Peter C. Kjærgaard

Den virkelige eksaktheds værste fjende
– Wittgenstein om matematikkens og logikkens grundlag

Historien om Wittgensteins matematikfilosofi

Da redaktøren af et biografisk opslagsværk spurgte Wittgenstein, om han havde nogle kommentarer til artiklen om ham selv, skulle han have tilføjet en sidste linie: ”Wittgensteins væsentligste indsats har været indenfor matematisk filosofi”. Selvom der er en smule uklarhed omkring historiens rigtighed, er der ingen tvivl om, at arbejdet med matematikkens grundlag blev højt prioriteret af Wittgenstein.[1] *Filosofiske undersøgelser* slutter med ordene:

> I forbindelse med matematikken er det muligt at lave en undersøgelse, der er fuldstændig analog med vores undersøgelse af psykologien. Den vil lige så lidt være en *matematisk* undersøgelse, som den anden en psykologisk. I den ville der *ikke* blive regnet, den er altså for eksempel ikke logisk. Den kunne fortjene navn af en undersøgelse af ‘matematikkens grundlag’ (Wittgenstein 1994, 292).

Denne undersøgelse af matematikkens grundlag fik vi ikke i *Filosofiske undersøgelser*. Men det er ikke ensbetydende med, at Wittgenstein ikke havde arbejdet på at gøre sine resultater i den retning tilgængelige. At han, som det var tilfældet med alt hvad han skrev efter *Tractatus*, aldrig blev tilfreds, underkender ikke dette faktum. Det kommer til udtryk i de rigt dokumenterede forelæsningsrækker, han holdt i Cambridge i 1930erne, samt overalt i hans manuskripter fra slutningen af 1920erne til starten af 1940erne, hvoraf uddrag er udgivne som *Bemærkninger om matematikkens grundlag* (1956), *Filosofiske bemærkninger* (1964) og *Filosofisk grammatik* (1969).[2]

Ikke desto mindre har der været en tendens til at ignorere Wittgensteins matematiske skrifter ved at fokusere ensidigt på enten de tidlige logiske arbejder eller den senere sprogfilosofi. Det kan der være mange grunde til. En er den meget svært tilgængelige stil, der præger *Bemærkninger om matematikkens grundlag*. Siden den posthume udgivelse er den desuden blevet kritiseret for at indeholde et væld af tekniske fejl. En af de første og hårdeste kritikere var Michael Dummett, hvis artikel "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics" fra 1959 satte standarden for den almindelige reception af Wittgensteins matematikfilosofi:

> Mange af tankerne er udtrykt på en måde som forfatteren selv anså for at være unøjagtig og dunkel. Nogle passager modsiger andre. Nogle er særdeles ufuldkomne. Nogle protesterer mod ideer som Wittgenstein havde eller havde haft og som ikke selv er udtrykt klart i dette bind. Andre passager, især dem om konsistens og om Gödels teorem, er af dårlig kvalitet og indeholder deciderede fejl (Dummett 1959, 166).

At Wittgenstein selv udtrykte utilfredshed med sine manuskripter, er for den erfarne Wittgensteinlæser ikke nogen unik opdagelse og bør ikke i sig selv være en diskvalificering, ligesom sværhedsgraden af den meget indforståede stil ikke nødvendigvis gør indholdet forkert. Det er den ene side af Dummetts kritik. Den anden er mere fundamental. For det er klart, at man ikke kan tage udtalelser om matematikkens grundlag alvorligt, hvis eksemplerne og kritikpunkterne af den kanoniske matematiske filosofi er fejlbehæftede ud fra et teknisk synspunkt. Det viser sig imidlertid, ifølge Stuart Shankers nytolkning af Wittgensteins matematikfilosofi, at de 'åbenlyse fejl' kritikken har peget på, aldrig er blevet gennemarbejdede, men kun opregnet:

> Det er åbenlyst, at den store tiltrækning et sådant polemisk indslag har, er, at det er meget lettere af afvise et argument på et teknisk grundlag, fremfor på et filosofisk grundlag. Men hvad der blev præsenteret som *rettelser* var i virkeligheden *filosofiske protester* under dække, som udfra den første antagelse blev udviklet uden noget forsøg på at klarlægge den filosofiske baggrund på hvilken Wittgenstein havde baseret sin tilgang til grundlagsdiskussionen (Shanker 1987, viii. Sammenlign med Schmitz 1988, 6).

