

# Potentialer og problemer ved undersøgende matematikundervisning



Charlotte Krog Skott,  
Institut for læreruddannelse,  
Københavns Professions-  
højskole



Jeppe Skott,  
Institut for matematik,  
Linnéuniversitetet, Sverige

*Kommentar til Dorte Moeskær Larsen og Bent Lindhardts artikel "Undersøgende aktiviteter og ræsonnementer i matematikundervisningen på mellemtrinnet", MONA, 2019-1.*

Undersøgende aktiviteter har en bred appel i diskussionen om matematikundervisning på alle skoleniveauer. Det har de både af almenpædagogiske og af faglige og fagdidaktiske årsager. Til de første hører visioner om engagerede elever der føler sig set og accepterede, som tager ansvar for sig selv og hinanden, og som lærer og udvikler sig af at gøre det. Til de fagrelaterede årsager hører et udvidet syn på faget der inkluderer en procesvinkel som ikke udelukkende betragter matematik som en samling af begreber, færdigheder og resultater som eleverne skal beherske. Matematisk kommunikation, problemløsning og ræsonnement er eksempler på processer som i denne tænkning både er mål og midler i undervisningen, idet eleverne fx skal lære sig at løse matematiske problemer, og de skal lære sig anden matematik af at gøre det. Procesorienteringen har som en grundlæggende idé at elever på alle niveauer ikke bare skal lære *hvad* de skal tænke i matematik, men også *hvordan* de skal tænke. Formuleret i dannelsesstermer involverer det et stærkere element af formaldannelse end tidligere tiders ensidige fokus på matematiske indholdskategorier.

Imidlertid har det vist sig sværere end forventet at indfri forventningerne til undersøgende matematikundervisning, i hvert fald når det kommer til de faglige potentialer. Det er derfor vigtigt med interventionsprojekter som *Kvalitet i dansk og matematik (KiDM)* der sætter fokus på undersøgende aktiviteter og på undervisning med dem.

Larsen & Lindhardt (2019) introducerer i et tidligere nummer af *MONA* arbejdet med KiDM. I denne kommentar til artiklen resumerer vi først artiklen, og vi diskuterer siden hvordan vi ser den i sammenhæng med tidens krav til procesorientering af matematikundervisningen. Kommentaren bliver da en refleksion over de nogle af de

problemer der synes at være med at indfri potentialerne med procesorienteringen. I den sammenhæng fokuserer vi på matematiske ræsonnementer der er den gennemgående faglige proces i artiklen af Larsen & Lindhardt.

## Et kort resumé

Larsen & Lindhardt redegør indledningsvist for en kategorisering af undersøgende aktiviteter. Den er udviklet i KiDM med henblik på at støtte projektlærerne i bedre at kunne "se" muligheder og nuancer i undersøgende aktiviteter. Kategoriseringen indeholder 5 typer aktiviteter: 1) *opdagelsen* (sammenlignelig med Freudenthals begreb om *guided reinvention*), 2) *grubleren* (fx gåder), 3) *produktet* (fremstilling af et produkt der kan virke), 4) *målingen* (fx at undersøge indeklimaet på en skole ud fra forskellige målinger), 5) *modellering* (at indgå i hele eller dele af en modelleringsproces). De fem kategorier beskrives nøje i forhold til dels deres undersøgende sigte, dels deres undersøgelsesaspekt (om problemstillingen er givet på forhånd eller ikke) og åbenhed ud fra problem, metode og resultat set fra et både elev- og lærerperspektiv. Larsen & Lindhardt påstår ikke at kategoriseringen er hverken absolut eller dækkende, men den giver et godt grundlag for at diskutere og afklare hvad der karakteriserer undersøgende aktiviteter.

Larsen & Lindhardt formulerer indledningsvis den hypotese at der er forskel på elevernes ræsonnementer afhængigt af hvilken kategori af aktivitet de arbejder med. Anden del af hypotesen er at forskellene kan have implikationer for hvordan læreren skal gribe den afsluttende opsamling an der følger efter elevernes individuelle eller gruppevise arbejde. Til undersøgelse af hypotesen udvælger forfatterne to oplæg der relaterer til aktivitetskategorierne *opdagelsen* og *grubleren*. I det første tilfælde skal eleverne dele et rektangel, en lasagne, i fire lige store stykker. I det andet tilfælde får eleverne seks lige tal der hver angiver summen af vægten af to pakker. Opgaven er at finde hvad hver af de fire pakker der indgår, kan veje. De to oplæg er valgt fordi der var mange elevræsonnementer knyttet til opsamlingerne på elevernes arbejde med dem. Det er således uklart om artiklens eksempler på elevræsonnementer er repræsentative, eller hvordan kvaliteten af dem er sammenlignet med de andre i KiDM.

