4. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Науковий вісник НЛТУ України
Scientific Bulletin of UNFU
http://nv.nltu.edu.ua
https://doi.org/10.15421/40290322
Article received 22.04.2019 р.
Article accepted 25.04.2019 р.
УДК 536.24

CC BY

ISSN 1994-7836 (print)
ISSN 2519-2477 (online)

@ ✉ Correspondence author
V. I. Havrysh
gavryshvasyl@gmail.com

В. І. Гавриш, О. С. Король, О. М. Уханська, І. Г. Козак, О. В. Куспиш

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ РЕЖИМІВ У БІПЛАСТИНІ, ЗУМОВЛЕНИХ ТОЧКОВИМ ДЖЕРЕЛОМ ТЕПЛА

Розроблено математичну модель визначення температурних режимів у ізотропній двошаровій пластині, яка нагрівається точковим джерелом тепла, зосередженим на поверхнях спряження шарів. Для цього з використанням теорії узагальнених функцій коефіцієнт теплопровідності матеріалів шарів пластини зображено як єдине ціле для всієї системи. З огляду на це, замість двох рівнянь теплопровідності для кожного із шарів пластини та умов ідеального теплового контакту, між ними отримано одне рівняння теплопровідності в узагальнених похідних із сингулярними коефіцієнтами. Для розв'язування крайової задачі теплопровідності, що містить це рівняння та крайові умови на межових поверхнях пластини, використано інтегральне перетворення Фур'є, внаслідок чого отримано аналітичний розв'язок задачі в зображеннях. До цього розв'язку застосовано обернене інтегральне перетворення Фур'є, яке дало змогу отримати остаточний аналітичний розв'язок вихідної задачі. Отриманий аналітичний розв'язок подано у вигляді невласного збіжного інтегралу. За методом Сімпсона отримано числові значення цього інтегралу з певною точністю для заданих значень товщини шарів, просторових координат, питомої потужності точкового джерела тепла і коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів пластини. Матеріалом першого шару пластини є мідь, а другого – алюміній. Для визначення числових значень температури в наведеній конструкції, а також аналізу температурних режимів, що виникають через нагрівання точковим джерелом тепла, зосередженим на поверхнях спряження шарів пластини, розроблено обчислювальні програми. Із використанням цих програм наведено графіки, що відображають поведінку кривих, побудованих із використанням числових значень розподілу температури залежно від просторових координат. Отримані числові значення температури свідчать про відповідність розробленої математичної моделі аналізу температурних режимів у двошаровій пластині з точковим джерелом тепла, зосередженим на поверхнях спряження її шарів, реальному фізичному процесу. Програмні засоби також дають змогу аналізувати такого роду неоднорідні середовища щодо їх термостійкості. Як наслідок, можливо її підвищити і цим самим захистити від перегрівання, яке може спричинити руйнування як окремих елементів, так і всієї конструкції загалом.

Ключові слова: ізотропна двошарова пластина; теплопровідність; температурне поле; теплоізольована поверхня; ідеальний тепловий контакт.

Вступ. Моделювання процесів теплопровідності є важливим розділом теоретичних і практичних досліджень. Побудова розв'язків для задач теплоперенесення має наукове, практичне та економічне значення. Температурні режими конструкцій пристроїв значною мірою визначають їхні якісні та кількісні параметри і характеризуються температурними полями або величинами, які визначаються з цих полів, а саме: значеннями абсолютних температур, перепадами температур у просторі й часі, поведінкою температури та її градієнтів на межових поверхнях та поверхнях спряження різнорідних елементів конструкцій пристроїв із довільно заданими крайовими умовами, часом встановлення заданого розподілу температур або її перепадів. Розподіл температурних полів у просторі та часі отримують, досліджуючи математичні моделі явища теплоперенесення як результат аналітичного або числового розв'язування чи проведення експерименту з фізичною моделлю. У деяких випадках математичне моделювання є єдиним джерелом інформації про температурні поля конструкцій пристроїв. Жодне з явищ перенесення не дає таких багатих і глибоких відомостей про коливання ґратки,

