拡散方程式に対する逆問題について*

中村　真一**

On an inverse problem for the diffusion equation

Shin-ichi NAKAMURA

1．序論

R^n $(n \geq 2)$ において，次の放物形偏微分方程式の初期値問題を考える。

$$\partial_t u = Au + q(x)u \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{x_i x_j}^2 u + q(x)u \quad \text{in} \quad R^n \, , \qquad (1.1)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{in} \quad R^n \, , \qquad (1.2)$$

ここで，$a_{ij}(x)$ は Lipschitz 連続で次の一様楕円性の条件：

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2 > 0 \, , \qquad (1.3)$$

を満たすものとし，$q(x)$ は Lipschitz 連続かつ有界で：

$$\operatorname{supp} q \subset\subset \{x : |x| < R, \ (R > 0)\}, \qquad (1.4)$$

$$0 \notin \operatorname{supp} q \quad , \qquad (1.5)$$

なる条件を満たすものとする。

我々が考えたい逆問題とは $\{f(x)\}$ （入力データと考える）と $\{u(R\,\omega, t) : \omega \in S^{n-1}\}$ （観測データと考える）から q を決定することである。

この研究報告で示したいことは，我々が [4] において確率解析を用いて放物形方程式

$\partial_t w = \dfrac{1}{2}\Delta w + q(x)w$ の逆問題に対して得た結果が (1.1) の異方性の拡散方程式に対しても成立することを示すことである。

2．逆問題の解析

まず，(1.1)，(1.2) の解に対する確率論的表現，所謂 Feynman-Kac の公式が必要である。

補題１．(1.1)，(1.2) の解は次の確率論的表現を持つ。

$$u(x,t) = E^x\left[f(X_t)\exp\left(\int_0^t q(X_s)\,ds \right) \right], \qquad (1.6)$$

ここで，X_t は次の確率微分方程式の解である：

$$dX_t = \sigma(X_t)\,dB(t)\,, \quad X_0 = x\,, \quad \left(\sigma(x)\sigma(x)^T\right)_{ij} = a_{ij}(x)。$$

証明は[2]，[3] などを参照。

(1.6) において，$f(x) = \rho_\varepsilon(x - R\theta)$ （$\rho_\varepsilon(x)$ は mollifier である）とし，Brownian Bridge 過程を用いれば (1.6) を次のように変形することができる。

$$u(x,t) = E\left[\rho_\varepsilon(X_t - R\theta)\exp\left(\int_0^t q(X_s)\,ds \right) \right]$$

$$= \int \rho_\varepsilon(y - R\theta)\,p(x,y,t) \times E_{0,x}^{t,y}\left[\exp\int_0^t q(X_s)\,ds \right] dy \quad (1.7)$$

ここで，$p(x,y,t)$ は (1.1)，(1.2) で $q(x) \equiv 0$ としたときの基本解であり，$E_{0,x}^{t,y}$ は $t=0$ で x を出発し，$t=t$ で y に到達する Brownian Bridge 過程に対する期待値である。

(1.7) で $x = R\omega$ とし $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば

＊　原稿受付　平成 19 年 9 月 25 日

** 佐世保工業高等専門学校　一般科目

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u(R\omega,t) = p(R\omega,R\theta,t)\times E^{t,R\theta}_{0,R\omega}\left[\exp\left(\int_0^t q(X_s)\,ds\right)\right]$$

(1.8)

を得る。証明を続ける為に,次の補題が必要である。

補題２．次の等式が成立する。

$$E^{t,y}_{0,x}\left[\exp\int_0^t q(X_s)\,ds\right] = \exp\left(t\int_0^1 q(sy+(1-s)x)\,ds + o(t)\right)$$

(1.9)

証明は[1]を参照。

(1.8) と (1.9) から

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{u(R\omega,t)}{p(R\omega,R\theta,t)} = \exp\left(t\int_0^1 q(sR\theta+(1-s)R\omega)\,ds + o(t)\right)$$

であるから

$$\lim_{t\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{t}\log\left(\frac{u(R\omega,t)}{p(R\omega,R\theta,t)}\right) = \int_0^1 q(sR\theta+(1-s)R\omega)\,ds$$

を得る。
ここで $q(x)$ の supp に関する仮定 (1.4) から,
結局

$$\lim_{t\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{t}\log\left(\frac{u(R\omega,t)}{p(R\omega,R\theta,t)}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(sR\theta+(1-s)R\omega)\,ds$$

(1.10)

が任意の $(\theta,\omega)\in S^{n-1}\times S^{n-1}$ に対して成立すること

が分かる。(1.10) の右辺は $q(x)$ の X-ray 変換を表しているので,X-ray 変換と Fourier 変換のよく知られた事実から結局, 観測可能な量

$$\lim_{t\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{t}\log\left(\frac{u(R\omega,t)}{p(R\omega,R\theta,t)}\right)$$

は $q(x)$ の Fourier 変換を決定することが従う。
以上をまとめれば次の結果を得る。

結果 ：観測データ

$$\lim_{t\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{t}\log\left(\frac{u(R\omega,t)}{p(R\omega,R\theta,t)}\right) \quad \text{for} \quad \forall(\theta,\omega)\in S^{n-1}\times S^{n-1}$$

は $q(x)$ を一意的に決定する。

参考文献

[1]Albeverio, S., Blanchard, Ph., Kusuoka, S., and Streit, L., An inverse problem for stochastic differential equations, J. Statistical Physics 57(1989), 347-356.

[2] Friedman, A., Stochastic differential equations and applications Vol.1, Academic Press, 1975.

[3] Karatzas, I. and Screve, S. E., Brownian motion and stochastic calculus, Springer-Verlag, 1988.

[4] S. Nakamura, A note on an inverse parabolic problem, Nihonkai Math. J. 16(2005), 85-88.