resultado de adequação tem sido extremamente útil, já que questões gerais a respeito da demonstrabilidade em **PA** podem ser transformadas em questões mais fáceis sobre o que pode ser demonstrado em **GL**.

GL também pode ser caracterizada com uma semântica de mundos possíveis correta e completa. Uma condição correspondente sobre o enquadramento para caracterizar **GL**-validade é a de que o enquadramento seja transitivo, finito e irreflexivo.

11 Lógica Modal Avançada

As aplicações da lógica modal à matemática e à ciência da computação têm crescido em importância. A lógica da demonstrabilidade é apenas um exemplo dessa tendência. O termo “lógica modal avançada” se refere a uma tradição em pesquisa na lógica modal que é particularmente bem representada em departamentos de matemática e ciência da computação. Essa tradição tem se entrelaçado à história da lógica modal desde seu início (Goldblatt, 2006). A pesquisa sobre seus relacionamentos com topologia e álgebras representa alguns dos primeiros trabalhos técnicos em lógica modal. Entretanto, o termo ‘lógica modal avançada’ geralmente se refere a um segundo campo de trabalho desenvolvido desde a metade dos anos 70. Alguns exemplos dos muitos tópicos interessantes tratados neste campo incluem resultados sobre a decidibilidade (se é possível computar se uma fórmula de um dado sistema modal é um teorema) e complexidade (os custos em tempo e memória necessários para computar tais fatos sobre lógicas modais).

12 Bissimulação

A Bissimulação fornece um bom exemplo das relações frutíferas que foram desenvolvidas entre a lógica modal e a ciência da computação. Na ciência da computação, Sistemas de Transição Rotulados (STRs) são comumente utilizados para representar vias computacionais possíveis durante a execução de um programa. STRs são generalizações dos enquadramentos de Kripke, consistindo de um conjunto M de estados, e uma coleção de relações de i -acessibilidade R_i , uma para cada processo computacional i . Intuitivamente, $mRim'$ vale exatamente quando m' é um estado que resulta da aplicação do processo i ao estado m .

A linguagem da lógica polimodal ou dinâmica introduz uma coleção de operadores modais \Box_i , um para cada programa i (Harel, 1984). Nesse caso, $\Box_i A$ afirma que a sentença A vale em toda execução do processo i . Assim ideias como a corretude e a terminação bem-sucedida de programas podem ser expressadas nesta linguagem. Modelos para uma tal linguagem são como os modelos de Kripke, exceto que STRs são usados no lugar de enquadramentos. Uma *bissimulação* é uma relação de contraparte entre estados de dois desses modelos tal que exatamente as mesmas variáveis proposicionais são verdadeiras em estados contrapartes, e sempre que o mundo n é i -acessível a um dos estados contrapartes, então a outra contraparte possui a relação de i -acessibilidade a alguma contraparte de n . Em resumo, a estrutura de i -acessibilidade que alguém pode “ver” a partir de um dado estado imita o que se vê a partir de uma contraparte deste estado. A Bissimulação é uma noção mais fraca que o isomorfismo (uma relação de bissimulação não precisa ser bijetiva), mas é suficiente para garantir equivalência em termos de processamento.

Na década de 70, uma versão da bissimulação já havia sido desenvolvida por lógicos modais para ajudar a entender melhor o relacionamento entre axiomas de lógica modal e as condições correspondentes sobre os enquadramentos de Kripke. A semântica de Kripke fornece uma base para traduzir axiomas modais em sentenças de uma linguagem de segunda ordem na qual a quantificação é permitida sob letras predicativas P com um argumento. Substitua as metavariables A por sentenças abertas Px , traduza $\Box Px$ como $\Box y(Rxy \rightarrow Py)$, e feche as variáveis livres x e as letras predicativas unárias P com quantificadores universais. Por exemplo, a tradução na lógica de predicados do axioma esquemático $\Box A \rightarrow A$ é $\Box P \Box x [\Box y (Rxy \rightarrow Py) \rightarrow Px]$. Dada esta tradução, é possível instanciar a variável P por um predicado unário arbitrário, por exemplo o predicado Rx cuja extensão é o conjunto de todos os mundos

m tais que Rxm para um dado valor de x . Daí é possível obter $\Box x[\Box y(Rxy \rightarrow Rxy) \rightarrow Rxx]$, o que se reduz a $\Box xRxx$, já que $\Box y(Rxy \rightarrow Rxy)$ é uma tautologia. Isso ilumina a correspondência entre $\Box A \rightarrow A$ e a reflexividade dos enquadramentos ($\Box xRxx$). Resultados similares valem para muitos outros axiomas e condições de enquadramento. O “colapso” das condições axiomáticas de segunda-ordem em termos de condições de primeira-ordem sobre enquadramentos é muito útil para obter resultados de completude para lógicas modais. Por exemplo, essa é a ideia central por trás dos elegantes resultados de Sahlqvist (1975).

