Den matematikhistoriske dimension i undervisning – generelt set

Uffe Thomas Jankvist, IMFUFA, Institut for Natur, Systemer og Modeller, Roskilde Universitetscenter

Denne artikel tilbyder en strukturel ramme for diskussionen af hvorfor og hvordan matematikhistorie skal eller bør inddrages i undervisningen, samt hvorledes en sådan undervisning kan organiseres og struktureres. Artiklen foreslår to sæt af kategorier i hvilke henholdsvis argumenterne for at inddrage historie og tilgangene til inddragelsen kan kategoriseres. Argumenterne inddeles i to kategorier af formål som en inddragelse af historie kan tjene: matematikhistorie som værktøj og matematikhistorie som mål. Tilgangene inddeles i tre kategorier: illustrationstilgange, modultilgange og historie-baserede tilgange. Hertil kommer en diskussion af hvorvidt inddragelsen af historie i matematikundervisningen er motiveret af at ville bringe enten de i-matematiske, de om-matematiske eller eventuelt de med-matematiske aspekter af faget matematik frem i lyset.

Introduktion

De senere år har der været en bevægelse i retning af inddragelsen af forskellige mere "humanistiske" elementer i matematikundervisningen. Dette har gjort sig gældende såvel herhjemme, specielt i forbindelse med stx[1], som internationalt. De forskellige elementer omfatter blandt andet kulturelle, sociologiske, anvendelsesorienterede og historiske perspektiver på det internt faglige i undervisningsfaget matematik. I denne artikel skal jeg beskæftige mig med de historiske elementer.

Inddragelsen af matematikhistorie i matematikundervisningen er et område der har tiltrukket sig en stigende grad af opmærksomhed i form af et øget antal publikationer herom foruden nyhedsbreve og konferencer. Eksempelvis udgiver *The International Study Group on the relations between the History and Pedagogy of Mathematics*[2] (HPM)

1 En fuldstændig behandling af den historiske dimension i matematikundervisningen i det danske gymnasium vil forrykke nærværende artikels generalitet. Specialtilfældet for stx tænkes derfor behandlet i en senere artikel i MONA – en artikel som i høj grad påregnes at bygge på det i denne artikel tilvejebragte strukturelle framework (eller analyseredskab).

2 Lokaliseret 9. juli 2007 på http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/INDEX.HTM.

tre gange om året et nyhedsbrev, og hvert fjerde år afholder gruppen en konference. Ligeledes afholdes der fra tid til anden et *European Summer University*[3] (ESU), og ved ICME-konferencen[4] i København i 2004 var der nedsat en selvstændig Topic Study Group (TSG 17) der behandlede "the role of the history of mathematics in mathematics education". Litteraturen på området omfatter blandt andet Fauvel (1990, 1991), Swetz et al. (1995), Jahnke et al. (1996), Calinger (1996), Katz (2000) og ikke mindst ICMI-studiet fra år 2000 (Fauvel & van Maanen, 2000). For en oversigt over den danske litteratur på området henvises til den omfattende opremsning af Torkil Heiede (Fauvel & van Maanen, 2000, s. 383-386).

Denne litteratur såvel som proceedings fra konferencerne byder på diverse argumenter for *hvorfor* matematikhistorie skal eller bør inddrages i undervisningen, og *hvordan* inddragelsen kan finde sted. Der præsenteres et hav af ideer til hvilke dele af matematikkens historie som kan inddrages på de forskellige niveauer, samt diverse konkrete eksempler på dette. Mange af disse forslag hidrører fra underviseres egne praksisser. En gennemlæsning af denne eksisterende litteratur synes imidlertid at afsløre en vis mangel på klarhed. Undertiden synes diskussionen ligefrem at give anledning til øget forvirring og begrebsmæssig uorden i stedet for at råde bod på dette. Eksempelvis er flere af fremstillingerne ikke helt skarpe i forhold til deres overordnede formål med og/eller deres bagvedliggende motiver for inddragelsen af matematikkens historie i undervisningen. Ej heller er det altid klart ud fra disse hvilke forskellige tilgange man kan have til inddragelsen af matematikkens historie. Med andre ord lader det altså til at diskussionen kunne drage nytte af et systematisk forsøg på at "rydde op" i de involverede begreber og temaer for på den måde at skabe et "framework" inden for hvilket diskussionen kunne tage sit udgangspunkt. Skabelsen af et sådant framework synes for mig at være en nødvendig betingelse for en videre analytisk diskussion af de relaterede praktikaliteter.

Det er derfor min overbevisning at hvis man interesserer sig for inddragelsen af matematikkens historie i matematikundervisningen, dens fordele, ulemper, potentielle muligheder, begrænsninger, ideer og så videre, så må man nødvendigvis basere denne interesse på et systematisk og organiseret grundlag i termer af:

- Hvilke *formål* tjener en inddragelse af matematikhistorie i matematikundervisningen generelt set?
- Hvilke *tilgange* er der generelt set til at inddrage matematikhistorie i matematikundervisningen?

3 ESU har på nuværende tidspunkt hjemme på http://userweb.pedf.cuni.cz/kmdm/esu5/ (lokaliseret 9. juli 2007).
4 Lokaliseret 9. juli 2007 på http://www.icme10.dk/.

Med "generelt set" forstås inddragelsen af matematikhistorie på alle undervisningsniveauer i matematik, i lærebøger såvel som i selve undervisningen. Fokus for nærværende artikel er en behandling af de svar der i litteraturen gives på disse to spørgsmål.

Hovedideen i artiklen centrerer sig omkring observationen af at de mange og forskellige argumenter for og tilgange til inddragelsen af historie i matematikundervisningen i virkeligheden ikke er så mange og så forskellige som de ved første øjekast kan tage sig ud. Det viser sig nemlig at argumenterne såvel som tilgangene kan inddeles i forskellige kategorier. Nærmere bestemt skal jeg i det følgende foreslå to sådanne kategorier for de forskellige formål som inddragelsen af matematikhistorie kan tjene, samt tre kategorier for tilgangene til en sådan inddragelse. Disse to sæt af kategorier uddybes og nuanceres efterfølgende med begreberne i-, om- og med-matematik. Dernæst følger en kort diskussion af anlagte historiesyn og mulige faldgruber i forbindelse med inddragelse af matematikhistorie i undervisningen samt argumenter *imod* en sådan inddragelse. Afslutningsvis berøres i konklusionen hvad jeg skal kalde *entydigheden* af argumenterne for at inddrage historie.

To slags formål

Hvorfor skal eller bør matematikkens historie involveres i matematikundervisningen? Overordnet betragtet, og uafhængig af undervisningsniveau, kan historie i matematikundervisningen tjene to formål som kort kan koges ned til diskussionen om mål eller middel. Historien kan enten tjene som et *værktøj* (middel) til at øge indlæringen af matematik hos de studerende. Med dette forstås at de studerende gennem historien vil opnå en større fortrolighed med, og eventuelt forståelse af, matematisk notation, matematiske begreber, formler, teoremer og beviser – og måske matematisk praksis i det hele taget. Eller historien kan tjene som et *mål* i sig selv til at belyse forskellige sider af faget matematik, dets indretning og dets plads i verden.

