Trekantsberegninger og teknologi

– et eksempel på hvordan teknologi har (eller bør have) indflydelse på udvikling af Matematikcurriculum

Morten Misfeldt, *Institut for Læring og Filosofi, København, Aalborg Universitet*

Abstract *I denne artikel undersøger jeg hvorvidt og hvordan indholdet af matematikundervisningen påvirkes af brugen af digital teknologi. Det gør jeg ved at analysere tre forskellige tilgange (trigonometriske, euklidiske og automatiserede) til trekantsberegninger. Mit teoretiske udgangspunkt er pragmatisk, og jeg bruger Deweys begreb om kontinuitet til at diskutere den uddannelsesmæssige værdi af de forskellige strategier samt hvilke strategier der kan anses for mest matematiske og fornuftige. Jeg konkluderer at alle tre strategier kan anses for matematisk korrekte, men at fremkomsten af digitale teknologier kan give anledning til en situation hvor nødvendigheden af trigonometriske løsningstrategier er vanskelig at begrunde hvis ikke curriculum omorganiseres.*

Digitale værktøjer og matematikundervisningens mål

Digitale værktøjer indtager grundskolens matematikundervisning for tiden. Dynamisk geometri (fx GeoGebra), computeralgebrasystemer (fx Wordmat) og regneark (fx Excel) bliver i stigende grad en del af fagets metoder og prøver på samme måde som disse teknologer tidligere er blevet en naturlig del af gymnasiet. Fra international matematikdidaktisk forskning ved man at digital teknologi kan have gennemgribende indflydelse på matematikundervisning (Laborde & Strasser, 2010; Niss, 1999; Trouche, Drijvers, Gueudet & Sacristán, 2013). Brug af digitale værktøjer påvirker nemlig både matematikfaget selv, læring og erkendelse af faget og undervisning i faget. De tidligste forskningsbidrag om teknologi i matematikundervisningen fokuserede på nye matematiske muligheder og processer, fx i form af computerstøttede beviser og numeriske eksperimenter (Churchhouse & International Commission on Mathematical Instruction, 1986), og på et ønske om at anvende teknologi til at skabe en "ny skolematematik" (Papert, 1980). I 1990'erne og starten af 00'erne har der været stort fokus på matematiklæringsaspektet af teknologi i matematikundervisningen. Fokus har været på elevens individuelle konstruktion/tilegnelse af matematisk viden i tæt forbindelse med de strategier eleverne anvender for at løse de opgaver de stilles over for. Fra elevens perspektiv tilbyder digitale værktøjer nye og stærkt instrumenterede metoder til løsning af en række opgaver af matematisk karakter. Dette forhold er velbeskrevet inden for matematikkens didaktik (Dreyfus, 1994; Guin, Ruthven & Trouche, 2005; Mariotti, 2002; Winsløw, 2003). I de seneste år er der kommet øget fokus på læreren og undervisningen i forståelsen af teknologi i matematikundervisningen. Det er veldokumenteret at digitale værktøjer øger kompleksiteten i matematikundervisningen uden nødvendigvis at ændre matematikundervisning i en bestemt retning. Lærere vil anvende værktøjer og undervisningsteknologier forskelligt, med udgangspunkt i deres eksplicitte eller implicitte pædagogiske og matematiske idéer. Og ligeledes anvender lærere mange forskellige orkestreringer af samspillet mellem værktøjer, elever og lærer i deres måder at undervise på (Drijvers, Doorman, Boon, Reed & Gravemeijer, 2010; Tabach, 2013).

Når matematikundervisningspraksis tager digitale værktøjer og nye instrumenterede teknikker til sig, åbnes altså et mulighedsrum af måder hvorpå et matematisk emne kan udfolde i undervisning. I denne artikel vil jeg undersøge dette mulighedsrum i forhold til et konkret eksempel omkring forskellige tilgange til at beregne sider og vinkler i trekanter. Jeg undersøger hvordan udbredelsen af forskellige typer af teknologiske værktøjer (automatiserede beregnere, dynamiske geometriværktøjer og til dels tekniske tegneværktøjer) ændrer på hvilke metoder til beregning af sider og vinkler i trekanter der er matematisk fornuftige og kan understøtte god matematikundervisning. Ligeledes vil jeg diskutere hvorvidt disse nye metoder bør have konsekvenser på curriculum niveau.

Selvom jeg diskuterer et konkret eksempel i artiklen, er problemstillingen om hvorvidt teknologi kan og bør have indflydelse på curriculum i matematik, både bred og relevant. Hvis det viser sig at introduktionen af en række forskellige digitale værktøjer i samfund og skole kan rykke ved hvilken rolle et emne kommer til at indtage i matematikundervisningen, så kan den løbende introduktion af teknologi som skolen for tiden udsættes for, kalde på relativt store forandringer i fagets læseplan.

