Ræsonnementer i folkeskolens matematikundervisning

– karakterisering, initiering, identificering og vurdering af ræsonnementskompetencen


Lars Lindhart, UCN


Flemming Ejdrup, UCN


Anette Skipper-Jørgensen, UCN

Abstract. *Med introduktionen af kompetencetænkning i Fælles Mål 2009 fik folkeskolens matematiklærere en ny udfordring i forhold til planlægning, gennemførelse og evaluering af undervisning. På baggrund af et udviklingsarbejde beskrives det hvordan udformningen af elevaktiviteter, herunder især oplægget, har betydning for initiering og udvikling af ræsonnementskompetence og lærerens mulighed for at kunne evaluere kompetencens udvikling. (a) I oplægget skal det tydeliggøres at målet er at gennemføre eksplicitte ræsonnementer, (b) aktiviteten skal være udfordrende i den forstand at den yder faglig modstand, og (c) der kan eventuelt aftales "spilleregler" der forpligter eleverne på at argumentere. Artiklen rummer endvidere en almen diskussion af kompetencebegrebet samt overvejelser om evaluering heraf.*

Indledning

Med ikrafttrædelsen af Fælles Mål 2009 fik folkeskolens matematiklærere en ny udfordring idet et af de fire centrale kundskabs- og færdighedsområder kom til at omhandle matematiske kompetencer, hvilket er en nyskabelse i folkeskolens matematikundervisning inspireret af Undervisningsministeriets udgivelse *Kompetencer og matematiklæring: idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Niss et al., 2002) – i daglig tale KOM-rapporten – samt efterfølgende forskning og udviklingsarbejder. I *Fælles Mål 2009* er alle rapportens otte matematiske kompetencer beskrevet i trinmål og slutmål. Dermed blev elevernes kompetenceudvikling et af "skal-områderne" i matematikundervisningen, hvorfor de matematiske kompetencer skal medtænkes af læreren i målsætningen, tilrettelæggelsen, valget af indhold og evalueringen af undervisningen. Overvejelserne over hvordan progressionen og udviklingen af matematiske kompetencer kan beskrives, og hvordan det er muligt at spore progression i elevernes udvikling af matematisk kompetence, er derfor blevet en meget central problemstilling i evalueringen af elevernes udbytte af undervisningen.

Kompetencebegrebet rummer udfordringer når det skal medtænkes i en undervisnings- og evalueringspraksis. Da der yderligere er tale om nytænkning, står såvel folkeskolens matematiklærere som andre der er involveret i undervisning i matematik – heriblandt artiklens forfattere – famlende over for begreberne og deres potentielle muligheder i forhold til tilrettelæggelse og evaluering af matematikundervisningen. I skoleåret 2009-10 gennemførte vi derfor med støtte fra Nationalt Videncenter for Matematikdidaktik (NAVIMAT) og Professionshøjskolen UCN og i samarbejde med lærere på Vadum Skole et udviklingsarbejde i tre klasser (1., 4. og 6. klasse) hvor vi begrænsede os til at arbejde med én kompetence, ræsonnementskompetencen, og hvor målet var at afprøve forskellige undervisningsoplæg og efterfølgende vurdere deres egnethed som afsæt for matematiske ræsonnementer hos eleverne. De indsamlede data er efterfølgende blevet analyseret med henblik på at spore tegn på eventuelle matematiske ræsonnementer.

I *Kompetencer og matematiklæring* (Niss et al., 2002) er ræsonnementskompetencen karakteriseret, men spørgsmålet for os er hvad der kan initiere ræsonnementer i elevernes arbejde. Vi har derfor i udviklingsarbejdet haft fokus på "det gode oplæg" som giver eleverne mulighed for at udvikle denne kompetence. Men for at kunne afgøre om et oplæg er godt eller ej, må kompetencens tilstedeværelse kunne identificeres og vurderes når den forekommer i praksis. Som kompetenceblomsten (ibid., s. 45) indikerer, er der overlap kompetencerne imellem, hvilket gør denne udfordring større.

Design af oplæg er kun en af flere faktorer der spiller ind på elevernes muligheder for at give sig i kast med matematiske ræsonnementer. I en undervisningssituation er der mange variable der kan have betydning for udfaldet af undervisningen og elevernes læring, bl.a. hvordan eleverne er vant til at arbejde med og tale om matematik. Disse forhold har været uden for vores kontrol og er derfor en kilde til usikkerhed i vores fortolkning af vores observationer.

Kompetencebegrebet

I karakteriseringen af matematisk ræsonnementskompetence vil vi diskutere denne dels ud fra en almen teoretisk synsvinkel og dels ud fra nogle problemstillinger som er dukket op i vores diskussioner under forløbet og igennem vores observationer i klasserne.

Der synes ikke at være en klar fælles konsensus om afgrænsning eller definition af kompetencebegrebet. Således opgav den svenske statslige kompetenceudredning i 1996 at bestemme en dækkende definition, men alligevel er der dog en vis overensstemmelse mellem forskellige fortolkninger af begrebet, og generelt kan det konkluderes at "kompetencer knytter sig til *situationer/kontekster*, er oftest *anvendelses- og handlingsorienterede* og er ofte funderet i personlige faktorer" (Hermann, 2003). Pointen med at kompetencer er knyttet til kontekster, er at man transformerer viden og færdigheder på en måde som er hensigtsmæssig i den givne kontekst. Heraf fremgår at dét at have en kompetence er mere og andet end at have viden og færdighed inden for ét område. Viden kan være ganske passiv – fx gentages paratviden på baggrund af et bestemt spørgsmål. Færdigheder kan udvises i ganske specifikke situationer, som fx når en elev bringer en algoritme i anvendelse ved synet af +. Endvidere kan mange elever fx demonstrere matematisk viden og færdigheder i matematiktimerne, men er ude af stand til at overføre disse til fysiktimerne. I alle tre eksempler bringes viden og færdigheder i anvendelse i specifikke og af personen subjektivt opfattede kontekster rammesat af henholdsvis spørgsmålet, plustegnet og matematiklokalet. Kompetencen bryder denne kontekstafhængighed. At være kompetent er at kunne sætte sin viden og sine færdigheder i spil i *forskelligartede* situationer, dvs. at kunne genkende konteksten som én af en type hvortil der svarer et bestemt handleberedskab.

