Det tilstræbte matematikindhold og teknologi – spiller det sammen?

Henrik Bang – *Center for Computerbaseret Matematikundervisning, CMU*

Claus Larsen – *Center for Computerbaseret Matematikundervisning, CMU*

Kommentar til Morten Misfeldt: "Trekantberegning og teknologi", MONA, 2014(1)

I *MONA*, 2014(1), har Morten Misfeldt en glimrende artikel om den indflydelse teknologien bør have på udviklingen af matematikcurriculum. Synspunkter om at undervisning, læring og – som i artiklen – trekantsberegning ikke er teknologineutralt, bør nyde stor opmærksomhed. Temaer som black bokse, opgavers rolle i matematikundervisningen og forskellige digitale værktøjers styrker og svagheder har været centrale didaktiske udfordringer i gymnasiet og kommer nu også til folkeskolen.

Derfor denne kommentar. Det skal understreges at der netop er tale om en kommentar. Der er således hverken referencer eller stillingtagen til det teoretiske udgangspunkt i pragmatismen repræsenteret ved John Dewey – andet end at den virker sund. Kommentarerne er foruden at være selektive og formuleret i et gymnasieperspektiv også noget kalejdoskopiske, og pladsen tillader ikke en grundigere diskussion eksempelvis med udgangspunkt i en stofdidaktisk analyse. Der er behov for at grave dybere, som Morten også peger på med sin artikel.

Nedenfor giver vi en række eksempler på opgaver/problemstillinger der kan illustrere redskabsbrugen. Hensigten er ikke kun at se på hvilke der er bedst til at give et svar, men at de også vurderes ud fra andre betragtninger som hvilken matematisk indsigt (både i bredde og dybde) aktiviteten giver, hvilke matematiske såvel som redskabsmæssige forudsætninger der fordres, hvorledes de bidrager til nødvendige rutiner osv.

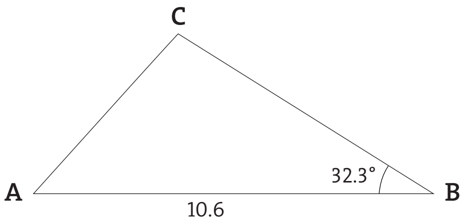
Morten tager udgangspunkt i tre tilgange til trekantsberegninger i skolen – den euklidiske, den automatiserede og den algebraiske løsningsstrategi – som sammenlignes med hensyn til om de er matematiske på tre parametre: præcision/eksakthed, anvendelighed/effektivitet og indsigtsfuldhed.

I diskussionen om præcision og eksakthed er vi for så vidt enige i at der ingen afgørende forskel er på de tre løsningsstrategier – hverken med hensyn til eksakthed eller stringens – alene af den grund at der ikke er så stor praktisk modsætning mellem den euklidiske tilgang og den algebraiske som antydet. En trigonometrisk tabel vil have form af en lommeregner eller et mere avanceret CAS-program som Nspire eller Maple. Tilsvarende er den euklidiske tilgang ikke rent geometrisk – dvs. en konstruktion med passer og lineal – hvis der bruges et geometriværktøj som GeoGebra. Eksempelvis er vinklen på 32° (figur 1 i Mortens artikel) ikke en foreliggende vinkel der afsættes som i den græske geometri.

Der er dog mere på spil her end blot præcision og eksakthed som stringens. Der er også *vurderingen* af eksaktheden og *den matematiske italesættelse* af stringensen. Det første vedrører black boks-problematikken, der kommenteres senere. Med hensyn til stringensen hviler den euklidiske tilgangs validitet på den klassiske konstruktionsgeometri som også kræver en vis behandling. Man kunne fx spørge om det i GeoGebra er lige så validt at afsætte den vinkelrette igennem et punkt A på en linje parallel med x-aksen ved at bruge kommandoen *vinkelret linje* som ved at klikke på et punkt på linjen med samme x-værdi som A.

Pointen er dels at den euklidiske løsningsstrategi ikke er selvforklarende, men ofte kræver kendskab til bestemte fremgangsmåder, dels at der i de fleste læringssammenhænge ikke er en "aristotelisk" dualitet mellem den euklidiske og den algebraiske løsningsstrategi, men et spektrum der udspændes af den rene konstruktionsgeometri og en ren algebraisk løsningstilgang. Dette bliver endnu tydeligere hvis man bevæger sig fra simple til lidt mere komplicerede problemstillinger:

- For at kunne anvende GeoGebra matematisk korrekt ved trekantsberegning skal man kende konstruktionsmåden i den euklidiske variant – altså i princippet trekantstilfældene. Læringsmæssigt understøttes de af den algebraiske tilgang. Tag fx opgaven hvor der er givet en trekant med vinkel A = 30°, siden b = 5 og siden a = 4.
- Trekantsopgaver behøver ikke at være stillet så man kender tre oplysninger om sider/vinkler. Opgaven kunne være at bestemme siderne i trekant ABC når arealet er givet ved at være 24, og siden a er 6, og vinkel A er 40 grader (kan løses fx som to ligninger med to ubekendte – men hvis man ikke kender til synsvinkelbuen, er den ikke nem euklidisk).
- Et eksempel hentet fra STX matematik A 24. maj 2013 ligner lidt ovenstående og viser at eleverne i praksis møder den opgavetype i dag.