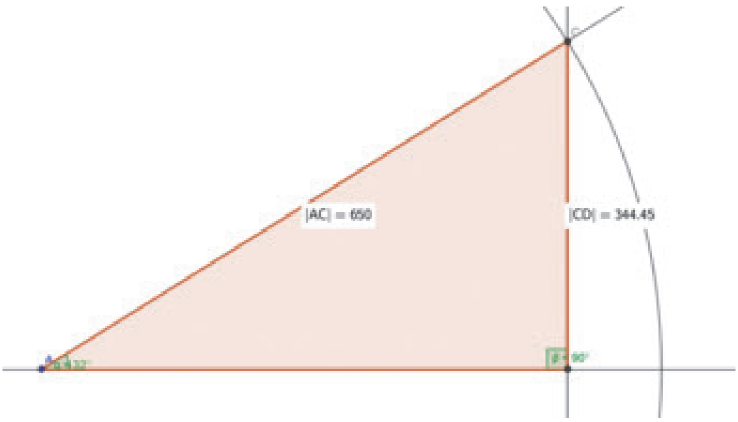
Trekantsberegninger i skolen

En trekantsberegning forstås i almindelighed som en opgave hvor man ud fra *nogle* oplysninger om sider og vinkler i en trekant beregner størrelserne på *alle* sider og vinkler. Overordnet er der er to forskellige tilgange til trekantsberegninger: Man kan tegne sig frem gennem brug af passer og lineal eller et dynamisk geometri program (jeg vil betegne sådanne løsningsstrategier "euklidiske" selvom de ikke udelukkende benytter sig af euklidiske operationer), eller man kan algebraisere problematikken gennem brug af trigonometriske funktioner og relationer samt Pythagoras' læresætning (jeg vil betegne sådanne løsningsstrategier "trigonometriske" eller "algebraiske"). Trekantsberegninger der anvender de trigonometriske funktioner, har fra 2009 været en del af grundskolens pensum. Det er også en del af pensummet på A-, B- og C-niveau i STX og på forskellige andre ungdomsuddannelser.

Sådanne trekantsberegninger kan eksemplificeres med følgende opgave fra en gymnasiebog:

"En drage i en 650 meter lang snor står i en vinkel på 32° i forhold til jorden. Hvor højt er dragen oppe?" (Pilegaard Hansen, 1987)

En euklidisk løsning til opgaven vil bestå i at afsætte en linje, oprejse en vinkel på 32 grader og nedfælde en normal som i konstruktionen nedenfor.

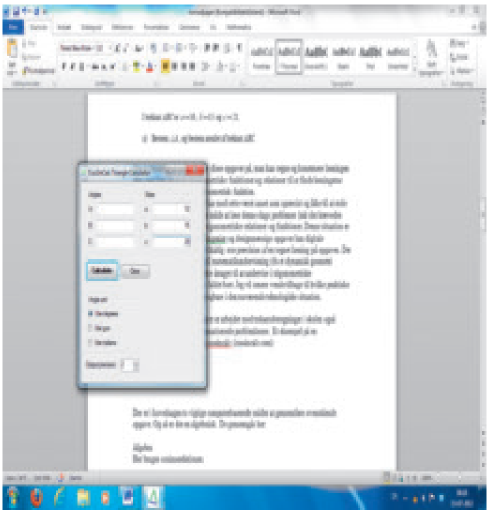


Figur 1. *En euklidisk løsning til opgaven hvor en drage hænger i en 650 meter lang snor der står i en vinkel på 32 grader i forhold til jorden. Konstruktionen er lavet i GeoGebra ved at oprejse en vinkel på 32 grader og nedfælde en normal 650 meter ude ad "snoren". GeoGebra kan angive resultatet med op til 15 betydende cifre.*

Denne konstruktion anvender standardfunktioner i et dynamisk geometriprogram og giver et resultat hvis præcision udelukkende afhænger af det dynamiske værktøjs præcision. Tilsvarende vil en trigonometrisk løsning bestå i at gennemføre regnestykket 650 sin 32° = 344.45.

At tegne løsningen har tidligere, med rette, været anset som upræcist. Derfor har den væsentligste måde at løse denne slags problemer (når der krævedes stor præcision) været brug af trigonometriske relationer og funktioner. Denne situation er ændret af fremkomsten af digitale tegneværktøjer og dynamiske geometrisystemer. Til de fleste praktiske ingeniør- og designmæssige opgaver kan digitale tegneværktøjer (som AutoCAD og Google SketchUp) sikre stort set vilkårlig stor præcision af tegnede løsninger. Det samme kan software designet til matematikundervisning (fx et dynamisk geometriprogram).

Trekantsberegninger i skolen er også præget af fremkomsten af automatiserede problemløsere. Et eksempel på en automatiseret problemløser er CosSinCalc, der også er integreret i programpakken WordMat (www.cossincalc.com, www.eduap.com/wordmat/ – se figur 2). Med en automatiseret problemløser kan alle trekantsberegninger løses enkelt. Fx kan opgaven "I trekant ABC er a = 10, b = 15, og c = 21 – bestem vinkel A" (igen fra Pilegaard Hansen, 1987) let løses ved at indsætte de oplysninger der angives i opgaven.



CosSinCalc Calculation Results

Calculated by the CosSinCalc Triangle Calculator

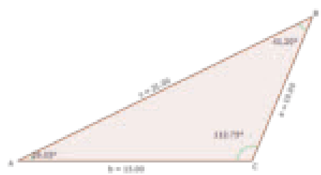
July 15, 2012

Angles	Sides	Altitudes	Medians	Angle bisectors
$A = 26.05°$	$a = 10.00$	$h_A = 13.83$	$m_a = 17.55$	$t_A = 17.05$
$B = 41.20°$	$b = 15.00$	$h_B = 9.22$	$m_b = 14.64$	$t_B = 12.68$
$C = 112.75°$	$c = 21.00$	$h_C = 6.59$	$m_c = 7.23$	$t_C = 6.65$

$$A = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right) = \arccos\left(\frac{15.00^2 + 21.00^2 - 10.00^2}{2 \cdot 15.00 \cdot 21.00}\right) = 26.05°$$

$$B = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}\right) = \arccos\left(\frac{10.00^2 + 21.00^2 - 15.00^2}{2 \cdot 10.00 \cdot 21.00}\right) = 41.20°$$

$$C = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right) = \arccos\left(\frac{10.00^2 + 15.00^2 - 21.00^2}{2 \cdot 10.00 \cdot 15.00}\right) = 112.75°$$



Figur 2. *Inputvindue og outputvindue fra CosSinCalc når opgaven "I trekant ABC er a = 10, b = 15, og c = 21 – bestem vinkel A" skal løses. Output fra CosSinCalc giver en tegning, alle oplysninger om trekanten samt alle de algebraiske manipulationer man som elev kan blive afkrævet.*

Funktionaliteten i CosSinCalc er enkel. Input er de oplysninger om sider og længder i en given trekant som man har til rådighed, og output er et billede af trekanten, alle relevante oplysninger om trekanten samt de algebraiske beregninger der er nødvendige for at gennemregne trekanten. Denne opgave kan også let løses i et dynamisk geometriprogram ved at konstruere trekanten "med passer" og derefter bede om vinklerne.

