

運動ベクトル場の推定に用いる非線形拡散項の離散化法

上山 英三

A discretization method of nonlinear diffusion terms used for estimation of motion vector fields

Eizo UHEYAMA

Abstract: In this paper, estimation of motion vector fields containing boundaries from noisy data is investigated, where the boundaries mean edges or spatial discontinuities. Then, regularization methods which can retain boundaries are required. We adopt evolution equations with non-linear diffusion terms derived from a logarithmic stabilizing functional. Estimates are obtained in the process of time evolution of the equations. Here, discretization method become critical issue. We propose a novel discretization method for these terms, which is a sort of minmax scheme. Results of simulations are displayed, where better estimates and more distinct boundaries of them are obtained with proposed method than with naive method.

1 はじめに

ランダムパターンの背景 (Fig.1(a)) の上をランダムパターンの小領域 (Fig.1(b)) が背景と異なるベクトル成分を持って移動するような動画 (Fig.2 左) を観察すると、その小領域が輪郭を伴い、背景から分離されて手前に浮かび上がって知覚される (Fig.2 右)。このような動画をランダムドットキネマトグラム (以下RDKと略記) と呼ぶ。このRDKの動きを止めると、動いているときに知覚された輪郭が消滅し、小領域が背景に紛れ込んで画面全体が一樣なランダムパターンになる¹⁾。このことから、静止画の輪郭 (エッジ) とは別に、視野内の運動ベクトル場の境界を明瞭に検出する機構が人間の視覚系にあることが分かる。

実際人間の視覚系はV1野で検出されるノイズを含んだ局所運動情報をMT野に送り、そこで全体として統合のとれた運動ベクトル場を推定している²⁾。本稿では、この処理同様、ノイズを含んだベクトルデータからノイズを除いた正しいベクトル場を推定することを目的とする。この問題の困難さは主に2つある。第

1に“ベクトル場”の推定であること、第2にそれが境界 (エッジ) を含むことである。

ノイズを含む観測データからの真値の推定は初期視覚の計算論の主要な問題であり、(標準) 正則化の枠組みで定式化されてきた³⁾⁴⁾。そこでは、適当な評価汎関数を極小にする関数 (空間パターン) が Euler 方程式を解くことで得られる。本稿では、最急降下法に従って評価汎関数の極小化を行うことを目指し、その際に導出されるフィルタ方程式を時間発展させて関数解を得る。その過程は空間パターンの自己組織化に他ならない。なお、境界を含むスカラー場 (濃淡値等) の推定の例は多々ある⁴⁾が、本稿のようにベクトル場の推定を扱った例は少ないことを付記しておく。

本稿では、評価汎関数から変分原理によって導出される、フィルタ方程式の非線形拡散項について新たな空間離散化法を提案する。様々な方向を持つベクトル場の境界を明瞭に検出するために、ナイーブな平均化法ではなく、minmax法と呼ぶ離散化スキームを提案する。それをフィルタ方程式に組み込むことで、良好なベクトル場の推定値とその明瞭な境界が得られることをシミュレーションによって確認する。またその作用原理を明らかにするためのヒントについて言及する。

