

# Matematik som struktureringmiddel i undervisning med CAS



Henrik Bang,  
Christianshavns  
Gymnasium og CMU,  
Københavns Universitet<sup>1</sup>



Claus Larsen,  
Christianshavns  
Gymnasium og CMU,  
Københavns Universitet<sup>1</sup>

Kommentar til *K. Nabb: CAS som omstrukturingsredskab i matematikundervisningen*, MONA 2016 (3).

## Indledning

Der skal også lyde en tak til MONA herfra for at bringe en dansk oversættelse af Keith Nabbs artikel fra 2009 der ikke alene giver et udmærket overblik, men også har en fin liste af referencer for dem der vil dykke lidt dybere. Det er et rigtig godt initiativ og et vigtigt bidrag til praktikere og undervisere, ikke mindst fordi vi i DK har bevæget os langt i retning af CAS-brug uden en tilsvarende debat og opsamling af erfaringer der er på højde med satsningen. Også tak til Niels Johnsen for oversættelsen, så diskussionen kan nå ud til en bredere kreds.

Artiklen introducerer til nogle termer omkring CAS-brug og forsyner os dermed med et sprog som er nyttigt når vi vil dele og vurdere erfaringer. Formidling af idéerne om redskabers tilblivelse (Instrumental Genesis) og kognitive teknologier samt tilhørende begreber er meget relevant – ikke mindst i en CAS-sammenhæng. Man kunne supplere med begreber der ligger i forlængelse af de nævnte. Organisering (se nedenfor) nævnes i artiklen, men kunne være foldet ud som del af den teoretiske baggrund<sup>2</sup>. Gevinsten ved denne udfoldning er at fremhæve lærerens rolle i læreprocessen der i flere undersøgelser udpeges som central (se eksempelvis Zbiek & Hollebrands, 2008, og nyere Drijvers, 2012). Stilladsering er også et tema i undervisning med CAS – især

<sup>1</sup> Center for Computerbaseret Undervisning (CMU), Københavns Universitet, støttes økonomisk af Industriens Fond, Institut for Matematiske Fag ved Københavns Universitet, Ministeriet for Børn, Undervisning og Ligestilling samt Maplesoft.

<sup>2</sup> I andre sammenhænge har Nabb eksempelvis Drijvers, P. & Trouche, L. (2008).

når CAS skal understøtte en “begreb først”-tilgang (se fx Ruthven, 2002, hvor en del af de erfaringer der diskuteres i Nabbs artikel, belyses).

I oversættelse har man valgt en klar fordanskning af centrale termer. *Instrumental genesis* er blevet til *redskabers tilblivelse*, *artifact* til *genstand*, og *orchestrate* til *organisere*. Det er ikke svært at se begrundelsen i at en oversættelse fra engelsk må gå hele vejen – ellers kunne man have læst den originale artikel. Der er imidlertid tale om særdeles velbeskrevne termer der trækker på bestemte metaforer, og “orkestrering” giver helt andre billeder end “organisering”. Når nu valget er faldet på den klare fordanskning, kunne man i artiklen overveje en lille fodnote ved hvert af begreberne med en lille uddybning – ikke mindst når den viderebringes i MONA. Til en vis grad er man dog hjulpet af den righoldige litteraturliste. Begrebsparret *epistemisk værdi/pragmatisk værdi* er tæt på det tilsvarende engelske.