Alt i alt er situationen altså at digitale tegneværktøjer og dynamiske geometriprogrammer tilbyder nogle præcise, praktiske og intellektuelt udfordrende måder at gå til trekantsproblemer på uden brug af de trigonometriske funktioner. Samtidig findes der helt automatiserede måder at løse opgaver på der involverer trigonometriske trekantsberegninger. Denne situation minder om en række andre situationer (fx løsning af lineære og kvadratiske ligninger, træning af divisionsalgoritmer og funktionsundersøgelser) hvor computerværktøjer påvirker det didaktiske samspil imellem de begreber og teknikker der indgår i curriculum, og de måder der arbejdes med konkret problemløsning ved hjælp af teknologi, og derfor vil jeg nedenfor forsøge at analysere situationen nærmere. Men før jeg gør det, vil jeg introducere min teoretiske ramme der er baseret på Deweys pragmatiske filosofi, og hans syn på matematik, læring og uddannelse.

Teoretisk fundament: Deweys pragmatiske filosofi og begrebet om kontinuitet

I analysen af trekantsberegningers rolle i skolen tager jeg et pragmatisk udgangspunkt. Det vil sige at jeg bygger på en antagelse om at der er et løbende og komplekst samspil imellem viden og handling, indhold og metode og formål og resultat. Det betyder også at begrundelsen for at gennemføre analysen ikke alene er at skabe klarhed over de problematikker der kan dukke op når digitale værktøjer bevæger sig ind i skolens matematikundervisning: Jeg forsøger samtidig at skabe rum for handling og forandring af eksisterende praksisser (Biesta, 2010; Dewey, 1916). Min hovedkilde til denne teoretiske tilgang er Deweys værk *Demokrati og Uddannelse* (1916).

Begrebet kontinuitet, der defineres som en modsætning til dualisme, er centralt hos Dewey, der beskriver to slags dualismer. Den ene er mellem forskellige fænomener i verden (fx børn og voksne, rige og fattige, vilde og civiliserede), og den anden er mellem konkrete fænomener og transcendentale kategorier (fx konkrete mennesker og den abstrakte idé om menneskelighed). Opdelingen af verdens elementer (der fx kan føres tilbage til Aristoteles) udgør nok en praktisk måde at navngive forskellige grupper af fænomener på, men det er en misforståelse at anse disse betegnelser som havende ontologisk status. Man kunne trække skellet imellem fx voksen og barn et andet sted end vi har valgt at gøre det. Således er skellet mellem voksen og barn langt mere arbitrært og kulturelt forankret end kontinuiteten "at vokse op", og alle sådanne opdelinger vil, til dels, være arbitrære. I demokrati og uddannelse bruger Dewey ofte klasseskel som eksempel. Skellet mellem arbejderen der er økonomisk trængt og drevet af pres og ydre motivation, og et borgerskab der er økonomisk frit og arbejder drevet af indre motivation, er hos Dewey helt reelt, men ikke fundamentalt. Det vil sige at alle mennesker bevæger sig på et kontinuum imellem disse to tilgange til arbejde.

For at komme ud over disse arbitrære skel mellem fænomener beskriver Dewey hvordan en række filosoffer (fx Platon) har konstrueret et andet fundamentalt skel imellem konkrete fænomener og ideelle kategorier. Ved at konstruere ideelle kategorier bliver det muligt at hævde at der er forskel på fx voksen og barn eller rig og fattig samtidig med at de alle er konkrete manifesteringer af en fundamental og transcendental menneskelighed. Skel imellem konkrete fænomener og ideelle kategorier er ifølge Dewey problematiske fordi de er empirisk ubegrundede og en slags religiøs spekulation. Som eksempel på en teoridannelse der benytter sig af kontinuitet frem for fundamentale skel, fremhæver Dewey evolutionsteorien som dels undgår at betragte arterne som principielt adskilte fra hinanden (det første "aristoteliske" skel) og gudsgivne (det andet "platoniske" skel).

Deweys pragmatiske filosofi, og i særdeleshed hans begreb om kontinuitet, kan ikke siges at være en "neutral" teoretisk ramme til at belyse diskussionen omkring problemer med indførelse af digitale værktøjer i matematikundervisning. Fokus på praksis og afvisning af transcendentale kategorier giver et særligt snit på problemet, men valget af Dewey viser sig at være praktisk for at forstå debatten. Hvis man hævder at digitale værktøjer alene skal bringes i spil for at understøtte elevers tilegnelse af et i forvejen eksisterende og upåvirket matematikcurriculum, kan man med disse begreber kritiseres for at bygge sin argumentation på en platonisk dualisme der idealiserer matematikcurriculum (fx bestemte emner eller kompetencebegreber) som transcendentalt. Og fortaleren for at lave en helt ny skolematematik vil kunne kritiseres for at bygge på en aristotelisk dualisme imellem ny computerbaseret og gammel algebraisk matematik. Med Deweys begreber vil målet i stedet være at se på kontinuiteten imellem forskellige måder at gøre matematik på. Ud over at Dewey altså lader os se den principielle diskussion omkring brug af digitale værktøjer klarere, har hans filosofi også den store fordel at forfatterskabet dækker hele uddannelsesproblematikken fra viden og læring til begrundelse, motivation og forståelse af curriculum.