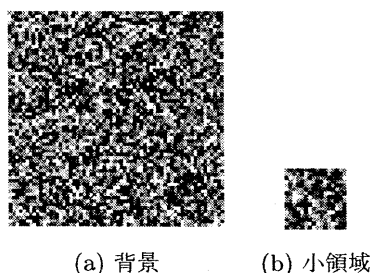


Fig. 1 RDKの生成に用いられるランダムパターン

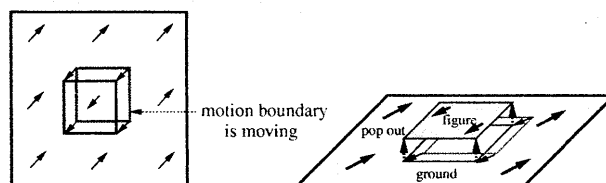


Fig. 2 平行移動に基づくRDKとポップアウト知覚

2 ベクトル場の推定の方法

2.1 フィルタ方程式

2次元平面 (x, y) 上のベクトル場の真値を

$$\bar{\mathbf{u}}(x, y) = [\bar{u}(x, y), \bar{v}(x, y)]^T \quad (1)$$

とする。この真値には境界（空間的不連続：エッジ）が含まれるものとする。その真値にノイズ

$$\mathbf{n}(x, y) = [n_1(x, y), n_2(x, y)]^T \quad (2)$$

が付加された観測値

$$\tilde{\mathbf{u}}(x, y) = \bar{\mathbf{u}}(x, y) + \mathbf{n}(x, y) \quad (3)$$

が検出されるものとする。この観測値をもとに推定値

$$\hat{\mathbf{u}}(x, y) = [\hat{u}(x, y), \hat{v}(x, y)]^T \quad (4)$$

を求める。なお、ノイズについて、座標上の同一点上で n_1 と n_2 は互いに無相関、かつ、それらはそれぞれ空間的にも無相関と仮定する。

境界を保持できる様々な正則化法⁴⁾の中で、本稿では

$$\eta \triangleq \hat{u}_x^2 + \hat{u}_y^2 + \hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2 \quad (5)$$

を対数の引数に含む評価汎関数（下添字は偏微分を表す）

$$W = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \{a \|\hat{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}\|^2 + \log(\eta + \sigma^2)\} dx dy \quad (6)$$

を用いる。これは Cauchy 分布に基づく Markov 確率場⁵⁾の尤度関数をベクトル場の場合に拡張したものであり、平滑化（ノイズ除去）と境界の明瞭な検出を同時に行う優れたモデルである。アドホックなエネルギー関数を要する方法⁶⁾に比べてパラメータの数も少なく済む。ここで σ は Cauchy 分布のパラメータ、 a はバランスパラメータであり、 Ω は画像平面全体である。

汎関数 (6) を極小にする関数 \hat{u}, \hat{v} を最急降下法

$$\tau \dot{\hat{u}} = -\frac{\delta W}{\delta \hat{u}}, \quad \tau \dot{\hat{v}} = -\frac{\delta W}{\delta \hat{v}} \quad (7)$$

の時間発展結果である定常解として求める。ここで、 τ は時定数、 δ は汎関数微分を表す。具体的には、その時間発展過程が、 \hat{u}, \hat{v} それぞれに関するフィルタ方程式

$$\tau \dot{\hat{u}} = -a(\hat{u} - \tilde{u}) + \left(\frac{\hat{u}_x}{\eta + \sigma^2} \right)_x + \left(\frac{\hat{u}_y}{\eta + \sigma^2} \right)_y \quad (8)$$

$$\tau \dot{\hat{v}} = -a(\hat{v} - \tilde{v}) + \left(\frac{\hat{v}_x}{\eta + \sigma^2} \right)_x + \left(\frac{\hat{v}_y}{\eta + \sigma^2} \right)_y \quad (9)$$

で表現され、この時間発展により推定値が得られる。

2.2 空間微分の離散化

方程式 (8)(9) の空間離散化の際、まず空間 1 次微分を

$$p_{ij} = (\hat{u}_{ij} - \hat{u}_{i-1j})^2 + (\hat{v}_{ij} - \hat{v}_{i-1j})^2 \simeq \hat{u}_x^2 + \hat{v}_x^2 \quad (10)$$

$$q_{ij} = (\hat{u}_{ij} - \hat{u}_{ij-1})^2 + (\hat{v}_{ij} - \hat{v}_{ij-1})^2 \simeq \hat{u}_y^2 + \hat{v}_y^2 \quad (11)$$

のように差分近似し（空間刻み幅は 1）、方程式 (8)(9) を

$$\tau \dot{\hat{u}}_{ij} = -a(\hat{u}_{ij} - \tilde{u}_{ij}) + X_{i+1j}^u - X_{ij}^u + Y_{ij+1}^u - Y_{ij}^u \quad (12)$$

$$\tau \dot{\hat{v}}_{ij} = -a(\hat{v}_{ij} - \tilde{v}_{ij}) + X_{i+1j}^v - X_{ij}^v + Y_{ij+1}^v - Y_{ij}^v \quad (13)$$

