Garden of Eden konfigurationer i cellulære automater

Sven Skyum

DAIMI PB - 1
Februar 1972

**DATALOGISK AFDELING
AARHUS UNIVERSITET**
**Ny Munkegade, Bygn. 540
8000 Aarhus C, Denmark**

INDLEDNING

Cellulære automater er introduceret af John von Neumann [9] sidst i fyrrerne.

Grunden til, at han indførte disse automater, var, at han ønskede at formalisere begreberne omkring maskiners konstruktion af andre maskiner og i forlængelse heraf muligheden for at finde en selv-reproducerende maskine.

Dette førte til konkrete konstruktioner (i logisk forstand) af forskellige maskiner med forskellige egenskaber.

De formelle resultater heraf har jeg for fuldstændighedens skyld kort omtalt i afsnit 2 og 3.

Det, jeg har beskæftiget mig mest med inden for dette emneområde, er problemet omkring Garden of Eden konfigurationer.

Der har været en del forvirring på området, da de forskellige artikler om emnet ikke har benyttet samme notation. (Det er grunden til, at jeg har brugt en matematisk beskrivelse af problemet i stedet for at beskrive fænomenerne i ord.) Det har bl.a. medført, at Arbib [2] og Amoroso & Cooper [1] har angivet forkerte resultater. Dette skyldes nok ikke mindst, at Myhill [8] i 1963 publicerede en forkert sætning (The Converse of Moore's Garden of Eden Theorem).

I afsnit 4 og 5 har jeg samlet de resultater, jeg har fundet om sammenhængen mellem de begreber, der findes i ovennævnte artikler. Da det ikke ad denne vej er lykkedes mig at finde en bi-implikation, har jeg i afsnit 6 reformuleret problemet og derved fået tingene til at falde på plads.

1. INDLEDENDE DEFINITIONER

Ved en cellulær automat (Tesselation array) vil jeg forstå et netværk bestående af ens, endelige automater (her kaldet celler), der arbejder simultant i diskrete tids-step. En følgetilstand for en celle til tid T+1 er bestemt ved tilstandene for en nærmere angivet mængde af naboer til tid T. Man starter til tid T=0 ved at angive hver celles starttilstand. Det normale er, at man kun ser på endelige startkonfigurationer, dvs. at alle, pånær endelig mange, celler er i en speciel hviletilstand.

Definition 1.

En cellulær automat A er et system $\underline{(\grave{Z}^n, g, Q, q_o, \sigma)}$

hvor:

$\underline{\grave{Z}^n}$ er det underliggende heltals-netværk.

$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ betegner altså en celle.

$\underline{g} : \grave{Z}^n \rightarrow (\grave{Z}^n)^m$ er nabofunktionen, der definerer omegnen til enhver celle $\alpha \in \grave{Z}^n$.

g har formen : $g(\alpha) = (\alpha + \delta_1, \alpha + \delta_2, \ldots, \alpha + \delta_m)$, hvor δ_i ikke afhænger af α.

$\underline{Q}$ er en endelig mængde af tilstande fælles for alle celler.

$\underline{q_o} \in Q$ er en speciel tilstand kaldet hviletilstanden.

$\underline{\sigma} : Q^m \rightarrow Q$ er den lokale efterfølgerfunktion.

σ skal opfylde : $\sigma(q_o{}^m) = q_o$

(Dette krav sikrer, at man ikke kan få en uendelig konfiguration som efterfølger til en endelig (se definition 2.))

Definition 2.

En konfiguration i A er en afbildning $c: \grave{Z}^n \to Q$.
En konfiguration er altså blot en angivelse af de enkelte cellers tilstande.

Lad C betegne mængden af konfigurationer i A. En endelig konfiguration i A er en konfiguration, hvorom der gælder, at støtten ($\text{supp}(c) = \{\alpha \in \grave{Z}^n \mid c(\alpha) \neq q_o\}$) er endelig.

Lad C_f betegne mængden af endelige konfigurationer i A.

Definition 3.

Nabotilstandsfunktionen $h : C \times \grave{Z}^n \to Q^m$ er defineret ved:
$\forall c \in C, \forall \alpha \in \grave{Z}^n : h(c, \alpha) = (c(\alpha + \delta_1), c(\alpha + \delta_2), \ldots, c(\alpha + \delta_m))$.

Definition 4.

Den globale efterfølgerfunktion $F : C \to C$ er defineret ved:
$\forall c \in C, \forall \alpha \in \grave{Z}^n : F(c)(\alpha) = \sigma(h(c, \alpha))$

Lad F_f betegne $F|_{C_f}$.
Som allerede nævnt gælder der at $F_f : C_f \to C_f$.

Definition 5.

$\grave{c}$ siges at være en subkonfiguration af c ($\grave{c} < c$) hvis
$c|_{\text{supp}(\grave{c})} = \grave{c}|_{\text{supp}(\grave{c})}$

Definition 6.

$\grave{c}, c \in C$ siges at være disjunkte ($\grave{c} \cap c = \emptyset$) hvis
$\text{supp}(\grave{c}) \cap \text{supp}(c) = \emptyset$.

Definition 7.

Hvis $\grave{c} \cap c = \emptyset$ defineres $c \cup \grave{c}$ ved:

$$c \cup \grave{c}(\alpha) = \begin{cases} c(\alpha) & \alpha \in \text{supp}(c) \\ \grave{c}(\alpha) & \alpha \in \text{supp}(\grave{c}) \\ q_o & \text{ellers} \end{cases}$$

<u>Definition 8.</u>

Hvis $\grave{c} < c$ defineres $\underline{c - \grave{c}}$ ved:

$$(c - \grave{c})(\alpha) = \begin{cases} c(\alpha) & \alpha \in \operatorname{supp}(c) \setminus \operatorname{supp}(\grave{c}) \\ q_o & \text{ellers} \end{cases}$$

2. BEREGNING

Definition 9.