Larsen & Lindhardt opsummerer resultaterne ved at påpege at i opsamlingerne på *opdagelses*-aktiviteten fik eleverne plads til at præsentere deres forslag, men lærerne var ofte så optaget af at komme frem til resultatet på undersøgelsen at de ikke fokuserede på ræsonnementerne som derfor ikke fik matematisk karakter. I forbindelse med *grubler*-aktiviteten fik eleverne i opsamlingerne generelt mulighed for at forklare hvad de havde tænkt i arbejdet med oplægget, men også i dette tilfælde fik argumenterne sjældent matematisk karakter. En undtagelse synes at være i en klasse hvor de har set at vægten på hver af de fire pakker enten alle er lige eller alle ulige. Der er da en elev,

Vilfred, der udvikler et argument for at summen er lige både hvis begge addender er lige, og hvis de er ulige. Det er selvfølgelig et argument for den omvendte sætning til den de egentlig var interesserede i: at hvis en sum af to naturlige tal er lige, så er de enten begge lige eller begge ulige. Det er dog væsentligere i sammenhængen at Vilfred får masser af roser fra læreren, men at det er tvivlsomt om det bliver klart for de fleste elever i klassen hvorfor Vilfreds argument er bedre matematisk set end andre argumenter for sætningen, og hvorfor argumentet er vigtigt ikke bare for Vilfred selv.

De eksempler som Larsen & Lindhardt giver, er et første svar på deres væsentlige hypotese om at der kan være forskelle på de faglige potentialer i undersøgende aktiviteter afhængigt af undersøgelsens karakter. Imidlertid synes der at være en anden pointe som ligger i forlængelse af en mængde andre undersøgelser af undervisning med et lignende fokus på faglige processer: Potentialerne lader sig sjældent realisere. For at uddybe den pointe refererer vi til den bredere diskussion af procesorienteret matematikundervisning.

## Undersøgende matematik og tidens reformforslag for undervisningen

Procesorientering er som nævnt et gennemgående tema i de sidste mange års forslag til reformer af matematikundervisningen. Det ses internationalt afspejlet fx i USA i NCTMs *process standards* (NCTM, 2000), i Common Core State Standards' *standards for mathematical practice* (National Governors Association Center for Best Practices, 2010) og i Mathematics Learning Study Committees *mathematical proficiency* (National Research Council, 2001). På dansk grund genfindes procesorienteringen i nogle af kompetencerne i Kompetencerapporten (Niss et al., 2002), som også har fået stor international bevågenhed.

Desuden har ikke mindst matematiske ræsonnementer en meget længere historie i matematikkens didaktik, og det er blevet påpeget at skolefaget næppe kan benævnes matematik hvis de ikke har en sådan plads. Som Freudenthal (1980) sagde: “[...] – der begynder matematikken jo: med at retfærdiggøre det man ser ved første øjekast, hvad intuitionen siger én, hvad der synes selvindlysende” (s. 635, vores oversættelse). Lampert (1990) formulerede det ti år senere sådan: “Matematisk diskurs drejer sig om at finde ud af, hvad der er sandt, når først [deltagerne] er blevet enige om deres definitioner og antagelser” (s. 42). Og som nævnt har ethvert forslag til reform af matematikundervisningen siden fokuseret på matematiske ræsonnementer.

Det synes som om undersøgende matematikundervisning ofte ses som en garant for reformens prioritering af faglige processer, inklusive matematiske ræsonnementer. Det er dog efterhånden en gammel sandhed at det ikke er let at få de faglige prioriteringer i reformen til at få en central plads i undersøgelserne, og der er mange

eksempler på at processerne mister deres faglige specificitet når elever engagerer sig i undersøgelser. Eleverne snakker med hinanden i grupper og på klassen, men det forbliver uklart om der er noget specielt der karakteriserer *matematisk* kommunikation, de formulerer ting man kan undersøge, uden at det af den grund bliver indlysende hvad det er for typer af problemer og løsninger der er specifikt matematiske, og de beskriver hvordan de har tænkt, men ofte bliver der ikke tale om noget der med rimelighed kan karakteriseres som et *matematisk* ræsonnement. I det sidste tilfælde mister ræsonnementet således sin deduktive karakter.