I overensstemmelse hermed består *matematisk kompetence* "i at have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå" (Niss et al., 2002, s. 43). En sådan generel matematisk kompetence har forskellige aspekter der beskrives som otte matematiske kompetencer der hver er en "indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer" (ibid., s. 43). Formålet med matematikkompetencer er at blotlægge fagets gøren adskilt fra dets genstandsfelt. Vi taler ikke om fagets indhold, men om hvad en matematikkompetent person kan gøre i og med matematik.

I *Fælles Mål 2009* (s. 48) er der beskrevet et eksempel på vidensniveauer i *fakta* (kendskab af kvantitativ karakter – fx vide hvad en graf er), *færdighed* (indsigt der har at gøre med hvordan operationer udføres – fx kunne tegne en graf i et koordinatsystem ud fra en funktionsforskrift), *forståelse* (indsigt af kvalitativ karakter – fx kunne sammenligne og vurdere de informationer forskellige repræsentationer af funktioner giver) og *fortrolighed* (indsigt der medfører at eleven på grundlag af sin faktaviden, færdigheder og forståelse kan træffe kvalificerede valg i forhold til en given problemstilling – fx vælge den repræsentationsform der ifølge elevens begrundelser giver den mest brugbare information). *Fælles Mål 2009* fortsætter: "Der er en tæt sammenhæng mellem vidensniveauet "fortrolighed" og med kompetencebegrebet. Men mens "fortrolighed" knytter sig til viden om bestemte faglige begreber eller fagområder, fokuserer kompetencebegrebet i højere grad på matematikkens grundlæggende natur" (s. 48). Hermed gives der udtryk for at de matematiske kompetencer går på tværs af fagområderne selvom det ikke kan udelukkes at kompetencerne kommer til udtryk på forskellig måde inden for hvert fagområde.

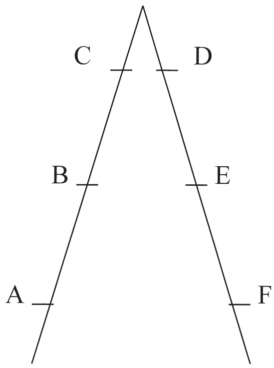
Efter denne generelle indledning om kompetencer vender vi os mod det der specifikt er artiklens fokuspunkt: ræsonnementskompetencen. I *Kompetence og matematiklæring* (Niss et al., 2002), kapitel VIIB om grundskolen, karakteriseres denne ved at bestå "dels i at kunne *følge* og *forholde sig til* et elementært *matematisk ræsonnement*, dvs. en kæde af argumenter fremsat af andre på skrift eller i tale til støtte for en påstand, dels i selv at kunne *udtænke og gennemføre sådanne ræsonnementer*" (ibid., s. 209). På afsluttende trin bør man endvidere kunne *"bedømme et matematisk ræsonnement"* (ibid., s. 210).

Under den del af processen hvor vi prøvede at afdække og udfolde denne beskrivelse, rejste der sig en række spørgsmål som vi vil delagtiggøre læseren i. Et matematisk ræsonnement er beskrevet som en *kæde af argumenter*. Men hvad er egentlig et godt eller gyldigt argument? Der kan skelnes mellem et logisk gyldigt argument, dvs. en logisk sammenhæng fra præmisser til konklusion hvor konklusionens sandhedsværdi følger af præmisserne, og et godt argument, som må vurderes relativt i forhold til elevens klassetrin og personlige matematiske formåen. En elev i 4. klasse kan fx hævde at der er flere naturlige tal end lige tal fordi man kun tager hvert andet tal i talrækken når man tæller de lige. På det givne klassetrin må det accepteres som værende et godt argument selvom argumentet ikke er gyldigt. I begge tilfælde er der tale om en særlig måde at argumentere på som læres igennem deltagelse i sammenhænge hvor matematisk kultur[1] er normsættende. I skolen rammesættes denne kultur af læreren, og det gode argument må således i modsætning til det gyldige argument ses i relation til klassetrin samt lærerens undervisnings- og fagsyn.

Er der tale om tegn på ræsonnementskompetence hvis ikke alle led i *kæden af argumenter* er eksplicitte og dermed observerbare for en ydre iagttager? Lad os forestille os at eleverne skal gennemføre et ræsonnement A til F med argumenterne A,

1 Det vil næppe være rimeligt at tale om én matematisk kultur, men idet vi henholder os til den engelske filosof Paul H. Hirsts vidensformer, kan der argumenteres for at alle matematiske kulturer er fælles om den vidensform Hirst (1974) kalder for "Pure Mathematics and Logics". Denne er karakteriseret ved en række begreber, et sandhedskriterium hvilende på kohærens, en deduktiv arbejdsform (kaldet syllogistisk deduktion), anvendelse af logiske regler samt nødvendige og tilstrækkelige betingelser.

B, C, D, E og F (se figur 1). Den dygtige elev har måske intuitivt (intuition her forstået som resultat af gentagen øvelse og god forståelse) gennemskuet argumentationen og hopper derfor direkte fra A til F uden at følge alle trin i ræsonnementet (op og ned som illustreret på figuren). I modsætning til hverdagslivets argumentationsform er det karakteristisk ved matematisk kultur at ræsonnementer føres igennem med stor detaljeringsgrad. Da det imidlertid er for krævende hver gang at gå tilbage til grundlæggende aksiomer, er større ræsonnementer samlet i sætninger, altså præcis udsagn af formen A til F.



Figur 1. *I hverdagslivet springes der direkte fra argument A til F, hvor det i matematikken kræves at alle argumenterne i ræsonnementet kan føres igennem.*

At eleven springer direkte fra A til F, rummer to problemer. For det første vanskeliggør det lærerens muligheder for at iagttage tegn på ræsonnementskompetence, og for det andet giver det for os at se anledning til et paradoks i forhold til kompetencebegreberne. En elev der udviser kompetence ved at være i stand til at gennemføre A – B – C – D – E – F på ét klassetrin, vil med det intuitive (men fagligt forankrede) spring A til F kun udvise færdighed på et senere klassetrin fordi udfordringen som eleven handler på, har ændret subjektiv karakter i kraft af at elevens faglighed har ændret sig. Eleven udviser således på ét niveau ræsonnementskompetence som imidlertid senere på et højere klassetrin "udvikles" til en færdighed. Dette kan anskueliggøres med et eksempel.