Matematikhistorie som værktøj

Matematikhistorie som et værktøj har altså til formål at styrke læringen af matematik. Nogle af de argumenter der ofte bliver fremført i dette øjemed, går på motivation. Et argument siger at matematikhistorie i sig selv kan virke motiverende på de studerende (Fauvel, 1991, s. 4). Et andet fremhæver at historie kan bringe et humanistisk islæt ind i matematikundervisningen og derved vise at matematik ikke er en, som Russ et al. (1991, s. 7) formulerer det, "uigennemtrængelig og frygtindgydende videnskab"[5]. Et tredje siger at det kan være motiverende for de studerende at se at matematiske

5 Alle citater, på nær danske og norske, i denne artikel er oversat af forfatteren fra enten engelsk, tysk eller fransk.

begreber som volder, eller har voldt, dem selv besvær, måske også har voldt tidligere tiders store matematiske genier kvaler (Fauvel, 1991, s. 4), eller at matematikerne selv, ligesom de studerende måske, undertiden har draget fejlagtige konklusioner (Fauvel, 1991, s. 4). En didaktisk pointe i denne sammenhæng er tilmed at de problemer som matematikken er løbet ind i rent udviklingsmæssigt, undertiden også vil være til stede i en læringssituation (Tzanakis & Arcavi, 2000, s. 206), eller som formuleret af Siu & Siu (1979):

> [...] vanskeligheder mødt af vores forfædre er ofte de samme som begyndere møder. Hvis det har taget vores forfædre 2000 år at få styr på et bestemt emne, så vil en begynder sandsynligvis (et meget sikkert "sandsynligvis") ikke kunne gøre dette på et øjeblik. (Siu & Siu, 1979, s. 562)

De negative tal, som gerne volder skoleelever visse problemer, er et eksempel på et matematisk begreb som var længe undervejs i sin udvikling førend det forelå i sin endelige form og opnåede fuld accept i det matematiske miljø.

En radikal udgave af ovenstående didaktiske pointe er den der siger at "ontogenese rekapitulerer fylogenese", hvilket betyder at en arts udvikling kan genfindes i det enkelte individs udvikling. Dette kendes også som den biogenetiske lov som i sin tid blev formuleret af naturfilosoffen Ernst Haeckel (1906, s. 2-3). Den biogenetiske lov har sit sidestykke i psykologien, den psykogenetiske lov, der siger at individets sind må gennemgå den samme udvikling som arten har været igennem. For matematiks vedkommende vil dette helt firkantet kunne oversættes til at *for virkelig at forstå og mestre matematik må ens sind gennemgå de samme stadier som matematikken har gennemgået i løbet af sin udvikling*. En nøje gennemgang af matematikkens udvikling i en undervisningssituation er selvfølgelig helt umulig at realisere i praksis, eller som Siu & Siu (1979, s. 562) formulerer det: "Har nogen nogensinde set en 4.000 år gammel studerende?" Men med udgangspunkt i den psykogenetiske ide var eksempelvis Henri Poincaré allerede i sin tid inde på at man i stedet kan lade historien være en guide til hvordan der kan undervises i matematik:

> Zoologerne fastholder, at i en kort periode af udviklingen af et dyrs foster vil dette rekapitulere dets forfædres historie gennem alle geologiske epoker. Det synes som om det samme gør sig gældende i udviklingen af sindet. Opgaven for underviseren er at få et barns sind til at gennemgå, hvad hans fædre har erfaret, at gennemgå visse stadier hurtigt, men ikke at udelade nogen. For dette formål bør videnskabens historie være vores guide. (Poincaré, 1899, s. 159)

Også den tyske matematiker Otto Toeplitz var af denne opfattelse. I forbindelse med udviklingen af infinitesimalregningen stillede han følgende spørgsmål:

> Jeg siger [...] til mig selv: Alle disse emner i infinitesimalregningen, som vi i dag lærer som kanoniserede rekvisitter, for eksempel middelværdisætningen, Taylor-rækker, konvergensbegrebet, det bestemte integral, og differentialkvotienten selv, men spørgsmålet stilles aldrig: Hvorfor således? Eller: Hvordan kommer man frem til disse? Alle disse rekvisitter må engang have været objekter for en spændende søgen, en ophidsende handling, nemlig dengang de blev til. Når man går tilbage til rødderne af disse begreber vil de miste tidens støv, skrammerne fra lang tids slid, og de vil atter opstå for os som levende væsner. (Toeplitz, 1927, s. 92-93)

Hvor den nøje gennemgang af matematikkens udvikling i et ontogenetisk/fylogenetisk øjemed, i højere grad end blot et værktøj, ville være en nødvendig betingelse for at lære matematik,[6] formulerede Toeplitz med udgangspunkt i ovenstående betragtninger en undervisningsmetode guidet af den historiske udvikling – et værktøj til læring af matematik som han kaldte den *genetiske metode*. Den skal jeg komme tilbage til senere; først skal vi se på det andet formål som matematikhistorie kan tjene i en undervisningssammenhæng.

Matematikhistorie som mål

Matematikhistorie som et mål i sig selv har ikke primært fokus på at styrke indlæringen af matematik, men derimod på historie eller andre aspekter af faget matematik som ellers ikke bliver behandlet i undervisningen. Eksempler på sådanne aspekter beskrives fragmenteret i flere af de opremsede kilder i introduktionen. Men da nærværende artikel er på dansk, har jeg valgt at hente mine eksempler fra det indledende kapitel i bogen *Matematikken og Verden* hvor det hedder:

> Hvordan udvikler matematikken sig over tid? Hvilke drivkræfter og mekanismer kan være på færde i udviklingen? Spiller samfundsmæssige og kulturelle forhold ind i denne udvikling? Hvis ja, hvordan? Og bliver matematik så afhængig af kultur og samfund, tid og sted? Er gammel matematik også forældet matematik? (Niss, 2001a, s. 10)

Nogle af målene kan derfor bestå i at vise at matematik er en menneskelig aktivitet der eksisterer i rum og tid, at matematik er en videnskab der stadig udvikler sig, at ny

6 Jeg skal ikke her gå yderligere i dybden med diskussion om ontogenese/fylogenese og de eventuelle didaktiske overvejelser i forbindelse hermed da dette i sig selv er et omfattende studie. For en dybere behandling heraf henvises til Furinghetti & Radford (2002) som blandt andet relaterer diskussionen til både Piaget og Vygotsky.

matematik stadig kreeres, at matematik anvendes flittigt inden for andre fagområder, at andre fagområder præsenterer problemstillinger som med tiden giver, eller har givet, anledning til ny matematik, og så videre. I tillæg til disse kommer de kulturelle forhold som Niss (2001a) også omtaler. Eksempler på sådanne kunne bestå i at se på forskellige begrebers udvikling i forskellige geografiske regioner. Eksempelvis Pythagoras' sætning og dennes rødder hos henholdsvis kineserne, egypterne, grækerne og babylonerne.[7] En anden case kunne omhandle binær repræsentation, binære tal og binær aritmetik der ligeledes forekommer, om end i varierende omfang, hos henholdsvis kineserne, egypterne og inderne og endeligt bliver opstillet i den i vore dage kendte form af Leibniz i 1600-tallet. Dette eksempel kunne fortsættes med anvendelsen af binær aritmetik i moderne computere og de hertil knyttede samfundsmæssige aspekter for på den måde at belyse sådanne forhold også. Eksemplet kunne tilmed tjene et yderligere formål, nemlig at vise at til trods for at anvendelsen af matematik er allestedsnærværende, så er den ofte skjult for os. Eller som Philip J. Davis, medforfatter af *The Mathematical Experience*, (Davis & Hersh, 1981), formulerede det i foråret 2005:

> Det er et vidunderligt fag matematik, selvfølgelig, og det interessante er, at det bliver en større og større del af vores liv. Tiden er den matematiske tid. Det meste matematik er skjult. Det er usynligt for folk fordi det er i programmer, det er i chips, det er i love … Så man ser det ikke. Og hvis man ikke ser det, tror man ikke det er der. (Davis, 2005)

Det er klart at pointen med synliggørelse af den skjulte matematik også kan finde sted i andre kontekster end i den historiske, og det kan også mange af de andre forhold som Niss (2001a) beskriver – anvendelsen af matematik kunne eksempelvis lige så vel anskueliggøres gennem inddragelse af matematisk modellering.[8] Så historien er måske ikke en entydig kandidat i dén forstand, men meget ofte er den en velvalgt og helt oplagt kandidat til illustration af forholdene.

Diskussionen af matematikhistorie som et selvstændigt mål i matematikundervisningen berører også en anden debat, nemlig den om almendannelse. Blomhøj (2001) definerer i overensstemmelse med den engelske uddannelsesfilosof Peters (1980, s. 154-179) almendannelse som almen uddannelse der er relevant for et *liv levet under almindelige betingelser*. Med udgangspunkt i dette opstiller Blomhøj fem principper som matematikundervisningen må tilgodese for at kunne bidrage til almendannelsen. Af disse er specielt de to relevante for diskussionen af inddragelse af matematikhistorie:

7 For en beskrivelse af et sådant (empirisk) forsøg se (Lit et al., 2001).

8 For en uddybende diskussion af matematikkens skjulthed/usynlighed se (Niss, 1994). Et konkret eksempel på den skjulte matematik i rumindustrien diskuteres af Jankvist & Toldbod (2007).

- Behandlingen af de enkelte fagområder skal have en karakter og dybde, der muliggør, at den enkelte elev kan skabe sammenhænge på tværs af fagene og får mulighed for at se fagene i en samfundsmæssig sammenhæng. [...]
- Undervisningen skal støtte det enkelte menneskes personlige udvikling og medinddrage de følelsesmæssige sider af læreprocessen. (Blomhøj, 2001, s. 232-233)

Matematikhistorie er ofte en oplagt kandidat til at bringe tværfaglige kombinationer i spil, som tidligere nævnt, eksempelvis ved at se på de fag inden for hvilke matematik finder sin anvendelse, eller ved at se på problemer inden for andre fagdiscipliner som har givet anledning til udvikling af ny matematik. Siu berører også princippet om almendannelse som personlig udvikling:

> Studiet af matematikkens historie, selv om det ikke gør mig til en bedre matematiker, gør mig til en lykkeligere mand, der er parat til at værdsætte den multi-dimensionale herlighed af disciplinen og dens relation til andre kulturelle bestræbelser. (Siu, 2000, s. 8)

Jeg skal ikke her gå yderligere i dybden med de almendannende aspekter af historiens involvering i matematikundervisningen, men blot påpege at det forekommer mig at hvis de aspekter som Siu her berører, er noget som inddragelsen af matematikhistorie så at sige kan give i tilgift, så er det da værd at tage med i sine overvejelser.

Tre slags tilgange

Hvordan kan matematikhistorien så inddrages i matematikundervisningen? Lige så vel som formålene for at inddrage historie i matematikundervisningen kan splittes op i to forskellige kategorier, kan også tilgangene til inddragelse (eller involvering) af historie i matematikundervisningen kategoriseres. Der er tale om tre fundamentalt forskellige typer af tilgange som jeg skal kalde *illustrationstilgangene*, *modultilgangene* og *de historiebaserede tilgange*. Inden for hver af disse tilgange kan involveringen af historie skaleres.

Illustrationstilgange

I illustrationstilgangene er undervisningen i matematik, hvad enten det er i klasserummet eller i lærebøger, suppleret med historisk information. Som indikeret ovenfor kan sådanne supplementer variere både i størrelse og omfang. De mindste af disse er hvad Tzanakis & Arcavi (2000, s. 208, 214) refererer til som "isoleret faktuel information" eller "historiske stumper", hvilket dækker navne, datoer, berømte arbejder og begivenheder, tidslinjer, biografier, berømte problemer og spørgsmål,[9] hvem der tilskrives opdagelsen/opfindelsen af hvad, portrætter, faksimiler og så videre. Også fortællingen af anekdoter og historier tilhører denne kategori.[10] En måde at tænke på disse mindre supplementer i illustrationstilgangene på er som "krydderier" i undervisningen.

I den anden ende af skalaen inden for illustrationstilgangene finder vi hvad der måske kan refereres til som "historiske epiloger". Denne betegnelse stammer i nogen grad fra Lindstrøm (1995) som i slutningen af hvert kapitel i sin bog "Kalkulus" har en historisk epilog.[11] Disse epiloger er uafhængige delkapitler hvor elementer af den historiske udvikling bag den i kapitlet beskrevne matematik præsenteres i forbindelse med navne, datoer, motiverende problemer, referencer til originale værker, anekdoter og diskussioner af hvem der tilskrives hvilke sætninger og ideer, men alt i alt beskrevet på en forholdsvis detaljeret og sammenhængende vis. Eksempler på titler på Lindstrøms historiske epiloger er: "Fremveksten av de reelle tallene", "Komplekse tall og ligningenes historie", "Funksjonsbegrepets utvikling", "Grenser og infinitesimaler" og "Fra arealberegning til integrasjon".

Et problem ved illustrationstilgangene er at matematikhistorien ofte forekommer som en form for påklistring til teksten eller undervisningen, for eksempel i form af portrætter med tilhørende små biografier eller historiske kommentarer og epiloger, og at disse derfor "springes over" af de studerende (eller af underviserne selv).

Modultilgange

Modultilgange er undervisningsenheder helliget historie og er ofte baseret på studier af konkrete cases. Betegnelsen "moduler" er hentet fra Katz & Michalowiczss (2004) *Historical Modules*. Ligesom illustrationstilgangene kan modultilgangene også variere i størrelse og omfang. De mindste af disse er hvad Tzanakis & Arcavi omtaler som "historiske pakker", hvilke beskrives som:

> [...] en samling af materialer snævert fokuseret på et lille emne med stærke bånd til pensum, egnet til to eller tre lektioner, klar til brug for lærerne i deres klasseværelse. (Tzanakis & Arcavi, 2000, s. 217)

I midten af skalaen finder vi moduler af længder i omegnen ti til tyve lektioner. Sådanne moduler behøver ikke at være forankret i det øvrige pensum. Rent faktisk er det her muligt at introducere ny matematik for på den måde at gøde jorden for en diskus-

9 Se Swetz (1995 og 2000) for en diskussion af matematiske opgaver hentet fra matematikkens historie.
10 For en dybere redegørelse for brugen af anekdoter og historier i undervisningen se Siu (2000).
11 Rent faktisk kalder Lindstrøm (1995) dem for historiske epistler, men eftersom de findes i slutningerne af kapitlerne, og ikke er breve, vil jeg kalde dem epiloger.

sion af relaterede historiske eller samfundsmæssige aspekter. Da sådanne moduler ikke behøver relatere sig direkte til pensum, er der her mulighed for at studere grene af matematikken som ikke normalt præsenteres på det givne uddannelsesniveau, og på den måde åbne op for en større variation i de historiske og samfundsmæssige perspektiver der kan studeres.

