

# Радиооптика

Сетевое научное издание  
МГТУ им. Н.Э. Баумана

<http://radiooptics.ru>

Ссылка на статью:

// Радиооптика. МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
Электрон. журн. 2017. № 01. С. 14–33.

DOI: **10.7463/rdopt.0117.0000092**

Представлена в редакцию: 16.01.2017

Исправлена: 30.01.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 537.876.22

## Прохождение сгустком Хевисайда границы раздела двух диэлектриков. Формулы Френеля

Толмачев В.В.<sup>1</sup>, Скрипник Ф.В.<sup>1</sup>,  
Корогодина Е.В.<sup>1</sup>, Солдатенко И.Г.<sup>1,\*</sup>

[\\*igsoldatenko@mail.ru](mailto:igsoldatenko@mail.ru)

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

---

Формулы Френеля сыграли огромную роль в становлении физики начала и середины XIX века, так как решили несколько важных проблем физики. Во-первых, проблему взглядов на природу света. Формулы Френеля окончательно установили, что свет это волна, причем волна поперечная. Во-вторых, проблему светового эфира. Считалось, что свет распространяется в гипотетической среде - светоносном эфире, возмущениями которого и является свет. Многие ученые стремились вывести формулы Френеля, используя различные свойства эфира. Это привело к созданию теории упругости. Ну, и, наконец, анализ самих формул значительно расширил понимание прохождения светом границы раздела различных веществ, а также распространение света в самих средах. К сожалению, в современной литературе формулам Френеля уделяется мало внимания, а их анализ фрагментарен. В работе приведен еще один вывод формул Френеля с использованием электромагнитной волны в виде сгустка Хевисайда, а также приведен их анализ.

**Ключевые слова:** формулы Френеля, сгусток Хевисайда, светоносный эфир, s- и p- поляризация, анализ формул Френеля

---

### Введение

В истории физики формулы, описывающие прохождение светом границы раздела двух диэлектриков, занимают особое место. До открытия этих формул Френелем в 1821 г. [1] были известны только законы отражения и преломления света геометрической оптики.

После открытия Юнгом и Френелем в начале XIX века поперечности световых волн Френель смог предложить свои знаменитые формулы для падения света на границу раздела двух диэлектриков, представив произвольную поперечную плоскую световую волну в виде суперпозиции двух взаимно перпендикулярных линейно поляризованных волн.

Френель рассмотрел два случая падения поперечной световой волны на границу раздела двух диэлектриков: 1) когда световой вектор перпендикулярен плоскости падения (s-волна) и 2) когда он меняется в плоскости падения (p-волна).

При этом он получил свои знаменитые так называемые формулы синусов и тангенсов соответственно. Они оказались в очень хорошем согласии с экспериментом, хотя Френель и не привел строгого вывода своих формул.

Поэтому первую половину XIX в. многие выдающиеся физики занимались выводом формул Френеля ввиду их исключительной физической важности.

Анализ формул Френеля, проведенный уже самим Френелем, значительно расширил понимание распространения световых волн на границе раздела сред и в самих средах.

Используя свои формулы, Френель вывел в случаях s- и p- волн коэффициенты отражения и преломления света на границе раздела сред и, в частности, доказал существование угла Брюстера (угла полного внутреннего отражения света), а также существование нового вида поляризованных световых волн – эллиптически поляризованных световых волн.

Декарт в первой половине XVII в. [2] посчитал, что свет распространяется в особой упругой среде, которую впоследствии Ньютон назвал световым эфиром. Для светового эфира Френель, кроме своих формул Френеля, получил также знаменитую формулу частичного увлечения эфира движущейся средой.

Так как, как оказалось, что световые волны являются поперечными волнами, то Френель посчитал, что световой эфир должен быть упругим твердым телом. Поэтому, для вывода формул Френеля Коши вывел уравнения упругости упругого твердого тела и ввел в науку понятие тензора напряжений и его связи с тензором деформаций [3]. При этом Коши, исходя из изотропной модели светового эфира, для которого тензор напряжений является симметричным, вывел формулу синусов Френеля, а формулу тангенсов ему вывести так и не удалось.

В дальнейшем выводом формул Френеля занимался Дж. Грин [4], который в отличие от Коши вывел граничные условия при прохождении светом границы раздела двух сред. Впрочем, как и Коши, Дж. Грин получил только формулу синусов Френеля.

Также при выводе формул Френеля Коши и Дж. Грин показали, что при прохождении света через границу раздела двух сред в отраженном свете появляются продольные световые волны, которые экспериментально не наблюдались.

Френель предположил, что скорость таких волн намного больше скорости поперечных световых волн, поэтому они и не наблюдаются экспериментально.

Только спустя 20 лет в 1848г. Мак Куллаг [5] предположил, что световой эфир обладает такими свойствами, что в нём тензор напряжений состоит как из симметричной, так и антисимметричной частей, причем антисимметричная часть связана с углом поворота малой частицы эфира по линейному закону.

При этом, если в уравнениях, полученных Мак Куллагом, заменить величины, описывающие световой эфир, напряженностями электрического и магнитного полей, описывающими световую волну, считая её электромагнитной, то получаются еще задолго до Максвелла его знаменитые уравнения Максвелла для пустоты, без зарядов и токов.

Хотя Мак Куллаг и не вывел формул Френеля, они выводятся из его предположений (и формула синусов, и формула тангенсов) совершенно точно.

Наиболее полно изложение истории, связанной с формулами Френеля, изложено в [6].

Современный вывод формул Френеля из уравнений Максвелла дал только Лоренц [7] в своей докторской диссертации в 1875г. Этот вывод Лоренца излагается ныне во всех современных курсах общей физики и электродинамики.

Лоренц рассмотрел бесконечные, однородно заполняющие всё пространство, строго периодические гармонические световые электромагнитные волны определенной фиксированной частоты.

Ниже мы проведем другой вывод формул Френеля с использованием электромагнитных волн в виде сгустков Хевисайда [8]. Представление электромагнитной волны в виде сгустка Хевисайда (прямоугольного импульса) имеет важное значение как с экспериментальной так и теоретической точек зрения так как дает возможность решить множество задач без общепринятого использования монохроматических волн которых не существует в природе [10].

Хочется отметить, что из-за большой важности формулы Френеля не утратили своей актуальности и сейчас [9].

## 1. Вывод формул Френеля

Рассмотрим плоскую границу раздела двух идеальных диэлектриков, заполняющих верхнее и нижнее полупространства, которые характеризуются диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$  для верхней среды и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_2$  для нижней среды. Магнитные проницаемости  $\mu_1$  и  $\mu_2$  этих сред для простоты можно считать равными единицам.

Пусть на данную границу раздела сред со стороны верхней среды падает плоская электромагнитная волна в виде электромагнитного сгустка Хевисайда.