I forbindelse med vores udviklingsarbejde udspandt nedenstående dialog sig i en 1.-klasse i forbindelse med en iscenesættende klassesamtale om mus[2]:

> Læreren: Kan I regne ud hvor mange unger de får, når vi ved at de føder 5-6 gange om året, og de føder op til 8 unger? Hvad for et stykke kunne man lave?
> (småsnak)

2 Alle dialoger er optaget på diktafon og transskriberet og gengives i artiklen ordret.

T (elev): Hvis det er 6 og så 8 gange?

L: Ja, okay.

T: Det er ... det er 49.

L: Det er 49. Hvordan har du regnet det ud? Det er rigtig flot.

T: Det er fordi at hver gang ... (L tysser på en anden elev) ... jeg tog bare 6 ... jeg prøvede bare 6 fingre frem hver gang jeg har talt 8.

L: Okay. 6 fingre frem 8 gange.

T: Nej, sådan her. Først så sagde jeg 8 og så videre. Osv., osv., osv., osv.

L: Først så sagde du 8.

T: Så havde jeg en finger.

L: Ja.

T: Så sagde jeg 17.

L: Nej, 16, ikke også? 8 og 8 er 16.

T: Jo.

L: Så er vi oppe på 16 næste gang. Var det sådan at du gjorde?

T: Ja.

L: Og hvad så?

T: Så var det ... så tog jeg igen. Så blev det jo 3, ikke? Jeg blev bare ved indtil jeg havde 6 fingre på hånden.

L: Ja, okay. Du sagde 8 hver gang og så indtil du havde gjort det 6 gange.

T: Ja.

L: Det er sandelig flot. Kunne I andre forstå noget af det?

Elever (i kor): Nej ...

I vores fortolkning udviser eleven i 1. klasse ræsonnementskompetence i overensstemmelse med karakteristikken heraf i *Kompetencer og matematiklæring* (Niss et al., 2002): "Ræsonnementskompetencen kommer både i spil, når det gælder om at overbevise sig om reglers og påstandes rigtighed, og om at godtgøre at svar på spørgsmål, opgaver eller problemer er korrekte og fyldestgørende" (ibid., s. 210). På et højere klassetrin ville eleven umiddelbart (men fagligt forankret) svare 48 på samme spørgsmål og hermed alene udvise paratviden. Her vil der formentlig ikke ligge et egentligt ræsonnement til grund for svaret idet der ikke er tale om en egentlig udfordring. I *Kompetencer og matematiklæring* bliver elevens rutinemæssige handling i øvrigt karakteriseret som et tegn på symbol- og formalismekompetence (s. 210), dvs. 1.-klasses-elevens ræsonnementskompetence er blevet transformeret til paratviden eller en anden kompetence, hvilket kan forekomme paradoksalt.

Kan man forbinde en evne til at gennemføre ræsonnementer *uden for* matematikken med *matematisk kompetence*? Er der med andre ord forskel på en almen ræsonnementskompetence og en specifik matematisk ræsonnementskompetence? Den sidstnævnte er karakteriseret ved at den skal rumme en bestemt slags matematisk udfordring, samt af at kravet i matematikkulturen er et krav om høj detaljering, hvor dagligdagsræsonnementet tager de i hverdagskulturen immanente opfattelser for givne. Dette kan få eleverne til at undre sig over ræsonnementskravet i matematik: "Hvorfor skal vi det? Det er da indlysende."

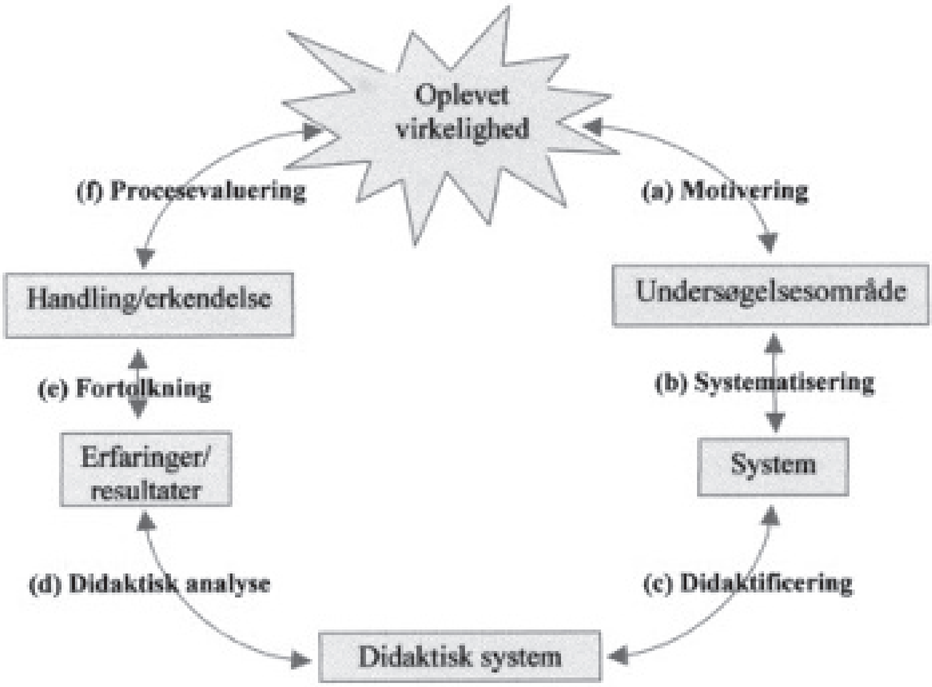
Endelig kan man spørge hvordan ræsonnementskompetencen forbinder sig med de øvrige kompetencer. Niss et al. (2002) ytrer sig herom: "Ved at knytte sig til retfærdiggørelsen af svar og løsninger, er ræsonnementskompetencen intimt forbundet med både modelleringskompetencen og problembehandlingskompetencen. Den udgør så at sige disses "juridiske" side" (s. 210). Som vi senere vil komme ind på, vil der være et problem, et spørgsmål eller en forbindelse der initierer ræsonnementet, og eleven må være i stand til at se at dette problem, dette spørgsmål eller denne forbindelse kan mødes med et matematisk ræsonnement. Men det er også svært at forestille sig hvordan det skulle være muligt at foretage et matematisk ræsonnement hvis det ikke på forhånd var kendt hvilken type svar ræsonnementet skal give. Begge disse aspekter handler om at besidde et vist mål af tankegangskompetence.