と表記する。ここで $*$ が u または v を表すとして、

$$X_{ij}^* = \frac{\hat{*}_{ij} - \hat{*}_{i-1j}}{p_{ij} + \hat{q}_{ij} + \sigma^2}, \quad Y_{ij}^* = \frac{\hat{*}_{ij} - \hat{*}_{ij-1}}{q_{ij} + \hat{p}_{ij} + \sigma^2} \quad (14)$$

とする。このとき注意すべきは、 X_{ij}^* において q_{ij} の値を、 Y_{ij}^* においては p_{ij} の値をそのまま代入できないことである。なぜなら、 X_{ij}^* の差分は全て縦方向の境界 p 上で定義されねばならず、同様に Y_{ij}^* の差分は全て横方向の境界 q 上で定義されねばならないからである。

ここで、対称性を考慮し、式 (14) の X_{ij}^* においては、 p_{ij} に最も近い 4 つの q の近傍要素 $q_{i-1j}, q_{ij}, q_{i-1j+1}, q_{ij+1}$ から p_{ij} の位置での y 方向の差分を表す \hat{q}_{ij} を適切に定める (Fig.3 左)。同様に、 Y_{ij}^* においては、 q_{ij} の最近隣 4 近傍の p 要素 $p_{ij-1}, p_{ij}, p_{i+1j-1}, p_{i+1j}$ から q_{ij} の位置での x 方向の差分 \hat{p}_{ij} を定める (Fig.3 右)。

ここで、4 つの近傍の平均値を用いるナイーブな方法

$$\hat{p}_{ij} = (p_{ij-1} + p_{ij} + p_{i+1j-1} + p_{i+1j})/4 \quad (15)$$

$$\hat{q}_{ij} = (q_{i-1j} + q_{ij} + q_{i-1j+1} + q_{ij+1})/4 \quad (16)$$

が最初に考えられるが、本稿では Fig.3 左右のように、点線矢印の間の最小値同士の最大値を取る方法

$$\hat{p}_{ij} = \max\{\min(p_{ij-1}, p_{ij}), \min(p_{i+1j-1}, p_{i+1j})\} \quad (17)$$

$$\hat{q}_{ij} = \max\{\min(q_{i-1j}, q_{ij}), \min(q_{i-1j+1}, q_{ij+1})\} \quad (18)$$

を、試行錯誤の末に、良好な方法として提案する。

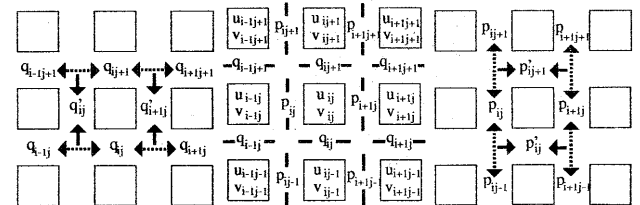


Fig. 3 境界要素を 4 近傍の異なる境界要素で代用する方法

3 シミュレーション結果

以下で、式(15)(16)を用いた場合と式(17)(18)を用いた場合のシミュレーション結果を比較検討する。

Fig.4左は推定対象であるベクトル場の真値 \bar{u} であり、その中心の円形領域内のベクトル成分は $[1, 1]^T$ 、他の周辺部分上の成分は $[-1, 0]^T$ である。Fig.4右は真値に標準偏差 0.4 の正規乱数を付加した仮想的な観測値 \hat{u} である。2次元画面は正方形とし、これは $N \times N$ の正方領域からなるものとする。ここでは、 $N = 21$ とする。なお、円形領域を与えた理由は、これが垂直・水平及び斜めのあらゆる方向の境界を持つためである。