Сгусток Хевисайда представляет собой электромагнитную волну, у которой напряженности электрического и магнитного полей отличны от нуля в области пространства, ограниченной двумя параллельными между собой бесконечными плоскостями, причём в каждой точке внутри сгустка как напряженность электрического поля, так и напряжённость магнитного поля имеют одно и то же значение и по модулю и по направлению.

Эти напряженности перпендикулярны друг другу, и сгусток движется со скоростью  $v$  перпендикулярно указанным плоскостям. При этом все три вектора  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{v}$  образуют правую тройку векторов, т.е. направление  $v$  совпадает с направлением векторного произведения  $[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ .

Рассмотрение такой электромагнитной волны (в виде сгустка Хевисайда) оправдано тем, что, во-первых, такая электромагнитная волна удовлетворяет уравнениям Максвелла, как это показал Хевисайд, а также тем, что с её помощью можно построить любую плоскую электромагнитную волну, прикладывая такие бесконечно тонкие сгустки вплотную друг к другу и меняя понемногу в каждом последующем сгустке векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , возможно проворачивая их на некоторый произвольный малый угол [11].

Кроме того, так как любую плоскую поперечную волну можно представить в виде суперпозиции двух взаимно перпендикулярных линейно поляризованных плоских волн, то достаточно рассмотреть два случая: 1) когда вектор напряженности электрического поля меняется только в плоскости падения, а вектор напряженности магнитного поля перпендикулярен плоскости падения (назовём такую волну р-волной), и 2) когда вектор напряженности электрического поля всегда перпендикулярен плоскости падения, в то время, как вектор напряженности магнитного поля находится в плоскости падения (такую волну назовем s-волной).

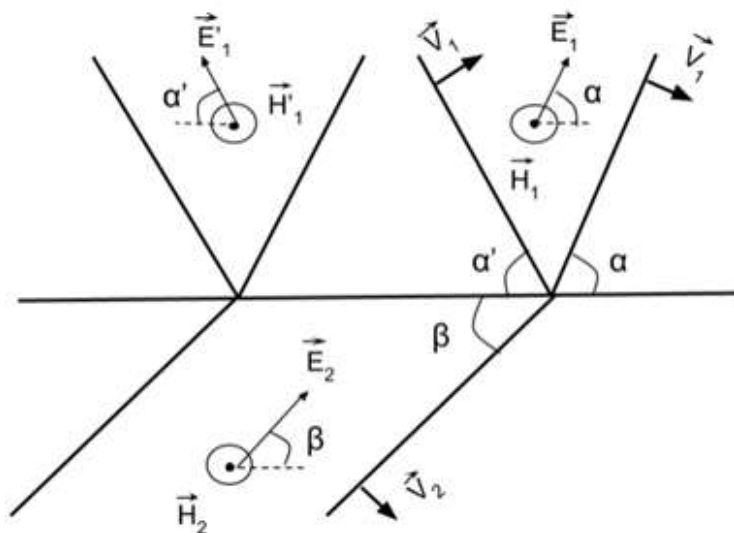
### 1.1. Первый случай (р-волна)

Пусть сгусток Хевисайда падает на границу раздела двух сред так, что его фронт составляет угол  $\alpha$  (угол падения) с плоскостью раздела. При прохождении границы раздела сред сгусток Хевисайда разделяется на три сгустка: падающий, преломленный и отраженный.

Обозначим, далее, угол между фронтом отраженного сгустка Хевисайда и границей раздела сред через  $\alpha'$  (угол отражения), а угол между фронтом прошедшего сгустка Хевисайда и границей раздела сред через  $\beta$  (угол преломления).

Падающий и отраженный сгустки Хевисайда движутся перпендикулярно своим фронтам с одинаковой по абсолютной величине скоростью  $v_1$  в первой среде, а преломленный сгусток Хевисайда движется перпендикулярно своему фронту во второй среде со скоростью равной по абсолютной величине  $v_2$ .

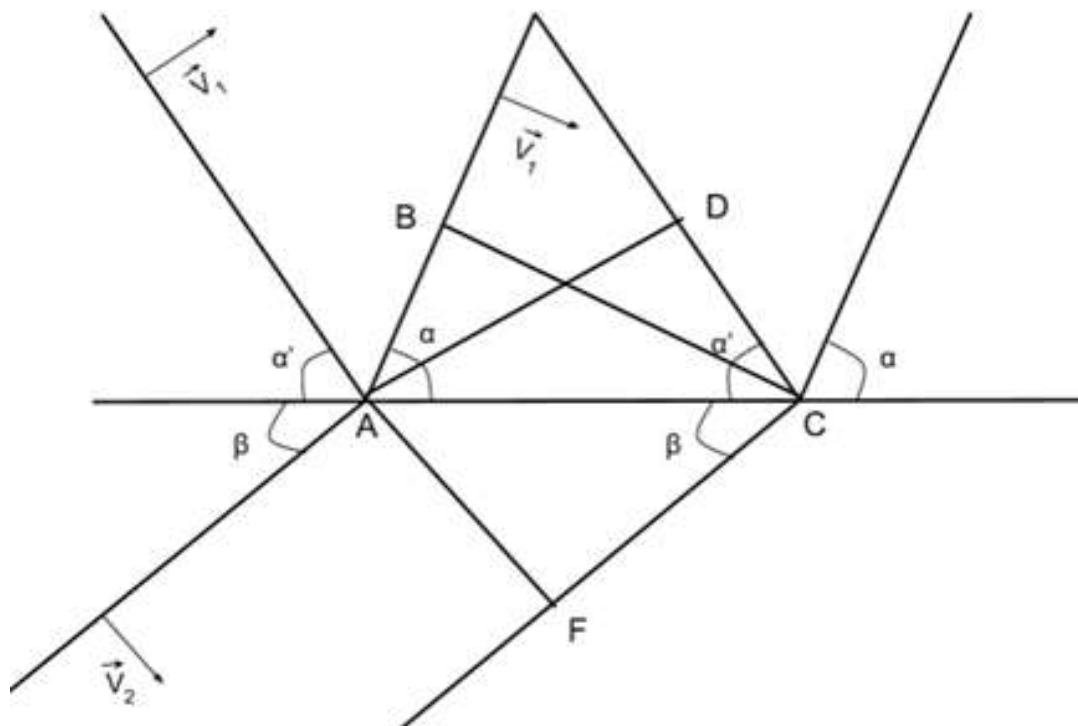
Вдоль границы раздела двух сред все три сгустка движутся как единое целое, не опережая и не отставая друг от друга, как показано на рис.1.