Інформація про авторів:

Гавриш Василь Іванович, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення. **Email:** gavryshvasyl@gmail.com; https://orcid.org/0000-0003-3092-2279

Король Олександр Сергійович, ст. викладач, кафедра фізичного виховання. **Email:** korol_lofkk@i.ua

Уханська Оксана Михайлівна, канд. фіз.-мат. наук, доцент, кафедра прикладної математики. **Email:** oksana.m.ukhanska@lpnu.ua; https://orcid.org/0000-0003-4408-5491

Козак Іван Герасимович, ст. викладач, кафедра фізичного виховання. **Email:** gavryshvasyl@gmail.com

Куспиш Олександр Володимирович, викладач, кафедра фізичного виховання. **Email:** gavryshvasyl@gmail.com

Цитування за ДСТУ: Гавриш В. І., Король О. С., Уханська О. М., Козак І. Г., Куспиш О. Л. Математична модель визначення температурних режимів у біпластині, зумовлених точковим джерелом тепла. Науковий вісник НЛТУ України. 2019, т. 29, № 3. С. 104–107.

Citation APA: Havrysh, V. I., Korol, O. S., Ukhanska, O. M., Kozak, I. G., & Kuspysh, O. V. (2019). Mathematical model for the determination of temperature modes in the biplast, determined by the different source of heat. *Scientific Bulletin of UNFU, 29*(3), 104–107. https://doi.org/10.15421/40290322

про збуджені стани електронів та їхню взаємодію із ґраткою в напівпровідниках, як теплопровідність.

Особливого значення для виробництва пристроїв сучасної техніки набувають композитні матеріали, серед яких важливе місце мають кусково-однорідні структури (шаруваті структури, однорідні та шаруваті структури з чужорідними включеннями), які широко застосовують в інтегральних сенсорах для моніторингу температури і вологості, у світловипромінювальних елементах для динамічних світлодіодних підсвіток, у температурних перетворювачах, селективних оптичних фільтрах тощо. Проектування наведених складних електронних, оптичних та електромеханічних систем кусково-однорідної структури, які часто функціонують в умовах інтенсивного нагрівання чи охолодження, полягає не тільки в оптимізації їхніх параметрів, але й у забезпеченні їхньої стабільної роботи, високої надійності та теплової стійкості. Із ростом потужностей та інтеграції таких систем ускладнюється проблема термостійкості до теплових навантажень їх конструкцій, які частково або цілком виходять із ладу внаслідок теплових перевантажень.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Визначення температурних режимів як в однорідних, так і в неоднорідних конструкціях привертає увагу багатьох дослідників (Carpinteri & Paggi, 2008; Noda, 1991; Otao, Tanigawa & Ishimaru, 2000; Tanigawa, Akai & Kawamura, 1996; Tanigawa & Otao, 2002; Yangian & Daihui, 2009; Nemirovskii & Iankovskii, 2008).

У роботі (Havrysh & Fedasjuk, 2012) сформульовано тривимірну задачу стаціонарної теплопровідності для шаруватої пластини зі сталою та змінною товщиною шарів, яку методом початкових функцій зведено до двовимірної. Для пластини зі змінною товщиною шарів отримано систему рівнянь зі змінними коефіцієнтами, а для пластини зі сталою товщиною шарів – розв'язок в аналітичній формі. Показано, що цей розв'язок збігається з розв'язком, отриманим методом розділення змінних.

Розроблено методи розв'язування лінійних та нелінійних крайових задач теплопровідності для однорідних та шаруватих 2D середовищ із теплоактивними включеннями. Наведено низку побудованих математичних моделей визначення температурних полів у таких середовищах. Запропоновано способи лінеаризації нелінійних крайових задач теплопровідності у термочутливих кусково-однорідних середовищах та наведено математичні моделі аналізу температурних режимів для лінійно змінного коефіцієнта теплопровідності від температури у цих системах (Podstrigach, Lomakin & Koliano, 1984). У роботах (Koliano, 1992; Korn & Korn, 1977) наведено загальні рівняння теплопровідності для неоднорідних середовищ.