Måderne hvorpå både de historiske pakker og større moduler kan implementeres, er adskillige. De kan introduceres gennem såvel lærebøger som studenterprojekter og diverse af underviseren tilrettelagte forløb. Tzanakis & Arcavi (2000, s. 214-232) nævner blandt andet historiske skuespil, internettet, historiske opgaver og mekaniske instrumenter.

I den højere ende af skalaen finder vi de egentlige kurser i matematikkens historie. Disse kan eksempelvis inkludere en redegørelse for historiske data, en historie om begrebsudvikling eller andet (Tzanakis & Arcavi, 2000, s. 208). Sådanne kurser kan basere sig på primære eller sekundære kilder (eller begge) afhængig af det ønskede niveau af historiske studier. Jahnke beskriver studiet af primær- eller originalkilder som

> [...] den mest ambitiøse af måder hvorpå historien kan integreres i matematikundervisningen, men også en af de mest berigende for studerende i skolen såvel som på læreruddannelsesinstitutioner. (Jahnke, 2000, s. 291)

Selvfølgelig kan disse tilgange også implementeres på mange andre måder end lige gennem egentlige kurser og bøger. Et eksempel kan være de ofte omfattende studenterprojekter som man kender dem fra RUCs basis- og overbygningsuddannelser. I toppen af skalaen finder vi hele matematikuddannelser helliget studiet af matematikhistorie, eksempelvis et ph.d.-studium heri.

En anden måde at tænke på skaleringen af modultilgangene på kan være i termer af geografiske områder (Blum & Niss, 1991, s. 60-61). Vi kan tænke på de historiske pakker som "holme" der krydser kursen i den pensumbaserede matematikundervisning. I denne terminologi bliver modulerne af længder i omegnen ti til tyve lektioner til "øer", de egentlige kurser til "lande" og et ph.d.-studium til et helt "kontinent".

Historiebaserede tilgange

Den sidste type af tilgange dækker dem der er inspireret af eller baseret på matematikkens udvikling og historie. I modsætning til modultilgangene anvender de historiebaserede tilgange ikke historien direkte, men snarere på en indirekte vis. Direkte diskussion af den historiske udvikling er ikke nødvendigvis en del af undervisningen (eller lærebogsmaterialet). Til gengæld er det ofte den historiske udvikling der sætter dagsordnen for den rækkefølge hvori de matematiske emner præsenteres. På denne vis bliver historien en fuldt integreret del af tilgangene selv – man kan måske ligefrem tænke på dem som "historiske tilgange". Det vigtigste anliggende i de historiebaserede tilgange er læring af matematik, hvorfor historien også kun fungerer som værktøj i denne sammenhæng.

Et ofte nævnt og debatteret eksempel på en sådan tilgang er den såkaldte *genetiske* tilgang. Ordet genetisk kommer fra det græske ord *genesis* som kan oversættes til noget i retning af tilblivelse eller udvikling. Den genetiske tilgang kan spores helt tilbage til Francis Bacon (1561-1626) og er igennem de seneste århundreder blevet taget op af så prominente matematikere som Felix Klein (1849-1925) og, som tidligere nævnt, Otto Toeplitz (1881-1940), hvis *genetiske metode*[12] jeg om lidt vil præsentere kort.[13] Også Hans Freudenthals *guided reinvention* er et eksempel på en historiebaseret tilgang (se eventuelt Freudenthal (1991)). Herhjemme kender vi specielt det genetiske princip fra Poul la Cours *Historisk mathematik* (la Cour, 1881) og efterfølgende hans *Historisk Fysik* (la Cour & Appel, 1897). Ifølge Hansen (1985, s. 120-121) beskriver la Cour sit pædagogiske princip således: "At lade Eleverne følge den samme Udviklingsvej i store Træk, som Menneskeslægten historisk (dvs. verdens- og personalhistorisk) selv har vandret." Poul la Cours arbejde inden for dette felt var internationalt anerkendt, hvorfor han i 1906 også blev bedt om at skrive opslaget om det historisk-genetiske princip i *Encyklopädische Handbuch der Pädagogik* (Hansen, 1985, s. 128-129).

Jævnfør det tidligere citat af Toeplitz forklarer (eller fortolker) Burn (1999) formålet med Toeplitz' genetiske metode således:

> Spørgsmålet som Toeplitz adresserede var spørgsmålet om, hvordan man forbliver stringent i sin matematiske forklaring og undervisningsstruktur, mens man samtidig udfolder en deduktiv præsentation langt nok til at lade en studerende møde ideerne i udviklingens rækkefølge og ikke kun i en logisk rækkefølge. (Burn, 1999, s. 8)

Tzanakis (2000, s. 112) beskriver Toeplitz' genetiske metode som en tilgang hvor der ikke er nogen entydigt specificeret måde at præsentere et givet emne på, hvorfor metoden ikke må forveksles med en algoritme, men snarere skal forstås som en generel holdning til måden hvorpå videnskabelige fagområder skal præsenteres. I en sådan præsentation skal motivationen bag introduktionen af nye begreber, teorier og bevisideer baseres på den historiske udvikling af emnet. Problemer og spørgsmål som var

12 Toeplitz skelnede i sin fremstilling af den genetiske metode imellem en *direkte* og en *indirekte* variant af denne. For en gennemgang af dette se eventuelt Tzanakis & Arcavi (2000, s. 209-210).

13 En historisk gennemgang af den genetiske tilgang kan findes i Schubring (1978) eller Mosvold (2002a). Yderligere behandling af tilgangen kan også findes i Wagenschein (1968).

stimulerende for den historiske udvikling, skal rekonstrueres i en moderne kontekst og notation således at de bliver tilgængelige for de studerende.

Matematikhistorikere vil måske betragte den genetiske metode som en "voldtægt af historien" da metoden kan præsentere historiske fakta fra et forkert synspunkt. Dette skyldes at det ifølge metoden kun er de mest frugtbare og succesfulde ideer som tages i betragtning. Ideer som førte til blindgyder, og spørgsmål som aldrig blev tilfredsstillende besvaret, ignoreres (Edwards, 1977, s. vi).

I-, om- og med-matematik

De to ovenfor præsenterede kategoriseringer af formål og tilgange kan nuanceres ved at indføre en ekstra "dimension", nemlig den af i-, om- og med-matematik.[14]

Med *i-matematik* forstås aspekter relateret til matematiske resultater såsom begreber, teorier, discipliner og metoder. Kort sagt den interne matematik.[15]

Med *om-matematik* forstås aspekter som involverer betragtninger af matematikken på et meta-perspektiverende niveau (meta er det græske ord for *efter*), det vil sige betragtninger af matematikken der så at sige ligger uden for matematikken selv. Spørgsmålene i citatet fra Niss ovenfor er eksempler på sådanne meta-spørgsmål. Andre eksempler på om-matematiske aspekter kan omfatte refleksioner over det som Niss (2001a, s. 12-15)[16] kalder matematikkens femfoldige natur: (1) matematikken som en grundvidenskab (eller "ren" videnskab), (2) matematikken som en anvendt videnskab, (3) matematikken som et system af redskaber for praksis, (4) matematikken som et undervisningsfag og (5) matematikken som et rum for en særlig slags æstetiske oplevelser. Niss (2001a, s. 15) påpeger at matematikken visselig ikke er "ene om at være en grundvidenskab eller en anvendt videnskab, et system af redskaber til praksis, et undervisningsfag eller leverandør af æstetiske oplevelser", men at der derimod næppe er "ret mange fag der i samme grad er alt dette på én gang."