**Рис. 1.** Прохождение сгустком Хевисайда границы раздела двух диэлектриков. Векторы  $\vec{E}_1, \vec{E}_1', \vec{E}_2$  – напряженности электрических полей падающего, отраженного и преломленного сгустков, соответственно, находятся в плоскости падения, как показано на рисунке. Векторы  $\vec{H}_1, \vec{H}_1', \vec{H}_2$  – напряженности магнитных полей падающего, отраженного и преломленного сгустков, соответственно, все эти векторы направлены перпендикулярно плоскости падения и смотрят на нас.

Напряженности электрических полей падающего, отраженного и преломленного сгустков для р – волны направлены так, как показано на рис.1. Напряженности магнитных полей всех трех сгустков направлены на нас.

Спустя время  $\Delta t$  все три сгустка сместятся как единое целое вдоль границы раздела сред на некоторое расстояние  $AC$ , как показано на рис.2, на котором показаны только передние фронты всех трех сгустков в момент времени  $t$  (точка  $A$ ) и в момент времени  $t+\Delta t$  (точка  $C$ ).



**Рис. 2.** Передние фронты волн в момент времени  $t$  (см. точку  $A$  на границе раздела) и в момент времени  $t+\Delta t$  (см. точку  $C$  на границе раздела).  $BC$ ,  $AD$  и  $AF$  - расстояния, которые проходят падающая, отраженная и преломленная волны за время  $\Delta t$ .

Расстояния, которые проходят все три сгустка, равны, соответственно,

$$BC = AD = v_1 \cdot \Delta t, \quad AF = v_2 \cdot \Delta t.$$

Так как треугольники  $\Delta ABC$ ,  $\Delta ADC$  и  $\Delta AFC$  - прямоугольные, то гипотенуза  $AC$  равна

$$AC = \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin \alpha'} = \frac{AF}{\sin \beta} \quad \text{или} \quad \frac{v_1 \Delta t}{\sin \alpha} = \frac{v_1 \Delta t}{\sin \alpha'} = \frac{v_2 \Delta t}{\sin \beta}$$

Из этих равенств получаем, что  $\sin \alpha = \sin \alpha'$ , то есть  $\alpha = \alpha'$ , а значит, так мы получаем закон отражения света геометрической оптики, а также

$$\frac{v_1}{\sin \alpha} = \frac{v_2}{\sin \beta} \quad \text{или} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = n_{21} = n,$$

где  $n_{21} = n$  – относительный показатель преломления второй среды относительно первой, т.е. закон преломления света геометрической оптики.

Электромагнитные поля на границе раздела двух диэлектрических сред согласно уравнениям Максвелла удовлетворяют граничным условиям, согласно которым тангенциальные составляющие напряженностей электрических и магнитных полей непрерывны. Поэтому согласно рис.1 имеем

$$E_1 \cos \alpha - E_1' \cos \alpha = E_2 \cos \beta \quad (1)$$

$$H_1 + H_1' = H_2 \quad (2)$$

Для плоской электромагнитной волны справедливо определённое соотношение между напряженностями электрических и магнитных полей [9], которое для наших трех сгустков записывается следующим образом:

$$\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_0} E_1 = \sqrt{\mu_0} H_1,$$

$$\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_0} E_1' = \sqrt{\mu_0} H_1',$$

$$\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_0} E_2 = \sqrt{\mu_0} H_2.$$

Поэтому система уравнений (1) и (2) переписывается в виде

$$E_1 \cos \alpha - E_1' \cos \alpha = E_2 \cos \beta, \quad E_1 + E_1' = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} E_2,$$

или

$$E_1 \cos \alpha - E_1' \cos \alpha = E_2 \cos \beta, \quad E_1 + E_1' = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} E_2$$

Разрешая данную систему уравнений относительно напряженностей отраженной и преломленной волн, получаем, что

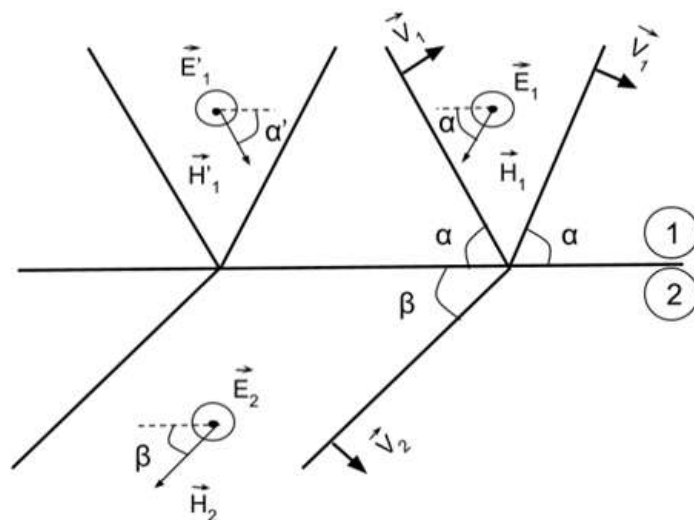
$$E_1' = E_1 \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}, \quad (3)$$

$$E_2 = E_1 \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \quad (4)$$

Формула (3) для напряженности электрического поля отраженной волны называется формулой тангенсов Френеля.

## 1.2. Второй случай (s-волна)

В этом случае напряженности электрического поля перпендикулярны плоскости падения, а напряженности магнитного поля изменяется в плоскости падения, как показано на рис.3.



**Рис. 3.** Прохождение границы раздела двух диэлектриков сгустком Хевисайда (s-волна.) Векторы  $\vec{E}_1, \vec{E}_1', \vec{E}_2$  – напряженности электрического поля падающего, отраженного и преломленного сгустков, все эти векторы направлены перпендикулярно плоскости падения и смотрят на нас. Векторы  $\vec{H}_1, \vec{H}_1', \vec{H}_2$  – напряженности магнитного поля падающего, отраженного и преломленного сгустков, они изменяются в плоскости падения, как показано на рисунке.

Как и в случае r-волны, для тангенциальных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей согласно рис.3 получим, что

$$E_1 + E_1' = E_2 \quad (5)$$

$$H_1 \cos \alpha - H_1' \cos \alpha = H_2 \cos \beta \quad (6)$$

Используя связь между напряженностями электрического и магнитного полей для плоской электромагнитной волны

$$\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_0} E_1 = \sqrt{\mu_0} H_1,$$

$$\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_0} E_1' = \sqrt{\mu_0} H_1',$$

$$\sqrt{\epsilon_2 \epsilon_0} E_2 = \sqrt{\mu_0} H_2.$$

уравнения (5) и (6) с учетом  $n = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$  переписутся следующим образом:

$$E_1 + E_1' = E_2,$$

$$E_1 \cos \alpha - E_1' \cos \alpha = E_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cos \beta$$

Разрешая данную систему относительно  $E_1'$  и  $E_2$ , получим что

$$E_1' = -E_1 \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad (7)$$

$$E_2 = E_1 \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (8)$$

Получили формулу синусов Френеля (7) для напряженности отраженной s-волны.

