

# Радиооптика

Сетевое научное издание  
МГТУ им. Н.Э. Баумана

<http://radiooptics.ru>

Ссылка на статью:

// Радиооптика. МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
Электрон. журн. 2016. № 06. С. 1–13.

DOI: **10.7463/rdopt.0616.0852509**

Представлена в редакцию: 08.10.2016

Исправлена: 22.10.2016

© МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 621.396.677.49

## Синтез излучающей системы, формирующей секторную диаграмму направленности с минимизацией эффекта Гиббса

Митрохин В. Н.<sup>1</sup>, Пропастин А. А.<sup>1,2,\*</sup>

[\\*aaprop2512@mail.ru](mailto:aaprop2512@mail.ru)

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>2</sup>АО "Научно-производственное предприятие "Салют", Москва, Россия

---

Излучающие системы, формирующие секторные диаграммы направленности имеют широкое применение как в антенных системах радиолокационных станций, радиотелескопов, систем спутниковой связи, так и в метрологических комплексах измерения параметров антенн. Во всех случаях такая диаграмма направленности позволяет получить высокий коэффициент использования поверхности антенны и соответственно улучшить технические показатели радиотехнической системы в целом. Известно несколько методов синтеза излучающих устройств, позволяющих определить амплитудно-фазовое распределение в раскрыте антенной решетки, формирующее секторную диаграмму направленности. Предложенный метод позволяет получить наименьший уровень боковых лепестков при незначительном переколебании плоской вершины главного лепестка секторной диаграммы направленности.

**Ключевые слова:** синтез, антенная решетка, секторная диаграмма направленности, амплитудно-фазовое распределение, эффект Гиббса, уровень боковых лепестков

---

### Введение

В зависимости от назначения радиотехнической системы, в которой планируется использовать антенну с секторной диаграммой направленности (ДН), в настоящее время накладываются довольно жесткие требования на ее электрические характеристики, такие как: уровень переколебаний вершины в главном лепестке, уровень боковых лепестков (УБЛ), крутизна фронтов главного лепестка и ширина главного лепестка ДН [1, 2].

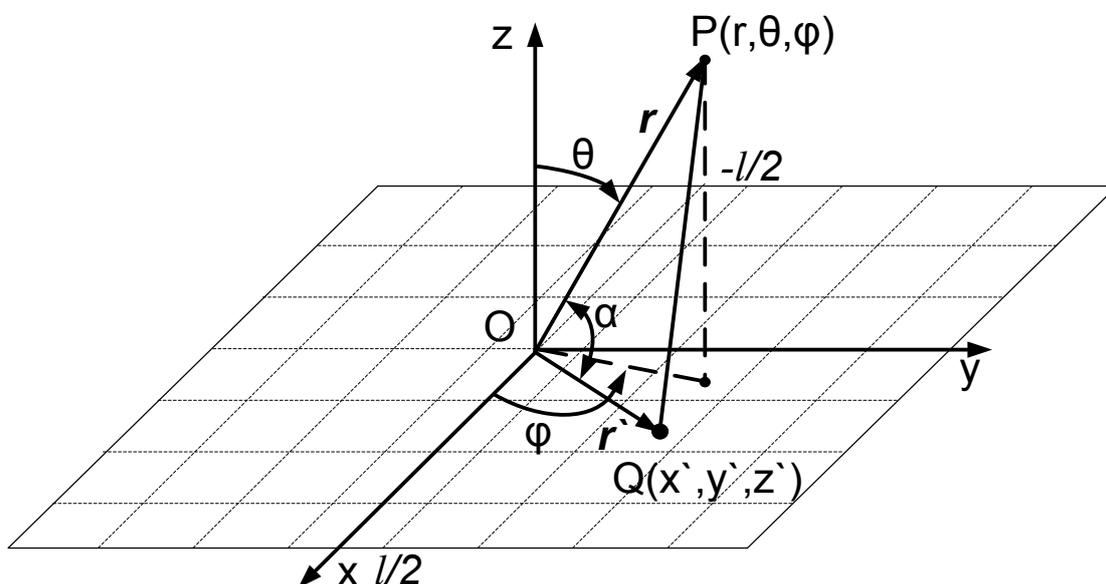
В зависимости от вида заданных функций ДН излучающей системы применяются различные методы синтеза. В работе представлен метод синтеза, который позволяет уменьшить эффект Гиббса на краях главного лепестка ДН и получить низкий УБЛ.

## Методы синтеза излучающей системы, формирующей секторную диаграмму направленности

Задачей синтеза излучающей системы является нахождение функции возбуждения апертуры по заданному полю излучения в дальней зоне. Электромагнитное поле излучающей системы в дальней зоне, удовлетворяющее уравнениям Максвелла и граничным условиям на бесконечности в системе единиц СИ при временной зависимости  $\exp(i\omega t)$ , где  $\omega$  – круговая частота, можно представить в форме (1) [3]:

$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = \frac{i k C}{4 \pi r} \exp[-i k r] \mathbf{F}(\theta, \varphi), \quad \mathbf{H}(r, \theta, \varphi) = \frac{[\mathbf{r}^0, \mathbf{E}(r, \theta, \varphi)]}{Z_0}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}(r, \theta, \varphi)$ ,  $\mathbf{H}(r, \theta, \varphi)$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей соответственно, в точке наблюдения  $P(r, \theta, \varphi)$  в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  (рис. 1);