$c \in C$ kaldes passiv hvis $F(c) = c$

Definition 10.

$c \in C$ kaldes fuldstændig passiv hvis $\forall \grave{c} < c : F(\grave{c}) = \grave{c}$

Lad C_p betegne mængden af fuldstændigt passive konfigurationer.

Definition 11.

$Q_p \subseteq Q$ betegner mængden af passive tilstande hvor Q_p er defineret ved:

$\{c \in C \mid c(\grave{Z}^n) \subseteq Q_p\} \subseteq C_p$ og

$\forall q \in Q \setminus Q_p, \exists c \in C \setminus C_p, \exists \alpha \in \grave{Z}^n : c(\alpha) = q.$

(bemærk at $Q_p \neq \emptyset$ da $q_o \in Q_p$)

Definition 12.

Lad $c, \grave{c} \in C, c \cap \grave{c} = \emptyset$

c siges at influere på $\grave{c}$ ($c \rightsquigarrow \grave{c}$) hvis :

$\exists t \in \grave{N} : F^t(c \cup \grave{c}) \big|_{supp(F^t(\grave{c}))} \neq F^t(\grave{c}) \big|_{supp\,(F^t(\grave{c}))}$

Definition 13.

$S : C \to C$ kaldes en translation hvis:

$\exists \delta \in \grave{Z}^n, \forall c \in C, \forall \alpha \in Z^n : c(\alpha - \delta) = S(c)(\alpha).$

Lad $T(C)$ betegne mængden af translationer i A.

Definition 14.

Lad $T_t = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\} \subseteq C_p$ bestå af parvis disjunkte konfigurationer. $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} c_i$ kaldes et Turing område og $c_i \in T_t$ kaldes en tape.

(Bemærk at der findes en 1-1 funktion af $\grave{N}$ på T_t)

Når jeg i det følgende omtaler egenskaber ved funktioner Ψ af T_t ind i T_t, er det egentlig egenskaber ved funktioner $\hat{\Psi}$ af $\grave{N}$ ind i $\grave{N}$ givet ved $\hat{\Psi}(i) = j \Leftrightarrow \Psi(c_i) = c_j$.
Lad mængden af partielle rekursive funktioner af T_t ind i T_t betegnes ved $\underline{\mathcal{R}(T_t)}$.

Definition 15.

Lad $\Psi \in \mathcal{R}(T_t)$.

Ψ siges at kunne beregnes i A hvis:

$\exists\, c \in C_f,\ c \cap T = \emptyset,\ \exists\, \alpha \in \text{supp}(c),\ \exists\, s \in Q \setminus \{q_o\}$:

$\Psi(d)$ defineret $(d \in T_t)$

$\Updownarrow$

$\exists\ t > 0$:

1) $F^t(c \cup d)\,\big|_{\text{supp}(T)} = \Psi(d)\,\big|_{\text{supp}(T)}$

2) $F^t(c \cup d)\,\big|_{\complement\text{supp}(T)} \not\leftrightarrow F^t(c \cup d)\,\big|_{\text{supp}(T)}$

3) $F^t(c \cup d)(\alpha) = s$

4) $F^{t'}(c \cup d)(\alpha) \neq s$ for alle $t' < t$

5) $\Psi(d) \in T_t$

c siges at beregne Ψ med kontrolcelle α og stoptilstand s.

Definition 16.

En cellulær automat A siges at være "computation-universal", hvis der eksisterer et Turing-område T, så alle partielle rekursive funktioner kan beregnes i A.

Definition 17.

En konfiguration c kaldes en "universal-computer" med Turing-område T hvis:

$\forall\, \Psi \in \mathcal{R}(T_t),\ \exists\, d \in T_t,\ \exists\, S \in T(C)$:

$c \cup S(d)$ beregner Ψ.

3. KONSTRUKTION

Definition 18.

c siges at konstruere $\grave{c}$ ($c \Rightarrow \grave{c}$) hvis:

$\exists\ t > 0$:

1) $\grave{c} < F^t(c)$

2) $\grave{c} \cap c = \emptyset$

3) $(F^t(c) - \grave{c}) \not\Rightarrow \grave{c}$

Definition 19.

c siges at være selvreproducerende hvis:

$\exists\ S \in T(C) : c \Rightarrow S(c)$

Definition 20.

$\underline{B}$ kaldes et fuldstændigt sæt af beregnere med Turing-område T hvis:

1) $\forall\ c \in B,\ \exists\ \Psi \in \mathcal{R}(T_t)$: c beregner Ψ

2) $\forall\ \Psi \in \mathcal{R}(T_t),\ \exists\ c \in B$: c beregner Ψ.

Definition 21.

Hvis B er et fuldstændigt sæt af beregnere med Turing-område T sådan at :

$\forall\ c \in B,\ \exists\ \grave{c} \in C_f : \mathrm{supp}(\grave{c}) \cap (\mathrm{supp}(c) \cup \mathrm{supp}(T)) = \emptyset$

$\wedge\ \grave{c} \Rightarrow c$

siges A at være "Construction-universal".

Definition 22.

Lad B være et fuldstændigt sæt af beregnere. Hvis der eksisterer en tællelig mængde af tapes T_t og et $c \in C_f$ så:

$\forall\ \grave{c} \in B,\ \exists\ d \in T_t,\ \exists\ S \in T(C)$

$c \cup S(d) \Rightarrow \grave{c}$

siges at være en "Universal-constructor" med område $T = \bigcup_{\grave{c} \in T_t} \grave{c}$

Definition 23.