I tillæg til i- og om-matematik kan man også tale om *med-matematik*. "Med" henviser her til anvendelsen af matematik, eksempelvis i matematisk modellering eller lignende. Med-matematik ses så godt som aldrig som argument for at anvende historie i matematikundervisningen, hvilket nok skyldes at der er mere oplagte midler end netop historie til dette – eksempelvis matematisk modellering selv. Dermed dog ikke sagt at historie ikke også kan illustrere dette aspekt af matematikken; historie er blot ikke et entydigt valg. At historie er et helt oplagt valg, kan der dog sagtens være tale

14 Begreberne i-, om- og med-matematik er hentet fra matematik- og fysikmiljøet (IMFUFA) ved RUC, hvor disse har dannet basis for tænkningen i snart tre årtier.

15 Davis & Hersh (1981) taler om *inner issues* og *outer issues* af matematik. Niss (2001b, s. 163) taler om "knowledge of mathematics from the *inside*" og "knowledge of mathematics from the *outside*". Inden for fysikdidaktik anvender Petersen (2007) begreberne *fagfaglig* og *metafaglig*.

16 Niss diskuterer også dette i en international kilde (Niss, 1994, s. 367-368), men for at kunne citere ordret har jeg valgt at støtte mig til den stort set identiske fremlæggelse i den danske kilde (Niss, 2001a).

om – i visse sammenhænge vil den historiske udvikling af matematiske discipliner for eksempel være svær at holde adskilt fra de praktiske anvendelser og problemer som gav anledning til studier inden for disse discipliner til at begynde med.

Lad mig give et eksempel til illustration af henholdsvis i-, om- og med-matematik. Tager vi udgangspunkt i den særlige konstruktion inden for algebra der kendes som endelige legemer, så vil et studie af disse, og sætninger i talteorien der relaterer sig til disse, være et studie i i-matematik. Anvendelsen af endelige legemer og relevante sætninger fra talteorien i fejlrettende koder er derimod et studie i med-matematik (kodningsteori er tilmed et eksempel på et sted hvor det er svært adskille de praktiske anvendelser fra den historiske udvikling af disciplinen). Netop endelige legemer og talteori – der af eksempelvis G.H. Hardy (1877-1947) blev betragtet som tilhørende den harmløse og uskyldige *rene* matematik i modsætning til den *anvendte* matematik der ofte finder sin anvendelse i krig (Hardy, 1940, s. 120-121,139-143) – skulle komme til at spille en central rolle i udviklingen af fejlrettende koder, og det faktum er derimod et studie i om-matematik. Tilmed er det et studie der historisk set fortæller noget om forholdet mellem ren og anvendt matematik, eksempelvis at Hardy tog fejl idet fejlrettende koder jo har fundet sin anvendelse i krig såvel som så mange andre steder i samfundet (Levinson, 1970, s. 249).

I forhold til inddragelsen af matematikhistorie i undervisningen relaterer i-, om- og med-matematik-dimensionen sig altså til motivationen for en sådan inddragelse. Så hvor de tidligere præsenterede kategorier for formål og tilgange omhandlede hvorfor og hvordan, kan man sige at denne dimension nærmere omhandler en form for *hvad* man er ude efter. Men lad os se hvordan man kan uddybe og nuancere de tidligere præsenterede kategorier ved hjælp af i-, om- og med-matematik.

Når man taler om "matematikhistorie som værktøj", er det de i-matematiske aspekter man i virkeligheden er ude efter. Brugen af historie skal styrke indlæringen af i-matematik hos de studerende. Om-matematik er kun relevant for "matematikhistorie som værktøj" i det tilfælde hvor det forventes at motivere de studerende til at opnå større intern faglig indsigt. Hovedpointen i "matematikhistorie som mål" er derimod netop de metafaglige aspekter selv, det vil sige om-matematikken. Under antagelse af at en diskussion af de om-matematiske aspekter kan højnes gennem en forankring i i-matematikken, kan man påpege at i-matematikken i dette tilfælde kan tjene som et middel for om-matematikken, altså den omvendte situation. En anden måde at sige det på er at hvor om-matematikken beskæftiger sig med de metafaglige aspekter af matematikken, beskæftiger i-matematikken sig med de internt faglige. Med-matematiks rolle i forbindelse med de to formål er som tidligere nævnt ikke lige så klart givet som de af i- og om-matematik. Med-matematik kan dog være en særdeles velvalgt indgangsvinkel til at diskutere såvel i- som om-matematiske aspekter af matematikhistorien. I relation til eksemplet med de fejlrettende koder kunne man således tage udgangspunkt i disses anvendelser i de studerendes hverdag, såsom computer-hardware, mobiltelefoner, cd-afspillere, stregkoder (fejldetekterende koder) etc., og således benytte dette som indfaldsvinkel til studiet af endelige legemer og talteori (i-matematikken) og en videre diskussion af rollerne af henholdsvis den rene og den anvendte matematik (om-matematikken). Med hensyn til den tidligere omtalte skjulte matematik, så er netop diskussionen af med-matematik i særdeleshed velegnet til "afsløringen" af denne.

I forbindelse med tilgangene vil der uanset hvor på skalaen vi befinder os i forhold til illustrationstilgangene, være tale om at de fleste af supplementerne omhandler om-matematiske, og undertiden med-matematiske, aspekter. Kun sjældent bliver i-matematiske aspekter berørt i forbindelse med for eksempel biografier og anekdoter. Mindre i-matematiske tiltag kan dog forekomme i forbindelse med "historiske epiloger". I modultilgangene sætter de "historiske pakker" med udgangspunkt i den pensumbundne i-matematik den relaterede om-matematik på dagsordnen i en kortere tidsperiode. I de lidt længere moduler er der tilmed mulighed for at inddrage i-matematik som måske ligger uden for rammerne af det normale pensum, og således indfange nye aspekter af om-matematikken, omend stadig på en sådan måde at disse er forankret i i-matematik. Det samme gør sig selvfølgelig gældende for lange moduler såsom kurser i matematikkens historie og lignende. I samtlige modultilgange kan med-matematik gøre sig gældende, eksempelvis på lignende vis som i eksemplet ovenfor med de fejlrettende koder. I de historiebaserede tilgange, uanset skalering, er det vigtigste anliggende i-matematikken, altså læring af matematik, hvorfor historien også kun fungerer som værktøj i denne sammenhæng. Om- og med-matematiske aspekter bliver kun en del af dagsordnen her såfremt de kan assistere eller motivere læringen af den i-matematik der er på færde – eller i fald optræder de som biprodukter på den ene eller den anden vis.