## 2. Анализ формул Френеля

Как отмечалось, формулы Френеля сыграли важную роль в становлении физики начала XIX в., причём не только оптики, но и физики в целом. В оптике же они значительно расширили понимание распространения света в различных средах.

Проведём анализ этих формул.

### 2.1. Случай падения из оптически менее плотной среды в оптически более плотную среду

В этом случае относительный показатель преломления второй среды относительно первой  $\frac{n_2}{n_1} = n > 1$ . Рассмотрим коэффициент отражения  $r$ . По определению он равен отношению интенсивности отраженной волны к интенсивности падающей волны; сами интенсивности пропорциональны квадратам амплитуд напряженностей электрического поля

и поэтому  $r = \frac{I_1'}{I_1} = \left| \frac{E_1'}{E_1} \right|^2$ .

Тогда для р-волны  $r_p = \left[ \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} \right]^2$  и для s-волны  $r_s = \left[ \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right]^2$ .

Угол падения  $\alpha$  меняется от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ , а угол преломления от 0 до  $\beta_{np.}$ , где максимальный угол  $\beta_{np.}$  находится из закона преломления  $\frac{1}{\sin \beta_{np.}} = n$ ,  $\sin \beta_{np.} = \frac{1}{n}$ . Например, для стекла  $n = \frac{3}{2}$  поэтому для максимального угла имеем, что  $\sin \beta_{np.} = \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$ ,  $\beta_{np.} = 41^\circ$ .

При нормальном падении  $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) \approx \alpha \pm \beta$ ,  $\sin(\alpha \pm \beta) \approx \alpha \pm \beta$  и поэтому коэффициенты отражения для р- и s-волн будут одинаковы.

$$r_p = r_s = \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2, \text{ т.к. } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} = n.$$

Для границы стекло-воздух  $n=1.5$ , поэтому коэффициенты отражения равны  $r_p = r_s = 0.04$ , т.е. всего 4% от интенсивности падающей волны отражается от границы раздела воздух-стекло.

В другом предельном случае скользящего падения, когда  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta \rightarrow \beta_{np.}$ , получим, что

$$r_p = \left[ \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_{np.}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta_{np.}\right)} \right]^2 = \left( \frac{-\operatorname{ctg} \beta_{np.}}{\operatorname{ctg} \beta_{np.}} \right)^2 = 1,$$



$$r_s = \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_{np.}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta_{np.}\right)} \right]^2 = \left( \frac{\cos \beta_{np.}}{-\cos \beta_{np.}} \right)^2 = 1.$$

Как для р-, так и для s-волны коэффициент отражения теперь равен единице, т.е. при скользющем падении обе волны полностью отражаются от границы раздела.

При промежуточных углах падения коэффициент отражения для s-волны нигде в ноль не обращается и растет с увеличением угла до 1. Коэффициент отражения для р-волны, напротив, обращается в ноль при некотором угле падения, при котором  $\alpha_B + \beta = \frac{\pi}{2}$ , т.к. в этом случае  $tg(\alpha_B + \beta) = \infty$ .

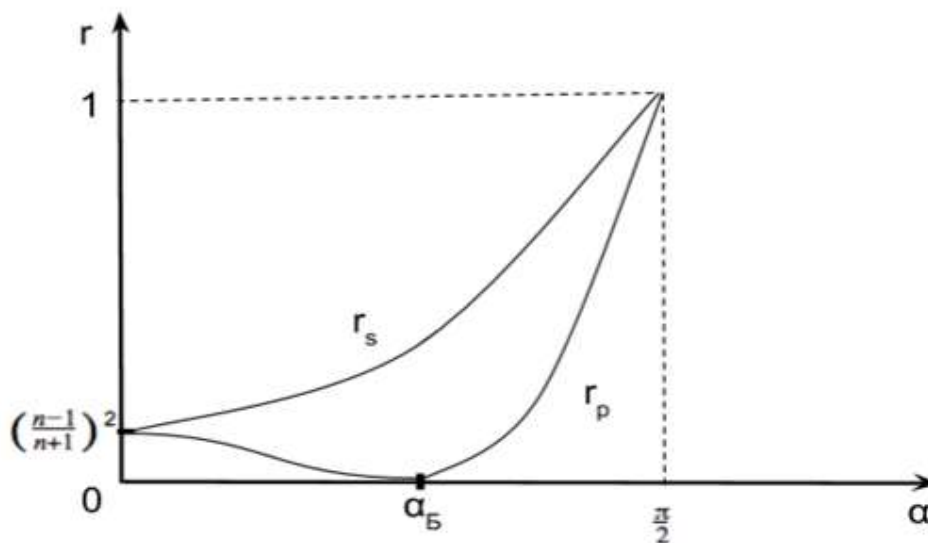
Этот угол называется углом Брюстера, и при  $\alpha = \alpha_B$  р-волна не отражается и полностью переходит во вторую среду. Если при угле падения  $\alpha = \alpha_B$  на границу раздела падает плоская неполяризованная монохроматическая волна, являющаяся суперпозицией р- и s-волн, то в отраженной волне будет только s-компонента, а в прошедшей будет усилена р-компонента. Из закона преломления следует, что

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha_B}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_B\right)} = \frac{\sin \alpha_B}{\cos \alpha_B} = tg \alpha_B = n,$$

т.е. получаем закон Брюстера.

При падении на границу раздела воздух-стекло  $n = 1.5$ , а значит, угол Брюстера  $\alpha_B = 57^\circ$ . Так как  $\alpha_B + \beta = \frac{\pi}{2}$ , то лучи отражённой и преломленной волн взаимно перпендикулярны.

Графики коэффициентов отражения для s- и р-волн представлены на рис. 4.



**Рис. 4.** График зависимости коэффициентов отражения для s- и р- волн от угла падения  $\alpha$ , падающих на границу раздела из оптически менее плотной в оптически более плотную среду.

## 2.2. Случай падения электромагнитной волны из оптически более плотной среды в оптически менее плотную среду

Относительный показатель преломления второй среды относительно первой среды в этом случае  $n_{12} = \frac{1}{n_{21}} = \frac{1}{n} < 1$  и закон преломления  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n} < 1$ , т.е.  $\beta > \alpha$ , угол преломления больше угла падения; а, следовательно, существует такой предельный угол падения  $\alpha = \alpha_{np.}$  при котором  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . В этом случае  $\frac{\sin \alpha_{np.}}{1} = \frac{1}{n}$  и для случая стекло-воздух  $\alpha_{np.} = 41^\circ$ .