Et $c \in C_f$ som er en universal-computer med Turing-område T og en universal-constructor med område $\grave{T}$ kaldes en universal computer-constructor (UCC) hvis $\grave{T}_t \subseteq T_t$.

Resultater:

De resultater, der hidtil er opnået på området, drejer sig næsten alle om cellulære automater, hvor det underliggende rum er $\grave{Z}^2$ og
$\delta_i \subseteq \{ (0,0),(1,0),(1,1),(0,1),(-1,1),(-1,0),(-1,-1),(0,-1),(1,-1)\}$

Vi vil betegne omegnen $g(0,0) = ((0,0),(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1))$ som von Neumann omegnen.

Von Neumann [9] har vist, at der findes en cellulær automat med 29 tilstande og 5 naboer (von Neumann omegnen), der har en selvreproducerende UCC.

Codd [5] har vist, at man kan klare sig med 8 tilstande og stadigvæk 5 naboer. Codd's cellulære automat er endda stærkt rotationssymmetrisk, dvs.: $\sigma(c(\alpha),\ c(\alpha+\delta_2),\ c(\alpha+\delta_3),\ c(\alpha+\delta_4),\ c(\alpha+\delta_5)) = \sigma(c(\alpha),\ c(\alpha+\grave{\delta}_2),\ c(\alpha+\grave{\delta}_3),\ c(\alpha+\grave{\delta}_4),\ c(\alpha+\grave{\delta}_5))$ hvor $\grave{\delta} = (-y,x) \Leftrightarrow \delta = (x,y)$.

Codd har endvidere vist, at der ikke findes en 2-tilstands, 5-nabo cellulær automat, hvor naboerne er 90° rotations-symmetrisk (dvs. $\alpha+\delta$ er nabo $\Leftrightarrow$ $\alpha+\grave{\delta}$ er nabo) som er computation-universal.

E.R. Banks [3] har vist, at der findes en 2-tilstands, 9-nabo cellulær automat med en universal computer og en 4-tilstands, 9-nabo cellulær automat med en universal computer constructor, der også er selvreproducerende.

Tabel over resultater:

Tilstande pr. celle \ Naboer pr. celle	5	9	85
2	Universal Computer Uendelig Startkonfiguration. (Banks)	Universal Computer (Banks) Cosper har vist at det også gælder for Conway's "life"	UCC (Codd)
3	Universal Computer (Banks)		
4	Universal Constructor (Banks)	UCC (Banks)	
8	UCC (Codd)		
13	Universal Computer Denne automat behøver kun 2 rækker celler (Smith)		
29	UCC (Von Neumann)		

4. MOORE'S [7] GARDEN OF EDEN THEOREM

Definition 24.

En Garden of Eden konfiguration er en konfiguration $c \in C_f \setminus F_f(C_f)$.

Dette er Moore's [7] oprindelige definition. Jeg vil betegne mængden af sådanne konfigurationer ved G_f. Der gælder pr. definition at F_f på $\Leftrightarrow G_f = \emptyset$

Definition 25.

En stærk Garden of Eden konfiguration er et $c \in C_f$, hvorom der gælder:

$$c < \grave{c} \Rightarrow \grave{c} \in G_f$$

Dette er f.eks. Arbibs [2] definition af en Garden of Eden konfiguration.

Lad mængden af stærke Garden of Eden konfigurationer betegnes ved G_S.

Der gælder, at $G_S \subseteq G_f$, da ethvert $c \in C$ specielt er subkonfiguration af sig selv.

Moore så kun på cellulære automater (Z^2, g, Q, q_o, σ), hvor der gælder, at

$\delta_i \in \{(0,0),(0,1),(1,1),(1,0),(1,-1),(0,-1),(-1,-1),(-1,0),(-1,1)\}$

og altså at $m \leq 9$.

Moore viste, at eksistensen af "erasable configurations" medfører, at der eksisterer Garden of Eden konfigurationer $(G_f \neq \emptyset)$.

En "erasable configuration" er en konfiguration $c \in C_f$, hvorom der gælder, at der eksisterer en anden konfiguration $c^* \in C_f$, et "kvadrat"

$K = \{(i,j) \in Z^2 \mid |i-i_o| \leq n \wedge |j-j_o| \leq n\}$

og to "bånd"

$B1 = \{(i,j) \in Z^2 \mid (|i-i_o| = n+1 \wedge |j-j_o| \leq n+1) \vee (|i-i_o| \leq n+1 \wedge |j-j_o| = n+1)\}$

$B2 = \{(i,j) \in Z^2 \mid (|i-i_o| = n+2 \wedge |j-j_o| \leq n+2 \vee (|i-i_o| \leq n+2 \wedge |j-j_o| = n+2)\}$

(se fig. 1 side 13)

så følgende er opfyldt

1) $c\,|_K \neq c^*|_K$

2) $c|_{B1 \cup B2} = c^*|_{B1 \cup B2}$

3) $F(c)\,|_{K \cup B1} = F(c^*)\,|_{K \cup B1}$

Lemma 1:

Der eksisterer "erasable configurations"
$\Updownarrow$
F_f ikke 1-1

Bevis

$\Uparrow$) Lad $c, c^* \in C_f$, $c \neq c^*$ og $F(c) = F(c^*)$

Da c og c^* er endelige konfigurationer kan man vælge et kvadrat K, der omslutter støtten for både c og c^*. 1), 2) og 3) ovenfor er da trivielt opfyldt.