上記の観測値をもとに、フィルタ方程式(8)(9)を用いて真値を推定する。このときのパラメータは $\sigma = 0.1$ 、 $a = 3.5$ 、 $\tau = 10$ 、また時間刻み幅を 0.01 とする。 \hat{u} 、 \hat{v} の初期値を共に 0 とし、Neumann 境界条件を用いて、離散化された方程式(12)(13)を時間発展させる。

Fig.6(a)(b)は式(14)中で式(15)(16)を用いて得られたベクトル場の推定値とその境界である。同様に、Fig.7(a)(b)は式(17)(18)を用いて得られたベクトル場の推定値とその境界である。上の段から下の段に行くに従って時間が推移しており、それぞれ、 $t = 0.2, 0.4, 0.8, 1.6, 3.2, 6.4$ だけ時間が経過したときに得られた推定結果が示されている。なお、境界については、正規化

$$P_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{ij} + \sigma^2} \quad (0 \leq P_{ij} < 1) \quad (19)$$

$$Q_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_{ij} + \sigma^2} \quad (0 \leq Q_{ij} < 1) \quad (20)$$

を施したものを表示している。明るく表示された小さな長方形領域においては P 及び Q の値が 1 に近く、濃い灰色で表示された部分は 0 に近い値を持っている。小さな黒い正方領域は境界要素でない画素領域である。

