


**V. I. Havrysh<sup>1</sup>, V. B. Loik<sup>2</sup>, O. D. Synelnikov<sup>2</sup>, T. V. Boyko<sup>2</sup>**
<sup>1</sup> Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

<sup>2</sup> Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів, Україна

## ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ РЕЖИМІВ У 3D СТРУКТУРАХ ІЗ ЧУЖОРІДНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Розроблено лінійну та нелінійну математичні моделі визначення температурних режимів у 3D (просторових) середовищах із локально зосередженими теплоактивними чужорідними включеннями. Класичні методи не дають змоги розв'язувати крайові задачі математичної фізики, що відповідають таким моделям, у замкнутому вигляді. З огляду на це описано спосіб, який полягає в тому, що теплофізичні параметри для неоднорідних середовищ описують за допомогою узагальнених функцій як єдине ціле для всієї системи. Унаслідок цього отримують одне рівняння теплопровідності з узагальненими похідними та крайовими умовами тільки на межових поверхнях цих середовищ. У класичному випадку такий процес описують системою рівнянь теплопровідності для кожного з елементів неоднорідного середовища з умовами ідеального теплового контакту на поверхнях спряження та крайовими умовами на межових поверхнях. Для випадку нелінійних моделей умову рівності температур на поверхнях спряження різнорідних елементів конструкцій неможливо застосувати. Враховуючи викладене вище, запропоновано спосіб, який полягає у застосуванні перетворення Кірхгофа, що дає змогу лінеаризувати нелінійну крайову задачу для наведеної конструкції і як наслідок стає можливим розв'язувати такого роду крайові задачі математичної фізики. Отримано розрахункові формули для визначення температурного поля в наведених просторових середовищах для сталого та змінного за температурою коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів. Із використанням отриманих аналітичних розв'язків лінійної та нелінійної крайових задач створено обчислювальні програми, що дають змогу отримати розподіл температури та аналізувати конструкції щодо термостійкості. Як наслідок, стає можливим її підвищити і цим самим захистити від перегрівання, яке може спричинити руйнування як окремих елементів, так і конструкцій загалом.

**Ключові слова:** теплопровідність; температурне поле; термочувлива система.

**Вступ.** У сучасній мікроелектроніці часто застосовують матеріали з чужорідними теплоактивними включеннями. Під час нагрівання наявність включень призводить до виникнення неоднорідного температурного поля, що спричиняє термофотопружний ефект, який полягає у появі двопронезаломлення у структурах. Явище термофотопружного ефекту виявлено доволі давно, але воно і досі є малодослідженим. Для вивчення цього явища використовують в експериментах як значні температурні градієнти, так і абсолютні значення температури.

У сучасній оптичній техніці важливими і критичними елементами, які визначають ефективність і надійність пристроїв, є селективні оптичні фільтри, що ґрунтуються на неоднорідних структурах. З часом вимоги до цих елементів зростають: йдеться про забезпечення максимальної селективності й експлуатаційної стійкості, тобто про підвищення якості, мініятуризацію, здешевлення приладів. Тому розробляють нові структури інтерференційних фільтрів, а також алгоритми роз-

рахунку структурних параметрів. Важливим у цих розробках є встановлення зв'язку між параметрами структурних елементів фільтрів та оптичними характеристиками. Одним із основних структурних параметрів є температура, достовірне визначення якої розрахунковим шляхом потребує розв'язування складних крайових задач теплопровідності, оскільки експериментальні дослідження є практично неможливими.

З огляду на це виникла потреба розробити лінійні та нелінійні математичні моделі визначення температурних полів у просторових структурах із чужорідними включеннями, які дають змогу аналізувати температурні режими як у всій області системи, так і в області неоднорідностей.

**Аналіз останніх досліджень та формулювання проблеми.** Визначення температурних режимів як в однорідних, так і неоднорідних конструкціях привертає увагу багатьох дослідників (Carpinteri & Paggi, 2008; Yangian & Daihui, 2009).

### Інформація про авторів:

**Гавриш Василь Іванович**, д-р техн. наук, професор кафедри програмного забезпечення. Email: gavryshvasyl@gmail.com

**Лоїк Василь Богданович**, канд. техн. наук, доцент кафедри пожежної тактики та аварійно-рятувальних робіт.

Email: v.loik1984@gmail.com

**Синельников Олександр Дмитрович**, канд. техн. наук, доцент кафедри пожежної тактики та аварійно-рятувальних робіт.

Email: o.synelnikov@gmail.com

**Бойко Тарас Володимирович**, канд. техн. наук, доцент, заступник начальника навчально-наукового інституту пожежної та техногенної безпеки. Email: boykotaras@gmail.com

**Цитування за ДСТУ:** Гавриш В. І., Лоїк В. Б., Синельников О. Д., Бойко Т. В. Визначення температурних режимів у 3D структурах із чужорідними включеннями. Науковий вісник НЛТУ України. 2018, т. 28, № 1. С. 112–117.