Didaktisk modellering som metode

Udviklingsarbejdets oprindelige formål var at udvikle viden om og evne til at iagttage tegn på folkeskoleelevers matematiske kompetence. I fase b indsnævres der til ræsonnementskompetence, og kernen i udviklingsarbejdet var at afprøve forløb der støtter udviklingen heraf. Blomhøj & Jensen (2007) præsenterer og diskuterer *didaktisk modellering* som en metode til en systematisk, forskningsbaseret og reflekteret udvikling af en undervisningspraksis (jf. figur 2) som vi har ladet være styrende for processen i udviklingsarbejdet. Den cykliske figur og dobbeltpilene understreger det refleksive i pædagogiske udviklingsprocesser.

Fase a, motivering, handler om at etablere sammenhæng til eksisterende praksis og herigennem sikre lærernes medejerskab af udviklingsarbejdet. Sammenhængen kan bl.a. søges sikret ved at de didaktiske tiltag i udviklingsarbejdet er eksplicit motiverede i en oplevelse af problemer i den eksisterende praksis. Med *Fælles Mål 2009 – Matematik*, hvor trin- og slutmål bl.a. beskrives ved hjælp af de matematiske kompetencer, skal kompetencedimensionen tænkes sammen med de matematiske emner og arbejdsmåder i undervisningsplanlægningen. Som en følge heraf opstår der et behov for at finde valide evalueringsformer der kan evaluere elevernes kompetenceudvikling både formativt og summativt, idet både den formative og den summative evaluering har indflydelse på hvad elever og lærere opfatter som værende vigtigt i matematik, og dermed hvad der undervises i og læres.

Via fase b, systematisering, søges en afgrænsning af undersøgelsesområdet, hvilket



Figur 2. *Model af den didaktiske modelleringsproces. Kilde: Blomhøj & Jensen (2007).*

førte til at vi har valgt at sætte fokus på én af kompetencerne, ræsonnementskompetencen. En systematisk evaluering af denne indebærer ud over en karakteristik, identifikation og vurdering (se Jensen, 2008) en afklaring af hvad der i en undervisnings- og evalueringssituation initierer ræsonnementskompetence. Dette førte os frem til nedenstående undersøgelsesspørgsmål:

- Hvad karakteriserer situationer som kan initiere en elevaktivitet med ræsonnementer som centralt element?
- Hvilke argumenter kan med rimelighed fortolkes som tegn på tilstedeværelsen af ræsonnementskompetence i en given undervisningssituation?

Systematiseringen sætter fokus på et eksplicit problem i en undervisningssituation med henblik på at få opstillet et system der beskriver hvilke aktører mv. der har indflydelse på problemet i praksis, og hvordan samspillet er imellem disse. I interaktionen mellem lærer og elever har vi først og fremmest valgt at fokusere på elevoplæg og dialog. Formålet med fasen c, didaktificering, er at gøre de mange didaktiske valg der foretages i dette system, så eksplicitte og klare at kritik og justering er muligt. Til beskrivelsen af det didaktiske system som vi ønsker at implementere på forskellige klassetrin i folkeskolen, er vi stærkt inspireret af *Teorien om didaktiske situationer*, hvis hovedophavsmand er matematikdidaktikeren Guy Brousseau (se Winsløw, 2006). Vores valg af didaktiske variable, dvs. de variable i undervisningssituationen som læreren kan påvirke med ændrede læringspotentialer til følge, og som har betydning for initiering af ræsonnementskompetence, er faldet på: eksplicit målformulering, elevoplæg og undervisningsmaterialer, valg af aktiviteter og organisationsform samt kommunikation. Desuden er lærerens og elevernes fagsyn samt klassens didaktiske kontrakt (dvs. de gensidige forventninger der efterhånden bygges op mellem elever og lærer i undervisningen) afgørende i forhold til hvordan samspillet mellem de didaktiske variable bliver. Fx kan den didaktiske kontrakt have uheldige konsekvenser for den opgaveløsning og dialogform der udspiller sig i klassen.

En didaktisk situation består ifølge Brousseau af en didaktisk del hvor læreren er en central aktør, og en adidaktisk del hvor eleverne overtager scenen og skal arbejde i det af læreren tilrettelagte undervisningsmiljø. I denne del af den didaktiske situation er eleverne relativt fri af lærerens forklaringer og forventninger, og dermed undgås de uheldige effekter hvor lærerens intervention modvirker elevernes læring. I stedet sker læringen som et resultat af den feedback som eleven modtager fra miljøet.
I forbindelse med fase d, didaktisk analyse, har vi implementeret den didaktiske idé (forstået som de valgte didaktiske variable) i tre forskellige klasser i folkeskolen: Med udgangspunkt i de emner klasserne i forvejen arbejdede med, har vi udarbejdet forskellige typer elevoplæg samt valgt materialer og organisationsform der kunne igangsætte elevernes udvikling af ræsonnementskompetence. Helt afgørende er det at oplægget rummer en i forhold til elevgruppen tilpas matematisk udfordring, således at de via arbejdet hermed ydes en tilpas "modstand" der foranlediger dem til at gennemføre og eksplicitere en kæde af argumenter. En kompetent elev løser nemlig i vores forståelse af kompetencebegrebet en for eleven elementær udfordring problemfrit, men udviser først kompetence når hun udfordres.