Огляд основних літературних джерел показав, що малодослідженими та не розробленими залишилися моделі, які б враховували кусково-однорідну структуру конструкцій, які функціонують у режимах температурних збурень, обумовлених локально зосередженими джерелами тепла. Це приводить до розроблення математичних моделей визначення та аналізу температурних режимів у елементах складних електронних і електромеханічних систем, які геометрично описують у вигляді шаруватих середовищ. Результати досліджень температурних полів у таких конструкціях використовують надалі для проектування наведених систем щодо їх термостійкості.

Метою дослідження є розроблення математичної моделі визначення та аналізу температурних режимів у двошаровій пластині, зумовлених точковим джерелом тепла, зосередженим на поверхнях спряження шарів. Це дасть змогу підвищити точність визначення температурних полів у неоднорідних середовищах і ефективність методів проектування складних систем.

Об'єкт дослідження та його математична модель. Розглянемо ізотропну відносно теплофізичних параметрів двошарову пластину товщиною 2δ з теплоізольованими лицевими поверхнями $|z| = \delta$, яка складається із двох різнорідних шарів, що відрізняються геометричними (шириною) та теплофізичними (коефіцієнтом теплопровідності) параметрами, віднесену до декартової прямокутної системи координат (x, y, z). Початок її, де зосереджено точкове джерело тепла з потужністю $q_0 = const$, вибрано на поверхні спряження шарів $K_0 = \{(x,0,z) : |x| < \infty, |z| \le \delta\}$, на якій існує ідеальний тепловий контакт $t_1(x,y) = t_2(x,y)$, $\lambda_1 \frac{\partial t_1(x,y)}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial t_2(x,y)}{\partial y}$ для $y = 0$ (1,2 – для першого та другого шарів пластини відповідно). Межові поверхні $K_1 = \{(x,-y_1,z) : |x| < \infty, |z| \le \delta\}$ та $K_2 = \{(x,y_2,z) : |x| < \infty, |z| \le \delta\}$ пластини є теплоізольованими (рис. 1).

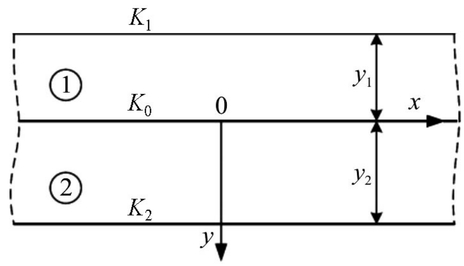

Рис. 1. Переріз ізотропної пластини площиною $z = 0$

У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури $t(x, y)$ за просторовими координатами, який отримуємо, розв'язавши рівняння теплопровідності (Koliano, 1992; Korn & Korn, 1977)

$$\lambda(y)\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}[\lambda(y)\frac{\partial t}{\partial y}] = -q_0\delta(x,y) \qquad (1)$$

з крайовими умовами

$$t\,|_{|x|\to\infty} = t_c\,, \quad \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=-y_1} = \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=y_2} = 0, \qquad (2)$$

де: $\lambda(y)$ – коефіцієнт теплопровідності неоднорідної пластини,

$$\lambda(y) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)S_+(y); \qquad (3)$$

λ_1 і λ_2 – коефіцієнти теплопровідності матеріалів 1-го та 2-го шарів пластини відповідно; t_c – температура навколишнього середовища; $S_+(\xi)$ – асиметрична одинична функція (Kikoin, 1976),

$$S_+(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0, & \zeta \le 0; \end{cases}$$

$\delta(\zeta) = \frac{dS(\zeta)}{d\zeta}$ – дельта-функція Дірака; $S(\xi)$– симетрична одинична функція (Kikoin, 1976),

$$S(\zeta)=\begin{cases}1, & \zeta>0,\\ 0,5, & \zeta=0,\\ 0, & \zeta<0.\end{cases}$$

Введемо функцію

$$T(x,y)=\lambda(y)\theta(x,y) \qquad (4)$$

і продиференціюємо її за змінними x та y з урахуванням виразу для коефіцієнта теплопровідності $\lambda(y)$ (3). Тоді отримаємо

$$\lambda(y)\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial T}{\partial y}-(\lambda_2-\lambda_1)\theta\big|_{y=0}\delta_+(y);\quad \lambda(y)\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial x}. \qquad (5)$$

де $\theta(x,y)=t(x,y)-t_c$ – збиткова температура; $\delta_+(\zeta)=\dfrac{dS_+(\zeta)}{d\zeta}$ – асиметрична дельта-функція Дірака (Kikoin, 1976).