**Рис. 1.** К определению векторов напряженности электромагнитного поля

$C$  – постоянный коэффициент, определяемый условиями возбуждения апертуры излучающей системы в плоскости  $xOy$ ;  $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$  – волновое число свободного пространства (постоянная распространения) в среде с параметрами  $\epsilon_a, \mu_a$  – абсолютные значения диэлектрической и магнитной проницаемости соответственно;  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$  – волновое сопротивление среды;  $\mathbf{r}^0$  – единичный вектор (орт) по координате  $r$ ;  $\mathbf{F}(\theta, \varphi)$  – диаграмма направленности излучающей системы, определяемая соотношением (2):

$$\mathbf{F}(\theta, \varphi) = -Z_0 \mathbf{F}^{\text{Э}}(\theta, \varphi) + [\mathbf{r}^0, \mathbf{F}^{\text{М}}(\theta, \varphi)], \quad (2)$$

где  $\mathbf{F}^{\text{Э}}(\theta, \varphi)$  – векторная ДН излучающей системы, создаваемая электрическими токами плотностью  $\mathbf{j}^{\text{Э}}(x', y')$ ;  $\mathbf{F}^{\text{М}}(\theta, \varphi)$  – векторная ДН излучающей системы, создаваемая магнит-

ными токами плотностью  $\mathbf{j}^M(x', y')$ , причем штрихованными декартовыми координатами будем обозначать координаты точки на излучающей апертуре  $Q(x', y')$  (рис. 1).

Выражения для этих ДН в случае непрерывного распределения возбуждающих токов имеют вид (3), (4):

$$\mathbf{F}^{\Theta}(\theta, \varphi) = \int_S \mathbf{j}^{\Theta}(x', y') \exp[i k r' \cos(\alpha)] dS, \quad (3)$$

$$\mathbf{F}^M(\theta, \varphi) = \int_S \mathbf{j}^M(x', y') \exp[i k r' \cos(\alpha)] dS, \quad (4)$$

где разность хода лучей  $r' \cos(\alpha)$  определяется соотношением (5):

$$r' \cos(\alpha) = x' \sin(\theta) \cos(\varphi) + y' \sin(\theta) \sin(\varphi). \quad (5)$$

Интегрирование производится по всем точкам  $Q(x', y') \in S$  апертуры с элементами площади  $dS = dx' dy'$ .

В одной из главных плоскостей, например, в плоскости  $xOy$  ( $\varphi=0$ ) выражение для ДН принимает вид (6):

$$\mathbf{F}^{\Theta, M}(\theta) = \int_{-l/2}^{l/2} \mathbf{j}^{\Theta, M}(x') \exp[i k x' \sin(\theta)] dx', \quad (6)$$

где  $l$  – длина апертуры излучающей системы.

Таким образом, нахождение ДН сводится к вычислению интеграла вида (7) [4]:

$$F(u) = \int_{-l/2}^{l/2} a(x) \exp[i k x u] dx, \quad (7)$$

где  $u = x' \sin(\theta)$ ;  $a(x)$  – амплитудно-фазовое распределение возбуждающих токов.

Диаграмма направленности линейного излучателя имеет более простой вид, поскольку распределение токов зависит только от одной из координат и поле такого излучателя в дальней зоне будет линейно поляризовано.

Для нахождения амплитудно-фазового распределения сторонних токов необходимо выполнить обратное преобразование Фурье. В частности, в одномерном случае это преобразование имеет вид (8) [5].

$$a(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 F(u) \cdot \exp[-i k u x] du, \quad (8)$$

где  $F(u)$  – заданная ДН;  $a(x)$  – искомая функция амплитудно-фазового распределения стороннего электрического или магнитного тока.

Примем соотношение (8) за исходное при решении задачи синтеза излучающей системы.

Существует несколько способов синтеза заданных ДН, но в связи с их специфическими особенностями секторные ДН хорошего качества позволяют получить лишь некоторые: метод Фурье [6], метод парциальных ДН [7], метод изменяющихся проекций [8], а

так же методы, основанные на разложении ДН в ряд по полной ортогональной системе функций, к примеру, на полиномы Чебышева или члены ряда Котельникова [4,6,7]. Метод Фурье позволяет получить секторную ДН с наименьшим среднеквадратичным отклонением (СКО) от заданной при шаге излучателей  $d_x \geq 0,5 \cdot \lambda$  [7]. Данный метод применяется для синтеза ДН как с узким лучом, так и секторных ДН. Отличительной особенностью является низкий уровень боковых лепестков результирующей ДН [7]. В случае линейной решетки излучателей ДН принимает вид (9):

$$F(u) = \begin{cases} \sum_{n=-N_x}^{2N_x} a_n \cdot \exp[i k u n d_x], & N_x - \text{четное,} \\ \sum_{n=-N_x}^{2N_x+1} a_n \cdot \exp[i k u n d_x], & N_x - \text{нечетное,} \end{cases} \quad (9)$$

где  $a_n$  – амплитуда  $n$ -го излучателя;  $d_x$  – расстояние между излучателями.

Рассмотрим функцию  $F(u)$  (9), как разложение ее в ряд Фурье, тогда амплитуды  $n$ -х излучателей определим, как коэффициенты ряда Фурье (10):

$$a_n = \frac{d_x}{\lambda} \int_{-1}^1 F(u) \cdot \exp[-i k u n d_x] du. \quad (10)$$

В качестве функции  $F(u)$  для секторной ДН можно использовать следующее выражение (11) (рис. 2):

$$F(u) = \eta \left( u + \frac{\sin(\theta_s)}{2} \right) - \eta \left( u - \frac{\sin(\theta_s)}{2} \right), \quad (11)$$

где  $\theta_s$  – половина ширины главного лепестка [рад];  $\eta$  – функция Хэвисайда.