При  $\alpha = \alpha_{np.}$  преломленный луч идет вдоль границы раздела обеих сред, а при  $\alpha > \alpha_{np.}$  преломленного луча вообще не образуется, имеется только один отраженный луч, т.е. электромагнитная волна не выходит из оптически более плотной среды.

Рассмотрим вначале как меняется коэффициент отражения при изменении угла падения  $\alpha$  от 0 до  $\alpha_{np.}$ . При нормальном падении для s- и p- волн имеем, что

$$r_p = r_s = \left( \frac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n} + 1} \right)^2 = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2,$$

т.е. такое же значение, как и в предыдущем случае. При  $\alpha = \alpha_{np.}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$  поэтому получим, что

$$r_p = \left[ \frac{\operatorname{tg} \left( \alpha_{np.} - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \alpha_{np.} + \frac{\pi}{2} \right)} \right]^2 = 1, \quad r_s = \left[ \frac{\sin \left( \alpha_{np.} - \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \left( \alpha_{np.} + \frac{\pi}{2} \right)} \right]^2 = 1,$$

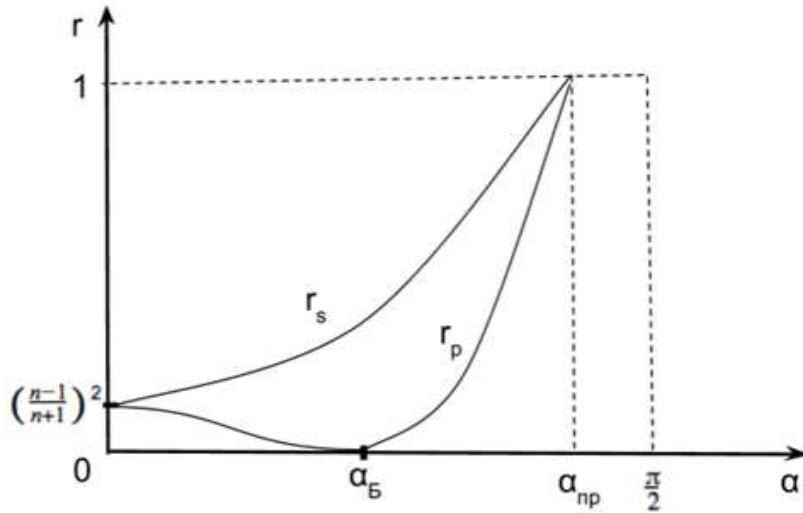
т.е. при  $\alpha = \alpha_{np.}$  как s- так и p- волны отражаются полностью.

При изменении угла падения от 0 до  $\alpha_{np.}$  коэффициент отражения для s-волны возрастает от  $\left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2$  до 1, а для p-волны опять существует угол Брюстера, т.к.  $\alpha_B < \alpha_{np.}$ . Это

связано с тем, что график тангенса идет выше графика синуса на интервале от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ , и

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{1}{n} \text{ наступает раньше нежели } \sin \alpha_{np.} = \frac{1}{n}.$$

Графики зависимости коэффициентов отражения от угла падения представлены на рис. 5.



**Рис. 5.** Графики зависимости коэффициентов отражения для s- и p- волн от угла падения  $\alpha$ , при падении из оптически более плотной в оптически менее плотную среду.

Анализ формул Френеля в области от  $\alpha_{np}$  до  $\frac{\pi}{2}$  требует особого рассмотрения, приведём его ниже.

### 2.3. Изменение фазы при прохождении границы раздела двух диэлектриков

Выпишем отношения амплитуд отраженной и преломленной волн к амплитуде падающей волны. Имеем, что

$$\begin{aligned} \text{s- волна} \quad \frac{E_1'}{E_1} &= -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \\ \text{p- волна} \quad \frac{E_1'}{E_1} &= \frac{\text{tg}(\alpha - \beta)}{\text{tg}(\alpha + \beta)}, \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

Из отношения напряжённостей электрического поля преломленной волны к падающей волне видим, что преломленная волна всегда, при всех углах падения, вне зависимости от оптической плотности сред, имеет такую же фазу как и падающая волна, т.е. не происходит никакого изменения фазы преломленной волны.

При отражении от оптически более плотной среды ( $\alpha > \beta$ ) фаза отраженной s- волны меняется на  $\pi$ , а фаза отраженной p- волны при углах падения от 0 до  $\alpha_B$  не меняется и изменяется на  $\pi$  при углах падения от  $\alpha_B$  до  $\frac{\pi}{2}$ .

При отражении от оптически менее плотной среды ( $\alpha < \beta$ ) фаза отраженной s- волны не изменяется, а фаза отраженной p- волны изменяется на  $\pi$  при углах падения от 0 до  $\alpha_B$  и не изменяется при углах падения от  $\alpha_B$  до  $\alpha_{np}$ . Это необычный и очень важный результат для электромагнитных волн.

### 3. Полное внутреннее отражение

Как уже отмечалось выше, при полном внутреннем отражении в формулах Френеля получаются мнимые значения амплитуд колебаний.

Френель в своих работах 1821-23гг. по формулам Френеля подробно рассмотрел этот случай и получающееся мнимое значение амплитуды колебаний интерпретировал как появление сдвига фаз  $\frac{\pi}{2}$  между двумя взаимно перпендикулярными колебаниями.

Это привело его к открытию нового вида поляризации - эллиптической (в частном случае, круговой поляризации, или поляризации по кругу), их первым в науку и ввел Френель.

Как показали более тщательные исследования, при полном внутреннем отражении электромагнитная волна всё же проходит в среду, на которую она падает. Рассмотрим это явление более подробно.

Пусть на границу раздела двух диэлектриков падает плоская монохроматическая электромагнитная волна из оптически более плотной среды в оптически менее плотную среду.

При этом на границе раздела сред для падающей, отраженной и прошедшей волн выполняются граничные условия.

Рассмотрим одно из них, а, именно, равенство тангенциальных составляющих волновых векторов (рис. 6.).

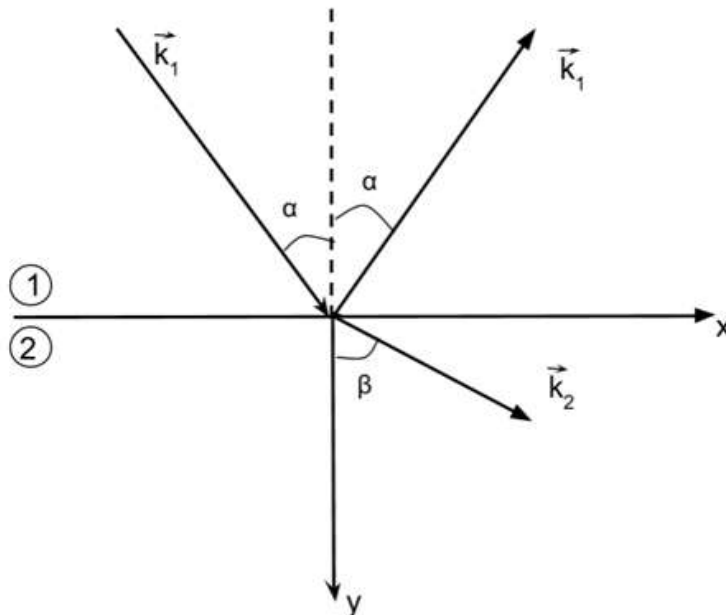


Рис. 6. Векторная диаграмма для волновых векторов прохождения границы раздела двух диэлектриков для s- и p- волн.