Fig.6を見ると、斜め方向の境界が明瞭に検出されておらず、したがって、その付近のベクトル場も真値と異なるものが見受けられる。一方、Fig.7を見ると、あ

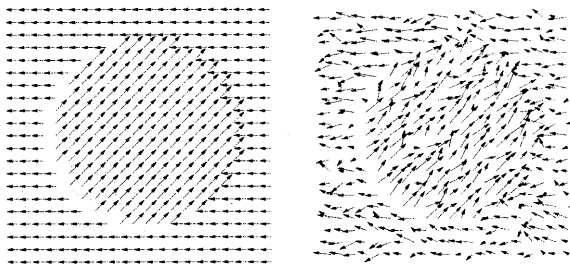


Fig. 4 ベクトル場の真値及び正規乱数の加わった観測値

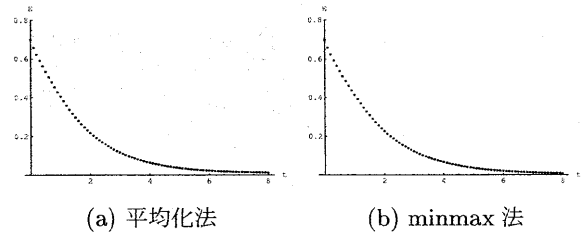


Fig. 5 平均二乗誤差の時間推移

らゆる方向の境界が明瞭に検出され、境界付近のベクトル場も正しく推定されている。この点で提案法のスキーム(17)(18)は優れていると言える。

次に定量評価として推定値と真値の間の平均二乗誤差

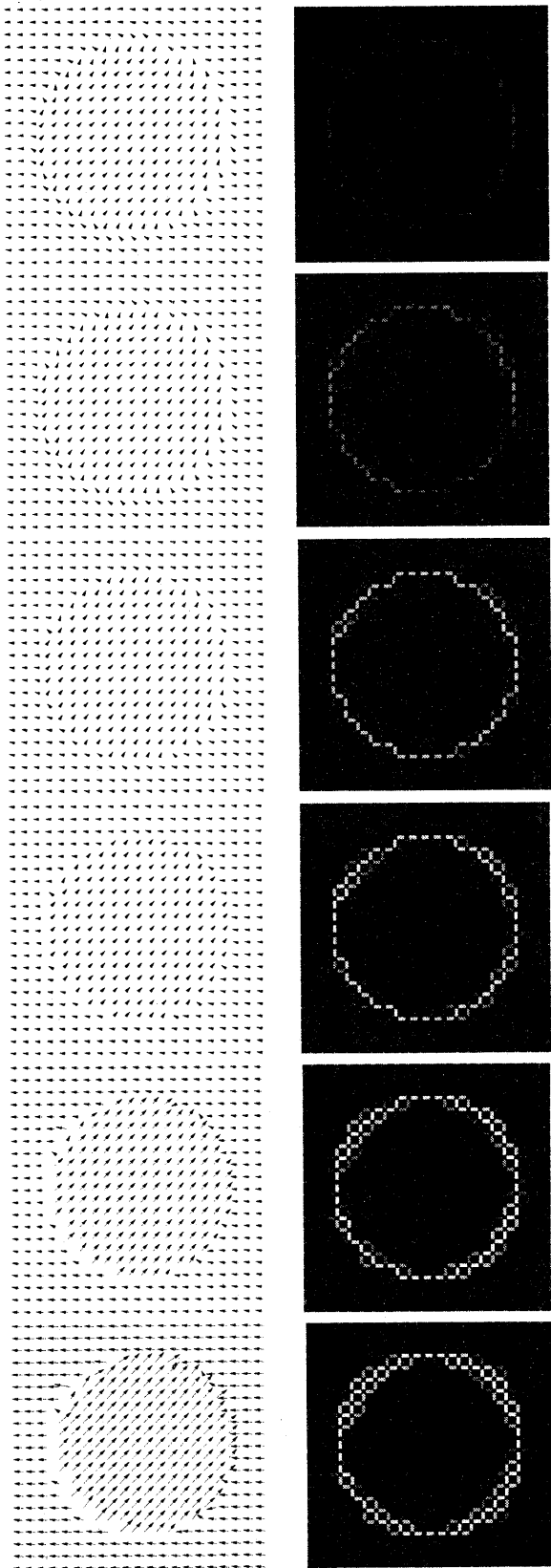
$$E = \frac{1}{2N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{(\hat{u}_{ij} - \bar{u}_{ij})^2 + (\hat{v}_{ij} - \bar{v}_{ij})^2\} \quad (21)$$

の時間変化を Fig.5 に示す。Fig.5(a)は式(15)(16)を用いたときの結果であり、Fig.5(b)は式(17)(18)を用いたときの結果である。双方とも時定数 $\tau = 10$ よりも短い $t = 8$ 程度の時間で誤差が 0 にほぼ収束している。双方の間で大きな差は見られないが、 $t = 6$ 以降の時間帯では提案法によるものの誤差の方が若干小さいと言える。大きな差が現れないのは、境界部分の画面全体に占める割合が小さいからである。しかし、画像認識を行う上では、殆どの情報が境界付近に集約されており、この情報をもとにあらゆる処理や判断が行われる。そこで、画像平面全体で定義される評価量ではなく、境界の近傍でその出現箇所の正誤を定量的に評価する方法を導入する必要がある。例として、次に示すような正規化された誤り確率が考えられる。

まず、ベクトル場の真値から計算される p_{ij} 及び q_{ij} の値を式(19)(20)に与え、そこで得られる P_{ij} 及び Q_{ij} の値の中で 1 に近いものの個数を N_t とする。これは、真値の境界の個数である。一方、フィルタ方程式の反復により得られる推定値から p_{ij} 及び q_{ij} の値を求め、それを式(19)(20)に与えて P_{ij} 及び Q_{ij} の値を求める。このとき未検出、即ち、真値では 1 に近い値であるはずなのに、推定値では 1 に大きく満たない値を持つものの数を N_u とし、誤検出、即ち、真値では 1 に大きく満たない値のはずなのに推定値では 1 に近い値を持つものの数を N_e とする。正規化誤り確率 P_n は