Historiesyn og faldgruber

Uafhængigt af formålet med at inddrage matematikhistorie i undervisningen vil det historiesyn der ligger til grund for inddragelsen, spille en rolle i de studerendes udbytte af undervisningen. Handler matematikhistorie eksempelvis udelukkende om at fastsætte datoer for og ophavsmænd til begreber og teorier inden for matematikken? Altså en form for bestemmelse af *hvornår* og *hvem*. Eller handler matematikhistorie i højere grad om at diskutere *hvorfor* og *hvordan* disse begreber og teorier blev tilvejebragt, og hvorfor denne tilvejebringelse foregik netop på dette eller hint tidspunkt i historien? Tager vi igen udgangspunkt i teorien om fejlrettende koder, så vil det at identificere Richard Hamming som ophavsmanden til denne og fastsætte tidspunktet til slutningen af 1940'erne være et eksempel på en hvem og hvornår-tilgang til historien – en tilgang man rent faktisk ofte støder på i litteraturen. Der er derimod tale om en hvorfor og hvordan-tilgang hvis man påpeger at Hamming var bruger af computerne på Bell Laboratories, at det var dette arbejde der motiverede – eller irriterede – ham til at udvikle koderne, at Hamming var matematiker, og at hans koder derfor baserede sig på veletablerede matematiske teorier, samt at alt dette foregik i computerens spæde barndom og i efterkrigsårene hvor tilførslen af penge fra den amerikanske stat til private virksomheder som Bell Labs var stor, og at Bell Labs' forskningsafdeling på dette tidspunkt udgjordes af ikke mindre end 12 procent af virksomhedens tekniske personel. Den af disse to fremstillinger som en given underviser eller lærebog favoriserer, vil ganske givet være med til at forme de studerendes opfattelse af hvad matematikhistorie er, og hvad det går ud på.

Inden for matematikhistorien selv skelnes der ofte imellem to typer af indgangsvinkler til denne, og Rowe (1996, s. 3) betegner disse som matematikhistorie bedrevet af henholdsvis *kulturelle historikere* og *matematiske historikere*. Den første gruppe er dem som ser på matematik som videnskabshistorikere, betragtende såvel ideer som institutioner. Den anden gruppe omfatter dem der studerer matematikkens historie primært fra et moderne matematisk standpunkt. Rowe nævner selv Moritz Cantor (1829-1920) og Hieronymus Georg Zeuthen (1839-1920) som repræsentanter for henholdsvis den første og den anden gruppe. I matematikdidaktikken giver Grugnetti også udtryk for en kulturel historisk holdning:

> [...] når vi i skolen introducerer en ny matematiker, eller helt generelt, en videnskabsmand, er det fundamentalt at analysere de politiske, sociale og økonomiske rammer inden for hvilke han levede. (Grugnetti, 2000, s. 29)

Ekstreme eksempler på matematiske historikere er Bourbakisterne, specielt Jean Dieudonné og André Weil. I en diskussion om hvorfor og hvordan matematikhistorie bør bedrives, hævder Weil eksempelvis:

> [...] det er umuligt for os at analysere indholdet af Euklids Bog V og Bog VII ordentligt uden gruppebegrebet og endda uden begrebet om grupper med operatorer, da forholdene af størrelsesordnerne behandles som multiplikative grupper opererende på den additive gruppe af størrelsesordnerne selv. (Weil, 1978, s. 232)

En helt klar forskel på de to holdninger er således den at hvor Grugnetti holder mest på de om-matematiske aspekter af matematikkens historie, så er Weils historiske studier langt mere forankret i i-matematikken. Pointen her er at der fra et undervisningsmæssigt synspunkt er fordele såvel som ulemper ved begge indgangsvinkler. Helt oplagt vil en studerende der kun bliver udsat for Weils synspunkter på matematikkens historie, ganske givet intet lære om de kulturelle aspekter, og i værste tilfælde vil den studerende få en næsten anakronistisk opfattelse af matematikkens historie. Faren ved den kultur-historiske indgang er at den kan ende i for meget "julefortælling" hvor de kulturelle aspekter er fuldstændig løsrevet fra de matematiske, eller med andre ord hvor om-matematikken på ingen måde er forankret i i-matematikken.

Et nærliggende spørgsmål som man i forbindelse med inddragelse af matematikhistorie i undervisningen kan stille sig, er hvilke faldgruber der forekommer. I en kommentar i det norske tidsskrift *Tangenten* nævner Burn:

> Enda mer enn i matematikken er eleven i matematikkens historie avhengig av lærerens framstilling. Eleven er prisgitt læreren. Gjør læreren feil i matematikken, kan det oppdages og korrigeres ved en nøyaktig gjennomtenkning. En lærers feil i historie derimot er ikke lett tilgjengelig for korreksjon. (Burn, 1998, s. 11-12)

Burns kommentar her drejer sig hovedsageligt om konkrete fejl i fakta. For eksempel det faktum at såvel eksperter som nybegyndere i matematikkens historie i en undervisningssituation kan lade sig overmande af fristelsen til at ændre et "kjanske" til et "det *var* slik", samt at de kan glemme at problematisere en given historisk fremstilling (Burn, 1998, s. 12). En sådan problematisering kan selvfølgelig gå på de eventuelle fejl der måtte indgå i en fremstilling, men som set ovenfor kunne den lige så vel gå på det historiesyn der ligger til grund for fremstillingen.

Ud over at Burns kommentar kan tjene som en påmindelse om at være på vagt i forbindelse med inddragelsen af historie, så kan den selvfølgelig også fungere som et direkte modargument til inddragelsen af historie i matematikundervisningen.

Modargumenter

Siu (2004) diskuterer 16 forskellige argumenter *imod* inddragelsen af historie i matematikundervisningen,[17] hvoraf en del af disse stammer fra undervisere selv. Ud over de mere pragmatiske modargumenter såsom at der ikke er tid nok, at der ikke findes noget velegnet materiale, og at underviserne ikke har tilstrækkelig træning i at undervise i matematikkens historie, lyder nogle af modargumenterne som følger:

5. "Studerende kan ikke lide det!"
6. "Studerende synes det er historie, og de hader historieundervisning!"
7. "Studerende synes det er lige så kedeligt som faget matematik selv!"
8. "Studerende har ikke nok almen viden om kultur til at værdsætte det!" [...]