Deweys syn på matematik, læring og uddannelse

Hos Dewey er der intet principielt skel imellem teoretisk og praktisk viden. De to slags viden udgør snarere hver sin (degenererede) ende af et kontinuum af vidensformer. Både teoretisk og praktisk viden er viden fordi det lader mennesket handle, forudsige og være i verden. Det teoretiske aspekt af viden tillader mennesker at ræsonnere og bringe viden i spil i en lang række forskellige situationer hvorimod det praktiske aspekt tillader at viden virker direkte på verden. Viden der kun er teoretisk, er tom spekulation (og er dermed degenereret til "ikkeviden"), og viden der kun er praktisk, understøtter udelukkende reproduktive aktiviteter (og er derfor også degenereret til "ikkeviden"). Viden er således kun viden hvis det tillader os at forudsige, fremskrive, reflektere og gøre i verden (Biesta, 2010; Dewey, 1916, kapitel 11).

Matematik og matematisk viden er hos Dewey kontinuert forbundet med videnskabelig undersøgelse eller "inquiry". Tal og aritmetik opstår i menneskets behov for ikke blot at beherske og overskue sin omverden (som man fx må antage at et dyr er i stand til), men i den detaljerede undersøgelse af hvilke komponenter omverdenen består af (McLellan & Dewey, 1895).

Læring må, som konsekvens af forståelsen af viden, ske i samspil med verden og i konkrete forsøg på at undersøge og gøre noget ved verden, og derfor kan læring af en række matematiske begreber ikke forstås uden hensyntagen til hvad disse begreber sætter eleven i stand til at finde ud af og gøre ved sin omverden (Biesta, 2010; Dewey, 1916).

Uddannelse er hos Dewey en central aktivitet der bidrager til samfundets videreførelse. Formålet med uddannelse er dels at danne og opdrage fremtidens borgere og dels at sikre tilgang af velfungerende arbejdskraft i samfundet. Men formålet med uddannelse kan i et demokratisk samfund ikke udelukkende være at sikre arbejdskraft. Et sådant syn på uddannelse er efter Deweys mening undertrykkende og kan skabe et klassesamfund hvor der ikke er kontinuitet imellem samfundsklasserne. Målet med uddannelse må altså også være skabelsen af selvstændigt tænkende individer, der kan møde nye udfordringer og er i stand til at forfølge mål de selv sætter sig.

Der er kontinuitet imellem uddannelse og liv. Dewey anser det for en fejl at se uddannelse som udelukkende en forbedrende aktivitet. Menneskelig aktivitet indeholder altid elementer af at dygtiggøre sig, og intelligent arbejde vil altid bidrage til læring. Men netop fordi der er kontinuitet imellem arbejde (forstået som målrettet aktivitet) og uddannelse, skal uddannelse planlægges så lærer og elever sammen udforsker verden og forsøger at opnå mål i verden (Dewey, 1916).

Forskningsspørgsmål og metode

Jeg vil med udgangspunkt i Deweys pragmatiske tilgang til matematik, viden og uddannelse sammenligne algebraiske, euklidiske og automatiserede tilgange til trekantsberegninger. Jeg vil undersøge om man kan sige at den ene løsningsstrategi er mere "matematisk fornuftig" end de andre, samt hvilke forståelser af "matematisk" man kan lægge til grund for en sådan vurdering. Jeg vil også diskutere de didaktiske problematikker der kan tænkes at dukke op når alle tre løsningsstrategier er tilgængelige for eleverne.

Sammenligning af algebraiske, euklidiske og automatiserede løsningsstrategier fra et matematisk perspektiv

For at sammenligne de forskellige løsningsstrategier har jeg behov for nogle transparente fokuspunkter: Hvad vil det egentlig sige at en løsningsstrategi over for et problem omkring at finde sider og vikler i en trekant er matematisk eller matematisk fornuftig? Tilvejebringelsen af globale kriterier for at afgøre hvorvidt en problemløsningsstrategi er mere matematisk end en anden, er et ambitiøst matematikfilosofisk projekt som jeg ikke vil påtage mig. Men det er alligevel værd at bemærke at forskellige filosofiske tilgange kan forventes at komme med forskellige bud og præferencer. Grundlagsskolerne har (på hver sin måde) lagt vægt på at matematiske arbejdsmåder giver anledning til *sande og præcise* resultater (Shapiro, 2000) mens mere funktionelt orienterede tilgange som naturalisme (Maddy, 1997) og etnomatematik (Ascher & D'Ambrosio, 1994) har haft fokus på om en matematisk strategi er *effektiv i problemløsning og naturbeskrivelse*. Endelig har både kognitive, dialogisk baserede og internt matematiske tilgange til matematikkens filosofi lagt vægt på at matematiske strategier *giver indsigt i matematiske forhold* (såsom tal/størrelser, former og forandringer) og *mønstre* (Devlin, 1994; Lakatos, 1976; Lakoff & Nunez, 2000; Thurston, 1994).

En pragmatisk tilgang vil fremhæve matematiske strategier som nogle der er effektive og indsigtsgivende i forhold til den systematiske undersøgelse af fænomener i verden (Dewey, 1916). I forlængelse heraf beskriver matematikeren og den pragmatiske filosof Charles Sanders Peirce matematik som den teoretiske ende af et kontinuum af tilgange til at undersøge vores omverden. Han mener at matematik i højere grad er kendetegnet ved sin metodiske tilgang og sit samspil med naturvidenskaberne end ved de objekter (fx størrelser, forandringer og former) som matematikere typisk beskæftiger sig med (Peirce & Moore, 2010). Peirce fremhæver diagrammatisk ræsonneren som matematikkens metode. Det vil sige udforskning af matematiske konstruktioner gennem logisk deduktion og til en vis grad også gennem mere induktive tilgange.

Jeg har valgt tre omdrejningspunkter for sammenligningen af hvad der gør en løsningsstrategi "matematisk": *præcision og eksakthed*, *effektivitet* og *indsigtsfuldhed*:

(1) *Præcision og eksakthed*. Matematikkens rolle i videnskaben er netop præcision, og det er væsentligt at matematiske resultater ikke er behæftet med den usikkerhed der kendetegner empiriske observationer.