I den didaktiske analyse er det nødvendigt at fastholde en skelnen mellem den didaktiske idé og den konkrete praksis, således at den konkrete implementering analyseres med udgangspunkt i de didaktiske variable. Med henblik på at kunne identificere tegn på ræsonnementskompetence i den konkrete undervisningssituation konstruerede vi med udgangspunkt i de udarbejdede oplæg tænkte dialoger der kunne eksemplificere og præcisere disse tegn. Et eksempel på en tænkt dialog i 1. klasse inspireret af Minusmus (Salomonsen & Toft, 2005, s. 19) var:

Musene har samlet nødder. De har fundet ud af at der er huller i deres poser. Musen Hugo har samlet 11 nødder og tømmer 7 nødder ud på jorden. Musen Karl har samlet 17 nødder og tømmer 11 ud på jorden foran sig. Spørgsmålet er så hvor mange nødder de har tabt.

E_1: Hugo har tabt 4 nødder.

L: Hvordan har du fundet frem til det?

E_1: Jeg starter ved 7 og tæller 8-9-10-11. Altså 4 mangler.

L: Regner I andre det på samme måde?

E_2: Nej. Jeg starter med 11, og så tager jeg noget væk. 11-10-9-8-7-6-5-4 (viser med fingrene).

E_1: Det forstår jeg ikke.

Her har E_2 været i stand til at gennemskue at hun regner anderledes end E_1, og E_1 udtænker selv et ræsonnement, hvorimod E_2 både kan følge og selv udtænke et ræsonnement.

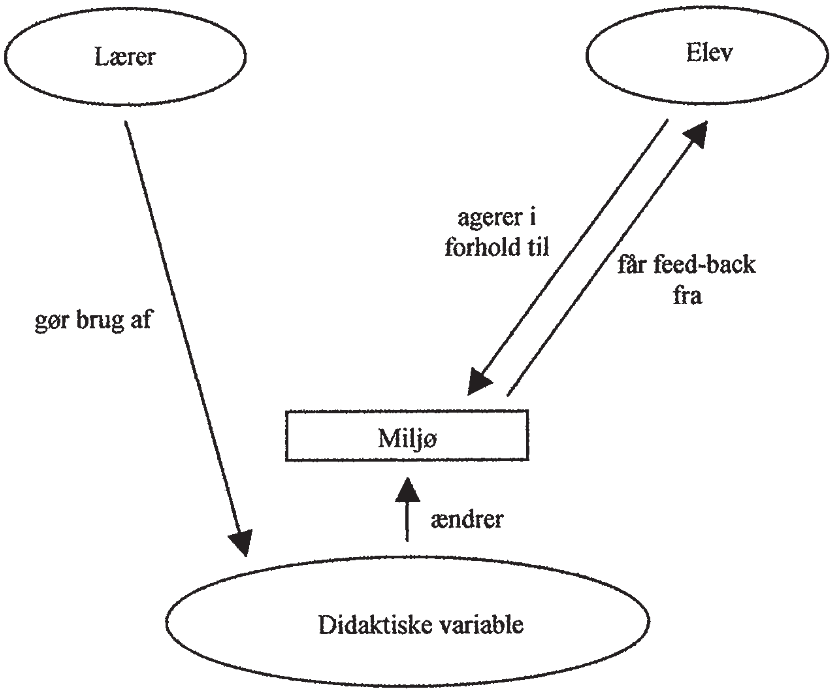
I fase e, fortolkning, skal erfaringer og resultater fortolkes i forhold til det didaktiske system, og fase f, procesevalueringen, omhandler i hvilken udstrækning det didaktiske modelleringsforløb giver anledning til en ændring i en bestemt praksis i forhold til systemets didaktiske variable.

Hvordan initieres kompetencer?

I vores didaktiske system har vi som tidligere anført valgt at fokusere på følgende variable med henblik på initiering af ræsonnementskompetence: formulering af klare mål, elevoplæg, valg af undervisningsmaterialer, aktiviteter og organisationsform samt dialogform.

I analysen af hvad der gør et elevoplæg godt i forhold til udvikling af ræsonnementskompetence, inddrager vi igen *teorien om didaktiske situationer* hvor den didaktiske situation deles op i en didaktisk og en adidaktisk del.

I den indledende didaktiske del er det lærerens opgave at overdrage det faglige problem til eleverne, dvs. få eleverne til at modtage opgaven og acceptere det ansvar for læringsprocessen som følger med (Brousseau betegner denne fase *devolution*). I forhold til udvikling og evaluering af ræsonnementskompetencen er det afgørende at eleverne forstår at målet ikke blot er at løse en opgave, men at formulere både grundlaget og argumentationen for løsningen eksplicit og at forholde sig vurderende til hinandens ræsonnementer. En i øvrigt korrekt argumentation kan ellers forblive intuitiv og uudtalt, hvilket umuliggør at de øvrige elever kan forholde sig til den. Desuden vanskeliggøres lærerens identifikation af tegn på elevens ræsonnementskompetence, hvilket er problematisk i forhold til evaluering. Det er derfor nødvendigt at klassens didaktiske kontrakt støtter formålet med læringsaktiviteterne, dvs. det bør være normen at man forklarer og retfærdiggør sine løsninger, at man forholder sig til de forklaringer andre giver, at man begrunder enighed og uenighed mv. Opbygningen af en fælles forståelse af målet med undervisningen sker gennem det som Helle Alrø kalder perspektivbevidsthed og forhandling af perspektiv (se Alrø, 1998).



Figur 3. *Model af samspillet elev-miljø-lærer i den adidaktiske del. (Efter Skott, Jess & Hansen, 2008).*

I den adidaktiske del trækker læreren sig tilbage og observerer elevernes udforskning af læringsmiljøet. Elevoplægget bør ifølge Brousseau indeholde en form for "vinderstrategi", og svaret på om de er på "rette vej", ligger i den feedback som eleverne får fra miljøet (se figur 3).

Nedenfor eksemplificeres denne idé via et elevoplæg i 1. klasse omhandlende indledende chancelære. Eleverne blev inddelt i tremandsgrupper hvor hver gruppe havde en snurretop med farverne brun (3 ud af 10 lige store felter), lyserød (2/10), hvid (3/10) og blå (2/10). Undersøgelsen blev introduceret og overdraget mundtligt og gik ud på følgende:

Du skal undersøge hvor svært det er at få snurretoppen til at lande på din favoritfarve. Du skal snurre 20 gange.

Hvilken farve tror du vinder?