$\Downarrow$) Lad $c, c^*, K, B1$ og $B2$ være som ovenfor. Ser man på konfigurationerne $\grave{c}$ og $\grave{c}^*$ defineret ved:

$$\grave{c}(\alpha) = \begin{cases} c(\alpha) & \alpha \in K \cup B1 \cup B2 \\ q_o & \text{ellers} \end{cases} \qquad \grave{c}^*(\alpha) = \begin{cases} c^*(\alpha) & \alpha \in K \cup B1 \cup B2 \\ q_o & \text{ellers} \end{cases}$$

opfylder disse:

a) $\grave{c} \neq \grave{c}^*$

b) $F(\grave{c}) = F(\grave{c}^*)$

Altså er F_f ikke 1-1 q.e.d.

Vi har altså alt i alt at: F_f på $\Rightarrow F_f$ 1-1

Myhill [8] mente i 1963, at han havde vist at eksistensen af Garden of Eden konfigurationer implicerer eksistensen af indbyrdes uigenkendelige konfigurationer.

$c, c^* \in C_f$ $c \neq c^*$ siges at være indbyrdes uigenkendelige, hvis der eksisterer et kvadrat K, der omslutter støtten for begge og en omegn E (en afbildning af $\grave{Z}^2 \setminus K \to Q$) så $F(E(c)) = F(E(c^*))$ hvor $E(c)$ betegner konfigurationen:

$$E(c)(\alpha) = \begin{cases} c(\alpha) & \alpha \in K \\ E(\alpha) & \alpha \notin K \end{cases}$$

Lemma 2:

$\Updownarrow$ Der eksisterer indbyrdes uigenkendelige konfigurationer F_f ikke 1-1

$\Downarrow$) Lad c og c^* være indbyrdes uigenkendelige og lad E være givet så $F(E(c)) = F(E(c^*))$. Hvis vi supplerer c og c^* med to bånd $B1$ og $B2$ uden om kvadratet K får vi konfigurationerne $\grave{c}$ og $\grave{c}^*$:

$$\grave{c}(\alpha) = \begin{cases} c(\alpha) & \alpha \in K \\ E(\alpha) & \alpha \in B1 \cup B2 \\ q_o & \text{ellers} \end{cases} \qquad \grave{c}^*(\alpha) = \begin{cases} c^*(\alpha) & \alpha \in K \\ E(\alpha) & \alpha \in B1 \cup B2 \\ q_o & \text{ellers} \end{cases}$$

Dette er to forskellige konfigurationer med samme efterfølger, da information ikke kan passere båndene $B1$ og $B2$.

$\Uparrow$) $c, c^* \in C_f$, $c \neq c^*$, $F(c) = F(c^*)$.
Vælg K så det omslutter støtten for begge og vælg E_o som omegn, hvor $E_o(\alpha) = q_o$ for alle $\alpha \notin K$.
Da gælder $F(E_o(c)) = F(c) = F(c^*) = F(E_o(c^*))$ q.e.d.
Myhill's resultat var altså: F_f 1-1 $\Rightarrow$ F_f på

Dette gælder ikke.

Amoroso & Cooper [1] reformulerede problemet og fandt frem til F_f 1-1 $\Leftrightarrow$ F på

Arbib [2] omformulerede på en anden måde og beviste: $G_S = \emptyset \Leftrightarrow F_f$ 1-1

Det sidste er galt og det første er endnu ikke bevist.

5. SAMMENHÆNG MELLEM EGENSKABER VED F OG F_f

De fem udsagn, jeg vil sammenholde med hinanden er:

1) F_f surjektiv $(G_f = \emptyset)$
2) F_f injektiv
3) $C_f \subseteq F(C)$
4) F injektiv
5) $\forall \grave{c} \in C_f, \exists c \in C_f : \grave{c} < F(c) \quad (G_S = \emptyset)$

Jeg ser nu igen på det generelle tilfælde. Der er altså ingen restriktioner på dimensionen af det underliggende netværk og på nabofunktionen g.

Der gælder pr. definition 3 implicationspile i følgende diagram, nemlig:

$$\begin{tikzcd}
F \text{ på } C_f & & F\ 1\text{-}1 \arrow[dd] \\
& G_S = \emptyset & \\
F_f \text{ på} \arrow[uu] \arrow[ur] & & F_f\ 1\text{-}1
\end{tikzcd}$$

Definition 26.

$\underline{q} = \max_{1 \le i \le m} d(0, \delta_i)$ hvor $d: Z^n \times Z^n \to Z$ er metrikken

$d(\alpha, \beta) = \max_{1 \le i \le n} (|a_i - b_i|) \quad \alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

q angiver altså hvor "langt" en celle kan overføre information i ét step.

Sætning 1.

Generalisering af Moore's Garden of Eden theorem.

$\underline{F \text{ på } C_f \Rightarrow F_f\ 1\text{-}1}$

Bevis

Jeg vil vise negationen af ovenstående, nemlig at:

F_f ikke 1-1 $\Rightarrow$ F ikke på C_f

Lad c, $\grave{c} \in C_f$, $c \neq \grave{c}$ og $F(c) = F(\grave{c})$. Antag at både c og $\grave{c}$ er indeholdt i en $(r-4q) \times (r-4q) \times \ldots \times (r-4q)$ kasse.