Підставивши вирази (5) у співвідношення (1), одержимо диференціальне рівняння з частковими похідними із сингулярними коефіцієнтами

$$\Delta T-(\lambda_2-\lambda_1)\overline{\theta}\big|_{y=0}\delta'_+(y)=-q_0\delta(x,y), \qquad (6)$$

де Δ – оператор Лапласа в декартовій прямокутній системі координат, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Отже, шукане температурне поле в наведеній системі цілком визначається рівнянням (6) із крайовими умовами (2).

Аналітичний розв'язок. Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатою x до рівняння (6) і крайових умов (2) із урахуванням співвідношення (4), доходимо до звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2\overline{T}}{dy^2}-\xi^2\overline{T}=(\lambda_2-\lambda_1)\overline{\theta}\big|_{y=0}\delta'_+(y)-\frac{q_0}{\sqrt{2\pi}}\delta(y) \qquad (7)$$

з крайовими умовами

$$\left.\frac{d\overline{T}}{dy}\right|_{y=-y_1}=\left.\frac{d\overline{T}}{dy}\right|_{y=y_2}=0, \qquad (8)$$

де: $\overline{T}(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}T(x,y)d\xi$; – трансформанта функції $T(x,y)$; ξ – параметр інтегрального перетворення Фур'є, $i^2=-1$.

Загальний розв'язок рівняння (7) знайдемо за допомогою методу варіації сталих у вигляді

$$\overline{T}(y)=c_1e^{\xi y}+c_2e^{-\xi y}+$$
$$+(\lambda_2-\lambda_1)\overline{\theta}\big|_{y=0}ch\xi yS_+(y)-\frac{q_0}{\xi\sqrt{2\pi}}sh\xi yS(y), \qquad (9)$$

де c_1,c_2 – сталі інтегрування.

Величину $\overline{\theta}\big|_{y=0}$ визначаємо з виразу (9) у вигляді

$$\overline{\theta}\big|_{y=0}=\frac{1}{\lambda_1}(c_1+c_2).$$

Використавши крайові умови (8) для визначення сталих інтегрування, отримаємо розв'язок задачі (7), (8)

$$\overline{T}=\frac{q_0}{\xi\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{ch\xi y_2}{\Delta}\cdot K_\Sigma-sh\xi yS(y)\right\}, \qquad (10)$$

де: $\Delta=sh\xi(y_1+y_2)+(K_\lambda-1)sh\xi y_2ch\xi y_1$, $K_\lambda=\lambda_2/\lambda_1$ – коефіцієнт, який характеризує відносну теплопровідність шарів пластини; $K_\Sigma=ch\xi(y+y_1)+(K_\lambda-1)ch\xi y_1ch\xi yS_+(y)$.

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (10), одержимо розв'язок задачі (1), (2) у вигляді

$$T(x,y)=\frac{q_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\xi x}{\xi}\left\{\frac{ch\xi y_2}{\Delta}\cdot K_\Sigma-sh\xi yS(y)\right\}d\xi. \qquad (11)$$

Отже, шукане температурне поле у двошаровій пластині, зумовлене зосередженим на поверхнях спряження шарів пластини точковим джерелом тепла, виражено формулою (13), з якої отримуємо значення температури в довільній точці конструкції "біпластина".

Аналіз числових результатів. Виконано числовий аналіз температури $\theta(x,y)$ у двошаровій пластині для таких вихідних даних: матеріали пластини – мідь ($\lambda_1=395$ вт/(м·град) за температури $t=20^0C$) для першого шару та алюміній ($\lambda_2=207$ вт/(м·град) за температури $t=27^0C$) для другого (Korn & Korn, 1977); $y_1=y_2=1$; $q_0=200$ вт. Числові обчислення проведено з точністю $\varepsilon=10^{-6}$.