В этом случае выполняется равенство

$$k_{1x} = k_{1x}' = k_{2x} \quad \text{или} \quad k_1 \sin \alpha = k_1' \sin \alpha = k_2 \sin \beta,$$

где

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1}, k_1' = \frac{\omega}{v_1}, k_2 = \frac{\omega}{v_2} \text{ и } v_1 = \frac{c}{n_1}, v_2 = \frac{c}{n_2},$$

где  $n_1$  и  $n_2$  - абсолютные показатели преломления первой и второй среды соответственно.

Найдем значение у-ой компоненты волнового вектора. Из рис. 6 видим, что

$$k_{2,y} = \sqrt{k_2^2 - k_{2,x}^2}, k_{2,x} = k_{1,x} = k_1 \sin \alpha, k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \frac{\omega}{c} n_2;$$

тогда

$$k_{2,y} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}$$

При углах падения  $\alpha$ , больших  $\alpha_{np}$ .  $\sin \alpha > \frac{n_2}{n_1}$ , а поэтому выражение под знаком корня отрицательное. Поэтому для у-ой компоненты  $k_{2,y}$  запишем

$$k_{2,y} = \pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2} = \pm i \chi(\alpha),$$

где

$$\chi(\alpha) = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2}$$

Из уравнения плоской волны для нашего случая имеем

$$E_2 = E_{20} e^{-i[\omega t - (\vec{k}_2 \vec{r})]} = E_{20} e^{i(k_{2,x}x + k_{2,y}y)} e^{-i\omega t},$$

где  $E_{20} e^{i(k_{2,x}x + k_{2,y}y)}$  - комплексная амплитуда колебаний прошедшей электромагнитной волны.

В случае когда  $n_1 > n_2$  имеем, что

$$E_{20} e^{ik_{2,x}x \pm \chi(\alpha)y} = E_{20} e^{\mp \chi(\alpha)y} e^{ik_{2,x}x}.$$

При увеличении координаты у амплитуда электромагнитной волны не должна бесконечно возрастать, поэтому выбираем знак “-”. Окончательно получим, что

$$E_2 = E_{20} e^{-\chi(\alpha)y} e^{-i(\omega t - k_{2,x}x)}.$$

Получили волну, распространяющуюся в положительном направлении оси ОХ с изменяющейся амплитудой. Эффективная глубина проникновения этой волны во вторую среду

$$l_{эф.} = \frac{1}{\chi} = \frac{c}{\omega \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2}}$$

зависит от угла падения, а также от длины волны падающего электромагнитного излучения.

Экспериментальное подтверждение данного явления было дано в опытах Квинке [12] и Мандельштама и Зелени [13].

Рассмотрим теперь электромагнитные волны в первой среде для углов падения из интервала  $\alpha_{np.} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , т.е. в области полного внутреннего отражения. В этом случае

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}, \quad \sin \beta = n \sin \alpha > 1,$$

где  $n$  - относительный показатель преломления первой среды относительно второй  $n = \frac{n_1}{n_2}$ .

Получили, что  $\sin \beta$  действительный и больше единицы, что невозможно при действительном угле  $\beta$ . Поэтому  $\cos \beta = i\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}$  является чисто мнимым.

Получим теперь формулы Френеля для этого случая.

### 3.1. Случай s- волны

Согласно формуле синусов Френеля

$$\frac{E_1'}{E_1} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}.$$

Положим в этой формуле  $p_s = \sin \beta \cos \alpha$ ,  $iq_s = \cos \beta \sin \alpha$ , где  $p_s$  и  $q_s$  - действительные числа. Тогда будем иметь, что

$$\frac{E_1'}{E_1} = \frac{p_s - iq_s}{p_s + iq_s},$$

а, следовательно, коэффициент отражения  $r_s = \left| \frac{E_1'}{E_1} \right|^2 = 1$ , т.е. в этой области коэффициент отражения для всех углов падения электромагнитной волны равен единице.

Для отношения амплитуд волн имеем формулу

$$\frac{E_1'}{E_1} = e^{i\delta_s},$$

где  $\delta_s$  - набег фазы отраженной волны к падающей. Из этой формулы получим, что

$$\cos \delta_s = \operatorname{Re} \frac{E_1'}{E_1} = \frac{p_s^2 - q_s^2}{p_s^2 + q_s^2}$$

или

$$\cos \delta_s = \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta \sin^2 \alpha} = \frac{n^2 \cos^2 \alpha - (n^2 \sin^2 \alpha - 1)}{n^2 \cos^2 \alpha + (n^2 \sin^2 \alpha - 1)}.$$

После несложных преобразований имеем, что

$$\cos \delta_s = \frac{n^2 + 1 - 2n^2 \sin^2 \alpha}{n^2 - 1}.$$

В предельных значениях при  $\alpha = \alpha_{np}$  имеем  $\sin \alpha_{np} = \frac{1}{n}$ , и поэтому  $\cos \delta_s = 1$  а, значит,  $\delta_s = 0$ . При  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  имеем, что  $\cos \delta_s = -1$ , а поэтому  $\delta_s = \pi$ , т.е.  $\delta_s$  меняется от 0 до  $\pi$  при изменении угла падения  $\alpha_{np} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

### 3.2. Случай р- волны

Для отношения амплитуд отраженной волны к падающей имеем, что

$$\frac{E_1'}{E_1} = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}$$

или

$$\frac{E_1'}{E_1} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta}{\sin \alpha \cos \alpha + \cos \beta \sin \beta} = \frac{\cos \alpha - n \cos \beta}{\cos \alpha + n \cos \beta}.$$

Проведём замену  $p_p = \cos \alpha$ ,  $iq_p = n \cos \beta$ , где  $p_p$  и  $q_p$  - действительные числа. Тогда

$$\frac{E_1'}{E_1} = \frac{p_p - iq_p}{p_p + iq_p},$$

а поэтому, для коэффициента отражения получим, что

$$r_p = \left| \frac{E_1'}{E_1} \right|^2 = \frac{(p_p - iq_p)(p_p + iq_p)}{(p_p + iq_p)(p_p - iq_p)} = 1,$$