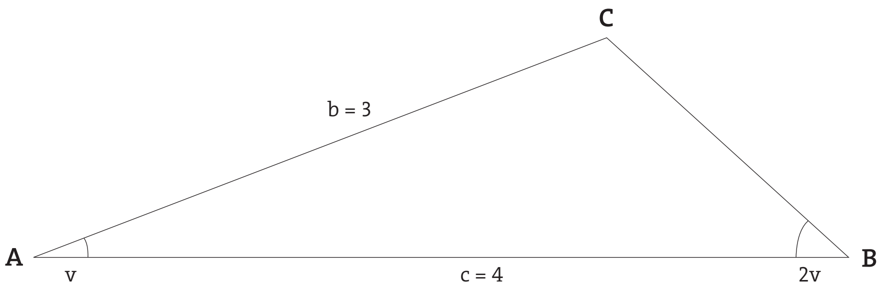
Om trekant *ABC* oplyses, at arealet er 22.9 samt at $\angle B = 32.3°$ og $|AB| = 10.6$.

a) Bestem højden fra *C*.

b) Bestem omkredsen af trekant *ABC*.

Det første spørgsmål kan besvares algebraisk ud fra formlen for en trekants areal, der er kendt fra folkeskolen, og er nok en hjælp til næste spørgsmål. Euklidisk (fx med GeoGebra) vil kendskab til arealet af trekanter med fælles grundlinje mellem to parallelle være en (ikke elementær) forudsætning. En algebraisk tilgang hvor sinus indgår, ligger måske mere ligefor.

- Den euklidiske tilgang med GeoGebra kan udfordres yderligere. Hvad med denne opgave hvor man på en måde kender to sider og en vinkel: I en trekant med to vinkler med værdien henholdsvis v og 2v er den mellemliggende side 4, og den modstående side til vinklen 2v er 3. Bestem den sidste side.



Pointen er ikke *om* den type opgaver kan løses euklidisk, men at algebraisering af geometriske opgaver kan være hensigtsmæssig – enten for at trække på generelle egenskaber hos værktøjsprogrammet – fx Maple – eller for at få indsigt i problemet. Læringsmæssigt kan det være interessant at lade de forskellige tilgange understøtte problemundersøgelsen frem for at lade dem (ud)konkurrere hinanden.

Der er, som Morten også siger, situationer hvor der skal løses rigtig meget triviel regning.

To radarposter A og B placeret i afstanden 50 km sender radarsignaler ud der rammer et fly. Vinklen i forhold til nord målt med 10 minutters mellemrum set fra A er henholdsvis 45, 45,2, 45,4 og 43,1. Hvor langt er flyet væk fra A når retningen fra B er henholdsvis 15, 15,1, 15, 3 og 15,5 grader til nord? Hvordan varierer flyets retning og hastighed mellem de fire positioner?

Rutinen favoriserer måske en algebraisk tilgang – og fordi der skal regnes videre, er det også ofte en fordel at befinde sig i et regneegnet miljø. Pointen er også at en tilgang hvor man designer opgaven løst i ét tilfælde der bruges i tre efterfølgende løsninger, kan være et eksempel på at eleverne *selv* går et skridt i retning af automatiserede løsninger (men at CosSinCalc måske ikke er god til denne brug).

Som det ses, er *effektivitet* meget afhængig af om opgaven er stillet på en sådan måde at teknologien er nem at bruge, men det afhænger også af hvilket perspektiv man anlægger på læreprocessen.

Diskussionen om *indsigtsfuldhed* er interessant. Det der er på spil, er også et spørgsmål om at den matematiske "løsningsstrategi bør også vurderes på om den giver indsigt i matematikken selv og peger frem imod ny matematisk teori". Strategierne er alle afhængige af hvordan de bringes i anvendelse af eleverne. Men de automatiserede løsninger er nok svagest her. Derfor er diskussionen af de andre to løsningsstrategier mest interessant. Også her befinder vi os mere i et spektrum mellem det rent geometriske og rent algebraiske end i en dualitet mellem de to. Skal de trigonometriske funktioner bruges algebraisk (og det vil i praksis sige med et værktøjsprogram), skal de defineres, og deres egenskaber undersøges. Her gøres der brug af både en geometrisk repræsentation og en repræsentation ved tabel. Skal vi regne på trekanter der ikke er rette, er der brug for en udvidelse af definitionerne på cosinus og sinus (den almindelige fremgangsmåde i mange lærebøger er at indføre sinus og cosinus vha. den retvinklede trekant, som et forhold mellem en katete og hypotenusen og senere udvide definitionen via enhedscirklen). Både tankegangen om forskellige repræsentationer og tankegangen om at udvide fra det mere håndgribelige til det mere abstrakte er noget der peger fremad på et mere overordnet plan. På et mere konkret plan peger den tilgang hvor det euklidisk/geometriske og det algebraisk/analytiske ses i sammenhæng, frem mod områder som vektorregning og videre mod komplekse tal. Endelig kan man pege på trekantsberegninger som et trods alt elementært område hvor geometrien og algebraen spiller sammen.