(2) *Effektivitet*. En matematisk løsningsstrategi kan med rimelighed vurderes på hvor effektivt, herunder hurtigt, sikkert og generelt, strategien løser problemet. Effektivitet vedrører også hvorvidt en løsningsstrategi understøtter samspillet med andre fag.

(3) *Indsigtsfuldhed*. Indsigtsfuldhed er til dels rettet imod verden. En matematisk strategi er god hvis den giver os indsigt i det problem vi angriber matematisk. Men matematisk løsningsstrategi bør også vurderes på om den giver indsigt i matematikken selv og peger frem imod ny matematisk teori.

Selvom jeg ovenfor formulerer disse omdrejningspunkter uafhængigt af matematisk indhold, er de tænkt specifikt til at sammenligne strategier over for problemer der involverer trekantsberegninger. Disse omdrejningspunkter er ikke et resultat af en syntese af alle forskellige matematikfilosofiske tilgange. De er heller ikke udledt direkte fra mit videnskabsteoretiske udgangspunkt i pragmatisme, men jeg har dog forsøgt at tage hensyn både til det pragmatiske udgangspunkt og til bredere matematikfilosofiske resultater. Disse omdrejningspunkter har altså status af et valg der giver mig et transparent grundlag for at diskutere hvorvidt en løsningsstrategi over for et trekantsproblem er matematisk. Nedenfor sammenlignes algebraiske, euklidiske og automatiserede strategier på disse tre punkter.

Præcision og eksakthed

Et af de argumenter jeg tit hører på forskellige lærerværelser og blandt matematikere, er at trigonometriske løsninger, til forskel fra euklidiske løsninger, er eksakte. At arbejde eksakt vil sige at kunne angive en løsning til et problem selvom denne løsning ikke har en korrekt endelig decimalrepræsentation. Der er i hvert fald to forskellige fortolkninger af eksakthed der begge er væsentlige for diskussionen. Et reelt tal der er løsning på en matematisk udfordring, kan siges at være *præcist og eksakt* hvis det kan angives med så mange decimaler som det ønskes i en given situation. Men et matematisk resultat kan også siges at være *eksakt og stringent* hvis løsningen kan angives ved et algebraisk udtryk eller ved en entydig algoritme bestående af (accepterede) matematiske skridt. Forståelsen af eksakthed som stringens relaterer også til målet om at matematik skal være a priori, det vil sige uafhængig af empiriske observationer.

I den første forståelse af eksakthed er spørgsmålet om hvorvidt den trigonometriske løsning er mere eksakt end den euklidiske, simpelthen en konkurrence på præcision imellem et matematisk tegneværktøj og en trigonometrisk tabel. Eller sagt på en anden måde: Når resultaterne af en trekantsberegning angives i en decimaltalsrepræsentation, vil en algebraisk og en trigonometrisk løsning være lige præcise og eksakte.

Der er visse muligheder for at angive eksakte værdier som løsning af trigonometriske problemer, men beregningen af disse værdier er ofte resultat af geometriske overvejelser og er derfor ikke afhængig af de trigonometriske begreber.

I en forståelse af eksakthed som stringens er det springende punkt om det kan angives hvordan man gennem rent matematiske skridt kan nå til en løsning. Her bliver det centralt hvad vi anser som *rent matematiske skridt*. Men hvis vi betragter et dynamisk geometrisystem som et matematisk system, så giver det mening at tænke på tegning eller konstruktion i et sådant system som et veldefineret matematisk objekt (i eksemplet i figur 1 konstrueres linjer og vinkler af bestemte størrelser, og der konstrueres en normal til en linje gennem et punkt – dette kan betragtes som veldefinerede matematiske operationer). Det eksakte ligger altså ikke i at opgavens løsning kan formuleres som en formel, men i at der kan angives en entydig algoritme bestående af matematiske skridt der bringer dig til løsningen.

Påstanden om at trigonometriske beregninger er mere præcise og eksakte end euklidiske konstruktioner, er således ikke solidt underbygget. Den numeriske præcision der opnås ved de to løsningsstrategier, er i de fleste tilfælde den samme. I en forståelse af eksakthed som stringens er der heller ikke en klar forskel på eksaktheden af de to strategier. I begge tilfælde kan løsningerne konstrueres i et endeligt antal entydige matematiske skridt. Den automatiserede løsningsstrategi er i forhold til eksakthed parallel med den algebraiske strategi da CosSinCalc altid afleverer de algebraiske manipulationer der skal til for at gennemføre den algebraiske løsning.

Anvendelighed og effektivitet

De tre løsningsstrategier er forskellige når det kommer til anvendelighed og effektivitet. Den automatiserede løsning må siges at være den mest effektive hvis det alene drejer sig om at finde vinkler og sider i en trekant, men denne løsningsstrategi rækker til gengæld ikke særlig effektivt ud imod mere komplekse situationer og matematisk teoriudvikling. At tegne/konstruere løsningen er også effektivt forstået på den måde at denne strategi, sammen med et godt geometri-/tegneværktøj, kan bruges til at løse en lang række komplekse geometriske problemstillinger. Effektiviteten i den algebraiske/trigonometriske tilgang består i hvert fald i to forhold. For det første kan løsningen til et problem sættes på en formel og dermed enkelt beregnes mange gange med forskellige værdier. For det andet betyder dette at der kan introduceres variable i formlen hvilket understøtter yderligere matematiseren og modellering. Hvis eleverne alene kommer til at arbejde med simple trekantsberegninger, kan man dog nemt risikere at disse aspekter aldrig rigtig bliver tydelige for eleverne. I denne situation er den algebraiske/trigonometriske løsningsstrategi måske ikke så effektiv da eleven kan opleve at skulle tilegne sig en række nye begreber og metoder for at løse opgaver som hun allerede var i stand til at løse med et dynamisk geometrisystem.