Mas quando é que a tradução em segunda ordem de um axioma se reduz desta maneira a uma condição de primeira ordem sobre R ? Na década de 70, van Benthem mostrou que isso acontece sse a validade da tradução em um modelo implica na sua validade em qualquer modelo bissimilar, onde dois modelos são bissimilares sse há uma bissimulação entre eles no caso especial no qual há uma única relação de acessibilidade. Esse resultado é generalizado facilmente para o caso polimodal (van Benthem 1996, p. 88). Isso sugere que a lógica polimodal está no nível exato de abstração para descrever, e raciocinar sobre, a computação e outros processos. (Afim de contas, o que realmente importa ali é a preservação dos valores de verdade das fórmulas em modelos, ao invés de detalhes mais sofisticados sobre a estrutura dos enquadramentos.) Além disso a tradução implícita dessas lógicas em termos de fragmentos bem compreendidos da lógica de predicados fornece uma riqueza de informações de interesse para a ciência da computação. Como resultado, uma frutífera área de pesquisa na ciência da computação tem sido desenvolvida tendo a bissimulação como sua ideia central (Ponse *et al.* 1995).

13 Quantificadores na Lógica Modal

Pareceria uma questão simples introduzir os quantificadores \Box (todo) e \Diamond (algum) na lógica modal. Poder-se-ia simplesmente adicionar as regras padrão (clássicas) para quantificadores aos princípios de qualquer lógica proposicional modal. Entretanto, a introdução de quantificadores em lógica modal envolve certas dificuldades. Algumas dessas são filosóficas. Por exemplo, Quine (1953) notoriamente sustentou que a quantificação em contextos modais é simplesmente incoerente, uma visão que originou uma gigantesca literatura. As reclamações de Quine já não carregam o peso que carregavam. (Veja Barcan

1990 para um bom resumo.) Não obstante, a visão de que há algo errado em “quantificar-se em” é ainda vastamente compartilhada. Um segundo tipo de complicação é técnico. Há uma grande variedade de escolhas que se pode fazer na semântica para lógicas modais quantificadas, e a demonstração de que um sistema de regras é apropriado para uma dada escolha pode ser difícil. Os trabalhos de Corsi (2002) e Garson (2005) avançam em direção a trazer unidade neste terreno, mas a situação permanece desafiadora.

Uma outra complicação é a de que alguns lógicos acreditam que a modalidade requer abandonar as regras de quantificação clássica em prol das regras mais fracas da lógica livre (Garson 2001). Os principais pontos de divergência no que diz respeito às regras de quantificação podem ser de fato ligados às decisões sobre como lidar com o domínio de quantificação. A alternativa mais simples, a abordagem do domínio fixo (às vezes chamada de possibilista), assume um domínio único de quantificação que contém todos os objetos possíveis. Por outro lado, a interpretação relativa ao mundo (ou atualista) assume que o domínio da quantificação muda de mundo para mundo, e contém apenas os objetos que são atuais em um dado mundo.

A abordagem do domínio fixo não requer grandes ajustes no maquinário clássico dos quantificadores. As lógicas modais que são adequadas para uma semântica de domínio fixo podem normalmente ser axiomatizadas adicionando princípios de uma lógica modal proposicional às regras clássicas de quantificação, juntamente com a Fórmula de Barcan (*BF*) (Barcan 1946). (Para uma explicação de algumas exceções interessantes ver Cresswell (1995)).