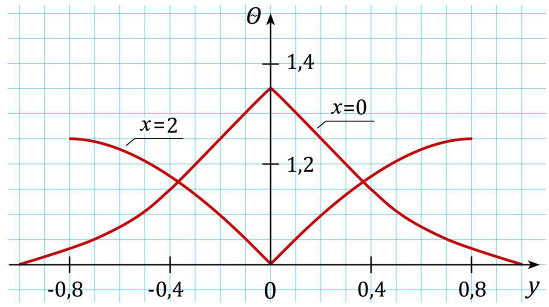

Рис. 2. Залежність температури $\theta(x,y)$ від координати y для заданих значень координати x

Проілюстровано (рис. 2) зміну температури $\theta(x,y)$ залежно від просторової координати y для значень координати $x=0$ та $x=2$. Із поведінки кривих видно, що температура як функція координати y при $x=0$ монотонно зростає у першому шарі пластини і досягає максимального значення у точці (0;0), в якій зосереджено точкове джерело тепла, а в другому шарі пластини вона монотонно спадає. Найменші значення у цьому випадку температура досягає на межових поверхнях K_1, K_2 пластини. На відміну від попереднього випадку, функція температури при $x=2$ приймає мінімальне значення у точці (2;0) і монотонно зростає, досягнувши найбільших значень на межових поверхнях пластини.

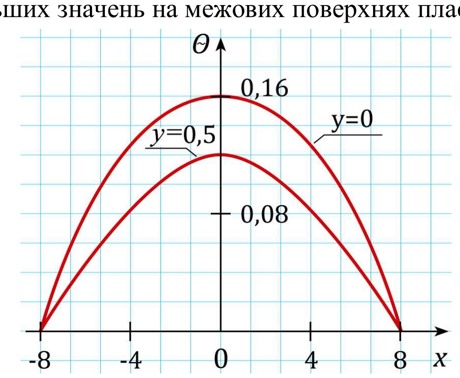

Рис. 3. Залежність температури $\theta(x,y)$ від координати x для заданих значень координати y

На рис. 3 зображено зміну температури $\theta(x,y)$ залежно від просторової координати x для значень координати $y=0$ та $y=0,5$. Із поведінки кривих видно, що температура як функція координати x є достатньо гладкою та монотонною функцією і досягає максимальні значення у точках (0;0), (0;0,5).

Висновки. Із використанням узагальнених функцій та інтегрального перетворення Фур'є для двошарової пластини з точковим джерелом тепла побудовано аналітичний розв'язок крайової задачі теплопровідності, диференціальне рівняння якої містить розривні та сингулярні коефіцієнти. Цей розв'язок подано у вигляді невласного збіжного інтегралу. Із його використанням розроблено алгоритм і розрахункову програму для визначення температурного поля в довільній точці двошарової пластини з точковим джерелом тепла, зосередженим на поверхні спряження шарів. На цій основі отримано числові значення температурного поля, із використанням яких побудовано графіки, де зображено криві, які відображають поведінку температури залежно від просторових координат. Це дає змогу аналізувати температурні режими в неоднорідних шаруватих середовищах щодо їх термостійкості.

Перелік використаних джерел

Carpinteri, A., & Paggi, M. (2008). Thermoelastic mismatch in nonhomogeneous beams. *J. Eng. Math., 61*(2–4), 371–384. https://doi.org/10.1007/s10665-008-9212-8

Havrysh, V. I., & Fedasjuk, D. V. (2012). *Modelling of temperature regimes in piecewise-homogeneous structures.* Lviv: Publishing house of Lviv Politechnic National University, 176 p.

Kikoin, I. K. (Ed.). (1976). *Tablitcy fizicheskikh velichin.* Moscow: Atomizdat, 1008 p. [In Russian].

Koliano, Iu. M. (1992). *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela.* Kyiv: Scientific thought, 280 p. [In Russian].