Der er en klar vinderstrategi i aktiviteten. Endvidere havde vi en forventning om at nogle af eleverne i hver gruppe ville vælge farven rød eller blå fordi det var favoritfarven. Den følgende samtale fandt sted i en af grupperne efter at eleverne havde valgt blå som deres vinderfarve:

L: I har alle sammen valgt blå.

E_1: Ja.

L: Hvorfor det?

E_1: Fordi det er vores yndlingsfarve.

E_2 og E_3: Ja.

L: Har I alle tre blå som yndlingsfarve?

E: Ja.

L: Okay.

Herefter gik eleverne i gang med undersøgelsen, dvs. de snurrede 20 gange med snurretoppen. Efterfølgende skulle de overveje følgende spørgsmål:

Hvor mange gange vandt din farve?

Hvilken farve vil du vælge næste gang?

Efterhånden som eleverne snurrer flere og flere gange med snurretoppen, får de feedback fra miljøet der bryder eller bekræfter deres forventning. Den faglige udfordring i oplægget skal være tilpas i forhold til elevernes forforståelse, således at udfordringen både *bør* og *kan* mødes med et af eleven udtænkt ræsonnement der forklarer “den faglige modstand” og giver anvisning på hvordan man kommer på rette vej i forhold til vinderstrategien. Den følgende dialog fra en anden gruppe i klassen indeholder i vores fortolkning tegn på at sådanne ræsonnementer har fundet sted i undersøgelsesprocessen. Eleverne havde på forhånd valgt farverne blå, rød og brun som favoritfarve:

Læreren: Så kunne jeg godt tænke mig at vide hvad for en fører.

E_1: Det gør R fordi den brune er størst.

L: Der kommer flest brune fordi den er størst?

E_2 (R): Nej, den hvide er lige så stor. Så det kunne lige så godt have været den.

L: Det kunne lige så godt have været den hvide?

E_2: Ja, fordi den er lige så stor.

E_1: Ingen af os har valgt hvid.

E_2: Nej, så var jeg bare heldig at den ikke blev hvid.

L: Hvis nu I skulle prøve det her igen næste gang, kunne I så være sikker på at den brune ville vinde næste gang?

E_2: Nej, det kan man ikke.

L: Hvorfor ikke?

E_3: Fordi det er ikke altid den brune den kan lande på. Den kan også lande på mange af de andre.

E_2: Ja, se den blå har fået 3, og den lyserøde har fået 2.

E_3: Så næste gang kan det faktisk godt være lyserød.

E_2: Ja, det kan altid være det.

I løbet af aktiviteten med snurretoppen har eleverne i vores fortolkning bevæget sig fra en subjektiv sandsynlighedsbetragtning uden faglig begrundelse (jeg vælger blå fordi det er min yndlingsfarve) til en argumentation ud fra en uformel kvantitativ sandsynlighedsbetragtning (R vinder "fordi den brune er størst"; men det kunne lige så godt have været den hvide, "Ja, fordi den er lige så stor"). Forståelsen af den stokastiske situation kommer også til udtryk i argumentet om at brun ikke nødvendigvis vinder næste gang "fordi det er ikke altid den brune den kan lande på". Her er argumentet intuitivt, men bygger formentlig på erfaring. Vi tolker ovenstående som tegn på ræsonnementskompetence, som i *Trinmål efter 3. klassetrin* er beskrevet således: "Undervisningen skal lede frem mod, at eleverne har tilegnet sig kundskaber og færdigheder, der sætter dem i stand til at ræsonnere og argumentere intuitivt om konkrete matematiske aktiviteter og følge andres mundtlige argumenter".

Vi arbejdede med et andet oplæg i 1. klasse som ikke i elevernes øjne indeholdt et spørgsmål/problem som burde mødes med et matematisk ræsonnement. Vores intention var at lade eleverne undersøge polydron-brikker (konkretmateriale der består af tre-, fire-, fem- og sekskanter i forskellige størrelser, former og farver) med henblik på at finde frem til at antallet af hjørner og kanter var det samme, bl.a. foranlediget af spørgsmålet "Kan du finde en figur med 3 kanter og 4 hjørner?". Nedenstående er fra den til aktiviteten indledende snak om et A4-ark:

L: Hvad for en form har det her stykke papir?

E_1: Firkant.

L: Firkantet, ja. Hvordan kan det være at den hedder firkant?

E_2: Fordi den har 4 hjørner.

L: Den har 4 hjørner. Ja. Hvorfor hedder den så firkant? Skulle den så ikke hedde fir-hjørner? Det var da mærkeligt, var det ikke?

E_3: 4 kanter.

L: Den har også 4 kanter. Okay.

Dialogen illustrerer i vores fortolkning at oplægget ikke indeholdt "faglig modstand", og "vinderstrategien" var så oplagt at eleverne i 1. klasse ikke blev foranlediget til at modtage opgaven og dens betingelser. Der var med andre ord ingen udfordring af deres forforståelse eller forventning. I stedet byggede eleverne rumlige figurer af brikkerne med stort engagement. Eksemplet viser endvidere ifølge vores fortolkning hvordan tankegangskompetencen spiller sammen med ræsonnementskompetencen. Eleverne opfatter ikke problemet med antal kanter og hjørner som et relevant spørgsmålet at stille, og oplægget initierer således ikke overvejelser i retning af: Er der lige mange kanter og hjørner i et polygon? Hvorfor/hvorfor ikke? Måske ville oplægget have haft en bedre gang langt senere i skoleforløbet.

Hvordan opstår den gode kommunikation?

Sammen med elevoplæg og devolution satte vi fokus på dialogen i læringsmiljøet som en central didaktisk variabel i forhold til at initiere og identificere ræsonnementskompetencen.

I en undervisning hvor målet er at eleverne skal udvikle deres ræsonnementskompetence, spiller kommunikationen en central rolle, og det skal vel at mærke være en kommunikation af en vis kvalitet i forhold til målet. Kommunikationen kan have form af en kæde af skriftlige eller mundtlige argumenter. Forskellige læringsmiljøer inviterer til forskellige typer kommunikation, og ikke alle læringsmiljøer er lige velegnede til at initiere ræsonnementer.