## Den historiske tilgang

Artiklen er fra 2009 i en æra af forsigtig optimisme mht. mulighederne med CAS (jf. Drijvers, 2012), men i Danmark også udgangen på en æra med en fuldt indfaset gymnasireform fra 2005 på bagen – i lærebøger står eksempelvis nu “man tager sit værktøjsprogram”, men ingen specifik henvisning til hvilket, og i STX-bekendtgørelsen for B-niveauet står anført som didaktiske principper at:

- *CAS-værktøjer skal ikke blot udnyttes til at udføre de mere komplicerede symbolske regninger, men også understøtte færdighedsindlæring og matematisk begrebsdannelse.*

Og:

- *Gennem en eksperimenterende tilgang til matematiske emner, problemstillinger og opgaver skal elevernes matematiske begrebsapparat og innovative evner udvikles.*

Man ser i bekendtgørelsesteksten en række fællestræk med temaerne fra Nabbs artikel, men hvor man mange steder i USA på gymnasieniveau ikke er gået videre end grafregneren, så er matematik på B-niveau og højere uden computer herhjemme utænkeligt. Dels nødvendiggør omfanget af opgaverne til skriftlig eksamen en vis bank af standardiserede løsninger, dels indeholder opgaverne besværlige funktionsforskrifter som på metodisk niveau lader sig behandle på samme måde som uden CAS, men ikke i selve udregningerne, og endelig er der opgavetyper inden for emneområder indført med baggrund i at eleverne har adgang til et CAS-redskab – eksempelvis hypotesetest. Spørgsmålet er ikke om CAS er reformbefordrende, eller om curriculum skal overvejes, men *hvordan* vi bruger CAS i lyset af at curriculum er ændret, og at CAS

som et vilkår i matematikundervisningen *har* reformeret undervisningen. Omfanget og rækkevidden er større end artiklen lader ane.

Siden 2009 er udviklingen i en vis forstand accelereret så læreren i dag skal tage stilling ikke blot til hvordan man vil anvende CAS til et givent forløb eller til at udføre bestemte opgaver, men også til at der i CAS som miljø er indbygget forskellige læringstilgange i CAS – eksempelvis højreklikket i Maple – som inviterer til bestemte løsningsstrategier og bestemte aktiviteter der igen kalder på didaktiske overvejelser hos læreren. Der kan være indbygget intentioner eller foretaget valg som man måske ikke deler, eller som ikke fremmer andre nødvendige tilgange. Morten Misfeldt antyder denne pointe i indledningen med en kommentar om at CAS ikke blot er et uskyldigt artefakt ... Vi er klart enige, men vi synes ikke det kan læses ud af artiklen.

Med til at kaste et historisk blik hører også at artiklen behandler CAS som det så ud i 2009. På det tidspunkt var der allerede sket en udvikling af selve værktøjet ift. fx det skærmbillede fra en lommeregner der vises, men det behandles ikke.

CAS har aldrig været én ting – der er forskelle på hvad TI 89 og hvad Maple eller Nspire kunne i 2009, men også på hvad de kan i dag. Endvidere har de forskellige CAS-platforme hver deres oprindelse. Kendskab til disse aspekter samt kendskab til maskinrummet på det CAS-værktøj man bruger, hører med til lærerens instrumentelle genese (Drijvers et al., 2009). Dette kendskab er nødvendigt, specielt fordi man ved valg af CAS-platform har mange forskellige hensyn at tage. Banalt hvad det er skolen tilbyder, men mindre banalt også hvad der peger fremad mod senere anvendelser på bl.a. videregående uddannelse. Indtil videre er opgaverne til eksaminerne uafhængige af platforme. Det afspejler også en historik, men giver samtidig anledning til en slags mindste fællesnævner som reelt udtynder variationsmuligheder.

\*Og selvom læreren måske i planlægning af sin undervisning kan forlade sig på ét eller et par værktøjer, konfronteres man også med programmer som Wolfram Alfa (eller Word Mat) – fx fordi eleverne støder på dem på nettet eller via deres netværk. De opstiller igen helt andre dagsordener. Indbygget ligger ofte pragmatiske værdier (som i Word Mat) i retning af at løse opgaver, mens mulighederne for at gennemføre udforskende eller udfordrende aktiviteter med et læringsperspektiv er mindre ligetil.