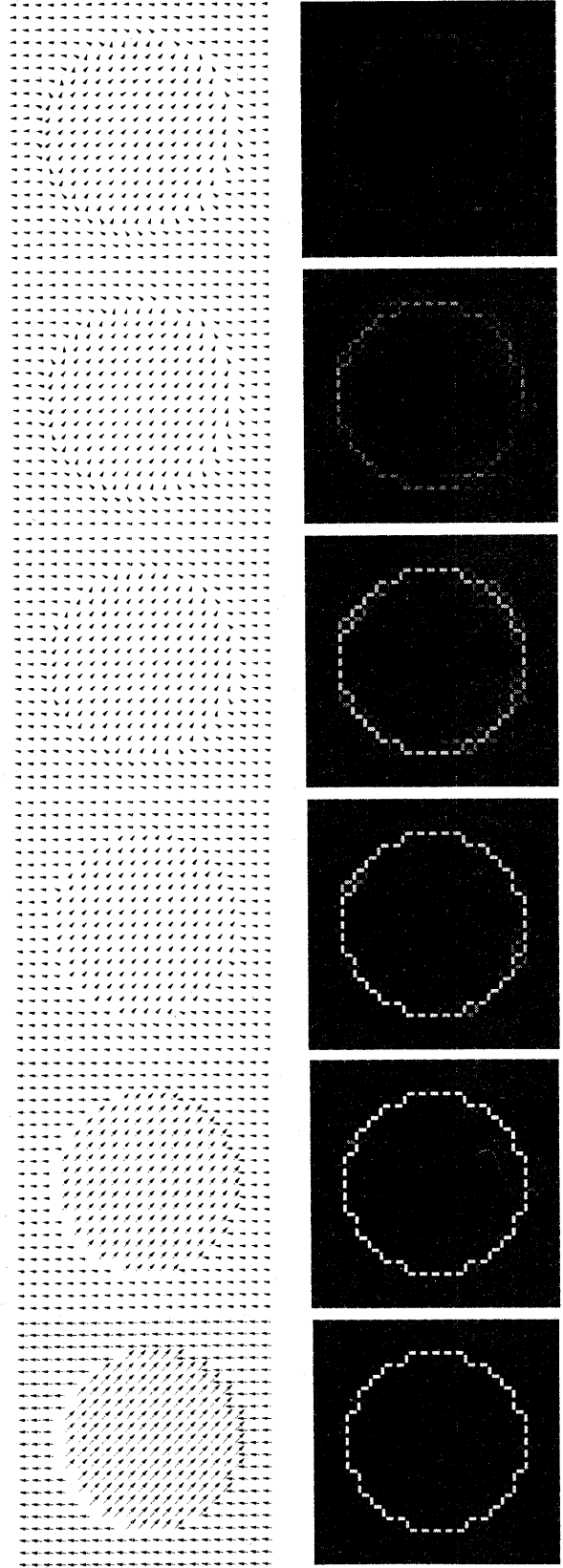
$$P_n = (N_u + N_e)/N_t \quad (22)$$

で定義できる。これを用いた評価の実現が課題となる。



(a) ベクトル場の推定値 (b) 推定値の境界

Fig. 6 平均化法を用いた場合の時間発展結果



(a) ベクトル場の推定値 (b) 推定値の境界

Fig. 7 minmax 法を用いた場合の時間発展結果

4 考察—シグモイド関数による近似—

変数 z , パラメータ μ を持つシグモイド関数は

$$g(z; \mu) = \frac{1}{1 + \exp(-2\mu z)} \quad (23)$$

と表現できる. μ を 0.5, 1.0, 2.0, 4.0, 8.0, 16.0 と変化させたときのグラフを Fig.8 に示す (中心部の傾きの緩やかな方から $\mu = 0.5, 1.0, \dots$ である).

式 (23) で極限操作 $\mu \rightarrow \infty$ を行うと Heaviside 関数

$$H(z) = \begin{cases} 1 & (z \geq 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases} \quad (24)$$

が得られる. 同様に最大値及び最小値をとる関数

$$\max(z_1, z_2) = \begin{cases} z_1 & (z_1 \geq z_2) \\ z_2 & (z_1 < z_2) \end{cases} \quad (25)$$

$$\min(z_1, z_2) = \begin{cases} z_2 & (z_1 \geq z_2) \\ z_1 & (z_1 < z_2) \end{cases} \quad (26)$$