**Citation APA:** Havrysh, V. I., Loik, V. B., Synelnikov, O. D., Boyko, T. V. (2018). Determination of Temperature Modes in 3D Structures with Foreign Inclusions. *Scientific Bulletin of UNFU*, 28(1), 112–117. <https://doi.org/10.15421/40280123>

У роботі (Ghannad & Yaghoobi, 2015) отримано аналітично-числовий розв'язок осесиметричної задачі термопружності для товстостінного циліндра за дії теплового потоку з довільно заданими крайовими умовами. Отриманий розв'язок дає змогу проаналізувати вплив теплових та механічних навантажень на термомеханічну поведінку циліндра.

Розв'язано одновимірну стаціонарну температурну та механічну задачі і наведено співвідношення для визначення теплових і механічних навантажень у порожнистій товстостінній сфері. Розподіл температури зображено функцією від радіальної координати для заданих загальних теплових і механічних крайових умов на внутрішній і зовнішній поверхнях сфери (Jabbari, Kamrour & Eslami, 2011).

У роботі (Bayat, Moosavi & Bayat, 2015) розв'язано нестационарну задачу теплопровідності та термопружності для функціонально-градієнтних товстостінних сфер. Теплофізичні і термопружні параметри матеріалів, за винятком коефіцієнта Пуассона, є довільними функціями радіальної координати.

Розглянуто осесиметричну стаціонарну задачу теплопровідності і термопружності для порожнистих функціонально-градієнтних сфер відносно джерела тепла. Отримано розв'язки у вигляді функцій від просторових координат для температури, компонент вектора переміщень і тензора напружень із використанням крайових умов за радіальною та кутовою координатами (Mohazab & Jabbari, 2011).

Розроблено методи розв'язування лінійних крайових задач теплопровідності для однорідних та шаруватих 2D середовищ із теплоактивними включеннями. Наведено низку побудованих математичних моделей визначення температурних полів у таких середовищах. Запропоновано способи лінеаризації нелінійних крайових задач теплопровідності у термочутливих кусково-однорідних середовищах та наведено математичні моделі аналізу температурних режимів для лінійно змінного коефіцієнта теплопровідності від температури у цих системах (Gavrysh & Fedasjuk, 2012).

Подано математичну модель визначення температурного поля, зумовленого тепловим потоком, у термочутливому 2D середовищі з наскрізним включенням (Gavrysh, 2017).

Огляд основних літературних джерел показав, що малодослідженими та не розробленими залишилися моделі, які враховували б кусково-однорідну структуру конструкцій та термочутливість. Оскільки конструкції піддаються температурним впливам, то у певних інтервалах температур стає відчутним вплив термочутливості на результати розрахунку температурних полів. Це приводить до розроблення нелінійних моделей процесу теплопровідності та аналізу, оскільки розв'язки крайових задач, що відповідають цим моделям, є точнішими за розв'язки відповідних лінійних крайових задач. Розрахунки температурних полів у таких системах використовують у подальшому для проектування складних систем із метою термостійкості. Точність цих розрахунків впливатиме на ефективність методів, які використовують у процесі проектування.

**Мета та завдання дослідження.** Метою роботи є створення лінійної та нелінійної математичних моделей визначення температурних режимів у просторовому середовищі зі включенням, зумовлених локально зосере-

дженими внутрішніми джерелами тепла. Це дасть змогу підвищити точність визначення температурних полів у складних системах та ефективність методів проектування.

Для досягнення поставленої мети сформульовано такі задачі:

- отримати вихідне лінійне рівняння теплопровідності зі сингулярними коефіцієнтами з крайовими умовами та його аналітичний розв'язок. Цей розв'язок дає змогу розробити алгоритм і розрахункову програму для визначення температурного поля в довільній точці конструкції "шар – включення";
- за допомогою перетворення Кірхгофа лінеаризувати вихідну нелінійну крайову задачу теплопровідності. Отримати співвідношення для визначення змінної Кірхгофа та для заданих аналітичних залежностей коефіцієнта теплопровідності від температури матеріалів конструкції отримати розрахункові формули для знаходження розподілу температури. Ці формули виражають температурне поле в довільній точці термочутливої конструкції "шар – включення". Вони дають змогу розробити алгоритм і розрахункову програму для визначення температурного поля та проаналізувати температурні режими у термочутливих просторових середовищах із включеннями.

**Результати дослідження процесу теплопровідності для кусково-однорідних середовищ.** Сформулюємо крайову лінійну та нелінійну задачі теплопровідності та наведемо методику розв'язування для просторового середовища, яке містить включення малих розмірів, в області якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла.

### 1. Шар із теплоактивним включенням

#### Об'єкт дослідження та математична модель.

Розглянемо просторове середовище, описане ізотропним шаром, який містить паралелепіпедне включення з об'ємом  $V_0 = 8hbd$ , в області  $\Omega_0$  якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю  $q_0 = \text{const}$ . Наведену конструкцію віднесено до декартової прямокутної системи координат  $(x, y, z)$  із початком  $O$  у центрі включення. На поверхнях включення існують умови ідеального теплового контакту, а на межових поверхнях шару  $K_b, K_n$  задано умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем зі сталою температурою  $t_c = \text{const}$  (рис. 1).