$$(BF) \quad \Box x \Box A \rightarrow \Box \Box x A.$$

A interpretação do domínio fixo possui as vantagens da simplicidade e familiaridade, mas não fornece uma explicação direta da semântica de certas expressões quantificadas da linguagem natural. Nós não pensamos que ‘Existe um homem que assinou a Declaração de Independência dos EUA’ seja verdadeira, pelo menos não se lermos ‘existe’ no tempo presente. Não obstante, essa sentença foi verdadeira em 1777, o que mostra que o domínio para a expressão da linguagem natural ‘Existe um homem que’ muda para refletir quais homens existem em diferentes tempos. Um problema relacionado é o de que na interpretação do domínio fixo, a sentença $\Box y \Box \Box x (x=y)$ é válida. Entretanto, assumindo que $\Box x (x=y)$ seja

lido como: ‘y existe’, então $\Box y \Box x(x=y)$ diz que tudo existe necessariamente. No entanto, parece ser uma característica fundamental das ideias mais comuns sobre a modalidade que a existência de muitas coisas é contingente, e que diferentes objetos existem em diferentes mundos possíveis.

O defensor da interpretação do domínio fixo pode responder a essas objeções insistindo que em sua leitura dos quantificadores o domínio da quantificação contém *todos* os objetos possíveis, não apenas os objetos que existem num dado mundo. Assim o teorema $\Box y \Box x(x=y)$ faz a assertiva inócua de que todo objeto *possível* é necessariamente encontrado no domínio de todos os objetos possíveis. Além disso, as expressões quantificadas da linguagem natural cujo domínio é relativo ao mundo (ou momento) podem ser expressadas utilizando o quantificador de domínio fixo $\Box x$ e uma letra predicativa E com a leitura ‘atualmente existe’. Por exemplo, ao invés de traduzir ‘Existe algum Homem que Assinou a Declaração de Independência dos EUA’ por

$$\Box x(Hx \ \& \ Ax)$$

O defensor dos domínios fixos pode escrever:

$$\Box x(Ex \ \& \ Hx \ \& \ Ax),$$

assegurando assim que a tradução é falsa no tempo presente. Cresswell (1991) faz a interessante observação de que a quantificação relativa ao mundo possui poder expressivo limitado em relação à quantificação de domínio fixo. A quantificação relativa ao mundo pode ser definida com quantificadores de domínio fixo e E , mas não há maneira de expressar plenamente quantificadores de domínio fixo com quantificadores relativos ao mundo. Apesar disso argumentar a favor da abordagem clássica para a lógica modal quantificacional, a tática de tradução também aponta para algo como uma concessão em prol da lógica livre, pois os quantificadores relativos ao mundo assim definidos obedecem exatamente às regras da lógica livre.

Um problema com a estratégia de tradução utilizada por defensores da quantificação de domínio fixo é que interpretar a linguagem natural na lógica é algo menos direto, já que E precisa ser adicionado a todas as traduções de todas as sentenças cujas expressões quantificadas possuem domínios dependentes do contexto. Uma objeção mais séria à

quantificação de domínio fixo é que ela retira do quantificador um papel que Quine recomendou para ele, a saber, representar um comprometimento ontológico robusto. Nesta visão, o domínio de $\Box x$ precisa conter apenas entidades que são ontologicamente respeitáveis, e objetos possíveis são abstratos demais para assim merecer tal qualificação. Atualistas desta estirpe vão querer desenvolver a lógica de um quantificador $\Box x$ que reflete comprometimento com o que é atual em um dado mundo, ao invés do que é meramente possível.

Entretanto, os trabalhos recentes sobre o atualismo tendem a solapar tal objeção. Por exemplo, Linsky e Zalta (1994) sustentam que ao quantificador de domínio fixo pode ser dada uma interpretação que é perfeitamente aceitável aos atualistas. Atualistas que empregam semânticas de mundos possíveis rotineiramente quantificam sobre mundos possíveis em sua teoria semântica da linguagem. Pareceria então que mundos possíveis são atuais à luz do atualismo. Povoando o domínio com entidades abstratas não mais objetáveis que as aceitas pelos atualistas, Linsky e Zalta mostram que a Fórmula de Barcan e os princípios clássicos podem ser justificados. Note, entretanto, que atualistas podem responder que não estão comprometidos com a atualidade dos mundos possíveis dado que é entendido que os quantificadores utilizados em suas teorias da linguagem carecem de forte comprometimento ontológico. De qualquer forma, é uma questão aberta para os atualistas (e não atualistas também) investigar a lógica dos quantificadores com domínios mais robustos, por exemplo domínios excluindo mundos possíveis e outras entidades abstratas do gênero, e contendo apenas os particulares espaço-temporais encontrados num dado mundo. Para quantificadores desse tipo, domínios relativos ao mundo são apropriados.