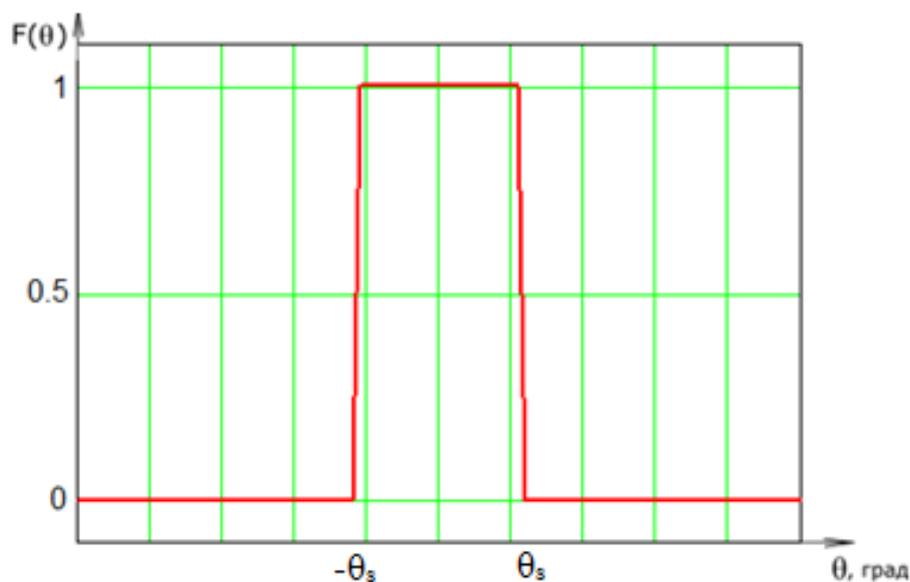


Рис. 2. Представление заданной диаграммы направленности

Для случая с  $N=8$  излучателями и расстоянием  $d_x=0,5\lambda$  ДН представлена на рис. 3. Данная ДН имеет ширину по уровню половинной мощности  $77^\circ$  и УБЛ  $-22$  дБ. Амплитуда переколебаний вершины главного лепестка ДН составляет  $1,5$  дБ.

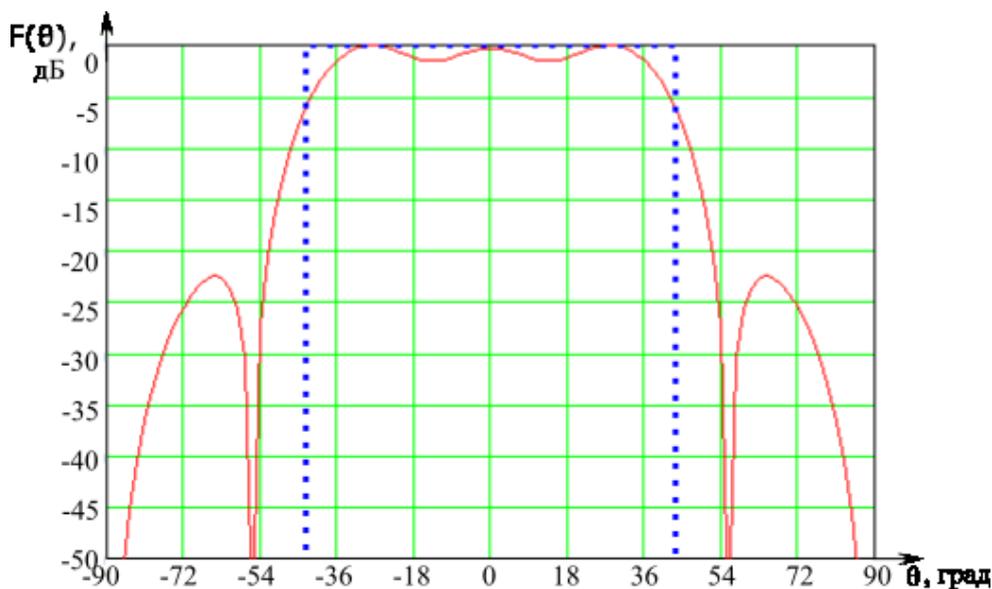


Рис. 3. Диаграмма направленности: пунктиром - идеальная; сплошной линией – синтезированная

Было проведено исследование влияния аппроксимации кусочно-непрерывными функциями амплитудно-фазового распределения на качество секторной ДН. Сравнение проводилось путем увеличения числа излучателей при фиксированной длине излучающей системы. В результате был получен график зависимости УБЛ от числа излучателей (рис. 4).