I den traditionelle matematikundervisning hvor udgangspunktet er en didaktisk kontrakt med forventninger om at der er én rigtig løsning på en problemstilling, og at læreren er i besiddelse af og efterspørger det rigtige svar hos eleverne, vil kommunikationen antage en bestemt karakter som falder i tre faser: Læreren stiller spørgsmålet, eleverne svarer, og der finder umiddelbart en evaluering sted i lærerens vurdering af svaret som værende rigtigt eller forkert. Kommunikationssituationen kan karakteriseres som *Gæt hvad læreren tænker* og lægger i sin form ikke umiddelbart op til ræsonnementer og uddybende samtaler om løsninger og deres gyldighed. Et læringsmiljø der har udvikling af ræsonnementskompetencen som mål, må derfor nødvendigvis rumme udfordringer der efterspørger en anden form for kommunikation, både eleverne imellem i adidaktiske situationer og i didaktiske situationer mellem eleverne og læreren.

Ræsonnementskompetencen som den er beskrevet i slutmålet i *Fælles Mål 2009*, er tredelt. Eleverne skal kunne *udtænke* egne ræsonnementer, og de skal kunne *følge* og *vurdere* andres ræsonnementer. Alle tre aspekter kan være resultatet af skriftlige eller mundtlige aktiviteter.

I dialogen mellem eleverne skal det være en del af den didaktiske kontrakt at eleverne kommunikerer i og om matematik, og som påpeget tidligere er det derfor en forudsætning at eleverne er bekendte med mål og argumentationsform, og opgavedesignet skal lægge op til at eleverne får mulighed for at inddrage et eller flere aspekter af slutmålets beskrivelse af ræsonnementskompetencen. Oplægget kan igennem "spilleregler" direkte lægge op til at eleverne skal følge hinandens tankegang – spilleregler som: (1) Forklar din makker hvordan du tænker når du skal løse den matematiske problemstilling. (2) Vurdér løsningsforslaget, og afgør på hvilken måde det evt. adskiller sig fra din makkers. (3) Diskutér løsningsstrategier og holdbarhed af argumenter. (4) Forklar klassen jeres løsningsmetode og gyldigheden af den. Eller oplægget kan lægge op til at eleverne forholder sig til i aktiviteten indbyggede konflikter, som det fx er tilfældet med farverne på snurretoppen.

I et af de oplæg som blev afprøvet i praksis i 6. klasse, fik eleverne i grupper a fire følgende opgave. Hver af de fire elever sad inde med en bid af information som skulle inddrages i løsningen af problemstillingen. Eleverne skulle byde ind med en svarmulighed ud fra den information de havde hver især. Før aktiviteten var eleverne blevet gjort opmærksomme på hvilke "spilleregler" der gjaldt. Det var fx "forbudt" bare at afvise et bud på et svar – enhver afvisning skulle begrundes. Disse spilleregler blev spillet igennem inden eleverne selvstændigt gik i gang.

I en af opgaverne skulle eleverne gennem dialog finde frem til et bestemt tal (aktiviteten er hentet fra *Snak om ...*, supplerende materiale til *Matematiktak*, fra forlaget Alinea). Et eksempel på elevernes samtale:

E_1: Jeg tror det er 25, fordi 5 kan gå op i tallet.
E_2: Det kan godt være 25 fordi det skal være mindre end 30.
E_3: Det kan ikke være 25, for hvis man ganger 25 med 3, så bliver det 75, og her står der at hvis man ganger med 3, så skal det være lige. 75 er ikke lige, så derfor kan det ikke være 25.
E_4: På mit kort står at der bliver en til rest når vi dividerer med 3. Vi skal finde et tal fra tretabellen og så lægge en til. Det kan være 4 eller 7 eller 10 eller 13 eller 16 eller 19 eller 22 eller 25 eller 28 eller 31.
E_2: Det kan ikke være 31 fordi det er større end 30.
E_3: Vi kan også tage alle de ulige tal væk, for når man ganger dem med 3, så bliver det ulige, og det skal det ikke.
E_1: Så må det være 10 fordi det skal divideres med 5.

Aktiviteten lægger med de indbyggede spilleregler op til at eleverne igennem kommunikationen skal udtænke, følge og vurdere ræsonnementer, og som det blev pointeret i forrige afsnit, bliver de i denne adidaktiske situation styret mod en indbygget vinderstrategi.

Hvordan evalueres ræsonnementskompetence?

I og med en kompetence er karakteriseret ved at personens viden og færdighed kan bringes i spil i forskelligartede situationer, kan en kompetence ikke umiddelbart konstateres i en enkelt handling. Kompetencen kan kun dokumenteres hvis personen i rækker af forskelligartede kontekster handler hensigtsmæssigt i forhold til de mødte udfordringer. Én hensigtsmæssig handling i én given situation i én given kontekst kan derfor kun tages som et *muligt tegn* på kompetence. For en lærer der følger en elev over en længere periode, rummer dette intet problem, men det udelukker at kompetencer med sikkerhed kan vurderes ud fra enkeltstående test eller opgaver.

Evalueringsprocessen kompliceres desuden af at en persons besiddelse af en kompetence har tre dimensioner (Niss et al., 2002, s. 64-65). Ved siden af dens udstrækning over de sammenhænge og situationer kompetencen kan aktiveres i (aktionsradius), kan kompetencens tilstedeværelse beskrives i dens bredde, dvs. hvilke af kompetencens forskellige aspekter der kan bringes i spil (dækningsgrad), samt dens dybde, dvs. hvor begrebsligt og teknisk avancerede sagsforhold kompetencen kan aktiveres inden for (teknisk niveau).

Den første forudsætning for at det er muligt at evaluere på ræsonnementskompetencen, er at den kan *iagttages*, dvs. at der som ovenfor skitseret bliver igangsat en aktivitet som fører eleverne ud i ræsonnementer på en måde som kommunikerer ræsonnementerne ud i rummet mundtligt eller skriftligt. Ifølge ovenstående betragtninger er det kun igennem gentagne iagttagelser i forskellige situationer at læreren kan danne sig et skøn over den eventuelle kompetences kvalitative udfoldelse og foretage en egentlig vurdering.