Tais considerações motivam interesse nos sistemas que reconhecem a dependência do contexto na quantificação pela introdução de domínios relativos ao mundo. Aqui cada mundo possível possui seu próprio domínio de quantificação (o conjunto de objetos que atualmente existem no mundo), e os domínios variam de um mundo para o outro. Quando tal decisão é feita, surge uma dificuldade para a teoria clássica da quantificação. Note que a sentença $\Box x(x=t)$ é um teorema da lógica clássica, e portanto $\Box \Box x(x=t)$ é um teorema de **K** pela Regra da Necessitação. Suponha que o termo t denote Saul Kripke. Então o teorema anterior diz que é necessário que Saul Kripke exista, e portanto que ele está no domínio de cada mundo possível. Toda a motivação da abordagem relativa ao mundo era a de refletir a ideia de que objetos em um mundo podem não existir em outro mundo. Se as regras de quantificação

padrão são utilizadas, entretanto, cada termo t precisa se referir a algo que exista em todos os mundos possíveis. Isso parece incompatível com nossa prática ordinária de usar termos para nos referirmos a coisas que existem apenas contingentemente.

Uma resposta a essa dificuldade é simplesmente eliminar termos. Kripke (1963) deu um exemplo de um sistema que usa interpretação relativa ao mundo e preserva as regras clássicas. Entretanto, os custos são pesados. Primeiramente, a sua linguagem é artificialmente empobrecida, e em segundo lugar, as regras para a lógica modal proposicional precisam ser enfraquecidas.

Presumindo que desejamos uma linguagem que inclui termos, e que regras clássicas sejam adicionadas aos sistemas tradicionais da lógica modal proposicional, um novo problema surge. Em tal sistema, é possível provar (CBF), a recíproca da Fórmula de Barcan.

$$(CBF) \Box\Box xA \rightarrow \Box x\Box A$$

Esse fato possui sérias consequências para a semântica dos sistemas. Não é difícil mostrar que todo modelo relativo ao mundo de (CBF) precisa cumprir a condição (ND) (de ‘Domínios aninhados’).

(ND) Se mRn então o domínio de m é um subconjunto do domínio de n .

Entretanto (ND) entra em conflito com a ideia de introduzir domínios relativos ao mundo. A ideia afinal era de que a existência de objetos é contingente e portanto há mundos possíveis acessíveis onde algumas coisas no nosso mundo não existem.

Uma solução direta para esses problemas é abandonar as regras clássicas dos quantificadores e ao invés disso adotar regras para lógica livre (FL). As regras de FL coincidem com as regras clássicas, com exceção de que as inferências de $\Box xRx$ (tudo é atual) para Rp (Pégaso é atual) são bloqueadas. Isso é feito introduzindo o predicado ‘ E ’ (de ‘atualmente Existe’) e modificando a regra da instanciação universal. De $\Box xRx$ é permitido obter Rp apenas se também já se obteve Ep . Assumindo que o quantificador universal $\Box x$ é primitivo, e o quantificador existencial $\Box x$ é definido por $\Box xA =_{df} \sim\Box x\sim A$, então FL pode ser construída adicionando os dois princípios seguintes às regras da lógica proposicional

Generalização Universal. Se $B \rightarrow A(y)$ é um teorema, então $B \rightarrow \Box xA(x)$ também o é.

Instanciação Universal. $(\Box x A(x) \ \& \ En) \rightarrow A(n)$

(Aqui é assumido que $A(x)$ é uma fórmula bem formada arbitrária da lógica de predicados, e que $A(y)$ e $A(n)$ resultam de substituir cada ocorrência de x em $A(x)$ por y e n , de forma apropriada.) Note que o princípio da generalização universal é padrão, mas que o axioma da instanciação é restrito pela menção de En no antecedente. Em **FL**, as demonstrações de fórmulas como $\Box x \Box (x=t)$, $\Box y \Box \Box x (x=y)$, (CBF) , e (BF) , que parecem incompatíveis com a interpretação relativa ao mundo, são bloqueadas.