17 Hovedparten af disse opremses også af Tzanakis & Arcavi (2000, s. 203).

15. “Er det tilbøjeligt til at afføde kulturel chauvinisme og snæversynet nationalisme?”
16. “Er der nogen som helst empirisk evidens for at studerende lærer bedre når historie bringes i anvendelse i klasseværelset?” (Siu, 2000, s. 268-269)

Modargumenterne 5, 6 og 7 er på sin vis de modsatte af motivationsargumentet som beskrevet i afsnittet om matematikhistorie som værktøj. En svaghed ved netop dette argument for inddragelse af historie (eller diverse andre aspekter af faget matematik) er at det kun kan anvendes i en subjektiv og personlig sammenhæng idet det forudsætter at historien rent faktisk interesserer en given studerende. Ifølge Schubring (1988) bliver det da en forudsætning at historiske spørgsmål rent faktisk har en værdi i en nutidig kulturel sammenhæng. Spørgsmålet er måske i virkeligheden om dette er tilfældet for nutidens studerende på samme vis som det var for tidligere tiders studerende (Schubring, 1988, s. 138), (Mosvold, 2002b, s. 6). Modargumenterne 8 og 15 går til angreb på de kulturelle aspekter af matematikhistorie som mål. Hvor nr. 8 siger at de studerende simpelthen ikke besidder nok kulturhistorisk indsigt til at værdsætte de kulturelle aspekter af matematikhistorien, spørger nr. 15 om hvorvidt indsigt i forskellige kulturers udvikling af matematik til et givet tidspunkt ikke kan give anledning til chauvinisme (herunder racisme) og snæversynet nationalisme. Modargument 16 sætter i al sin enkelthed spørgsmålstegn ved selve brugen af matematikhistorie som et værktøj til at øge indlæringen af matematik. Dette er rent faktisk ikke et irrelevant spørgsmål idet antallet af empiriske undersøgelser af dette på nuværende tidspunkt er forholdsvis begrænset, eksempelvis nævner Siu (2004, s. 269) kun fem.[18] Et lignende relevant spørgsmål med hensyn til matematikhistorie som mål er i hvilket omfang studerende på et givet uddannelsesniveau overhovedet er i stand til at diskutere og reflektere over meta-perspektiver af faget matematik, og hvis de er, så på hvilke præmisser en sådan diskussion foregår, og hvis de ikke er, så hvad der skal til for gøre dem i stand til det. Antallet af empiriske undersøgelser af sådanne spørgsmål forekommer om muligt endnu mere begrænset.

Konklusion

Overordnet set kan inddragelsen af historie i matematikundervisningen tjene to forskellige formål: “matematikhistorie som værktøj” og “matematikhistorie som mål”. Matematikhistorie som værktøj drejer sig hovedsageligt om at støtte indlæringen af matematik hos de studerende, altså de i-matematiske aspekter. Matematikhistorie

18 Yderligere en lille håndfuld afrapporteringer fra empiriske studier kan dog findes i de nyligt udkomne *Proceedings HPM2004 & ESU4*, og også i de næste numre af *Educational Studies in Mathematics* lader der til at være et par stykker på bedding.

som mål har derimod fortrinsvis som sit fokus at introducere mere meta-perspektiverende, eller om-matematiske, aspekter af faget matematik i undervisningen. Man kan altså sige at hvor matematikhistorie som et værktøj fortrinsvis fokuserer på det internt faglige i matematikundervisningen, så fokuserer matematikhistorie som et mål på det metafaglige. For begge formål gælder at med-matematik ofte kan være med til at sætte scenen for de henholdsvis i- eller om-matematiske aspekter der er på dagsordnen.

Det er vigtigt at pointere at ikke alle de argumenter der fremføres for inddragelsen af matematikhistorie i undervisningen, er *entydige*, hvilket vil sige at flere af disse lige så vel kan bruges som argumenter for inddragelsen af eksempelvis matematisk modellering eller filosofi i undervisningen. Tror man for eksempel på ideen om at ontogenese rekapitulerer fylogenese, da vil argumentet om brugen af historie være ganske entydigt bestemt: Der findes ingen anden måde at undervise i matematik på end gennem fagets historie. Tror man derimod ikke på teorien om ontogenese og fylogenese, er valget af historie ikke entydigt i ovenstående forstand, men er undertiden en så oplagt kandidat at man kan have svært ved at forestille sig andre. Tag eksempelvis argumentet om at de problemer som matematikken er løbet ind i rent udviklingsmæssigt, ofte også vil være til stede i en læringssituation. Hvis ikke historien skulle være en oplagt kandidat til at identificere sådanne steder, hvad skulle da?

Af tilgange til inddragelse af historie i undervisningen kan der generelt set identificeres tre fundamentalt forskellige typer af tilgange. Disse udgør, som forklaret i artiklen, illustrationstilgangene, modultilgangene og de historiebaserede tilgange hvor inddragelsen af historie inden for hver af tilgangene kan skaleres. I den i denne artikel præsenterede kategorisering af de forskellige tilgange der findes til involvering af matematikhistorie, har jeg bestræbt mig på ikke at blande disse sammen med formålene for at ville inddrage historie i undervisningen (bortset fra diskussionen af i-, om- og med-matematik). Generelt set er dette dog ikke en særlig nem opgave idet formål og tilgange i denne sammenhæng er tæt forbundet. Det faktum at sigtet med at involvere historie i undervisningen altid er knyttet til et bestemt formål, betyder at dette formål meget ofte vil blive reflekteret i det følgende valg af tilgang. Eller omvendt, meget ofte vil en given tilgang til at involvere historie i undervisningen reflektere det bagvedliggende formål for at involvere historie i det hele taget. For eksempel hvis der er tale om en historiebaseret tilgang, så vil det så godt som altid være i-matematikken, altså matematikhistorie som værktøj, der er i centrum.

De forskellige argumenter for og tilgange til inddragelse af matematikhistorie i matematikundervisningen er i en vis grad underlagt de samme kritikker som diskursen inden for matematikhistorisk forskning selv er. Dette skyldes at et forudindtaget historiesyn højst sandsynligt vil afspejles i selve videregivelsen af den matematikhistoriske viden, dette være sig inden for matematikhistorien selv eller i en undervisningssituation. Hvis der således ikke reflekteres over indgangsvinklen til denne formidling, kan det være medvirkende til at begrænse en studerendes opfattelse af hvorfor det kan være relevant at studere historien, og hvad der eventuelt er at lære af denne. Ovenstående eksempel med Rowes henholdsvis kulturelle og matematiske historikere illustrerer dette.

Som vist i denne artikel er argumenterne for og tilgangene til inddragelse af historie i matematikundervisningen ikke så mange og så forskellige som de ved første øjekast kan tage sig ud. De kan som sagt kategoriseres i to forskellige formål og tre forskellige tilgange. Disse kategoriseringer af formål og tilgange, sammen med begreberne i-, om- og med-matematik, tilbyder et strukturelt "framework" (og analyseredskab) hvorigennem diskussionen om brug af matematikhistorie i matematikundervisningen kan struktureres og ordnes og derved blive mere tilgængelig og gennemskuelig.

Taksigelser

Tak til Mogens Niss for en række signifikante input til denne artikel. Og tak til Tinne Hoff Kjeldsen for kritisk gennemlæsning af tidligere versioner af artiklen. Også tak til H.C. Hansen for at stille sin ekspertise angående Poul la Cour til rådighed.

Referencer

Blomhøj, M. (2001). Hvorfor matematikundervisning? – matematik og almendannelse i et højteknologisk samfund. I: M. Niss (red.), *Matematikken og Verden* (s. 218-246, kapitel 10). København: Forfatterne og Forlaget A/S.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to other Subjects – State, Trends, and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*, s. 37-68.

Burn, B. (1998). Matematikkens historie – blindspor eller skattekiste? *Tangenten, 2*, s. 10-14.

Burn, R.P. (1999). Integration, a genetic approach. *Nordisk matematikkdidaktikk, 7(1)*, s. 7-27.

Calinger, R. (red.) (1996). *Vita Mathematica – Historical Research and Integration with Teaching*. Washington: The Mathematical Association of America.

Davis, P.J. (2005). Interview med professor emeritus Philip J. Davis den 6. marts 2005. Foretaget af Uffe Thomas Jankvist og Bjørn Toldbod på Brown University, Providence.