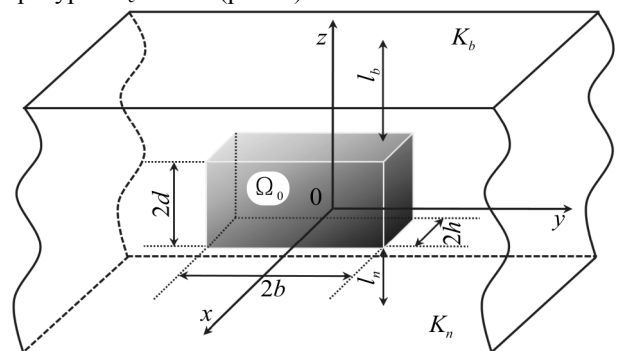


Рис. 1. Ізотропний шар із включенням

Для визначення стаціонарного температурного поля  $t(x, y, z)$  у наведеному неоднорідному середовищі використаємо рівняння теплопровідності (Podstrigach, Lomakin & Koljano, 1984; Koljano, 1992)

$$\text{div}[\lambda(x, y, z) \text{grad} \theta(x, y, z)] = -Q(x, y, z), \quad (1)$$

$$\lambda(x, y, z) = \lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1)N(x, h)N(y, b)N(z, d); \quad (2)$$

де:  $Q(x, y, z) = q_0 N(x, h)N(y, b)N(z, d)$ ;  
 $\lambda_1, \lambda_0$  – коефіцієнти теплопровідності для матеріалів шару та включення відповідно;  $\theta(x, y, z) = t(x, y, z) - t_c$ ;

$$S(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0 \\ 0.5, & \zeta = 0 \\ 0, & \zeta < 0 \end{cases} - \text{симетрична одинична функція}$$

(Корн, Корн, 1977);  $N(\zeta, \eta) = S(\zeta + \eta) - S(\zeta - \eta)$ .

Крайові умови запишемо у такому вигляді

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=d+l_b} = -\alpha_b \theta \Big|_{z=d+l_b}, \quad \lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=d-l_n} = \alpha_n \theta \Big|_{z=d-l_n},$$

$$\theta \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = \theta \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = 0, \quad (3)$$

де  $\alpha_b, \alpha_n$  – коефіцієнти тепловіддачі з межових поверхонь  $K_b, K_n$  шару відповідно.

Припустимо, що розміри включення є малими порівняно з відстанями  $l_b, l_n$  від його межових поверхонь  $\Pi_{\pm} = \{(x, y, \pm d): |x| \leq h, |y| \leq b\}$  до межових поверхонь  $K_b, K_n$  шару. Введемо зведену теплопровідність  $\Lambda_0 = \lambda_0 V_0$  включення, зведену потужність діючих у ньому джерел тепла  $Q_0 = q_0 V_0$  і перейдемо у виразах (2) до границі для  $h \rightarrow 0, b \rightarrow 0, d \rightarrow 0$ , зберігаючи при цьому  $\Lambda_0$  і  $Q_0$  сталими та використовуючи відому границю

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{N(\zeta, \eta)}{2\eta} = \delta(\zeta).$$

Тоді отримаємо:

$$\lambda(x, y, z) = \lambda_1 + \Lambda_0 \delta(x, y, z); \quad (4)$$

$$Q(x, y, z) = Q_0 \delta(x, y, z). \quad (5)$$

де  $\delta(x, y, z)$  – дельта-функція Дірака (Корн, Корн, 1977).

Хоча локальна неоднорідність шару, описана співвідношенням (4), що містить дельта-функцію Дірака, формально зосереджена в початку координат, однак вона характеризується скінченними розмірами, пов'язаними з об'ємом  $V_0$ . Отже, за допомогою виразу (4) ефективно враховано скінченні розміри включення.

Підставивши вирази (4), (5) у співвідношення (1), отримаємо рівняння

$$\frac{\Lambda_0}{\lambda_1} \left[ \frac{\partial \theta(x, 0, 0)}{\partial x} \Big|_{x=0}^* \delta'(x) \delta(y, z) + \frac{\partial \theta(0, y, 0)}{\partial y} \Big|_{y=0}^* \delta'(y) \delta(x, z) + \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0}^* \delta'(z) \delta(x, y) \right] + \Delta \theta = -\frac{Q_0}{\lambda_1} \delta(x, y, z), \quad (6)$$

$$\text{де: } \frac{\partial \theta(x, 0, 0)}{\partial x} \Big|_{x=0}^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \theta(x, 0, 0)}{\partial x} \Big|_{x=+0} + \frac{\partial \theta(x, 0, 0)}{\partial x} \Big|_{x=-0} \right];$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$\Delta$  – оператор Лапласа в декартовій прямокутній системі координат.