I vores udviklingsprojekt hvor vi i enkelte klasser på baggrund af oplæg til aktiviteter har observeret eleverne i nogle få lektioner, har det været muligt at finde tegn på ræsonnementskompetence, og i disse tilfælde har vi været i stand til at identificere de forskellige aspekter af dækningsgraden: at kunne følge og forholde sig til ræsonnementer, at kunne udtænke og gennemføre ræsonnementer samt at kunne bedømme et ræsonnement. Derimod har vi ikke kunnet vurdere hverken teknisk niveau eller aktionsradius. I det eksempel hvor tre elever diskuterede sandsynligheden for de forskellige farver på snurretoppen, ræsonnerede de dels selvstændigt, og dels fulgte og forholdt de sig til de andres ræsonnementer. I sådanne tilfælde hvor mere end én elev har indgået i dialogen, kan vi dog næppe udtale os om en enkelt elevs ræsonnementskompetence, men derimod om distribueret ræsonnementskompetence i gruppen.

Når eleverne ræsonnerede selvstændigt, og læreren ikke spurgte ind til de enkelte skridt i argumentationen, forblev kæden af argumenter uudtalt. I en 4.-klasse spillede eleverne som oplæg til indførelsen af negative tal et spil med én terning og en mønt med plus og minus på hver sin side. Viste mønten plus, skulle eleven flytte det antal øjne som terningen viste, frem på en tallinje, og i tilfælde af minus skulle der flyttes tilbage (eksemplet er hentet fra Salomonsen & Toft (2005)). Det blev i opgaven hævdet at en dreng havde flyttet fra 4 til -4 i et slag. Kunne han det?

E_1: Vi tror det har været fordi han har haft to terninger.

E_2: Ja, fordi på den samme er der jo ikke 8 øjne.

L: Så kan det godt lade sig gøre?

E_2: Hvis man slår fx 4 og 4 eller 2 og 6 eller 3 og 5.

Her indgår mindst to argumenter i ræsonnementet: at afstanden fra 4 til -4 på tallinjen er 8, og at en (almindelig) terning højst har seks øjne på en side. De to argumenter kobles imidlertid til en intuitiv opfattelse af situationen, som beskrevet med "stigen" tidligere i artiklen, hvilket er uheldigt når det betænkes dels hvad målet med aktiviteten er, og dels i forhold til lærerens mulighed for at vurdere kvaliteten af tegnet på kompetence. Hvis ræsonnementet ikke uddybes, kan læreren næppe konkludere andet end at der har været iagttaget et tegn på kompetence. Så både med henblik på at udvikle elevernes kompetence og med henblik på lærerens mulighed for at vurdere denne udvikling må læreren enten indgå i dialog med eleverne, eller, i fald læreren blot ønsker at observere gruppers arbejde, der må eksistere "spilleregler" der mere eller mindre tvinger eleverne til at gå i dybden med ræsonnementerne. Oplægget til aktiviteten får her afgørende betydning.

Vi har også forsøgt os med opgaver hvor eleverne skulle skrive deres ræsonnementer ned, hvilket de fleste elever i 4. klasse fandt vanskeligt. De forfaldt til de mere intuitive af slagsen, som beskrevet ovenfor. Der var dog undtagelser som følgende. Efter spørgsmålet "Får man samme resultat når man udregner 3·5 og 5·3?" kom spørgsmålet "Får man det samme når man udregner 15:3 og 3:15?" En elev skriver:

"nej fordig man ikke kan: 3 med 15 det giver et komma tal og det anet giver 5".

Dette er jo et gyldigt argument som ikke blot kan betragtes som tegn på ræsonnementskompetence, men også på tankegangskompetence (en viden om hvilken slags svar der kan forventes) og symbolbehandlingskompetence. Skriftligheden kan således lægge op til at eleverne konstruerer ræsonnementer, men man kan også forestille sig skriftlige oplæg hvor de følger og vurderer et på forhånd nedskrevet ræsonnement, hvilket vi dog ikke har afprøvet i praksis. Vi har primært søgt tegn på ræsonnementskompetence gennem mundtlig kommunikation.

Opsummering

En opsummering af ovenstående kunne være at det ikke er muligt at identificere en kompetence på baggrund af enkeltobservationer. Der kan iagttages tegn på kompetence hvor hvert enkelt tegn er indlejret i en bestemt kontekst og kun med sikkerhed kan bestemmes som viden eller færdighed i netop denne kontekst. Over tid kan disse tegn give en mere sikker identifikation af kompetencen og dens kvantitative og kvalitative dybde og udstrækning. For at tegnene bliver iagttagelige, må der skabes aktiviteter med gode oplæg, dialog og/eller spilleregler samt en klasserumskultur hvor det er normen at gennemføre eksplicitte ræsonnementer for sine påstande. Hvad der skal ræsonneres om, hvor dyb argumentationen skal være, hvilken retning argumentationen skal tage osv., er et spørgsmål om tankegangskompetence.

Referencer

Alrø, H. (1998). En nysgerrigt undersøgende matematikundervisning. I: G.B. Nielsen (red.), *Matematik der vil noget*. Århus: Forlaget Matematik.

Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2007). SOS-projektet – didaktisk modellering af et sammenhængsproblem. *MONA, 2007(3)*, s. 25-53.

Hermann, S. (2003). *Et diagnostisk landkort over kompetenceudvikling og læring – pejlinger og skitser*. Learning Lab Denmark.

Hirst, P.H. (1974). *Knowledge and the Curriculum*. London: Routledge and Kegan Paul.

Jensen, T.H. (2008). Kompetencer, færdigheder og evaluering. *Matematik, 36(7)*, s. 43-46.

Niss, M. et al. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriets Forlag.

Salomonsen, L. & Toft, K. (2005). *Flexmat. Regn med + og -: tal og algebra 1.-3. klasse*. Malling Beck.

Skott, J., Jess, K. & Hansen, H.C. (2008). *Matematik for lærerstuderende*. Delta. Fagdidaktik. Forlaget Samfundslitteratur.

Undervisningsministeriet. (2009). *Fælles Mål 2009 – Matematik*. Faghæfte 12.

Winsløw, C. (2006). *Didaktiske elementer. En indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik*. Biofolia.