Kategorierne *black box*, *white box*, *forstærker*, *diskussionsredskab* og *redskab for reform* er genkendelige og velbeskrevne, men i hvilken forstand holder artiklens model om forholdet imellem dem? Vi har ladet os inspirere af opdelingen og vil gennem nogle eksempler bidrage til den videre diskussion.

## Black- og Whitebokse

Det er oplagt at kritisere for megen brug af "blackbokse" – dvs. brugen af CAS-rutiner hvor eleverne (og nogle gange også lærerne) er frataget kontrol med hvad der fore-

går: hvor man som fx i regression eller  $t$ -test blot taster tal ind på en given måde, og hvor værktøjet så spytter et resultat ud. Idéen i disse blackbokse er naturligvis at der gemmer sig relevant matematik – ikke mindst relevant matematik-anvendelse – i sådanne rutiner, og at man kan bede eleverne forklare og fortolke resultaterne. Det er i og for sig en pæn hensigt, men en egentlig fortolkning kræver ofte at man har et reelt kendskab til den problemstilling som blackboksen anvendes på. Ellers bliver det bare papegøjesnak eller problemstillinger der vanskeligt frigør sig fra at være pseudoanvendelser. Dermed er vi ved et velkendt problem, nemlig at anvendelse af matematik kræver at de fag (samfundsfag, biologi, kemi, fysik osv.) hvor anvendelsen finder sted, er på banen. For matematik kræver det at man eksempelvis præsenterer mere end én model (såsom andre tests end  $t$ -test) som input til diskussionen.

Problemet med blackbokse er altså ikke kun et problem om at man har outsourcet så meget matematik til CAS at der også er sket andre reduktioner som trivialisere elevaktiviteten. Det er lige så meget et problem om at der ikke er sket en tilstrækkelig insourcing af matematik – med eller uden CAS der promoverer nye elevaktiviteter.

På CMU har vi en del erfaringer med forløb<sup>3</sup> der forsøger at "åbne" blackbokse, fx ved at lave simuleringer der begrundet  $t$ -testen. Simuleringen foregår med CAS – men også ved andre aktiviteter, fx terningkast, så elever får en oplevelse af selv at kunne kontrollere dele af processen. Denne tilgang er naturligvis noget mere tidskrævende end den mere pragmatiske der blot satser på at give eleverne CAS-rutine ift. (eksamens)opgaver – og den løser ikke problemet med at opstilling og fortolkninger af testen ikke alene er et matematikfagligt problem. Endelig er der den vigtige tilføjelse som vedrører det systemiske, at aktiviteter som simuleringer med de nuværende eksamensformer er svære at passe ind.

Når vi taler om blackbokse, er det i øvrigt vigtigt at gøre opmærksom på at de ikke alene findes som et CAS-fænomen. Udenadslære af fx løsningsformel for 2. gradsligning kan jo sagtens for nogle elever fremstå som blackbokse hvis de ikke mestrer den bagvedliggende algebra. Forskellen er blot at en del af de blackbokse vi ser med CAS, er sat ind netop med den *hensigt* ikke at skulle åbnes for meget.<sup>4</sup>

Artiklen har en langt mere positiv holdning til det der kaldes *White Box* – tilgange hvor CAS faktisk via sit respons bruges til at give feedback til eleverne og på den måde synliggør fejl eller uhensigtsmæssigheder. På CMU har vi også set spændende projekter med den tilgang.<sup>5</sup> Men artiklens eksempel overhales af fx højreklik i Maple eller andre veje hvor CAS-programmet selv foreslår mellemregninger m.m. Dermed bliver CAS-programmets feedback ikke længere neutral som i artiklen, men læreren må på banen og forlange bestemte brug af CAS for at fremme denne mulighed.

<sup>3</sup> <http://cmu.math.ku.dk/projekter/2015/hypotesetest/>.

<sup>4</sup> En generalisering kan ses i Artigue, 2002.

<sup>5</sup> <http://cmu.math.ku.dk/projekter/2015/regning-m-funktioner/>.