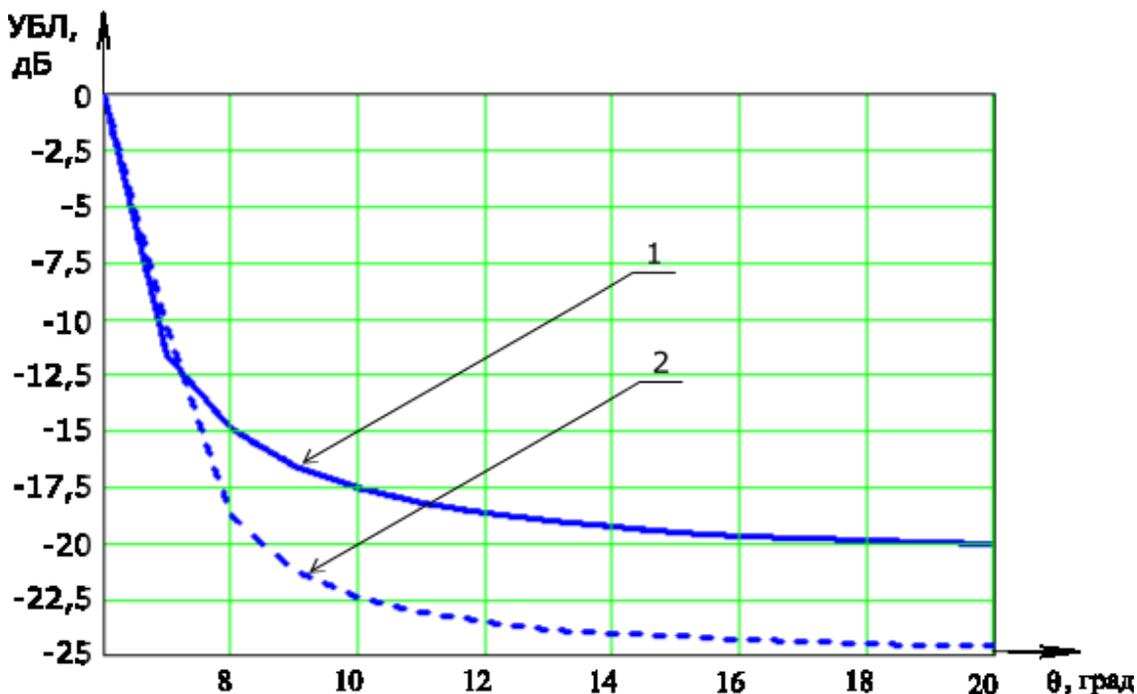


Рис. 4. Зависимость УБЛ от числа излучателей для секторных ДН различной ширины: 1 - для  $\theta=90^\circ$ , 2 - для  $\theta=60^\circ$

Этот график показал, что качество воспроизведения амплитудно-фазового распределения влияет на УБЛ и уровень УБЛ стремится к определенному пределу. В то время как коэффициент прямоугольности слабо зависит от числа излучателей [4].

Представленный пример показал, что применение метода Фурье непосредственно к идеальной секторной ДН и в условиях ограниченной длины излучателя не позволяет варьировать по отдельности СКО фронтов ДН или амплитудой переколебаний вершины главного лепестка ДН.

Первой причиной несоответствия являются разрывы на границах идеальной ДН. В данных разрывах ряд Фурье не сходится в силу противоречия признаку Дирихле, так как функция Хэвисайда не дифференцируема в нуле.

Во-вторых, приведенная функция  $F(u)$  имеет бесконечный спектр гармоник, поэтому необходимо выбирать компромисс между числом аппроксимирующих функций (функций аналитических во всякой ограниченной области) и степенью точности воспроизведения ДН. Таким образом, величина ошибок обратно пропорциональна длине линейной решетки [6].

В третьих, при увеличении числа аппроксимирующих функций известно, что частичные суммы ряда Фурье будут осциллировать на границе функции Хэвисайда и приводить к формированию экстремумов. Возникновение последних связано с эффектом Гиббса [9]. При дальнейшем увеличении числа аппроксимирующих функций экстремумы пропадают.

В четвертых, согласно теореме Винера и Пэли [5] для существования точного решения задачи синтеза функция  $F(u)$  должна удовлетворять следующему неравенству (12):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du < \infty. \quad (12)$$

Отсюда следует, что функция  $F(u)$  допускает преобразование Фурье, если она интегрируема с квадратом на бесконечном интервале и на всяком конечном интервале должна иметь конечное число минимумов и максимумов. Это требование вполне понятно, так как реализовать амплитудно-фазовое распределение, имеющее бесконечное число экстремумов, невозможно.

Из вышеупомянутого следует, что теория антенн допускает возможность получения любой заданной ДН со сколько угодно малым отклонением, и тогда определяющим параметром будет длина излучателя [5]. В настоящей работе решается задача синтеза ДН определенного качества на заданной длине излучателя.

Другой способ синтеза предполагает разложение заданной ДН излучающей системы на парциальные ДН, которые являются членами ряда Котельникова (13) (рис 5) [7].

$$f_n(u) = \frac{\sin[(N \pi d_x / \lambda)(u - u_n)]}{N \sin[(\pi d_x / \lambda)(u - u_n)]}, \quad (13)$$

где  $n$  – номер парциальной ДН.