**Аналітичний розв'язок задачі.** Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатами  $x$  та  $y$  до рівняння (6) та умов (3), приходимо до такої крайової задачі:

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dz^2} - \gamma^2 \bar{\theta} = P_1 \delta(z) + P_2 \delta'(z), \quad (7)$$

$$\lambda_1 \frac{d \bar{\theta}}{dz} \Big|_{z=d+l_b} = -\alpha_b \bar{\theta} \Big|_{z=d+l_b}, \quad \lambda_1 \frac{d \bar{\theta}}{dz} \Big|_{z=d-l_n} = \alpha_n \bar{\theta} \Big|_{z=d-l_n}, \quad (8)$$

$$\text{де } \bar{\theta}(\alpha, \beta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dx \int_{-\infty}^{\infty} \theta e^{i\beta y} dy; \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2;$$

$$P_1 = -\frac{Q_0}{2\pi \lambda_1}; \quad P_2 = -\frac{\Lambda_0}{2\pi \lambda_1} \frac{\partial \theta(0, 0, z)}{\partial z} \Big|_{z=0}^*.$$

$$\text{Тут враховано, що } \frac{\partial \theta(x, 0, 0)}{\partial x} \Big|_{x=0}^* = \frac{\partial \theta(0, y, 0)}{\partial y} \Big|_{y=0}^* = 0.$$

Розв'язавши рівняння (7) методом варіації сталих, отримаємо його загальний розв'язок у вигляді

$$\bar{\theta}(\alpha, \beta, z) = c_1 e^{\gamma z} + c_2 e^{-\gamma z} + \left( P_1 \frac{\text{sh} \gamma z}{\gamma} + P_2 \text{ch} \gamma z \right) S(z).$$

Використавши крайові умови (8) для визначення сталих інтегрування  $c_1, c_2$ , отримає частковий розв'язок задач (7), (8)

$$\bar{\theta}(\alpha, \beta, z) = \frac{1}{2\Delta^*} \left[ P_1 / \gamma (\alpha_n^+ \alpha_b^+ e^{\gamma(4d+2l_b+2l_n-|z|)} + \alpha_n^- \alpha_b^- e^{\gamma|z|} + \alpha_n^+ \alpha_b^- e^{\gamma(z+2d+2l_n)} + \alpha_n^- \alpha_b^+ e^{\gamma(2d+2l_b-z)}) + P_2 (\alpha_n^- \alpha_b^- e^{\gamma|z|} \text{sgn} z - \alpha_n^+ \alpha_b^+ e^{\gamma(4d+2l_b+2l_n-|z|)} \text{sgn} z - \alpha_n^- \alpha_b^- e^{\gamma(z+2d+2l_n)} + \alpha_n^- \alpha_b^+ e^{\gamma(2d+2l_b-z)}) \right]. \quad (9)$$

$$\Delta^* = \alpha_b^- \alpha_n^- - \alpha_b^+ \alpha_n^+ e^{2\gamma(2d+l_b+l_n)}; \quad \alpha_b^{\pm} = (\lambda_1 \gamma \pm \alpha_b);$$

де

$$\alpha_n^{\pm} = (\lambda_1 \gamma \pm \alpha_n); \quad \text{sgn}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \zeta > 0; \\ 0, & \text{якщо } \zeta = 0; \\ -1, & \text{якщо } \zeta < 0. \end{cases}$$

Застосуємо обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (9). Тоді отримаємо вираз для визначення температури

$$\theta(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos \alpha x \cos \beta y \bar{\theta}(\alpha, \beta, z) d\alpha d\beta. \quad (10)$$

Використавши формулу (10), отримаємо таке співвідношення для визначення величини:

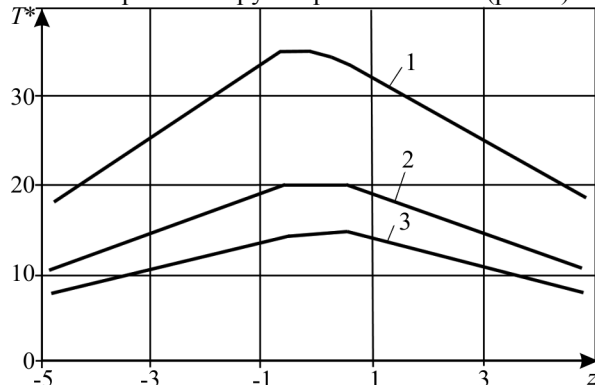
$$\frac{\partial \theta(0, 0, z)}{\partial z} \Big|_{z=0}^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{P_1}{\Delta^*} (\alpha_n^+ \alpha_b^- e^{2\gamma l_n} - \alpha_n^- \alpha_b^+ e^{2\gamma l_b}) e^{2\gamma d} d\alpha d\beta,$$

$$1 + \frac{\Lambda_0}{2\pi^2 \lambda_1} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\gamma}{\Delta^*} [K] d\alpha d\beta$$

$$\text{де } K = \alpha_b^+ (\alpha_n^+ e^{2\gamma(d+l_n)} - \alpha_n^-) e^{2\gamma(d+l_b)} + \alpha_b^- (\alpha_n^- - \alpha_n^+ e^{2\gamma(d+l_n)}).$$

Отже, шукане температурне поле у просторовому середовищі з теплоактивним включенням виражено формулою (10). За допомогою неї можна розробляти алгоритми та обчислювальні програми для аналізу температурних режимів у елементах або окремих вузлах мікроелектронних та оптичних пристроїв, які геометрично описують такими структурами.