Lægger vi nu to bånd af bredde q om kassen, får vi, at omgivelserne uden for det inderste bånd ikke er influeret af c og $\grave{c}$ i ét step

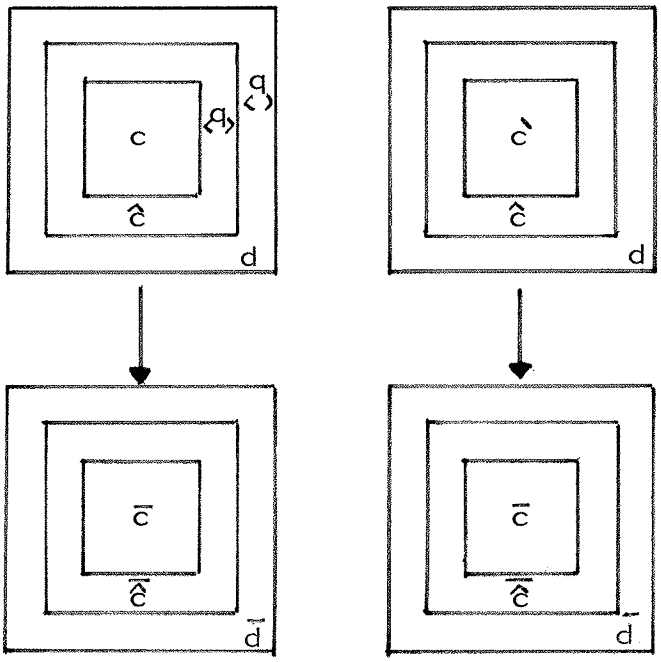


fig. 1

Jeg søger at finde et $k > 0$, så der findes Garden of Eden konfigurationer indeholdt i kassen $(kr-2q) \times (kr-2q) \times \ldots \times (kr-2q)$.

Der findes i alt $|Q|^{(kr-2q)^n}$ sådanne konfigurationer.

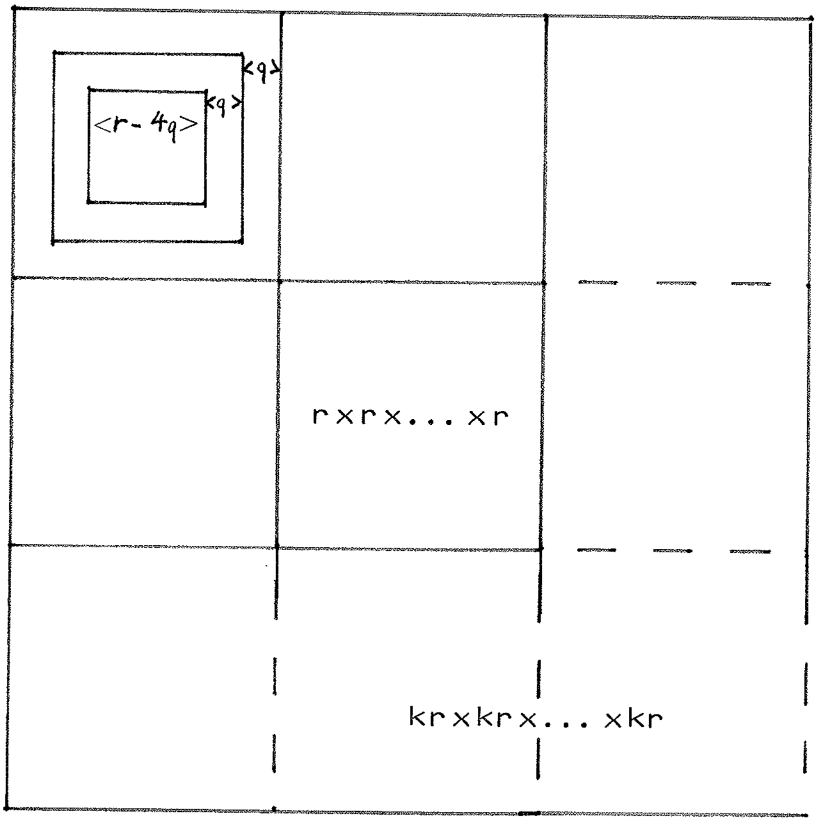


fig. 2

(Jeg vil kalde c en p × p × . . . × p konfiguration, hvis supp(c) er indeholdt i en p × p × . . . × p kasse.)

De (kr−2q) × (kr−2q) × . . . × (kr−2q) konfigurationer, der ikke er Garden of Eden, er efterfølgere af andre konfigurationer og entydigt bestemt ud fra disse konfigurationers udseende inden for en kr × kr × . . . × kr kasse. Dvs. vi ser på samtlige efterfølgere for kr × kr × . . . × kr konfigurationer og sammentrækker disse til (kr−2q) × . . . × (kr−2q) konfigurationer. Der er $|Q|^{(kr)^n}$ kr × kr × . . . × kr konfigurationer, men der er kun $(|Q|^{r^n}-1)^{k^n}$ efterfølgere, fordi hver r × r × . . . × r kasse (se fig. 2) indeholder 2 forskellige konfigurationer, der går over i samme efterfølger.

Hvis vi derfor kan vise, at der eksisterer et $k > 0$ så $(|Q|^{r^n}-1)^{k^n} < |Q|^{(kr-2q)^n}$ har vi vist, at der findes mindst én Garden of Eden konfiguration indeholdt i en (kr−2q) × (kr−2q) × . . . × (kr−2q) kasse.

Følgende lemma vil fuldføre beviset.