I øvrigt er synspunktet om at lære af fejl vigtigt – fordi CAS ofte sælges med at det netop skal tjene til at minimere de fejl som elever begår. Noget mange af os der har set elevbesvarelser med CAS-brug, jo godt ved, ikke sker for de svagere elever. Tilgangen med whitebokse griber ind i en kultur hvor mange elever faktisk er bange for fejl og har en for præstationsorienteret tilgang til læreprocesser.

## Artiklens hierarkisering

Vi vil ikke gå i detaljer med alle delene af CAS-brug, men blot her diskutere endnu et aspekt, nemlig CAS som (gen)vej til begrebsdannelse. Artiklen fremsætter med baggrund i empiriske undersøgelser og som et centralt eksempel på reformredskab den tilgang at man godt kan arbejde direkte med strukturer og begreber. Synspunktet kontrasteres med en mere proceduremæssig tilgang.<sup>6</sup> Og det er muligt – argumentet er i hvert fald at i en pragmatisk forstand, altså ift. at løse bestemte opgaver, går det fint. Vi vil gerne udfordre denne tankegang lidt.

I mange af CMU-projekterne arbejdes der med indledningen af differentialregningen.<sup>7</sup> Flere lærebøger har en tilgang hvor man så at sige “tegner” 3-trinsmetoden, altså viser at sekanthældning nærmer sig tangenthældning. Ved hjælp af skydere m.m. kan CAS-værktøjer effektivt illustrere dette. CAS-værktøjet kan også bruges til at zoome ind på grafen for en funktion, og differentiabilitet kan vises uden reference til tretrinsmetoden som en lokal linearitet. Problemet i begge tilfælde er her ikke CAS-værktøjets muligheder, men at der ikke foretages en egentlig analyse af hvad det er for en underliggende matematik der egentlig er i centrum. Man kunne lidt kort sige at med CAS- og grafværktøjer er værdien af differentialregningens anvendelser i form af tangentbestemmelse, kurveundersøgelse, monotoniforhold m.m. kraftigt reduceret. Hvad bliver der så egentlig tilbage som kernen i emneområdet, og hvilke opgaver eller emner vil man pege på?

Hvis den egentlige kerne – og det der peger fremad mod videregående uddannelse – faktisk er selve grænsebegrebet, bør man naturligvis tilrettelægge sin matematikaktivitet (med og uden CAS) med dette fokus. Så kommer den mere proceduremæssige tilgang måske tilbage i form af at man nøje må analysere præcis hvilke elevaktiviteter der fremmer forståelse af grænseovergang, og ikke kun hvad der fx kan bidrage til at løse de (med CAS) meget trivielle opgaver i tangentbestemmelse eller monoton.

Men man kan naturligvis diskutere den epistemiske værdi af differentialregning som grænseovergang og mene at det kun handler om kurvebeskrivelse m.m., og der-

6 En indflydelsesrig tankegang op gennem 00'erne. Slægtskabet mellem forskellige fremtrædende aktører præsenteres i Tall, 2013.

7 Se eksempelvis <http://cmu.math.ku.dk/projekter/2015/tretrinsreglen/>, <http://cmu.math.ku.dk/projekter/2015/sekanter-tangenter/>.

med outsource til CAS, men hvilken værdi har skydere m.m. *i sig selv* som matematikaktivitet? Så kunne man lige så godt inddrage hele "effektiviseringsgevinsten" ved at forkorte forløbet yderligere.

## Afslutning

Den oprindelige anledning til at bringe Nabbs artikel var brugen af hans model i forbindelse med et projekt om CAS i folkeskolens matematikundervisning præsenteret i MONAs martsnummer fra 2016. (Mogensen et al., 2016, med efterfølgende kommentarer af Ejersboe, 2016, Hansen, 2016, og Weng, 2016).