т.е. коэффициент отражения для р- волны равен единице для всех углов падения из области  $\alpha_{np} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

Отношение комплексных амплитуд для р- волны запишется в виде

$$E_1' = E_1 e^{i\delta_p},$$

где  $\delta_s$  - набег фазы отраженной волны по отношению к падающей волне, т. е.

$$\cos \delta_p = \operatorname{Re} \frac{E_1'}{E_1} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} = \frac{\cos^2 \alpha - n^2(n^2 \sin^2 \alpha - 1)}{\cos^2 \alpha + n^2(n^2 \sin^2 \alpha - 1)}$$

или окончательно

$$\cos \delta_p = \frac{n^2 + 1 - (n^4 + 1)\sin^2 \alpha}{(n^4 - 1)\sin^2 \alpha - (n^2 - 1)}.$$

При  $\alpha = \alpha_{np}$ ,  $\sin \alpha = \frac{1}{n}$ , поэтому  $\cos \delta_p = 1$ , т.е.  $\delta_p = 0$ , а при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$   $\cos \delta_p = -1$ , т.е.  $\delta_p = \pi$ . Опять, как и для s- волны  $\delta_s$  меняется от 0 до  $\pi$  при изменении угла падения  $\alpha_{np} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

Рассмотрим теперь разность фаз между отраженными р- и s- волнами. В этом случае имеем, что

$$e^{i(\delta_p - \delta_s)} = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta} = \frac{p - iq}{p + iq},$$

где  $p = \sin \alpha \sin \beta$ ,  $iq = \cos \alpha \cos \beta$ , а  $p$  и  $q$  - действительные числа. Тогда получим, что

$$\cos \delta = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} = \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \cos^2 \alpha (n^2 \sin^2 \alpha - 1)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha (n^2 \sin^2 \alpha - 1)} = \frac{1 + 2n^2 \sin^4 \alpha - (n^2 + 1) \sin^2 \alpha}{(n^2 + 1) \sin^2 \alpha - 1}$$

Для предельных углов будем иметь, что  $\alpha = \alpha_{np}$ , тогда  $\sin \alpha = \frac{1}{n}$  и

$$\cos \delta = \frac{1 + \frac{2}{n^2} - \frac{n^2 + 1}{n^2}}{\frac{n^2 + 1}{n^2} - 1} = 1, \text{ т.е. } \delta = 0.$$

Если  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , тогда  $\sin \alpha = 1$  и

$$\cos \delta = \frac{1 + 2n^2 - n^2 - 1}{n^2 + 1 - 1} = 1,$$

т.е. опять  $\delta = 0$ .

Значит,  $\delta$  изменяется от 0 до 0 при изменении угла падения от  $\alpha_{np}$  до  $\frac{\pi}{2}$ .

Найдем экстремум функции  $\cos \delta$ . Для этого заменим  $\sin^2 \alpha = x$ , тогда будем иметь, что

$$\cos \delta = f(x) = \frac{1 + 2n^2 x^2 - (n^2 + 1)x}{(n^2 + 1)x - 1}.$$

Взяв производную от  $f(x)$  и приравняв её нулю, найдем значение  $x_0$ , при котором  $f(x)$  принимает максимальное значение,  $x_0 = \frac{2}{n^2 + 1}$ .

Для границы стекло-воздух при  $n = \frac{3}{2}$  и  $x_0 = \frac{8}{13}$ , значит,  $\alpha_0 = \arcsin \sqrt{\frac{8}{13}} = 51^\circ 39'$ .

Так как в области полного внутреннего отражения  $x$  находится в интервале  $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ , то точка  $x_0$  должна быть внутри этого интервала. Проверим это,  $f(x_0) = \frac{6n^2 - n^4 - 1}{(n^2 + 1)^2}$ .

Для  $n = \frac{3}{2}$  получим  $f(x_0) = 0,704$  и  $\delta_0 = 45^\circ 14'$ , а предельный угол имеет значение  $\alpha_{np} = 41^\circ 48'$ .



Для получения поляризованной по кругу волны из линейно поляризованной, необходимо получить сдвиг фаз между отраженными р- и s- волнами, равный  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , для чего нужны два отражения, при каждом из которых сдвиг фаз будет равным  $\frac{\pi}{4}$ , что возможно при двух углах падения  $\alpha_1, \alpha_2$ , для определения которых имеем следующее уравнение:

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + 2n^2 \sin^4 \alpha - (n^2 + 1) \sin^2 \alpha}{(n^2 + 1) \sin^2 \alpha - 1}.$$

Разрешая это уравнение, получим  $\alpha_1 = 50^\circ 14'$ ,  $\alpha_2 = 53^\circ 17'$ .

Практическое применение изложенных результатов сделал уже сам Френель. Он создал так называемый ромб Френеля, фактически параллелепипед, дающий свет, поляризованный по кругу после двух внутренних отражений внутри этого параллелепипеда, в случае, если ромб Френеля освещается линейно поляризованным светом с плоскостью поляризации, составляющей угол  $\alpha = 45^\circ$  с плоскостью падения.

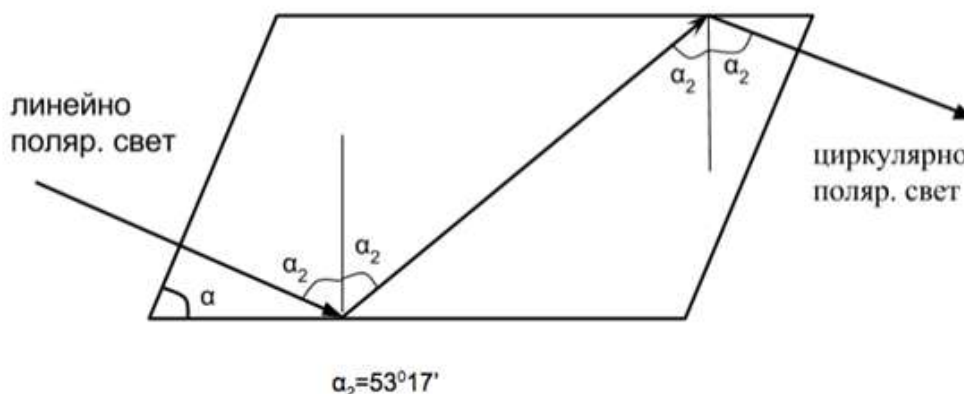


Рис. 7. Получение поляризованного по кругу света из линейно поляризованного света с помощью ромба Френеля.

Из двух углов  $\alpha_1, \alpha_2$  выбирается больший, так как это дает меньшую ошибку при небольших изменениях показателя преломления стекла от значения, принятого при вычислениях.