Davis, P.J. & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. London: Pinguin Books.

Edwards, H.M. (1977). *Fermat's Last Theorem – A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*. New York: Springer-Verlag.

Fauvel, J. (red.) (1990). *History in the Mathematics Classroom*, The IREM Papers. Leicester: The Mathematical Association.

Fauvel, J. (red.) (1991). *Special Issue on History in Mathematics Education*, Vol. 11(2) of *for the learning of mathematics – An International Journal of Mathematics Education*. White Rock, B.C., Canada: FLM Publishing Association.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (red.) (2000). *History in Mathematics Education – The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education – China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical Conceptual Development and The Teaching of Mathematics: From Philogenesis and Ontogenesis Theory to Classroom Practice. I: L. English (red.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (kapitel 25). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Grugnetti, L. (2000). The History of Mathematics and its Influence on Pedagogical Problems. I: V. Katz (red.), *Using History to Teach Mathematics – An International Perspective* (s. 29-35), No. 51 in MAA Notes. Washington: The Mathematical Association of America.

Haeckel, E. (1906). *The Evolution of Man – A Popular Scientific Study*. London: Watts & Co.

Hansen, H.C. (1985). *Poul la Cour: grundtvigianer, opfinder og folkeoplyser*. Vejen: Askov Højskoles Forlag. Doktordisputats, Aarhus Universitet, 1985.

Hardy, G.H. (1940). *A Mathematician's Apology*. Cambridge University Press.

Jahnke, H.N. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. I: J. Fauvel & J. van Maanen (red.), *History in Mathematics Education* (s. 291-328. kapitel 9), An ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jahnke, H.N., Knoche, N. & Otte, M. (red.) (1996). *History of Mathematica and Education: Ideas and Experiences*, No. 11 in Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Jankvist, U.T. & Toldbod, B. (2007). The Hidden Mathematics of the Mars Exploration Rover Mission. *The Mathematical Intelligencer, 29(1)*, s. 8-15.

Katz, V. (red.) (2000). *Using History to Teach Mathematics – An International Perspective*, No. 51 in MAA Notes. Washington: The Mathematical Association of America.

Katz, V.J. & Michalowicz, K.D. (red.) (2004). *Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics*. Mathematical Association of America.

la Cour, P. (1881). *Historisk mathematik*. Kolding: Konrad Jørgensens Bogtrykkeri.

la Cour, P. & Appel, J. (1896-1897). *Historisk fysik*. København: Gyldendal.

Levinson, N. (1970). Coding Theory: A Counterexample to G. H. Hardy's Conception of Applied Mathematics. *The American Mathematical Monthly, 77(3)*, s. 249-258.

Lindstrøm, T. (1995). *Kalkulus Bind I.* Oslo: Universitetsforlaget.

Lit, C.-K., Siu, M.-K. & Wong, N.-Y. (2001). The Use of History in the Teaching of Mathematics: Theory, Practice, and Evaluation of Effectiveness. *Educational Journal, 29(1)*, s. 17-31.

Mosvold, R. (2002a). Genesis principles in mathematics education. I: O. Bekken & R. Mosvold (red.), *Study the Masters* (s. 85-96). Göteborgs Universitet: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM. Proceedings from the Abel-Fauvel Conference in Kristiansand.

Mosvold, R. (2002b). "Genetisk" – Begrepsforvirring eller begrepsavklaring? *Telemarksforskning Notodden, 02(10)*, s. 1-16.

Niss, M. (1994). Mathematics in Society. I: R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträßer & B. Winkelmann (red.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (s. 367-378). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M. (2001a). Indledning. I: M. Niss (red.), *Matematikken og Verden*, Fremads debatbøger – Videnskab til debat. København: Forfatterne og Forlaget A/S.

Niss, M. (2001b). University Mathematics Based on Problem-Oriented Student Projects: 25 Years of Experience with the Roskilde Model. I: D. Holton (red.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (s. 153-165), An ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Peters, R.S. (1980). *Uddannelsens filosofi – Udvalgte artikler*. København: Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck.

Petersen, B.S. (2007). *Fysiks bidrag til almendannelse – Metafaglighed over for faglighed*. Ph.d.-afhandling i fysikkens didaktik ved IMFUFA, NSM, Roskilde Universitetscenter.

Poincaré, H. (1899). La Logique et L'Intuition. *Dans la Science Mathématique et dans L'Enseignement, 1*, s. 157-162.

Rowe, D.E. (1996). New Trends and Old Images in the History of Mathematics. I: R. Calinger (red.), *Vita Mathematica – Historical Research and Integration with Teaching* (s. 3-16), No. 40 in MAA Notes. Washington: The Mathematical Association of America.

Russ, S., Ransom, P., Perkins, P., Barbin, E., Arcavi, A., Brown, G. & Fowler, D. (1991). The experience of history in mathematics education. *for the learning of mathematics – An International Journal of Mathematics Education, 11(2)*, s. 7-16.

Schubring, G. (1978). *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Schubring, G. (1988). Historische Begriffsentwicklung und Lernprozeß aus der Sicht neuerer mathematikdidaktischer Konzeptionen (Fehler, "Obstacles", Transpositionen). *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 20(4)*, s. 138-148.

Siu, F.-K. & Siu, M.-K. (1979). History of mathematics and its relation to mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 10(4)*, s. 561-567.

Siu, M.-K. (2000). The ABCD of Using History of Mathematics in the (Undergraduate) Classroom. I: V. Katz (red.), *Using History to Teach Mathematics – An International Perspective* (s. 3-9), No. 51 in MAA Notes. Washington: The Mathematical Association of America.

Siu, M.-K. (2004). No, I don't use history of mathematics in my class. Why? I: F. Furinghetti, S. Kaijser & C. Tzanakis (red.), *Proceedings HPM2004 & ESU4* (s. 268-277). Uppsala Universitet, revised edition.

Swetz, F. (1995). Using Problems from the History of Mathematics in Classroom Instruction. I: F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (red.), *Learn From The Masters* (s. 25-38). The Mathematical Association of America.

Swetz, F. (2000). Problem Solving from the History of Mathematics. I: V. Katz (red.), *Using History to Teach Mathematics – An International Perspective* (s. 59-65), No. 51 in MAA Notes. Washington: The Mathematical Association of America.

Swetz, F., Fauvel, J., Bekken, O., Johansson, B. & Katz, V. (red.) (1995). *Learn from the Masters*. Washington: The Mathematical Association of America.

Toeplitz, O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, XXXVI*, s. 88-100.

Tzanakis, C. (2000). Presenting the Relation between Mathematics and Physics on the Basis of their History: a Genetic Approach. I: V. Katz (red.), *Using History to Teach Mathematics – An International Perspective* (s. 111-120), No. 51 in MAA Notes. Washington: The Mathematical Association of America.

Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. I: J. Fauvel & J. van Maanen (red.), *History in Mathematics Education* (s. 201-240, kapitel 7), An ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wagenschein, M. (1968). *Verstehen Lehren: Zum Problem des Genetischen Lehrens*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Weil, A. (1978). History of Mathematics: Why and How. I: O. Lehto (red.), *Procedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki, 15.-23. august 1978* (s. 227-236). Hungary: Academia Scientiarum Fennica.