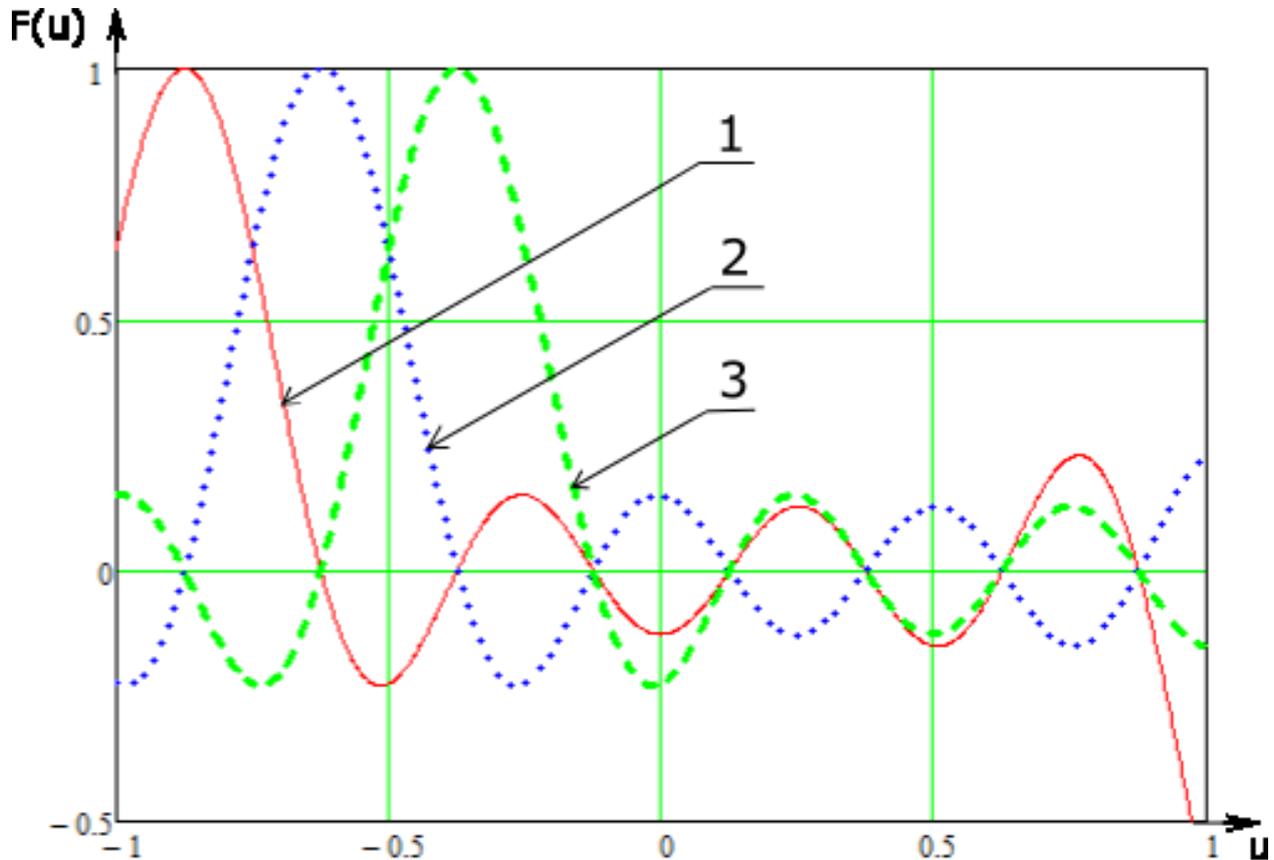


Рис. 5. Парциальные ДН: 1 –  $f_1(u)$ , 2 –  $f_2(u)$ , 3 –  $f_3(u)$

Таким образом, искомую функцию  $F(u)$  можно представить в виде ряда Котельникова (14):

$$F_p(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot f_n(u), \quad (14)$$

где  $F_p(u)$  – функция  $F(u)$ , представленная в виде ряда.

Коэффициенты разложения  $A_n$ , можно найти, как равноотстоящие выборки заданной функции  $F(u)$  (15):

$$A_n = F(n \cdot \pi). \quad (15)$$

ДН, реализуемая при синтезе с шириной  $80^\circ$  представлена на рис. 6. Для случая  $N=8$  излучателями и расстоянием  $d_x=0,5\lambda$  данная ДН имеет ширину по уровню половинной мощности  $25^\circ$  и УБЛ  $-30$  дБ. Амплитуда переколебаний вершины главного лепестка ДН составляет 3 дБ.

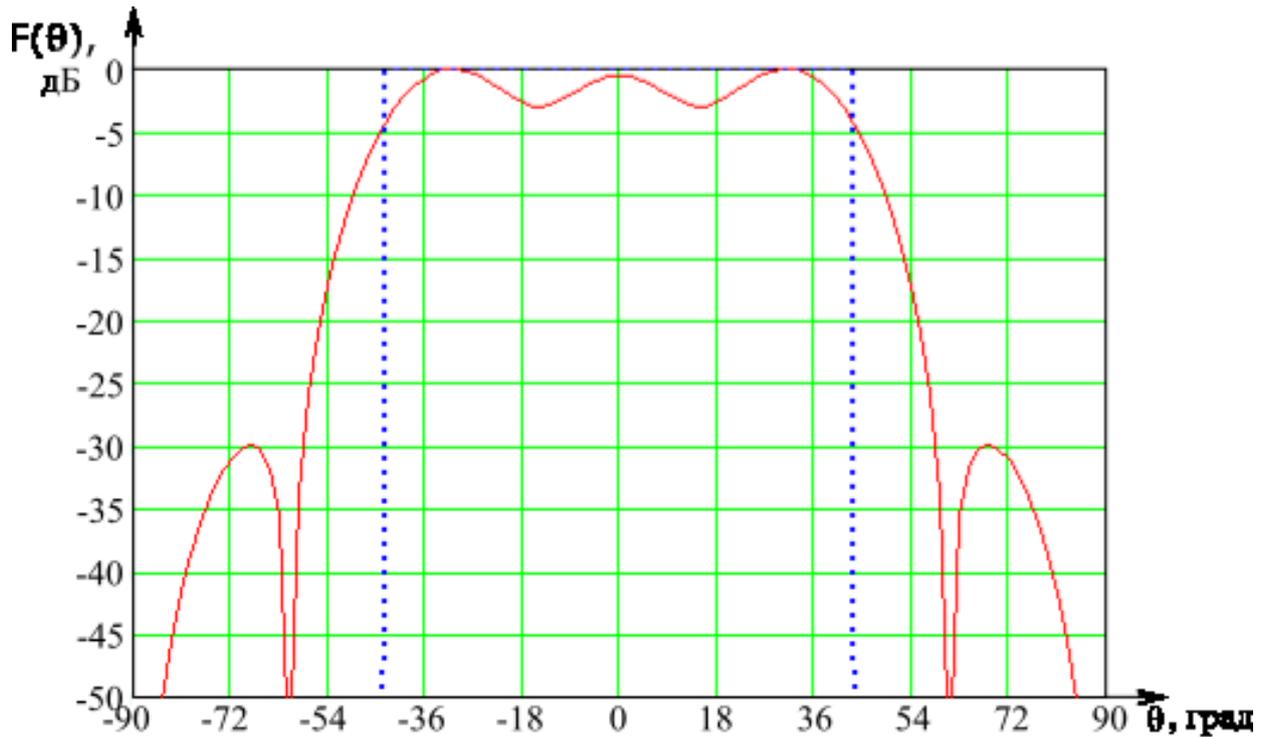


Рис. 6. Диаграмма направленности: пунктиром - идеальная; сплошной линией – синтезированная

Недостатками данного метода синтеза является высокий уровень амплитуды переколебаний вершины главного лепестка ДН. Ортогональность парциальных ДН дает возможность применения их в диаграммообразующих схемах многолучевых антенн.