Lemma 3:

Lad $A \geq 2$ og $r,\ n,\ p \geq 1$

Der eksisterer et $k > 0$ så $(A^{r^n} - 1)^{k^n} < A^{(kr-p)^n}$

Bevis

Sæt $K = r^{n-1} \cdot p \cdot n \cdot \binom{n}{n:2}$

Dvs. at $\div K\, k^{n-1} < (kr-p)^n - (kr)^n$ hvis $kr > p$

Vælg $k > \max\left[K, \frac{p}{r}, K / \log_A \left(\frac{A^{r^n}}{A^{r^n}-1}\right)\right]$

Vi får da:

$$k > K / \log_A \left(\frac{A^{r^n}}{A^{r^n}-1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Log}_A \left(\frac{A^{r^n}}{A^{r^n}-1}\right) > \frac{K}{k} \qquad (\log_A (\quad) \text{ er positiv})$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Log}_A \left(\frac{A^{r^n}-1}{A^{r^n}}\right) < -\frac{K}{k}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{A^{r^n}-1}{A^{r^n}} < A^{-\frac{K}{k}}$$

$$\Downarrow$$

$$A^{r^n} - 1 < A^{r^n - \frac{K}{k}}$$

$$\Downarrow$$

$$(A^{r^n}-1)^{k^n} < A^{(kr)^n - Kk^{n-1}} < A^{(kr)^n + ((kr-p)^n - (kr)^n)} = A^{(kr-p)^n} \quad \text{q.e.d.}$$

Diagrammet har nu udseendet:

$$\begin{tikzcd}
F \text{ på } C_f \arrow[ddrr, bend right=80] & & F \text{ 1-1} \arrow[dd] \\
& G_S = \emptyset & \\
F_f \text{ på} \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & F_f \text{ 1-1}
\end{tikzcd}$$

F_f på $\Rightarrow$ F_f 1-1 fås af F_f på $\Rightarrow$ F på C_f $\Rightarrow$ F_f 1-1

Sætning 2

F_f 1-1 $\Rightarrow G_S = \emptyset$

(Beviset er stort set identisk med Myhills bevis fra 1963, men konklusionen er altså en anden.)

Bevis

Antag at der eksisterer en $r \times r \times \ldots \times r$ konfiguration G, som er med i G_S og at F_f er 1-1.

Antallet af $kr \times kr \times \ldots \times kr$ konfigurationer, der ikke er Garden of Eden , er højst $(|Q|^{r^n} - 1)^{k^n}$, da alle endelige konfigurationer, der indeholder G, er Garden of Eden.

Da alle forskellige endelige konfigurationer har forskellige efterfølgere (F_f er 1-1), er der mindst $|Q|^{(kr-2q)^n}$ $kr \times kr \times \ldots \times kr$ konfigurationer, der ikke er Garden of Eden, nemlig alle efterfølgerne for $(kr-2q) \times (kr-2q) \times \ldots \times (kr-2q)$ konfigurationer.

Vi har altså:

$\forall k > 0 : (|Q|^{r^n} - 1)^{k^n} \geq |Q|^{(kr \div 2q)^n}$ i modstrid med lemma 3. q. e. d.

Diagrammet har nu udseendet

$$\begin{tikzcd}
F \text{ på } C_f \arrow[ddrr, bend right=60] & & F \text{ 1-1} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
& G_S = \emptyset & \\
F_f \text{ på} \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & F_f \text{ 1-1} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

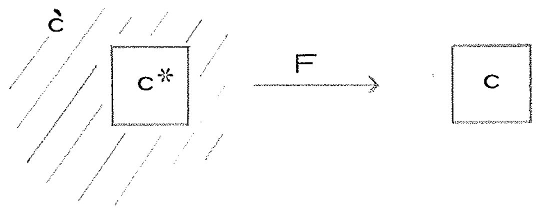
F 1-1 $\Rightarrow G_S = \emptyset$ fås af F 1-1 $\Rightarrow F_f$ 1-1 $\Rightarrow G_S = \emptyset$

Sætning 3

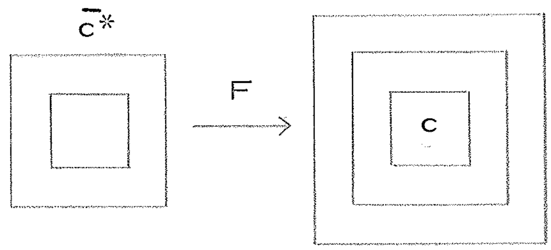
F på $C_f \Rightarrow G_S = \emptyset$

Antag at $c \in G_S$.
Da F er på C_f $\exists\, \grave{c} \in C : c = F(\grave{c})$

Situationen er:



Hvis c er indeholdt i en kasse K og vi ser på den konfiguration $\bar{c}^*$, der fremkommer ved at sammentrække $\grave{c}$ til K samt et bånd af bredde q uden om, får vi at $c < F(\bar{c}^*)$



c er altså subkonfiguration af $F(\bar{c}^*) \in F(C_f)$, altså er $c \notin G_S$, og vi er nået frem til en modstrid.

Dermed er vi nået frem til:

$$
\begin{tikzcd}
F \text{ på } C_f \arrow[dr] \arrow[dd, bend right=60] & & F\ 1\text{-}1 \arrow[dl] \arrow[dd] \\
& G_S = \emptyset & \\
F_f \text{ på } \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & F_f\ 1\text{-}1 \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

Det kan bemærkes at $G_S = \emptyset$ er en meget svag betingelse og dermed $G_S \neq \emptyset$ en meget stærk betingelse.

Eksempel 1:

$\{ Z^1,\ g(i) = (i, i+1),\ \{0, 1\},\ 0,\ \{00 \to 0, 01 \to 1, 10 \to 1, 11 \to 0\}\}$

Vi har at gøre med et endimensionalt array.

Lad $c \in C_f$ være vilkårlig.

Lad $i_l = \min_i \{i \mid c[i] = 1\}$ og $i_r = \max_i \{i \mid c[i] = 1\}$

Efterfølgeren til et sådant c vil opfylde

$* : \grave{i}_l = i_l - 1$ og $\grave{i}_r = i_r$ $\qquad$ ...01.......10.....
$\downarrow$...1........10.....

dvs. en endelig forgænger c til c må opfylde:

1) $\grave{c}[i] = 0$ for $i > i_r$

2) for $i := i_r$ step -1 until i_l:

$\grave{c}[i] =$ if $\grave{c}[i+1] = 1$ then
(if $c[i] = 1$ then 0 else 1)
else (if $c[i] = 1$ then 1 else 0)

3) $\grave{c}[i] = 0$ for $i < i_l + 1$

Af 1), 2) og 3) ses, at $\grave{c}$ er entydigt bestemt, altså at F_f er 1-1.