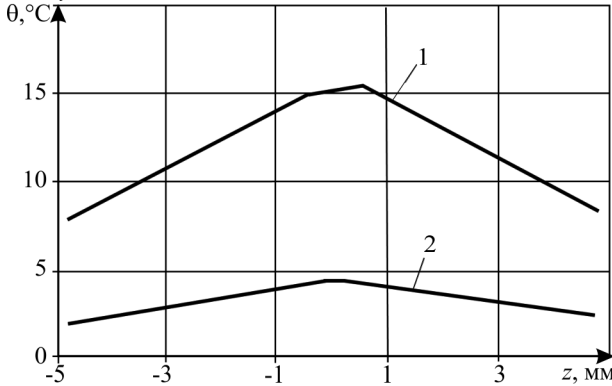
**Аналіз числових результатів.** За формулою (10) для значень безрозмірних координат  $X=x/h=0, Y=y/h=0$  виконано числові розрахунки розподілу безрозмірної температури  $T^* = \theta \lambda_1 / (q_0 h^2)$  залежно від просторової безрозмірної координати  $Z=z/h$  для різних матеріалів включення. Матеріалом шару є кераміка ВК94-1 (рис. 2).



**Рис. 2.** Зміна безрозмірної температури  $T^*$  за просторовою безрозмірною координатою  $Z$  для різних матеріалів включення конструкції "шар-включення": 1 – "керामіка ВК94-1 ( $\lambda_1 = 13,4$  Вт/(м·град) – срібло; ( $\lambda_0 = 419$  Вт/(м·град))"; 2 – "кераміка ВК94-1 – алюміній ( $\lambda_1 = 207$  Вт/(м·град))"; 3 – "кераміка ВК94-1 – кремній ( $\lambda_1 = 67$  Вт/(м·град))"

За поведінкою кривих, які відображають зміну безрозмірної температури за просторовою координатою  $Z$  для різних матеріалів включення конструкції "шар-включення", можна стверджувати, що матеріал включення значно впливає на її розподіл.

Рис. 3 ілюструє зміну температури  $\theta$  за просторовою координатою  $z$  для значень інших просторових координат  $x=y=0$ .



**Рис. 3.** Залежність розподілу температури  $\theta$  від просторової координати  $z$  в конструкції "шар-включення": 1) "кераміка ВК94-1 - срібло"; 2) середні значення коефіцієнта теплопровідності для цих матеріалів

Результати обчислень свідчать про те, що усереднення коефіцієнта теплопровідності для конструкційних матеріалів системи призводить до значної похибки.

## 2. Термочутливий шар із теплоактивним включенням

### Об'єкт дослідження та математична модель.

Розглянемо термочутливий шар із чужорідним включенням паралелепіпедної форми, в області  $\Omega_0$  якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю  $q_0$  (див. рис. 1). Для визначення стаціонарного температурного поля  $t(x, y, z)$  скористаємось нелінійним рівнянням теплопровідності

$$\text{div}[\lambda(x, y, z, t) \text{grad } t(x, y, z)] = -Q(x, y, z), \quad (11)$$

де:  $\lambda(x, y, z, t) = \lambda_1(t) + [\lambda_0(t) - \lambda_1(t)] \cdot N(x, h)N(y, b)N(z, d)$  - коефіцієнт теплопровідності неоднорідного термочутливого шару;  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_0(t)$  - коефіцієнти теплопровідності матеріалів шару та включення відповідно.

Крайові умови запишемо у вигляді

$$\left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{z=-d-l_n} = \left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{z=d+l_b} = 0, \quad \left. t \right|_{|x| \rightarrow \infty} = \left. t \right|_{|y| \rightarrow \infty} = 0. \quad (12)$$

Припустимо, що чужорідне включення є малим. Тоді, аналогічно формулі (4), співвідношення для коефіцієнта теплопровідності термочутливого шару запишемо у вигляді

$$\lambda(x, y, z, t) = \lambda_1(t) + \Lambda_0 \delta(x, y, z). \quad (13)$$

З урахуванням формули (13), після деяких перетворень рівняння (11) перепишемо так:

$$\text{div}[\lambda_1(t) \text{grad } t(x, y, z)] = -\Lambda_0 \left. \frac{\partial t(0, 0, z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* \delta(x, y) \delta(z) - Q_0 \delta(x, y, z), \quad (14)$$

Розглянемо змінну Кірхгофа

$$\vartheta(x, y, z) = \frac{1}{\lambda_1^0} \int_0^{t(x, y, z)} \lambda_1(\zeta) d\zeta, \quad (15)$$

продиференціювавши яку за змінними  $x, y$  та  $z$ , отримуємо

$$\lambda_1^0 \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = \lambda_1(t) \frac{\partial t}{\partial \zeta} \quad (\zeta = x, y, z), \quad (16)$$

де  $\lambda_1^0$  - опорний коефіцієнт теплопровідності шару.