В данной работе предлагается использовать линейную аппроксимацию заданной ДН, с помощью которой можно сгладить разрывы. В результате, функцию с разрывами (11) мы заменили на кусочно-монотонную функцию (рис. 7). Не смотря на сколь угодно малые отличия от исходной функции с разрывами, по признаку Дирихле ряд Фурье новой функции будет сходиться к исходной функции и, следовательно, явление Гиббса в таком случае пропадет. Функция  $F(u)$  будет представлена в виде (16):

$$F(u) = \begin{cases} 0, & u < -\sin(\theta_s) - x_1, \\ x_1, & -\sin(\theta_s) - x_1 \leq u \leq -\sin(\theta_s), \\ x_2, & -\sin(\theta_s) \leq u \leq -\sin(\theta_s) + x_2, \\ 1, & -\sin(\theta_s) + x_2 \leq u \leq \sin(\theta_s) - x_2, \\ x_2, & \sin(\theta_s) \leq u \leq \sin(\theta_s) - x_2, \\ x_1, & \sin(\theta_s) \leq u \leq -\sin(\theta_s) + x_1, \\ 0, & u < \sin(\theta_s) + x_1, \end{cases} \quad (16)$$

где  $x_1$  – коэффициент, определяющий аппроксимацию нижнего ската ДН;  $x_2$  – коэффициент, определяющий аппроксимацию верхнего ската ДН.

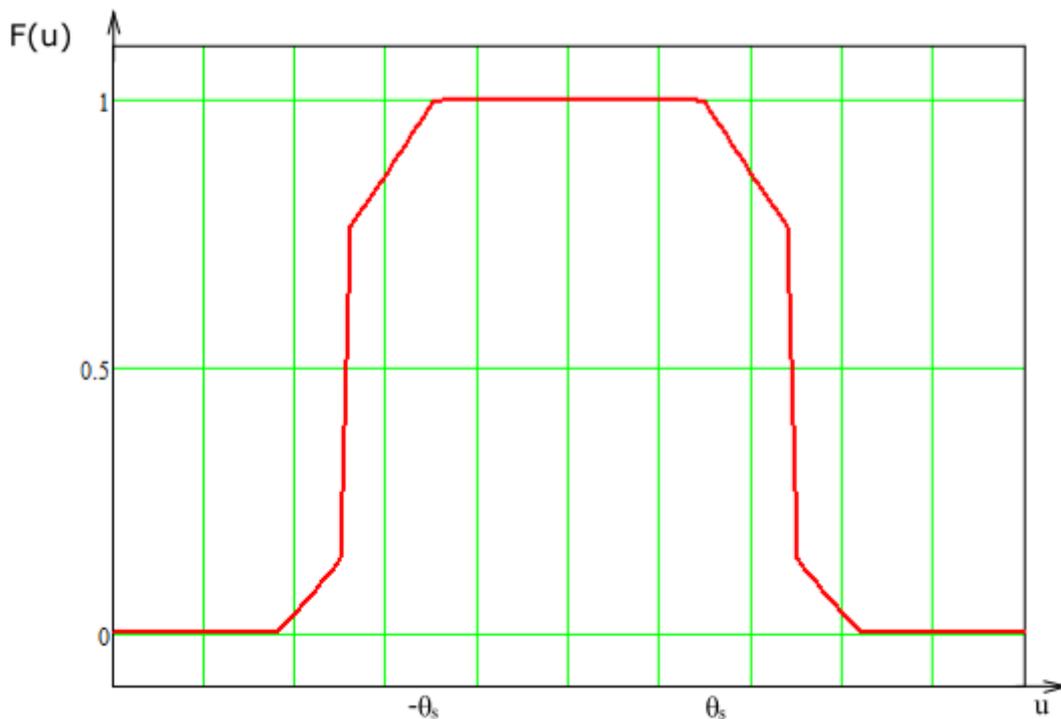


Рис. 7. Заданная ДН, аппроксимированная кусочно-монотонной функцией

В формуле (16) первоначальная прямоугольная функция  $F(u)$  дополнена четырьмя аппроксимирующими прямыми, первые две из которых отвечают за два симметричных верхних ската и остальные два - за нижние. Наиболее оптимальные значения указанных коэффициентов предлагается находить с помощью алгоритма оптимизации [10, 11], к примеру, методом Нелдера-Мида (известен также, как метод деформируемого многогранника). Целевая функция может быть представлена как (17) или (18).

$$\min \left\| \int_{\sin(-\theta_s)}^{\sin(\theta_s)} |F(u) - f(u)|^2 du \right\|, \quad (17)$$