Vi er meget enige i at der er elementer af black bokse i alle løsningstrategierne, og at det udfordrer indsigtsfuldheden. Det der er interessant, er dog ikke så meget om man kan tjekke om der er fejl i beregningerne, men om potentialet for at gøre black boksene mere matematisk transparente er til stede.

Eksempelvis hviler den algebraiske tilgang som nævnt ovenfor i praksis på brugen af CAS-værktøj. Her kan man gå mindst to veje. Ved trekantsberegning kan man gennemføre beregninger ved det man kalder simuleret håndregning – dvs. gennemføre udregningerne skridtvist vha. værktøjet (opstille ligninger, isolere vinkel eller side, tage inversfunktion) – eller man kan bruge værktøjets ligningsløser. Det sidste er hurtigt og intuitivt appellerende og kan automatiseres, men indebærer en række problemstillinger. Hvad med tilfælde med flere løsninger, eller dybere: Hvordan håndterer CAS-programmet egentlig omvendte funktioner?

Med CAS-programmer som Maple må man ofte ty til lidt komplicerede kommandoer – ikke mindst inden for geometrien idet løsninger her ikke er trivielle.

Den skolemæssige udfordring

Vi er gået tæt på det konkrete fordi det er det Morten lægger op til, men også fordi det er i forhold til konkrete læringsmål at redskaberne skal vurderes. Hvis læringsmålet er at man skal kunne løse trekantsopgaver af Mortens type med dragen eller opgaver der er givet så CosSinCalc på forhånd kan løse dem, så bliver spørgsmålet jo blot hvad der lettest løser opgaven, men hvis læringsmålet er lidt mere komplekst – fx at kunne spejle algebraiske og geometriske metoder i hinanden – bliver spørgsmålet i højere grad om matematikken i sig selv er transparent nok – altså om eleverne i tilstrækkelig høj grad er i stand til at beskrive metoderne, og om de rent faktisk også behersker denne matematik.

Og her kommer naturligvis også beherskelsen af redskabsprogrammet ind i billedet. Det er ikke realistisk at elever kan beherske alle mulige programmer. Man er nødt til at holde sig til nogle få.

Der er algebraiske muligheder i GeoGebra. Skal de bruges, eller er de ikke tilstrækkelig transparente? Maple har kun få muligheder hvad angår trigonometri, men man kan dog lave en skitsetegning. Er det nok geometri?

Som Morten karakteriserer indsigtsfuldhed, er det naturligvis nødvendigt at læreren har et progressionsblik rettet mod fremtidige anvendelser (og uddannelser).

En sådan vurdering kan fx føre til at GeoGebra (geometrisk tilgang) også er anvendeligt i forbindelse med kurveundersøgelse og tangentbestemmelse – og tilsvarende at algebra med CAS-programmer også kommer ind her mens pladsen for CosSinCalc der peger i retning af triangularisering, måske så forekommer mere begrænset. Omvendt er programmet så simpelt at det for nogle måske er værd at bruge alligevel.

Og dermed rører vi også ved endnu et dilemma i teknologidiskussionen. Vi har allerede meget sortering i forhold til det at kunne/ikke kunne bestemte former for matematik i skolen. Matematik på B-niveau i gymnasiet – både indhold og resultater – afspejler problemet. Der er sat fokus på anvendelser (fx χ^2-test og regressioner) der kun kan udføres med teknologi. Matematikken er ikke særlig transparent. Fokus bliver derfor på fortolkningen af outputtet og på at man kan tilpasse opgavernes input til hvordan programmerne vil have det.

Det gør undervisningen afhængig af teknologien og eleverne afhængige af at de behersker den. Den typiske form er færdige ark eller pakker der i grunden ligner CosSinCalc-tilgangen.

Dermed har vi skabt ikke én, men to barrierer: én der handler om at etablere transparens af disse metoder og deres forbindelse til matematik i øvrigt (fx til eksponential- eller potensfunktioner), og én der handler om rutine og funktionsvenlighed af selve programmet.

Vender vi tilbage til Mortens konklusioner, er vi enige i at det ikke lader sig gøre at spole tiden tilbage og fjerne de nye teknologier, men at en nytænkning af curriculum er ønskeligt. Inden vi går for drastisk til værks med fare for at smide barnet ud med badevandet, skal vi som antydet ovenfor fortsætte bestræbelserne på at finde en god balance mellem læring, interesse og sund matematik.

Center for Computerbaseret Matematikundervisning, Københavns Universitet (CMU), har samme afsæt som Mortens artikel: at undersøge den nærmere sammenhæng der er mellem introduktion af ny teknologi og matematikundervisningen, herunder nye muligheder for matematisk indsigt. Vores kerneydelse er aktionsforskning i form af støttede udviklingsprojekter gennemført i de gymnasiale uddannelser.

Der ligger hermed en åben invitation til i et projekt at tage fat på nogle af de problemstillinger som Morten Misfeldts artikel rejser. Besøg os på www.math.ku.dk/forskning/cmu/.