**Аналітичний розв'язок задачі.** За допомогою виразу (16) рівняння (14) перетворимо і запишемо у вигляді

$$\Delta \vartheta = -\frac{1}{\lambda_1^0} \left[ \Lambda_0 \left. \frac{\partial t(0, 0, z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* \delta'(z) + Q_0 \delta(z) \right] \delta(x, y). \quad (17)$$

Співвідношення (15) дає змогу крайові умови (12) записати у вигляді

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right|_{z=-d-l_n} = \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right|_{z=d+l_b} = 0, \quad \left. \vartheta \right|_{|x| \rightarrow \infty} = \left. \vartheta \right|_{|y| \rightarrow \infty} = 0. \quad (18)$$

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатами  $x$  та  $y$  до задачі (17), (18), прийдемо до звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dz^2} - \gamma^2 \bar{\vartheta} = -\frac{1}{2\pi \lambda_1^0} \left[ \Lambda_0 \left. \frac{\partial t(0, 0, z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* \delta'(z) + Q_0 \delta(z) \right] \quad (19)$$

і таких крайових умов:

$$\left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dz} \right|_{z=-d-l_n} = \left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dz} \right|_{z=d+l_b} = 0,$$

$$\text{де } \bar{\vartheta}(\alpha, \beta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dx \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x, y, z) e^{i\beta y} dy \quad (20)$$

- трансформанта функції  $\vartheta(x, y, z)$ .

Загальний розв'язок рівняння (19) отримуємо за методом варіації сталих у вигляді

$$\bar{\vartheta}(\alpha, \beta, z) = c_1 e^{\gamma z} + c_2 e^{-\gamma z} - \frac{1}{2\pi \lambda_1^0} \left[ \Lambda_0 \left. \frac{\partial t(0, 0, z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* \text{ch } \gamma z + Q_0 \frac{\text{sh } \gamma z}{\gamma} \right] S(z).$$

Використавши крайові умови (20), визначимо сталі інтегрування. Тоді отримуємо такий частковий розв'язок задачі (19), (20):

$$\bar{\vartheta}(\alpha, \beta, z) = \frac{1}{2\pi \lambda_1^0} \left\{ \Lambda_0 \left. \frac{\partial t(0, 0, z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* \left[ \frac{\text{ch } \gamma(z+d+l_n)}{\text{sh } \gamma(2d+l_n+l_b)} \text{sh } \gamma(d+l_b) - \text{ch } \gamma z S(z) \right] + \frac{Q_0}{\gamma} \left[ \frac{\text{ch } \gamma(z+d+l_n)}{\text{sh } \gamma(2d+l_n+l_b)} \text{ch } \gamma(d+l_b) - \text{sh } \gamma z S(z) \right] \right\}. \quad (21)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (21), отримуємо вираз для такої функції

$$\vartheta(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos \alpha x \cos \beta y \bar{\vartheta}(\alpha, \beta, z) d\alpha d\beta. \quad (22)$$

Для конкретних залежностей коефіцієнта теплопровідності матеріалу шару від температури, із використанням співвідношень (15), (22), отримуємо нелінійне рівняння для визначення величини

$$\left. \frac{\partial t(0, 0, z)}{\partial z} \right|_{z=0}^*.$$

Шукане температурне поле у наведеній неоднорідній термочутливій просторовій системі визначимо з нелінійного рівняння, отриманого з використанням співвідношень (15), (22) та конкретних залежностей коефіцієнта теплопровідності матеріалу шару від температури.

**Часткові приклади та аналіз отриманих результатів.** Для низьких температур залежність коефіцієнта теплопровідності неметалічних кристалів від температури виражають у вигляді (Berman, 1979)

$$\lambda(t) = \kappa t^3 \quad (\kappa - \text{const}). \quad (23)$$

Тоді з використанням виразів (15), (22) отримуємо формулу для визначення температури  $t(x, y, z)$

$$t(x, y, z) = \sqrt[4]{4 / \kappa \lambda_1^0 \vartheta(x, y, z)}. \quad (24)$$

Значення величини  $\left. \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0}$  визначаємо з такого нелінійного рівняння:

$$[4\vartheta(0,0,0)]^3 \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \Big|_{z=0}^* - \left( \frac{\lambda_1^0}{\kappa} \right)^{1/4} \frac{\partial \vartheta(0,0,z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0.$$

У багатьох практичних задачах існує така залежність коефіцієнта теплопровідності від температури (Bergman, 1979; Lomakin, 1976):

$$\lambda(t) = \lambda^0(1 - kt), \quad (25)$$

де  $\lambda^0$  і  $k$  – опорний і температурний коефіцієнти теплопровідності.