Indsigtsfuldhed

Når det kommer til indsigtsfuldhed, er den automatiserede løsning svag fordi en stor del af det begrebsmæssige og logiske arbejde er overladt til computeren og dermed måske aldrig overvejes af eleven. På den anden side fremviser CosSinCalc jo alle relevante repræsentationer og matematiske skridt hvilket understøtter indsigt. Hvorvidt de automatiserede løsningstrategier understøtter indsigtsfuldhed, er altså meget afhængigt af hvordan de bringes i anvendelse af eleverne. Den algebraiske og den geometriske løsningsstrategi understøtter indsigtsfuldhed på hver sin måde. Et dynamisk geometrisystem bygger på en simpel, men kraftfuld geometrisk model der er relativt let at forstå og arbejde med. Derfor kan arbejdet i et sådant program betegnes som indsigtsfuldt. På den anden side understøtter en trigonometrisk tilgang at geometriske problemer oversættes til algebraiske, hvilket også kan føre til nye indsigter og føre frem imod videre matematiseren. Alle tre løsningsstrategier indeholder black boxede elementer (Nabb, 2010; Winsløw, 2003) der udfordrer indsigtsfuldheden af løsningerne. For de euklidiske løsninger er det både principielt og reelt vanskeligt at tjekke om der er fejl i det dynamiske geometrisystem. Helt tilsvarende, men dog mere isoleret, er sinustabellen en black box i de algebraiske løsninger. I den automatiserede løsning som CosSinCalc giver os, kan beregningerne naturligvis sagtens tjekkes, men der er en reel fare for at der ikke er nogen der gør det, fordi alle stoler på værktøjet. Hvis beregningerne ikke tjekkes, arbejdes der i dette tilfælde hverken med en transparent model, som i et dynamisk geometriværktøj, eller med en isoleret relativt enkel black box, som i sinustabellen.

Opsummerende vurderer jeg at alle tre løsningsformer kan betegnes som matematiske. Løsningsstrategierne er stort set lige eksakte, og de er alle tre effektive til at løse trekantsberegninger. Den største forskel er den måde hvorpå løsningerne giver indsigt i matematikken og i verden.

Sammenligning af algebraiske, euklidiske og automatiserede løsningsstrategier fra et uddannelsesmæssigt perspektiv

I sidste afsnit argumenterede jeg for at både algebraiske, euklidiske og automatiserede strategier kan anses som matematiske. Der er uddannelsesmæssige fordele ved hver af de tre strategier, men der er også ulemper. Jeg vil derfor sammenligne de tre løsningsstrategier i forhold til elevernes læring, interesse og ejerskab samt i forhold til hvorvidt det er muligt at gennemføre god undervisning med den pågældende tilgang til trekantsberegninger.

(1) *Elevernes læring* er naturligvis væsentlig. Hos Dewey forstås læring som noget der er kontinuert forbundet med udførelsen af intelligent arbejde. For at lære skal eleverne deltage i en egentlig udforskning af verden eller udførelse af arbejde.

(2) *Interesse og ejerskab* bliver derfor helt centralt. Hvis eleverne ikke er i gang med at udføre arbejde eller undersøgelser som de tager ejerskab over for, vil de ikke lære ret meget.

(3) *God undervisning* er hos Dewey undervisning hvor elever og lærer sammen udforsker verden, og læreren støtter eleverne i de aktiviteter de er i gang med.

Dewey kritiserer i sit kapitel om disciplin og interesse (1916) undervisning hvor eleven ikke er deltager i meningsfuld skabende eller udforskende aktivitet, men snarere pålægges at tilegne sig et stykke viden af hensyn til systemet. Den kritik af disciplinerende undervisning er både velkendt og omdiskuteret, men pointen med at fremføre den her er at kritikken kan kaste lys over situationen omkring trekantsberegninger.

Der vil være mange elever der allerede inden de stifter bekendtskab med de trigonometriske funktioner, har et veludviklet apparat til at arbejde med trekantsberegninger. De kan fx være vant til at arbejde med dynamiske geometriværktøjer eller benytte sig af automatiserede beregnere. Derfor er der risiko for at arbejdet med de trigonometriske funktioner i denne kontekst ikke bliver en naturlig del af elevens undersøgelse og konstruktion. Snarere vil det måske blive opfattet som en påtrykt teknik eleven skal tilegne sig for matematiklærerens skyld. Hvis eleven ikke møder anden anvendelse af de trigonometriske funktioner end trekantsberegninger, er der fra et pragmatisk perspektiv ikke nogen god grund til at tilegne sig disse begreber. Elever der stiller spørgsmål til hvorfor de skal lære at anvende de trigonometriske funktioner til at beregne sider og vinkler i en trekant, vil blive mødt enten med autoritative argumenter (det er pensum), argumenter der handler om en fremtidig situation (det er en vej ind til noget spændende matematik som du måske engang kommer til at beskæftige dig med), eller argumenter der hviler på et problematisk grundlag (a la den algebraiske metode er mere rigtig).

Dewey kritiserer autoritative og fremtidsrelaterede begrundelser for ikke at tage elevernes undersøgelse af deres omverden alvorligt. Ved at anvende autoritative argumenter vil man disciplinere eleven frem for at understøtte elevens interesse, og ved at henvise til en eventuel fremtidig situation betragtes eleven som en ufærdig voksen frem for et selvstændigt individ. Endelig kan læreren, ved at forsvare trigonometriske trekantsberegninger som mere rigtige, risikere at give eleverne et meget uheldigt billede af matematik. Dels er der risiko for at eleven får det indtryk at matematik er en samling af gammeldags, ineffektive metoder der ingen gang har på jorden i livet uden for skolen. Og desuden er der risiko for at man giver eleven det indtryk at det er okay at sammenblande hvad der er den institutionelt accepterede "almindelige" metode, og hvad der er matematisk korrekt. Et opslag i en sinustabel er som beskrevet tidligere ikke mere eksakt end en måling i et digitalt tegneværktøj. Derfor er der risiko for at elever der udsættes for svage argumenter for trigonometriske trekantsberegninger, bliver skuffede og får en opfattelse af matematik som et autoritativt, konserverende og filosofisk inkonsistent fag.