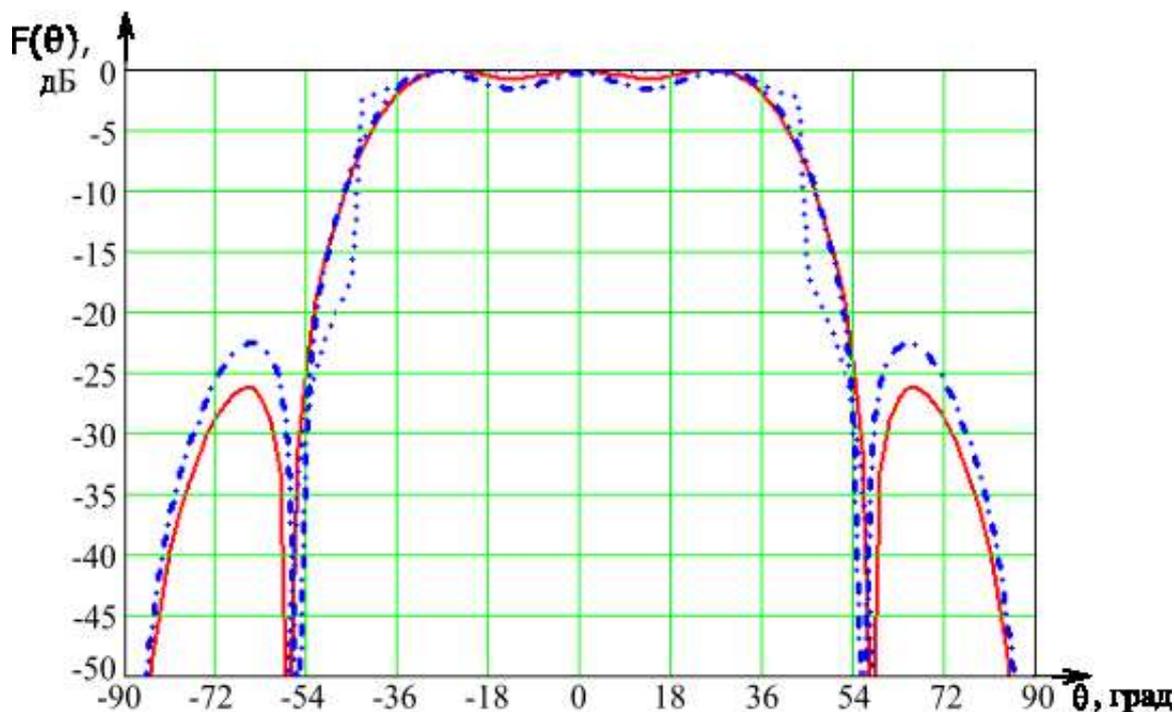
где  $F(u)$  – заданная ДН;  $f(u)$  – результирующая ДН;  $\theta_s$  – половина ширины главного лепестка ДН.

$$\max_{\sin(-\theta_s) \leq u \leq \sin(-\theta_{f0})} \|f'(u)\|, \quad (18)$$

где  $f'(u)$  – производная результирующей ДН;  $\theta_{f0}$  – положение первого нуля ДН.

В результате, можно получать или более крутые фронты ДН, или минимизировать амплитуду переколебаний вершины главного лепестка ДН.

Синтезированная ДН представлена на рис. 8 и имеет следующие параметры: число излучателей – 8, шаг между излучателями –  $0,5\lambda$ , ширина по уровню половинной мощности составляет  $77^\circ$ , УБЛ -26 дБ, амплитуда переколебаний вершины главного лепестка ДН 0,7 дБ.



**Рис. 8.** Диаграмма направленности: пунктиром - идеальная; сплошной линией – синтезированная с помощью аппроксимации кусочно-монотонной функцией; штрихпунктирном – синтезированная методом Фурье

Исходя из изложенного, можно определить влияние величины скатов – верхнего и нижнего на параметры синтезированной ДН. При увеличении верхнего ската ширина главного лепестка синтезированной ДН и эффект Гиббса на краях лепестка будут уменьшаться. С другой стороны, увеличение нижнего ската идеальной ДН будет вносить основной вклад в уровень боковых лепестков синтезированной ДН. Рассматриваемые зависимости параметров ДН от переменных  $x_1$  и  $x_2$  имеют локальные экстремумы, поэтому применение соответствующих алгоритмов оптимизации дает положительные результаты.

### Заключение

Для синтеза излучающих систем, формирующих секторные ДН, существуют несколько наиболее подходящих методов, среди которых: метод Фурье, метод парциальных диаграмм и метод изменяющихся проекций. Решение задачи синтеза секторной ДН осложняется наличием точек разрыва в заданной ДН, которые препятствуют сходимости ряда Фурье. Для их устранения применяют различные методы аппроксимации заданной ДН (полиномами рядов Котельникова, Чебышева). Подобные аппроксимации, в свою очередь, накладывают ограничения на основные качественные показатели секторных ДН, такие как: крутизну фронтов и переколебания вершины главного лепестка ДН.

Предложен вариант линейной аппроксимации заданной ДН, который позволяет получать синтезированные ДН с разного рода параметрами качества. Это достигается с помощью коэффициентов линейной аппроксимации, которые могут быть определены с по-

мощью алгоритмов оптимизации. В зависимости от выбранной целевой функции для алгоритма оптимизации появляется возможность определения наилучших решений компромисса между параметром крутизны фронтов и амплитудой переколебаний вершины главного лепестка секторной ДН.

Важными особенностями данного метода является то, что он позволяет устранить эффект Гиббса и удобен для расчета решеток с малым числом излучателей.