Мы привели неполный анализ формул Френеля, но уже он указывает на огромное значение этих формул, как для оптики, так и для развития физики в целом.

## Заключение

В истории становления физики начала, и середины XIX века формулы Френеля сыграли очень важную роль. Выводом этих формул занимались выдающиеся физики того времени и только в конце столетия формулы Френеля были выведены Лоренцем. В настоящей работе приведен еще один вывод формул Френеля с использованием электромаг-

нитной волны в виде сгустка Хевисайда. На возможность существования такой волны впервые указал Хевисайд, поэтому она носит его имя. Причем, как видно из статьи, вывод формул Френеля проще и нагляднее нежели вывод, с использованием монохроматической электромагнитной волны.

Также в работе проведен анализ данных формул, который указывает на их огромное значение как в понимании природы самих световых волн (электромагнитная волна поперечная) их прохождения границы раздела двух диэлектриков, и распространения электромагнитных волн в различных твердых телах. Особое значение в анализе формул Френеля представляет изменение фазы волны при прохождении светом границы раздела двух диэлектриков, а также проникновение света в другую среду при полном внутреннем отражении.

### Список литературы

1. Льюис М. История физики // М.: Мир, 1970, 464 с.
2. Уиттекер Э. История теории эфира и электричества // М-Ижевск: РХД, 2001, т. 1, 512 с.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды // М.: Наука, 1970, т.1, 492 с.
4. Любимов Ю.А. Джордж Грин: жизненный путь и творчество // УФН, т.164, вып. 1, 1994, 105 – 117.
5. MacCullagh J., The Collected Works, eds. J.H. Jellett, S. Haughton // Dublin, London, 1880.
6. Толмачев В.В. Основы теории относительности и проблема существования эфира // М-Ижевск: РХД, 2014, 520 с.
7. Lorentz H.A. Over de theorie der terugkaatsing en breking van het licht (Doct. diss.) // Arnhem: Van der Zande, 1875.
8. Heaviside O. Electromagnetic Theory // London, The Electrician Co, v. I, 1893, 466 p; v. II, 1899, 547 p.
9. Болотовский Б.М., Столяров С.М. Отражение света от движущегося зеркала и родственные задачи // УФН, т. 159, вып. 1, 1989, 155-179.
10. Болотовский Б.М., Серов А.В., Излучение сверхсветовых источников в вакууме // УФН, т. 175, вып. 9, 2005, 943-955.
11. Толмачев В.В., Скрипник Ф.В., Корогодина Е.В., Солдатенко И.Г. Распространение электромагнитного сгустка Хевисайда в изотропной однородной непроводящей среде // Технологии инженерных и информационных систем, вып. 4, 2015, 16-23.
12. Коробко-Стефанов А.А. К вопросу о полном отражении волн // УФН, т. 42, вып. 11, 1950, 433-461.
13. Мандельштам Л.И., Полное собрание трудов // М.: Из-во АН СССР, 1948, т. 1, 352 с.

## Heaviside's Bunch Propagating Through the Interface of Two Dielectrics: Fresnel's Equations

V.V. Tolmachev<sup>1</sup>, F.V. Skripnik<sup>1</sup>,  
E.V. Korogodina<sup>1</sup>, I.G. Soldatenko<sup>1,\*</sup>

[\\*igsoldatenko@mail.ru](mailto:igsoldatenko@mail.ru)

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

---

**Keywords:** Fresnel's equations, Heaviside's bunch, luminiferous ether, polarization, Fresnel's equations analysis

---

The paper shows deriving the Fresnel's equations using the electromagnetic wave as a Heaviside's bunch. This is a plane electromagnetic wave in form of a thin layer inside of which electric and magnetic fields are non-zero and there is no field outside of it. The wave itself moves perpendicularly to the layer, and what is more, magnetic and electric field intensity and spread velocity form the right vector triple.

The paper also conducts the analysis of Fresnel's equations. The reflection coefficients for s- and p-waves are examined for reflection from the optically denser medium and optically less dense one.

Bruster's angle at which the p-wave does not reflect and fully passes into the second medium is obtained. We have shown the wave phase shift as a result of reflection from the interface of media.

The paper shows that for the p-wave, in reflection from the denser medium the phase is changed to the opposite only when the angles are more than the Bruster's angle. And in reflection from the less dense medium the phase is unchanged when the angles are more than the Bruster's angle and is changed to the opposite only at angles less than the Bruster's angle.

The complete internal reflection angle for the less dense medium is considered separately. We have obtained the effective depth of penetration into the less dense medium as well as the possibility to turn the plane-polarized wave into the Fresnel's rhombus.

### References

1. Liozzi M. Physics history. *Mir = World*, Moscow, 1970, 464 p. [In Russian]
2. Whittaker E. The history of the theory of electricity and air. *RHD*, Moscow, Izhevsk, 2001, vol. 1, 512 p. [In Russian]
3. Sedov L.I. Continuum Mechanics. *Nauka = Science*, Moscow, 1970, vol. 1, 492 p. [In Russian]

4. Lubimov U.A. George Green: his life and works. *UFN*, vol. 164, iss. 1, 1994, p. 105–117. [In Russian]
5. MacCullagh J., *The Collected Works*, eds. J.H. Jellett, S. Haughton, Dublin, London, 1880.
6. Tolmachev V. Fundamentals of the theory of relativity and the problem of the existence of ether, *RHD*, Moscow, Izhevsk, 2014, 520 p. [In Russian]
7. Lorentz H.A. Over de theorie der terugkaatsing en breking van het licht (Doct. diss.). *Van der Zande*, Arnhem, 1875.
8. Heaviside O. Electromagnetic Theory. *The Electrician Co*, London, vol. I, 1893, 466 p; vol. II, 1899, 547 p.
9. Bolotovskiy B., Stolyarov S. Reflection of light from a moving mirror and related problems. *UFN*, vol. 159, iss. 1, 1989, p. 155-179. [In Russian]
10. Bolotovskiy B., Serov A. Radiation of superluminal sources in empty space, *UFN*, vol. 175, iss. 9, 2005, p. 943-955. [In Russian]
11. Tolmachev V., Skripnik F., Korogodina E., Soldatenko I. The Heaviside's electromagnetic Bunch Distribution in isotropic homogeneous Medium. *Technology Engineering and Information Systems*, vol. 4, 2015, p. 16-23. [In Russian]
12. Korobko-Stefanov A. On the question of the full wave reflection, *UFN*, vol. 42, iss. 11, 1950, p. 433-461. [In Russian]
13. Mandelshtam L., *Complete Works*, *Nauka = Science* [Publishing house of the USSR Academy of Sciences], Moscow, 1948, vol. 1, 352 p. [In Russian]