Uma objeção filosófica a **FL** é que E parece ser um predicado de existência, e muitos iriam sustentar que a existência não é uma propriedade legítima como ser verde ou pesar mais que dois quilos. Assim, os filósofos que rejeitam a ideia de que a existência é um predicado podem objetar a **FL**. Contudo, na maioria (mas não todas) as lógicas modais quantificadas que incluem identidade (=) essas preocupações podem ser contornadas definindo E como se segue.

$$Et \text{ =}_{df} \Box x (x=t)$$

A maneira mais geral de formular a lógica modal quantificada é criar **FS** adicionando as regras de **FL** a uma dada lógica modal proposicional **S**. Nas situações onde a quantificação clássica é desejada, pode-se simplesmente adicionar Et como um axioma a **FS**, de modo que os princípios clássicos tornam-se regras deriváveis. Os resultados de adequação para tais sistemas podem ser obtidos para a maioria das escolhas da lógica modal **S**, mas há exceções.

Uma complicação final na semântica para lógica modal quantificada merece ser mencionada. Ela surge quando expressões não-rígidas tais como ‘o inventor das bifocais’ são introduzidas na linguagem. Um termo é não-rígido quando se refere a diferentes objetos em diferentes mundos possíveis. O valor semântico de tal termo pode ser dado pelo que Carnap (1947) chamou de conceito individual, uma função que escolhe a denotação de um termo para cada mundo possível. Uma abordagem para lidar com termos não-rígidos é empregar a teoria de Russell das descrições definidas. Entretanto, em uma linguagem que trata expressões não-rígidas como termos genuínos, acontece que nem as regras de quantificação da lógica clássica, nem as da lógica livre são aceitáveis. (O problema não pode ser resolvido enfraquecendo a regra da substituição pela identidade.) Uma solução para esse problema é empregar um tratamento mais geral dos quantificadores, no qual o domínio da quantificação contenha

conceitos individuais ao invés de objetos. Essa interpretação mais geral fornece um ajuste melhor entre o tratamento dos termos e o tratamento dos quantificadores e resulta em sistemas que são adequados para regras clássicas ou regras de lógica livre (dependendo da escolha entre domínios fixos ou domínios relativos ao mundo).

Bibliografia

Uma excelente bibliografia de fontes históricas pode ser encontrada em Hughes e Cresswell (1968).

- Anderson, A. e Belnap, N., 1975, 1992, *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol. 1 (1975), vol. 2 (1992), Princeton: Princeton University Press.
- Barcan (Marcus), R., 1947, “A Functional Calculus of First Order Based on Strict Implication,” *Journal of Symbolic Logic*, 11: 1-16.
- Barcan (Marcus), R., 1967, “Essentialism in Modal Logic,” *Noûs*, 1: 91-96.
- Barcan (Marcus), R., 1990, “A Backwards Look at Quine's Animadversions on Modalities,” in R. Bartrett and R. Gibson (eds.), *Perspectives on Quine*, Cambridge: Blackwell.
- Bencivenga, E., 1986, “Free Logics,” in D. Gabbay and F. Guenther (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, 3.6, Dordrecht: D. Reidel.
- Bentham, J. F. van, 1982, *The Logic of Time*, Dordrecht: D. Reidel.
- Bentham, J. F. van, 1983, *Modal Logic and Classical Logic*, Naples: Bibliopolis.
- Bentham, J. F. van, 1996, *Exploring Logical Dynamics*, Stanford: CSLI Publications.
- Blackburn, P., Rijke, M. de, and Venema, Y., 2001, *Modal Logic*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Blackburn, P., Bentham, J. van, e Wolter, F., 2006, *Handbook of Modal Logic*, Amsterdam: North Holland.
- Bonevac, D., 1987, *Deduction*, Part II, Palo Alto: Mayfield Publishing Company.
- Boolos, G., 1993, *The Logic of Provability*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Bull, R. e Segerberg, Krister, 1984, “Basic Modal Logic,” in Gabbay, D., and Guenther, F. (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*, 2.1, Dordrecht: D. Reidel.
- Carnap, R., 1947, *Meaning and Necessity*, Chicago: U. Chicago Press.
- Carnielli, W. e Pizzi, C., 2008, *Modalities and Multimodalities*, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Chagrov, A. e Zakharyashev, M., 1997, *Modal Logic*, Oxford: Oxford University Press.
- Chellas, Brian, 1980, *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge: Cambridge University Press.