## En afsluttende fundering

Problemerne med matematiske ræsonnementer i undervisningen bliver også eksemplificeret i de eksempler som Larsen & Lindhardt giver fra KiDM. I *opdagelses*-aktiviteten hvor eleverne skal dele et rektangel, er det for eksempel tvivlsomt om eleverne lærer hvad der kendetegner et matematisk ræsonnement, og det er uklart hvad de lærer fx om arealer af de trekantede der indgår i deres forslag til løsning. Matematiske ræsonnementer realiseres således hverken som mål eller som middel i denne aktivitet.

Man kan blive lidt mismodig når man ser at det ofte er umuligt eller i hvert fald meget sværere end først antaget at udvikle den matematiske karakter af de ræsonnementer eleverne arbejder med. Mange årtier efter påpegningen af behovet for fokus på ræsonnementer i undervisningen og efter mængder af udviklingsprojekter er vi ikke kommet så langt som man kunne ønske sig. Man må stille sig spørgsmålet om hvordan Freudenthals retfærdiggørelser og Lamperts sandhedssøgen kan få matematisk karakter (jf. citaterne ovenfor)?

Eksemplerne fra Larsen & Lindhardts artikel indikerer at det er en nødvendig forudsætning at udvikle de måder klassesamtaler håndteres på. Det er da ikke nok at involvere eleverne i undersøgende aktiviteter uanset hvilken karakter undersøgelserne har. Der er i den sammenhæng inspiration at hente fra ikke mindst amerikansk matematikdidaktik. Fx har Smith & Stein (2011) udviklet en beskrivelse af fem ganske konkrete praksisser der skal øge kvaliteten af klassesamtaler i matematik. Det er stadig ikke en let sag at gøre, og det kræver fagligt meget veluddannede lærere der har tid til forberedelse og sikkert også til samarbejde. Man kan med god ret hævde at rammevilkårene i en dansk sammenhæng ikke er optimale. Til trods for det er der inspiration at hente hos fx Smith & Stein.

Vi begyndte vores refleksioner, som er inspireret af Larsen og Lindhardts artikel, med en kommentar om at der er både almenpædagogiske og faglige grunde til at arbejde med undersøgelser. Den første gruppe af grunde minder os om en kommentar fra Mogens Nielsen, pædagogisk filosof på den for længst nedlagte Danmarks Lærerhøjskole. Han sagde i forbindelse med en diskussion om demokrati i undervisningen at

det primært er et spørgsmål om atmosfære. Vi mener altså ikke vi skal være blinde for at undersøgende matematikundervisning kan være med til at skabe en atmosfære hvor eleverne tages alvorligt, deres bidrag værdsættes, og deres aktivitet støtter en udvikling af fælles ansvarlighed. Tværtimod. Vores lidt mere kritiske overvejelser drejer sig om at undersøgende undervisning i praksis har sværere ved at leve op til de faglige potentialer. Moralen, som vi ser underbygget af Larsen & Lindhardts artikel, er at vi må blive meget bedre til at styrke de faglige elementer i undersøgelserne. Det er nødvendigt hvis matematisk kommunikation ikke skal degenerere til smalltalk, hvis de problemer og løsninger der arbejdes med og accepteres, skal have matematisk karakter, og hvis de argumenter eleverne arbejder med, skal blive deduktive. Det er fuldt foreneligt med undersøgelsernes almene bidrag. Men det er nødvendigt hvis deres faglige potentialer skal indfries.

## Referencer

- Freudenthal, H. (1980). IOWO – Mathematik für Alle und Jedermann. *Neue Sammlung*, 20(3), s. 633-654.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), s. 29-63.
- National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford & F. Bradford (red.). Washington, D.C.: National Academy Press.
- National Governors Association Center for Best Practices. (2010). *Common Core State Standards Mathematics*. Set 4. juli 2019 på [http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math\\_Standards1.pdf](http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf)
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. USA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Niss, M., Jensen, T.H., Andersen, T.B., Andersen, R.W., Christoffersen, T., Damgaard, S., Gustavsen, T., Jess, K., Lange, J., Lindenskov, L., Meyer, M.B. og Nissen, K. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København, Danmark.
- Smith, M.S. & Stein, M.K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematical Discussions*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics & Corwin.