Використавши співвідношення (15), (22), отримуємо таку формулу для визначення температури  $t(x, y, z)$ :

$$t(x, y, z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2k_1 \vartheta(x, y, z)}}{k_1}, \quad (26)$$

а величину  $\left. \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0}$  визначаємо з такого нелінійного рівняння

$$\left[ \left. \frac{\partial \vartheta(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0} \right]^2 - [1 - 2k_1 \vartheta(0,0,0)] \left[ \left. \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0} \right]^2 = 0,$$

де

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial \vartheta(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \\ & = \frac{1}{\pi^2 \lambda_1^0} \left\{ Q_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \frac{sh \gamma (d + l_n)}{sh \gamma (2d + l_n + l_b)} ch \gamma (d + l_n) - \frac{1}{2} \right] d\alpha d\beta - \right. \\ & \left. - \Lambda_0 \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma \frac{sh \gamma (d + l_n)}{sh \gamma (2d + l_n + l_b)} sh \gamma (d + l_b) d\alpha d\beta \right\}; \\ & \vartheta(0,0,0) = \frac{1}{\pi^2 \lambda_1^0} \left\{ \Lambda_0 \left. \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0} \right. \\ & \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \frac{1}{2} - \frac{ch \gamma (d + l_n)}{sh \gamma (2d + l_n + l_b)} sh \gamma (d + l_b) \right] d\alpha d\beta + \\ & \left. + Q_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma \frac{ch \gamma (d + l_n)}{sh \gamma (2d + l_n + l_b)} ch \gamma (d + l_b) d\alpha d\beta \right\}. \end{aligned}$$

Отже, отримано зручні формули (24), (26) для визначення температурного поля, зумовленого локальним внутрішнім нагріванням, що дає змогу аналізувати температурні режими у неоднорідній термочутливій просторовій структурі.

**Обговорення отриманих результатів дослідження.** У процесі розроблення та дослідження лінійної та нелінійної математичних моделей визначення температурного поля для конструкцій, які геометрично описано наведеними просторовими структурами з теплоактивними включеннями, виявлено, що хоча чужорідне включення є малим, зате врахування його конструкційного матеріалу є важливим, про що стверджують числові розрахунки. Усереднення значень коефіцієнта теплопровідності для матеріалів шару та включення приводить до значної похибки результатів обчислень температурного поля. Тому у таких дослідженнях важливим є врахування локальних неоднорідностей, які містять подібні структури. Це значно ускладнює розв'язування відповідних лінійної та нелінійної крайових

задач, зате розв'язки цих задач адекватніше до реального процесу описують шукані результати.

## Висновки

1. Розроблено математичну модель визначення температурного поля в просторовому середовищі з теплоактивним включенням. Отриманий аналітичний розв'язок дає змогу визначити розподіл температури в конструкції "шар-включення" і на основі цього аналізувати температурні режими у просторових середовищах, які геометрично можна описати такою системою.

2. Розроблено нелінійну математичну модель визначення температурного поля в термочутливому просторовому середовищі зі включенням. Застосовано перетворення Кірхгофа, яке дало змогу лінеаризувати вихідну нелінійну крайову задачу теплопровідності. Для заданих залежностей коефіцієнта теплопровідності від температури матеріалів конструкції отримано розрахункові формули для визначення температурного поля. Вони дають змогу аналізувати температурні режими у термочутливих просторових середовищах геометричної форми "шар-включення".

## Перелік використаних джерел

- Bayat, A., Moosavi, H., & Bayat, Y. (2015). Thermo-mechanical analysis of functionally graded thick spheres with linearly time-dependent temperature. *Scientia Iranica*, 22(5), 1801–1812.
- Berman, R. (1979). *Теплопроводность твердых тел*. Moscow: Mir, 288 p. [In Russian].
- Carpinteri, A., & Paggi, M. (2008). Thermoelastic mismatch in nonhomogeneous beams. *J. Eng. Math.*, 61(2–4), 371–384. <https://doi.org/10.1007/s10665-008-9212-8>
- Gavrysh, V. I., & Fedasjuk, D. V. (2012). *Modeljuvannja temperaturnyh rezhymiv u kuskovo-odnorodnyh strukturah*. Lviv: V-vo Nac. un-tu "Lviv'ska politehnika", 176 p. [In Ukrainian].
- Ghannad, M., & Yaghoobi, M. P. (2015). A thermoelasticity solution for thick cylinders subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *Int. Journal of Advanced Design & Manufacturing Technology*, 8(4), 1–12.
- Havrysh, V. I. (2017). Investigation of temperature fields in a heatsensitive layer with through inclusion. *Materials Science*, 52(4), 514–521.
- Jabbari, M., Karampour, S., & Eslami, M. R. (2011). Radially symmetric steady state thermal and mechanical stresses of a porous FGM hollow sphere. *International Scholarly Research Network ISRN Mechanical Engineering*, 11, 1–7. <https://doi.org/10.5402/2011/305402>
- Koljano, Ju. M. (1992). *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela*. Kyiv: Naukova dumka, 280 p. [In Ukrainian].
- Korn, G., Korn, T. (1977). *Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov*. Moscow: Nauka, 720 p. [In Russian].
- Lomakin, V. A. (1976). *Teorija uprugosti neodnorodnyh tel*. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 376 p. [In Russian].
- Mohazzab, A. H., & Jabbari, M. (2011). Two-Dimensional Stresses in a Hollow FG Sphere with Heat Source. *Advanced Materials Research*, 264–265, 700–705. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.264-265.700>
- Podstrigach, Ja. S., Lomakin, V. A., & Koljano, Ju. M. (1984). *Termouprugost' tel neodnorodnoj struktury*. Moscow: Nauka, 368 p. [In Russian].
- Yangian, Xu., & Daihui, Tu. (2009). Analysis of steady thermal stress in a ZrO<sub>2</sub>/FGM/Ti-6Al-4V composite ECBF plate with temperature-dependent material properties by NFEM. *WASE Int. Conf. on Informa. Eng.*, 2–2, 433–436.