Korn, G., & Korn, T. (1977). *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov.* Moscow: Science, 720 p. [In Russian].

Nemirovskii, Iu. V., & Iankovskii, A. P. (2008). Reshenie statcionarnoi zadachi teploprovodnosti sloistykh anizotropnykh neodnorodnykh plastin metodom nachalnykh funktcii. *Mat. metodi ta fiz.-mekh. polia, 51*(2), 222–238. [In Russian].

Noda, N. (1991). Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties. *Appl. Mech. Rev., 44,* 383–397. https://doi.org/10.1115/1.3119511

Otao, Y., Tanigawa, O., & Ishimaru, O. (2000). Optimization of material composition of functionality graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm. *J. Therm. Stresses, 23,* 257–271. https://doi.org/10.1080/014957300280434

Podstrigach, Ia. S., Lomakin, V. A., & Koliano, Iu. M. (1984). *Termouprugost tel neodnorodnoi struktury.* Moscow: Science, 368 p. [In Russian].

Tanigawa, Y., & Otao, Y. (2002). Transient thermoelastic analysis of functionally graded plate with temperature-dependent material properties taking into account the thermal radiation. *Nihon Kikai Gakkai Nenji Taikai Koen Ronbunshu, 2,* 133–134.

Tanigawa, Y., Akai, T., & Kawamura, R. (1996). Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties. *J. Therm. Stresses, 19*(1), 77–102. https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1361801

Yangian, Xu., & Daihui, Tu. (2009). Analysis of steady thermal stress in a ZrO2/FGM/Ti-6Al-4V composite ECBF plate with temperature-dependent material properties by NFEM. *2009-WASE Int. Conf. on Informa. Eng.*, 2–2, (pp. 433–436).

V. I. Havrysh, O. S. Korol, O. M. Ukhanska, I. G. Kozak, O. V. Kuspysh

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

MATHEMATICAL MODEL FOR THE DETERMINATION OF TEMPERATURE MODES IN THE BIPLAST, DETERMINED BY THE DIFFERENT SOURCE OF HEAT

The paper presents a mathematical model for determining the temperature regimes in an isotropic two-layer plate, which is heated by a point source of heat, is concentrated on the surfaces of conjugation of the layers. For this purpose, the coefficient of thermal conductivity of materials of the plate layers is depicted as a single whole for the entire system using the theory of generalized functions. In this connection, one equation of heat conductivity in generalized derivatives with singular coefficients is obtained instead of two thermal equations for each of the plate layers and the conditions for an ideal thermal contact between them. To solve the boundary value problem of thermal conductivity containing this equation and boundary conditions on the boundary surfaces of the plate, the Fourier integral transformation was used, which resulted in an analytical solution of this problem in the images. To this solution, the inverse Fourier transform has been used, which allowed obtaining the final analytic solution of the original problem. The obtained analytical solution is presented as an inappropriate convergent integral. By the Simpson method, the numerical values of this integral with certain accuracy for the given values of layer thickness, spatial coordinates, specific power of the point source of heat and the coefficient of thermal conductivity of structural materials of the plate are obtained. The material of the first layer of the plate is copper, and the second is aluminum. To determine the numerical values of temperature in the above design, as well as the analysis of temperature regimes that arise due to the heating of a point source of heat, concentrated on the surfaces of the interface of the plate layers, computational programs have been developed. Using these programs we can provide a graph showing the behaviour of curves constructed using the numerical values of temperature distribution by changing the values of spatial coordinates. The obtained numerical values of temperature testify to the correspondence of the developed mathematical model of the analysis of temperature regimes in a two-layer plate with a point source of heat, concentrated on the surfaces of the conjugation of its layers, to the real physical process. Software tools also provide an opportunity to analyse these heterogeneous environments concerning their thermal stability. As a result, it becomes possible to increase it and thus protect against overheating, which can cause the destruction of both individual elements and the entire structure as a whole.

Keywords: isotropic double-layer plate; thermal conductivity; temperature field; heat-insulated surface; ideal thermal contact.