Hvis man i 2) stepper til $-\infty$ ses at F er på C_f.

Se på konfigurationen $c[i] = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

På grund af * vil en endelig forgænger til c skulle opfylde $\grave{i}_l = j+1$ og $\grave{i}_r = j$, hvilket ikke kan lade sig gøre. Vi har altså: F_f ikke på

Der gælder desuden, at konfigurationerne $c_1[i] = 1$ for alle $i \in Z$ og $c_2[i] = 0$ for alle $i \in Z$ begge afbildes i c_2 ved F.
Altså F ikke 1-1.

Lad $c \in C_f$ være vilkårlig.

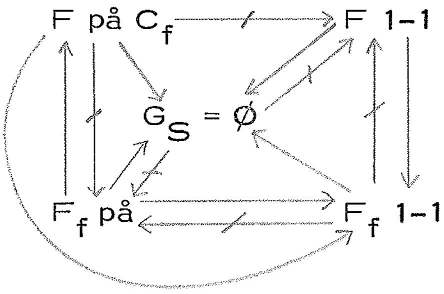
Lad $\grave{c}$ være defineret ved:

$$\grave{c}[i] = \begin{cases} 1 & i \in [i_l, i_r+1] \text{ og } i \text{ lige} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Der gælder nu, at $[i_l, i_r] \subseteq \mathrm{supp}\,(F(\grave{c}))$ og derfor at $c < F(\grave{c})$. $\ldots 101010 \ldots\ 10 \ldots \longrightarrow \ldots 1111 \ldots\ 111 \ldots$

Da $c \in C_f$ var valgt vilkårligt, kan vi altså konkludere at $\underline{G_S = \emptyset}$

Vi har altså:



<u>Eksempel 2:</u>

$\{ Z^1,\ g(i) = (i, i+1),\ \{0, 1\},\ 0,\ \{00 \to 0,\ 01 \to 1,\ 10 \to 1,\ 11 \to 1\}$.

Konfigurationen, $c[i] = 1$ for $i=j$ og 0 ellers, har ingen hverken endelige eller uendelige forgængere.

Antag nemlig at $\grave{c}$ var forgænger.

Reglerne er sådan, at $\grave{c}[i] = 1 \Rightarrow c[i] = 1$ dvs. at $\grave{c}$ må opfylde $\grave{c}[i] = 0$ for $i \neq j$, og dermed da $c[j] = 1$, $\grave{c}[j] = 1$, men $\grave{c}[j] = 1 \Rightarrow c[j-1] = 1$ hvilket er en modstrid. Dvs. at <u>F ikke på C_f</u>

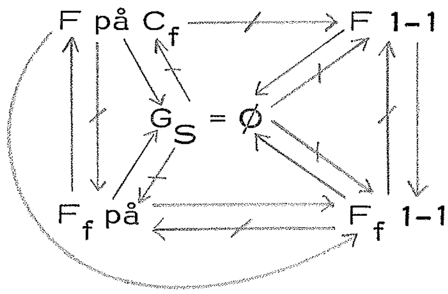
Da $[i_l, i_r] \subseteq \mathrm{supp}\,(F(I_{[i_l, i_r]}))$ (I er indikatorfunktionen) er $\underline{G_S = \emptyset}$ efter samme argument som i eksempel 1.

<u>F_f ikke 1-1</u> da

0 ... 01010 .... og 0 ... 01110 ... begge går over i 00 ... 0111

00 ... 011110 ... ved F.

Vi har altså:



De to muligheder for biimplikationer, der er tilbage i diagrammet, er :

i) F på $C_f \Leftrightarrow F_f$ 1-1

og

ii) F 1-1 $\Leftrightarrow F_f$ på

Amoroso og Cooper har tolket Moore's resultat som F på $C_f \Rightarrow F_f$ 1-1 og Myhill's som F_f 1-1 $\Rightarrow$ F på C_f. Jeg er uenig i det sidste og har derfor reformuleret problemet og fundet frem til sætning 4. Sætning 5 indeholder et bevis for at F_f 1-1 $\Rightarrow$ F på C_f, hvis vi ser på 1-dimensionale automater.

6. ET GARDEN OF EDEN THEOREM SÅ DEN MODSATTE SÆTNING OGSÅ GÆLDER

Lad i dette afsnit en stærk Garden of Eden konfiguration være et $c \in C_f$ så :

$\exists\, S \subseteq Z^n$:

1) S endelig
2) supp (c) $\subseteq S$
3) $\forall\, \grave{c} \in C_f$ gælder at c^* def. ved:

$$c^*(\alpha) = \begin{cases} c(\alpha) & \alpha \in S \\ \grave{c}(\alpha) & \alpha \notin S \end{cases}$$

er Garden of Eden.

Bemærkning: Hvis der eksisterer et S, der opfylder 1, 2 og 3, findes der også en kasse K, der opfylder 1, 2 og 3, så S kan udskiftes med "en kasse K".

Sætning 4

$\Updownarrow$ Der eksisterer en stærk Garden of Eden konfiguration
F_f ikke 1-1

Bevis

$\Downarrow$) Analogt til beviset for sætning 2.
Det omtalte G er netop en stærk Garden of Eden konfiguration (efter den nye definition).