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМОВ В 3D СТРУКТУРАХ С ИНОРОДНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ**

Разработаны линейная и нелинейная математические модели определения температурных режимов в 3D (пространственных) средах с локально сосредоточенными теплоактивными инородными включениями. Классические методы не дают возможности решать граничные задачи математической физики, которые соответствуют таким моделям, в замкнутом виде. В связи с этим описан способ, который состоит в том, что теплофизические параметры для неоднородных сред описывают с помощью обобщенных функций как единое целое для всей системы. В результате этого получают одно уравнение теплопроводности с обобщенными производными и граничными условиями только на граничных поверхностях этих сред. В классическом случае такой процесс описывают системой уравнений теплопроводности для каждого из элементов неоднородной среды с условиями идеального теплового контакта на поверхностях сопряжения и граничными условиями на граничных поверхностях. Для случая нелинейных моделей условие равенности температур на поверхностях сопряжения разнородных элементов конструкций невозможно применить. Учтя выше сказанное, предложен способ, который состоит в применении преобразования Кирхгофа, что дает возможность линеаризовать нелинейную граничную задачу для приведенной конструкции, в следствие чего стает возможным решать такого рода граничные задачи математической физики. Получены расчетные формулы для определения температурного поля в приведенных пространственных средах для постоянного и изменяющегося от температуры коэффициента теплопроводности конструкционных материалов. С применением полученных аналитических решений линейной и нелинейной граничных задач созданы вычислительные программы, которые дают возможность получить распределение температуры и анализировать конструкции на термочувствительность. В следствии стает возможным ее повысить и тем самым защитить от перегрева, которое может вызвать разрушение как отдельных элементов, так и конструкций в целом.

**Ключевые слова:** теплопроводность; температурное поле; термочувствительная система.

**V. I. Havrysh<sup>1</sup>, V. B. Loik<sup>2</sup>, O. D. Synelnikov<sup>2</sup>, T. V. Boyko<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*

<sup>2</sup> *Lviv State University of Life Safety, Lviv, Ukraine*

## **DETERMINATION OF TEMPERATURE MODES IN 3D STRUCTURES WITH FOREIGN INCLUSIONS**

Linear and nonlinear mathematical models for determination of temperature regimes in 3D (spatial) environments with locally concentrated thermal active alien inclusions are developed. The presence of foreign inclusions in solid media during heating leads to the appearance of temperature stresses that violate the crystal lattice. Classical methods do not allow solving the boundary value problems of mathematical physics corresponding to such models, in the closed form. In this regard, in the present work, a method is described that the thermophysical parameters for non-homogeneous media are described by means of generalized functions as a single whole for the whole system. As a result, one equation of heat conductivity with generalized derivatives and boundary conditions is obtained only on the boundary surfaces of these media. In the classical case, such a process is described by a system of thermal equations for each element of an inhomogeneous medium with conditions of ideal thermal contact on the surfaces of conjugation and boundary conditions on boundary surfaces. For the case of nonlinear models, the condition of equality of temperatures on the surfaces of the conjugation of heterogeneous structural elements can not be applied. Taking into account the above, in the given work a method is proposed, which is to apply the Kirchhoff transform, which allows to linearize the nonlinear boundary value problem for the given structure and as a consequence it becomes possible to solve such kind of boundary value problems of mathematical physics. Calculated formulas are obtained for determining the temperature field in the given spatial media for stable and variable temperature thermal conductivity of structural materials. Using the obtained analytical solutions of linear and nonlinear boundary value problems, computational programs have been created that allow to obtain a temperature distribution and analyze designs for thermal stability. As a result, it becomes possible to increase it and thereby protect from overheating, which can cause the destruction of both individual elements and structures in general.

**Keywords:** thermal conductivity; temperature field; thermosensitive system.