De automatiserede trekantsberegnere udgør en joker i diskussionen af de forskellige metoders undervisningsmæssige status. Det er der to grunde til: Automatiserede trekantsberegnere kan være med til at cementere trigonometriske trekantsberegninger som et meningsløst skuespil, og de kan positionere lærer og elev som modstandere i et slagsmål om hvilke måder opgaver må løses på.

Hvis elever, jf. forrige afsnit, har vanskeligt ved at se meningen med at tilegne sig trigonometriske løsningsstrategier på trekantsproblemer, og der samtidig findes en række værktøjer der tilbyder at gennemføre disse beregninger for dem, så er det kun naturligt at nogle elever vælger at bruge de automatiserede løsninger. Hvis en elev altid bruger en automatiseret strategi hvor et output skrives af uden egentlig kognitiv bearbejdning, vil det understøtte at eleven opfatter trekantsberegninger som tom skolastik uden reel betydning.

Derudover stilles matematiklæreren let i et dilemma omkring hvorvidt disse automatiserede teknikker skal introduceres for eleverne. På den ene side er det lærerens pligt at sikre at eleverne bliver i stand til at klare sig så godt som muligt til eksamen, og derfor bør læreren vise eleverne de letteste og sikreste løsningsstrategier. Men på den anden side er det også lærerens pligt at sikre at eleverne tilegner sig de matematiske begreber der er i spil. Derfor er der også en del diskussion om hvorvidt det er fornuftigt at introducere eleverne til automatiserede beregnere, eller om man skal lade være. I Deweys forståelse af god undervisning er elever og lærer sammen i en proces der handler om at udforske verden, og de er ikke positionerede som hinandens modstandere. Hvis læreren bevidst tilbageholder viden om effektive løsningstrategier, eller eleven lader som om han gennemfører trigonometriske trekantsberegninger, men i virkeligheden skriver af fra CosSinCalc, bliver det vanskeligt at gennemføre god undervisning.

Situationen i skolesystemet

Jeg har i ovenstående afsnit gjort rede for hvordan og hvorvidt de tre forskellige metoder til trekantsberegninger kan ses som matematiske, samt beskrevet de uddannelsesmæssige fordele og ulemper ved metoderne. Det er klart at alle tre metoder kan anvendes til undervisning, og det er lige så klart at man ikke uden videre kan vurdere hvilken metode der er "bedst". Målet med at beregne sider og vinker i en trekant i en matematikuddannelsessammenhæng er ofte ikke udelukkende at træne denne færdighed. Der kan være tale om målsætninger der handler om at indføre bestemte begreber (fx trigonometriske funktioner) eller træne forskellige tilgange til problemløsning (fx at tegne/konstruere en løsning), hvilket naturligvis kan privilegere en af strategierne. For mere præcist at vurdere de uddannelsesmæssige fordele og ulemper vælger jeg at forholde mig til to kontekster: 8.-9. klasse i grundskolen og 1.-2. g på gymnasiet. I 8.-9. klasse lærer eleverne om de trigonometriske funktioner og bruger dem udelukkende til at regne på retvinklede trekanter. Efter endt uddannelse kan eleverne vælge at arbejde videre med matematik, og de vil så møde de trigonometriske funktioner igen og måske se nogle af de andre muligheder disse begreber byder på. I en sådan situation kan man spørge hvilket ekstra arsenal af undersøgelsesstrategier disse elever får med sig ved at lære om de trigonometriske funktioner? De fleste elever i 8.-9. klasse kender også til en euklidisk løsning der anvender et dynamisk geometrisystem, og er udmærket i stand til at løse de simple trekantsopgaver uden de trigonometriske funktioner. Motivationen for at lære om de trigonometriske funktioner bør altså søges andre steder end i simple trekantsberegninger.

I gymnasiet er det ligeledes værd at overveje om man skal lægge mindre vægt på trekantsberegninger som motivation for at arbejde med trigonometri. Trigonometri og trekantsberegninger er en dårlig cocktail da opgaverne løses let med velkendte euklidiske strategier, og en insisteren på at arbejde med trigonometriske begreber vil lede nogle elever i retning af automatiserede strategier der potentielt kan underminere undervisningens kvalitet. I stedet kan man arbejde med de trigonometriske funktioner som funktioner (fx med harmoniske svingninger og andre løsninger til differentialligninger) eller arbejde med at oversætte geometriske forhold til algebraiske (fx gennem matematisk modellering). Det er en udfordring på STX at de trigonometriske funktioner – betragtet som funktioner – kun er kernestof på A-niveau, men at trigonometriske trekantsberegninger er kernestof på både B- og C-niveau. Der kan altså gå flere år (fra 8. klasse til 3. g) før det egentlige potentiale i de trigonometriske funktioner bliver realiseret for eleverne, og mange elever vil aldrig nå dertil.

Analysen viser altså at det eksisterende curriculum er problematisk fordi der let bliver alt for langt imellem at de trigonometriske begreber introduceres for elever, og at disse begreber sætter eleverne i stand til at gennemføre matematiske undersøgelser af fænomener de ikke kunne tilgå uden de trigonometriske begreber. Dette forhold bør adresseres enten ved at ændre på curriculum eller ved at arbejde systematisk med meningsfulde måder at anvende trigonometri på.