$\Uparrow$) I sætning 1 bevistes, at F_f ikke 1-1 medførte eksistens af en $(kr-2q) \times \ldots \times (kr-2q)$ Garden of Eden konfiguration.
Den konfiguration, vi fandt frem til måtte eksistere er netop en stærk Garden of Eden konfiguration, hvor S er $(kr-2q) \times \ldots \times (kr-2q)$ kassen, da vi i beviset ikke bekymrede os om, hvad der skete uden for kassen. q. e. d.

<u>Sætning 5</u>

F_f 1-1 $\Leftrightarrow$ F på C_f for $A = (\grave{Z}, g, Q, q_o, \sigma)$

$\Leftarrow$ Sætning 1

$\Longrightarrow$ Antag F ikke på C_f

Lad $c \in C_f \setminus F(C)$

Lad $a = \min \{i \mid c[i] \neq q_o\}$ og

$b = \max \{i \mid c[i] \neq q_o\}$

Sæt $p = (|Q|^{2q} + 2) \cdot q$ hvor q er defineret i definition 8.

Sæt $K = [a-p, b+p]$

<u>Påstand</u>: c er stærk Garden of Eden.

Der gælder nemlig:

1) K endelig

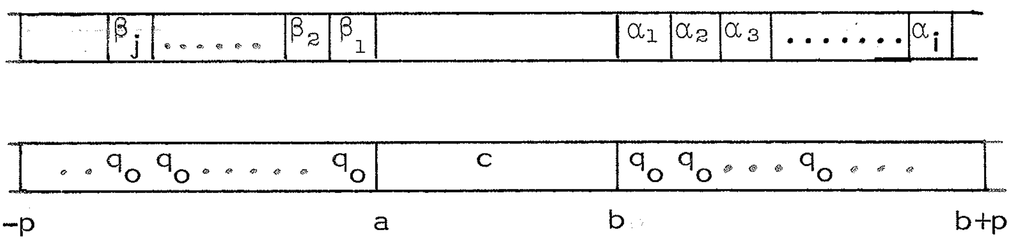
2) supp (c) $\subseteq$ K

3) Bevis for rigtigheden af 3 side 21

Antag at : $\exists\, \grave{c} \in C_f : F(\grave{c})\,|_K = c\,|_K$

$\grave{c}$:

c :



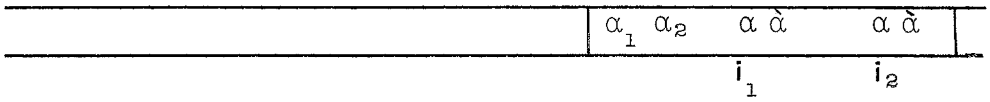
α_i er $\grave{c}$'s sammentrækning til $D_i = [b + (i-1) \times q+1,$ $b+i \times q]$.

Vi ved at $\alpha_{i-1}\, \alpha_i\, \alpha_{i+1}$ går over i hviletilstande i området D_i.

Da der er $|Q|^{2q}+2$ "α'er", må der findes et par $\alpha\alpha'$, der optræder 2 gange. Lad os antage, at $\alpha_{i_1}\, \alpha_{i_1+1} = \alpha_{i_2}\, \alpha_{i_2+1} = \alpha\alpha'$

hvor $1 \leq i_1 < i_2 \leq |Q|^{2q} + 1$

Vi har altså følgende situation:



Ser vi nu på konfigurationen c^* hvor:

$$c^*[i] = \begin{cases} \grave{c}[i] & i \le i_2 \times q + b \\ \grave{c}[(i-(b+i_2 \times q)) \underline{\text{mod}}((i_2 - i_1) \times q) + b + i_1 \times q] & \text{for } i > i_2 \times q + b \end{cases}$$

gælder der at c^* afbildes i hviletilstande overalt til højre for $[a, b]$, da c^* til højre for $i_2 \times q + b$ lokalt har samme udseende som $\grave{c}$ et eller andet sted i området $[i_1 \times q + b,\ i_2 \times q + b]$.

På tilsvarende måde kan vi modificere $\grave{c}$ til venstre for $[a, b]$ og får således en konfiguration $\grave{c}^* \in C$ så $c = F(\grave{c}^*)$, hvilket er i modstrid med at $c \in C_f \setminus F(C)$.

Dvs. at $\nexists\ \grave{c} \in C_f$ så $F(\grave{c})\big|_K = c\big|_K$ q. e. d.

Vi har nu, at c er stærk Garden of Eden og dermed at F_f ikke er 1-1 q. e. d.

<u>Corollar</u> : <u>F på $C_f \Leftarrow F$ 1-1.</u>

LITTERATURLISTE

[1] S. Amoroso & G. Cooper:
The Garden of Eden Theorem for Finite Configurations.
(Proc. of the Amer. Math. Soc. 26, 1970, pp. 158-164)

[2] M.A. Arbib:
Theories of Abstract Automata.
(Prentice Hall 1969)

[3] E.R. Banks:
Information processing and transmission in Cellular Automata.
(MAC TR-81 MIT Jan. 1971)

[4] W. Burks:
Essays on Cellular Automata.
(University of Illinois Press 1970)

[5] E.F. Codd:
Cellular Automata.
(ACM Monograph Series, Academic Press 1968)

[6] M. Minsky:
Computation finite and infinite Machines.
(Prentice Hall 1967)

[7] E.F. Moore:
Machine models of Self-Reproduction.
(Proc. of Symp. in Apll. Math., vol. 14, 1962)

[8] J. Myhill:
The Converse of Moore's Garden of Eden Theorem.
(Proc. of the Amer. Math. Soc., vol. 14, 1963, pp. 685-686)

[9] J. von Neumann:
Theory of Self-Reproducing Automata.
(University of Illinois Press 1966)

[10] T. Winograd
A Simple Algorithm for Self-Replication.
(MIT Memo No. 197)