Vi vil ikke her gå tæt på disse artikler, men blot understrege den pointe som ligger i ovenstående, og som også er i nogle af kommentarerne: Det er vigtigt at analysere forholdet mellem CAS og matematik i undervisningen i lyset af hvilke kompetencer i matematik (og CAS) man mener peger fremad i et videre læringsperspektiv. Herunder begrunde konkrete valg både af hvilke matematiske aktiviteter der outsources til CAS, men også af hvad der omvendt insources. "Effektiviteten" af CAS målt i forhold til løsning af bestemte opgavetyper på et bestemt trin er interessant, men på den lange bane må det suppleres med noget præcist om den matematik der er på spil. Og sammenligning mellem samme opgaver løst med og uden CAS er i den sammenhæng problematisk. Ikke fordi det er uinteressant om eleverne lærer mere eller mindre med CAS, men fordi valget af CAS eller ikke CAS ikke er "neutralt", men kræver mangefacetterede overvejelser hos læreren.

I den forbindelse er det som nævnt vigtigt ikke at være låst i en bestemt historisk CAS-tilgang som reelt er lommeregner CAS fra 00'erne. Dagens CAS-værktøjer giver flere muligheder – herunder også mange muligheder for at trivialisere undervisning, specielt undervisning som er rettet mod løsning af bestemte (skabelonagtige) opgavetyper.

I folkeskolen må man, som i gymnasiet, være orienteret ikke kun mod hvad der er smart på det pågældende trin, men også mod hvad der kommer efterfølgende (og hvad der er sket forudgående).

Både begrebsforståelse og færdigheder på bestemte områder er relevante læringsmål (på alle trin), men dialektikken mellem CAS-brug og matematik kræver hele tiden overvejelse og forandrer løbende hvilke konkrete færdigheder der er relevante, og hvilke aktiviteter/procedurer der bidrager til at understøtte forståelse af matematiske sammenhænge og strukturer.

Vi er i øjeblikket i gang med et se på CMU's efterhånden ret omfattende eksempel materiale på konkrete undervisningsforløb i gymnasiet med CAS og håber at vende tilbage med en artikel i MONA herom senere.

## Referencer

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), s. 245-274.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Van Gisbergen, S., Gravemeijer, K. & Reed, H. (in press). *Teachers using technology: orchestrations and profiles*. Artikel sendt til PME33 conference, 19-24 July 2009, Thessaloniki, Grækenland.
- Drijvers, P. (2012). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). I: *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematics Education* (s. 485-501). Seoul, Korea.
- Drijvers, P. & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. I: G.W. Blume & M.K. Heid (red.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2. Cases and perspectives* (s. 363-392). Charlotte, NC: Information Age.
- Ejersbo L.R. (2016). Kønsforskelle i brugen af CAS-værktøjer – hvad kan det mon skyldes? *MONA*, 2016(2).
- Hansen R. (2016). Når komplekse matematikdidaktiske spørgsmål søges besvaret med en kvantitativ metode. *MONA*, 2016(2).
- Mogensen, A., Bull A. & Hesselholt M. (2016). CAS i folkeskolens undervisning. *MONA*, 2016(1).
- Nabb, K.A. (2010). *CAS as a Restructuring Tool in Mathematics Education*. Proceedings of the 22<sup>nd</sup> international Conference on technology in Collegiate mathematics. (Bragt i oversat version i *MONA*, 2016-3).
- Ruthven, K. (2002). Instrumenting mathematical activity: Reflections on key studies of the educational use of computer algebra systems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), s. 275-291.
- Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically*. Cambridge University Press.
- Weng, P. (2016). Det er signifikant! Det virker! Fint! Men hvad så? *MONA*, 2016(2).
- Zbiek, R.M. & Hollebrands, K. (2008). A research-informed view of the process of incorporating mathematics technology into classroom practice by inservice and prospective teachers. I: M.K. Heid & G.W. Blume (red.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Volume 1. Research syntheses* (s. 287-344). Charlotte, NC: Information Age Publishing.