は Heaviside 関数 (24) を用いてそれぞれ

$$\max(z_1, z_2) = z_1 H(z_1 - z_2) + z_2 H(z_2 - z_1) \quad (27)$$

$$\min(z_1, z_2) = z_1 H(z_2 - z_1) + z_2 H(z_1 - z_2) \quad (28)$$

と表現される. ここで, μ をパラメータとして持つ関数

$$M_a(z_1, z_2; \mu) \triangleq z_1 g(z_1 - z_2; \mu) + z_2 g(z_2 - z_1; \mu) \quad (29)$$

$$M_i(z_1, z_2; \mu) \triangleq z_1 g(z_2 - z_1; \mu) + z_2 g(z_1 - z_2; \mu) \quad (30)$$

を定義すると, 極限操作により最大値・最小値関数が

$$\max(z_1, z_2) = M_a(z_1, z_2; \infty) \quad (31)$$

$$\min(z_1, z_2) = M_i(z_1, z_2; \infty) \quad (32)$$

と表現できる. ここでさらに 4 変数の関数

$$f(z_1, z_2, z_3, z_4; \mu) = M_a(M_i(z_1, z_2; \mu), M_i(z_3, z_4; \mu); \mu) \quad (33)$$

を定義すると, 式 (31)(32) より,

$$f(z_1, z_2, z_3, z_4; \infty) = \max(\min(z_1, z_2), \min(z_3, z_4)) \quad (34)$$

となり, これは式 (17)(18) に帰着される. 一方,

$$M_a(z_1, z_2; 0) = M_i(z_1, z_2; 0) = (z_1 + z_2)/2 \quad (35)$$

となる (ここで, $g(z; 0) = 1/2$ を用いた.). 故に,

$$f(z_1, z_2, z_3, z_4; 0) = (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)/4 \quad (36)$$

となり, これは式 (15)(16) に帰着される.

以上により, 両スキームがパラメータ μ を用いて統一的に表現でき, 連続的な分析が可能となった. これにより最適性の考察も可能になる.

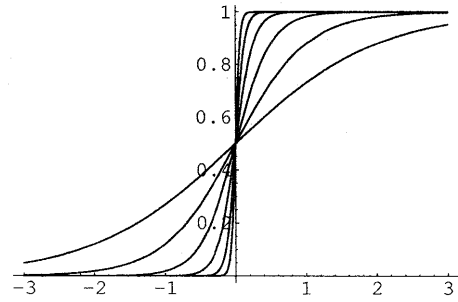


Fig. 8 シグモイド関数のグラフ

5 まとめ

本稿では, 空間 1 次微分の二乗和を対数の引数として持つ被積分関数から成る安定化汎関数を用い, それから汎関数微分によって導出される非線形拡散項の空間離散化法について考察した. 本稿で minmax 法と呼ぶ提案法により, ノイズを含む観測値から境界を含む時変な運動ベクトル場が良好に推定され, またその境界が明確に得られることが示された. 特に境界の明瞭な検出に関して, 従来法におけるナイーブな平均化法よりも提案法が優れていることが示された. この理由を明らかにする手がかりとして, minmax 法と平均化法を 1 パラメータで連続的に統一的に表現する方法について考察した. これを元に, 空間離散化法の最適性を論じることが今後の課題である.

参考文献

- [1] 上山, 湯浅, 細江, 伊藤, "反応拡散方程式を用いた動きによる図地分離—形成されたパターンの界面と主観的輪郭—," 電子情報通信学会論文誌 (D-II), **J81-D-II-12**, 2767/2778, 1998
- [2] 平井, "視覚と記憶の情報処理," 培風館, 1995
- [3] T.Poggio et.al., "Computational vision and regularization theory," *Nature*, **317**, 314/317, (1985)
- [4] S.Teboul et.al., "Variational Approach for Edge-Preserving Regularization Using Coupled PDE's," *IEEE Trans. Image Processing*, **7-3**, 387/397, 1998
- [5] 土屋, 中西, "不連続を含む確率場のベイズ推定," 計測自動制御学会論文集, **28-4**, 514/518, 1992
- [6] S.Geman et.al., "Stochastic Relaxation, Gibbs Distribution, and the Bayesian Restoration of Images," *IEEE Trans. PAMI-6-6*, 721/741, 1984