- Cresswell, M. J., 2001, "Modal Logic", in L. Goble (ed.), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Oxford: Blackwell, 136-158.
- Cresswell, M. J., 1995, "Incompleteness and the Barcan formula", *Journal of Philosophical Logic*, 24: 379-403.
- Cresswell, M. J., 1991, "In Defence of the Barcan Formula," *Logique et Analyse*, 135-136: 271-282.
- Corsi, G, 2002, "A Unified Completeness Theorem for Quantified Modal Logics," *Journal of Symbolic Logic*, 67: 1483-1510.
- Fitting, M. e Mendelsohn, R., 1998, *First Order Modal Logic*, Dordrecht: Kluwer.
- Gabbay, D., 1976, *Investigations in Modal and Tense Logics*, Dordrecht: D. Reidel.
- Gabbay, D., 1994, *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects*, New York: Oxford University Press.
- Garson, J., 2001, "Quantification in Modal Logic," in Gabbay, D., and Guentner, F. (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*, second edition, volume 3, Dordrecht: D. Reidel, 267-323.
- Garson, J., 2005, "Unifying Quantified Modal Logic," *Journal of Philosophical Logic*, 34: 621-649.
- Garson, J., 2006, *Modal Logic for Philosophers*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Goldblatt, R., 1993, *Mathematics of Modality*, CSLI Lecture Notes #43, Chicago: University of Chicago Press.
- Goldblatt, R., 2006, "Mathematical Modal Logic: a View of its Evolution," in D. Gabbay and J. Woods (eds.), *Handbook of the History of Logic*, vol. 6, Amsterdam: Elsevier.
- Harel, D., 1984, "Dynamic Logic," in D. Gabbay and F. Guentner(eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, volume 2, Dordrecht: D. Reidel, 497-604.
- Hintikka, J., 1962, *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions*, Ithaca, NY: Cornell University Press.
- Hilpinen, R., 1971, *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*, Dordrecht: D. Reidel.
- Hughes, G. e Cresswell, M., 1968, *An Introduction to Modal Logic*, London: Methuen.
- Hughes, G. e Cresswell, M., 1984, *A Companion to Modal Logic*, London: Methuen.
- Hughes, G. e Cresswell, M., 1996, *A New Introduction to Modal Logic*, London: Routledge.
- Kripke, Saul, 1963, "Semantical Considerations on Modal Logic," *Acta Philosophica Fennica*, 16: 83-94.
- Konyndik, K., 1986, *Introductory Modal Logic*, Notre Dame: University of Notre Dame Press.
- Kvart, I., 1986, *A Theory of Counterfactuals*, Indianapolis: Hackett Publishing Company.

- Lemmon, E. e Scott, D., 1977, *An Introduction to Modal Logic*, Oxford: Blackwell.
- Lewis, C.I. e Langford, C. H., 1959 (1932), *Symbolic Logic*, New York: Dover Publications.
- Lewis, D., 1973, *Counterfactuals*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Linsky, B. e Zalta, E., 1994, "In Defense of the Simplest Quantified Modal Logic," *Philosophical Perspectives*, (Logic and Language), 8: 431-458.
- Mints, G. 1992, *A Short Introduction to Modal Logic*, Chicago: University of Chicago Press.
- Ponse, A., de Rijke, M., e Venema, Y., 1995, *Modal Logic and Process Algebra, A Bisimulation Perspective*, Stanford: CSLI Publications.
- Popkorn, S., 1995, *First Steps in Modal Logic*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Prior, A. N., 1957, *Time and Modality*, Oxford: Clarendon Press.
- Prior, A. N., 1967, *Past, Present and Future*, Oxford: Clarendon Press.
- Quine, W. V. O., 1953, "Reference and Modality", in *From a Logical Point of View*, Cambridge, MA: Harvard University Press. 139-159.
- Rescher, N, e Urquhart, A., 1971, *Temporal Logic*, New York: Springer Verlag.
- Sahlqvist, H., 1975, "Completeness and Correspondence in First and Second Order Semantics for Modal Logic," in S. Kanger (ed.), *Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium*, Amsterdam: North Holland. 110-143.
- Zeman, J., 1973, *Modal Logic, The Lewis-Modal Systems*, Oxford: Oxford University Press.