### Список литературы

1. Митрохин В.Н., Можаров Э.О., Пропастин А.А. Облучатель Ка-диапазона волн с секторной диаграммой направленности // Антенны. 2015. Вып. 9. С. 3-8.
2. Митрохин В.Н., Можаров Э.О., Пропастин А.А. Излучатели с секторной диаграммой направленности для фазированных антенных решеток. В книге: Сборник докладов 22-й международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь». НПФ «Саквоее» ООО. г. Воронеж. 19-21 апреля 2016 г. Том 2. С. 937-945.
3. Митрохин В.Н. Электродинамика и распространение радиоволн. Учеб. пособие. М.: Рудомино. 2010. 208 с.
4. Зелкин Е.Г., Соколов В.Г. Методы синтеза антенн: Фазированные антенные решетки и антенны с непрерывным раскрытием. М.: Сов. радио, 1980. 296 с.
5. Устройства СВЧ и антенны. Под. ред. Д.И. Воскресенского. М: Радиотехника, 2016. 560 с.
6. Сазонов Д.М. Многоэлементные антенные системы. М.: Радиотехника, 2015. 144 с.
7. Mailoux R.J. Phased array antenna handbook. 2nd ed. Boston, London: Artech House Inc. 2005. 508 p.
8. Nan Guodong, Wu Wei, Du Biao. Perturbation alternating projections method for pattern synthesis of phased array antenna // 5th Global Symposium on Millimeter Waves (GSMM 2012). 2012. P. 385-388.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 2. М.: Физматлит, 2016. 800 с.
10. Singiresu S. Rao. Engineering Optimization: Theory and Practice. 4th ed. John Wiley & Sons, Inc., 2009. 840 p.
11. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Оконные функции для гармонического анализа сигналов. М.: Техносфера, 2014. 112 с.

## Synthesis of the Radiating System to Form the Flat-Topped Radiation Pattern for Phased Array Antennas with Minimizing Gibbs Phenomenon

V.N. Mitrohin<sup>1</sup>, A.A. Propastin<sup>1,2,\*</sup>

\* [aaprop2512@mail.ru](mailto:aaprop2512@mail.ru)

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>JSC "Scientific-Production Enterprise" Salut ", Moscow, Russia

---

**Keywords:** synthesis, antenna array, flat-topped radiation pattern, amplitude-phase distribution, Gibbs phenomenon, side-lobe level

---

For the synthesis of radiating systems, which form the flat-topped radiation patterns there are some of the most convenient methods, including Fourier method, method of partial diagram and method of changing projections. These methods are handy for calculation, because they allow us to obtain the flat-topped radiation patterns with predetermined electrical characteristics. These are the following characteristics: side-lobe level, width of the main lobe of the radiation pattern, and amplitude of top ripple of the main lobe of the radiation pattern. Meeting the challenge of synthesizing flat-topped radiation pattern is complicated by the break points available in a predetermined radiation pattern, which prevent the convergence of the Fourier series. The points of discontinuity, in turn, lead to the emergence of extremes that are associated with the Gibbs phenomenon. To eliminate them, are used different methods for approximating a given radiation pattern (a series of Kotelnikov polynomial and that of Chebyshev). Such approximation, in turn, imposes restrictions on the basic quality indicators the flat-topped radiation patterns, such as the steepness of fronts and top ripple of the main lobe of the radiation pattern. The proposed method provides the lowest side-lobe level with small amplitude of top ripple of the main lobe of the flat-topped radiation pattern. The paper offers a linear approximation option of the given radiation pattern, which allows a synthesized radiation pattern with a diversity of quality parameters. This is achieved by linear approximation coefficients that can be determined using optimization algorithms. Depending on the target function for the optimization algorithm it is possible to determine the best trade-off between making the steepness parameter of the fronts and the top ripple amplitude of the main lobe of the flat-topped radiation pattern. The important feature of the method is that it minimizes the Gibbs phenomenon and is easy to calculate gratings with the small number of radiators.

## References

1. Mitrokhin V.N., Mozharov E.O., Propastin A.A. Obluchatel' Ka-diapazona voln s sektornoy diagrammoy napravlenosti. *Antenny = Antennas*. 2015. Issue 9. P. 3-8.
2. Mitrokhin V.N., Mozharov E.O., Propastin A.A. Izluchateli s sektornoy diagrammoy napravlenosti dlya fazirovannykh antennykh reshetok. In: *22 International Scientific and Technical Conference on Radiolocation, Navigation and Communication*. NPF "Sakvoee", Ltd. Voronezh. April 19-21, 2016. Vol. 2. P. 937-945.
3. Mitrokhin V.N. Elektrodinamika i rasprostraneniye radiovoln. Textbook. *Rudomino*. Moscow, 2010. 208 p.
4. Zelkin Ye.G., Sokolov V.G. Metody sinteza antenn: Fazirovannyye antennoye reshetki i anteny s nepreryvnyim raskryvom. *Sov. Radio*. Moscow, 1980. 296 p.
5. Ustroystva SVCH i anteny. Under ed. by D.I. Voskresenskii. *Radiotekhnika = Radiotechnics*. Moscow, 2016. 560 p.
6. Sazonov D.M. Mnogoelementnyye antennoye sistemy. *Radiotekhnika = Radiotechnics*. Moscow, 2015. 144 p.
7. Mailoux R.J. Phased array antenna handbook. *Artech House Inc*. 2nd ed. Boston, London. 2005. 508 p.
8. Han Guodong, Wu Wei, Du Biao. Perturbation alternating projections method for pattern synthesis of phased array antenna. *5th Global Symposium on Millimeter Waves (GSMM 2012)*. 2012. P. 385-388.
9. Fikhtengol'ts G.M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. *Fizmatlit*. In 3 volumes. Vol. 2. Moscow, 2016. 800 p.
10. Singiresu S. Rao. Engineering Optimization: Theory and Practice. *John Wiley & Sons, Inc*. 4th ed., 2009. 840 p.
11. Dvorkovich V.P., Dvorkovich A.V. Okonnyye funktsii dlya garmonicheskogo analiza signalov. *Tekhnosfera*. Moscow, 2014. 112 p.