Konklusion

Jeg har i denne artikel vist at introduktionen af en række digitale teknologier har givet nogle nye muligheder for at gennemføre trekantsberegninger i skolesammenhænge. De nye muligheder er både praktisk anvendelige og matematisk fornuftige og har vundet indpas i både grundskole og gymnasium. Ved hjælp af Deweys filosofi om viden og uddannelse har jeg argumenteret for at det eksisterende curriculum omkring trigonometri i grundskolen og gymnasiet er udfordret af denne udvikling. Det er i den nuværende teknologiske og curriculummæssige situation vanskeligt at gennemføre god undervisning i trigonometriske trekantsberegninger der understøtter elevernes matematiklæring, interesse og ejerskab. Denne analyse spiller ind i debatten omkring hvordan og hvor meget teknologi skal anvendes i matematikundervisningen. I tilfældet trekantsberegninger og trigonometriske funktioner er det ikke nemt at finde den gode balance. At bevare curriculum og fjerne de nye værktøjer vil have mange negative konsekvenser. Dels er der, i hvert fald i forbindelse med dynamiske geometrisystemer, en række dokumenterede læringspotentialer og kompetencer som eleverne vil gå glip af hvis man fjerner de nye teknologier. Derudover vil læreren skulle skjule effektive problemløsningsstrategier for eleverne hvilket udfordrer undervisningens kvalitet. Endelig mener jeg at der er risiko for at matematikfaget mister relevans hvis faget ikke konsekvent bekender sig til effektive metoder til at løse matematiske problemer med. Det er heller ikke sikkert at det er et godt svar at ændre matematikfaget radikalt i en beregningsorienteret retning uden respekt for fagets tradition. Jeg mener snarere der er behov for at forstå de løbende uddannelsesmæssige problemer som de nye værktøjer giver anledning til, og handle ved at gennemføre mindre og løbende ændringer af curriculum. Forandringerne på det teknologiske område er til tider drastiske, og derfor kan hurtig handling være påkrævet.

Referencer

Ascher, M. & D'Ambrosio, U. (1994). *Special Issue on Ethnomathematics in Mathematics Education*. Vancouver, B.C., Canada: FLM Pub. Association.

Biesta, G.J.J. (2010). Why What Works Still Won't Work: From Evidence-Based Education to Value-Based Education. *Studies in Philosophy and Education, 29(5)*, s. 491-503.

Churchhouse, R.F. & International Commission on Mathematical Instruction. (1986). The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and Its Teaching. Cambridge [Cambridgeshire]; New York, NY, USA: Cambridge University Press.

Devlin, K.J. (1994). *Mathematics, the Science of Patterns*: *The Search for Order in Life, Mind, and the Universe*. New York: Scientific American Library.

Dewey, J. (1916). *Democracy and Education*: *An Introduction to the Philosophy of Education*. New York: Macmillan.

Dreyfus, T. (1994). The Role of Cognitive Tools in Mathematics Education. I: R. Biehler (red.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (s. 201-211). Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers. Retrieved from http://site.ebrary.com/id/10067432.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. & Gravemeijer, K. (2010). The Teacher and the Tool: Instrumental Orchestrations in the Technology-Rich Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics, 75(2)*, s. 213-234. doi:10.1007/s10649-010-9254-5.

Guin, D., Ruthven, K. & Trouche, L. (2005). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*. New York: Springer.

Retrieved from http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&scope=site&db=nlebk&db=nlabk&AN=128286.

Laborde, C. & Strasser, R. (2010). Place and Use of New Technology in the Teaching of Mathematics: ICMI Activities in the Past 25 Years. *ZDM Internat. J. Math. Edu. ZDM – International Journal on Mathematics Education, 42(1)*, s. 121-133.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*: *The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge; New York: Cambridge University Press.

Lakoff, G. & Nunez, R. E. (2000). *Where Mathematics Comes From*: *How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York, NY: Basic Books.

Maddy, P. (1997). *Naturalism in Mathematics*. Oxford; New York: Clarendon Press; Oxford University Press.

Mariotti, M.A. (2002). Influence of Technologies Advances on Students' Math Learning. I: L. English, M.G. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (red.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Lawrence Erbaum Associates.

McLellan, J.A. & Dewey, J. (1895). *The Psychology of Number*: *And Its Applications to Methods of Teaching Arithmetic*. New York: D. Appleton and Co.

Nabb, K.A. (2010). CAS as a Restructuring Tool in Mathematics Education. I: *Proceedings of the 22nd International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*.

Niss, M. (1999). Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education. *ICM*, s. 1-24.

Papert, S. (1980). *Mindstorms*: *Children, Computers, and Powerful Ideas*. New York: Basic Books.

Peirce, C.S. & Moore, M. E. (2010). Philosophy of Mathematics Selected Writings. Bloomington, Ind.: Indiana University Press. Retrieved from http://public.eblib.com/EBLPublic/PublicView.do?ptiID=588790.

Pilegaard Hansen, J. (1987). *Geometri – obligatorisk niveau*. Frederikssund: FAG.

Shapiro, S. (2000). *Thinking about Mathematics*: *The Philosophy of Mathematics*. New York: Oxford University Press.

Tabach, M. (2013). Developing a General Framework for Instrumental Orchestration. I: *The Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. CERME 8.

Thurston, W.P. (1994). On Proof and Progress in Mathematics. *Bull. Amer. Math. Soc. Bulletin of the American Mathematical Society, 30(2)*, s. 161-178.

Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G. & Sacristán, A.I. (2013). Technology-Driven Developments and Policy Implications for Mathematics Education. I: M.A. (Ken) Clements, A.J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K.S. Leung (red.), *Third International Handbook of Mathematics Education SE – 24* (vol. 27, s. 753-789). Springer New York. doi:10.1007/978-1-4614-4684-2_24.

Winsløw, C. (2003). Semiotic and Discursive Variables in Cas-Based Didactical Engineering. *Educational Studies in Mathematics, 52(3)*, s. 271-288.

Engelsk abstract

In this article, I examine whether and how the content of mathematics teaching is affected by the use of digital technology. I analyze three different approaches (trigonometric, Euclidean and automated) to calculate sides and angels in a triangle. I use Dewey's concept of continuity to discuss the educational value of the different approaches as well as examining which strategies can be considered the most mathematically correct and sensible. I conclude that all three approaches can be considered mathematically correct, but that the advent of digital technologies can give rise to a situation where the need for trigonometric solution strategies is difficult to justify, unless curriculum is reorganized.