Der er altså gode grunde til at foretage et nærmere studie af Wittgensteins arbejde med matematikkens grundlag. Her er en af de store udfordringer at sætte hans tanker ind i den sammenhæng de er tænkt. Det kræver nødvendigvis et direkte studie af Wittgensteins *Efterladte skrifter*, da hovedparten af Wittgensteins skrifter om matematik ikke er udgivet i bogform. De tekstsamlinger der er udgivne er netop tekst*samlinger*, det vil sige fragmenter, der er klippet ud fra forskellige manuskripter og ofte sat ind i en anden sammenhæng. Det giver ind imellem nogle slutningsmæssige ejendommeligheder og sammenfald af identiske tekststykker, der pludselig optræder i forskellige sammenhænge i samme og andre værker og forhindrer en undersøgelse af argumenternes oprindelige sammenhæng og udvikling. Mange af de misforståelser der har været af Wittgensteins matematikfilosofi bunder i den receptionshistoriske afhængighed af de redigerede værker. Med udgivelsen af Wittgensteins samlede efterladte skrifter – den såkaldte Bergen-udgave – er denne situation ændret (Wittgenstein 2000). Men der er stadig meget at gøre og for de fleste vil bogudgivelserne stadig være de væsentligste kilder til Wittgensteins tænkning.

Uanset hvad så er det matematikfilosofiske materiale så omfangsrigt – det fylder hovedparten af de efterladte skrifter – og vanskeligt tilgængeligt, at det er nødvendigt med kvalificeret hjælp. Heldigvis er der siden midten af 1980erne kommet flere gode studier af matematikfilosofien. En af de første og stadig glimrende er førnævnte Stuart Shankers *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics* (Shanker 1987). Shanker gør i sin bog op med mange af de fordomme, der hersker omkring Wittgensteins matematikfilosofi. Han tager både Wittgensteins tanker og kritikken alvorligt, og rydder mange misforståelser af vejen. Et andet godt og nyere eksempel er Mathieu Marions imponerende og minutiøse læsning af Wittgensteins matematikfilosofi i *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics* (Marion 1998). Marion tager os fra de tidligere år omkring *Tractatus*' tilblivelse og følger udviklingen og kontinuiteten i Wittgensteins overvejelser over matematikken i de senere år. En af Marions store fortjenester er, at han viser i hvor høj grad matematikken blev taget alvorligt af Wittgenstein gennem *hele* hans filosofiske karriere. Der var ikke tale om noget perifert emne for Wittgenstein, hverken filosofisk, logisk eller matematisk. Marion gør dermed op med den udbredte filosofiske arrogance overfor matematikkens betydning for Wittgenstein. Samtidig giver han en overbevisende tolkning af, hvorfor Wittgenstein aldrig har opnået den anerkendelse fra det matematikfilosofiske miljø, som han har fået fra andre filosofiske miljøer.

Stuart Shanker gjorde endeligt op med Dummetts tidlige og afgørende kritik ved at vise, at dennes tekniske indvendinger blot var maskerede filosofiske indvendinger. Men det er først hos Marion, at vi får en forklaring på hvad der lå til grund for disse filosofiske indvendinger. Med en sikker fornemmelse for den historiske kontekst demonstreres det hvordan 1950ernes matematikfilosofiske klima næsten umuliggjorde en positiv modtagelse af Wittgensteins ideer. Resultater som Kurt Gödels arbejde med ufuldstændighed, Alfred Tarskis med sandhed samt Gödels og Paul Cohens med uafhængigheden af udvalgsaksiomet og kontinuum hypotesen fra Zermelo-Fraenkels mængdelære favoriserede ikke-konstruktivistiske former for matematikfilosofisk platonisme. Det var netop denne type filosofi, Wittgenstein rettede sin kritik mod. Han stod med andre ord ret imod 1950ernes matematikfilosofiske ideologi. Det er derfor ikke overraskende, at de første der læste Wittgensteins bemærkninger om matematikkens grundlag fordrejede hans synspunkt og afviste hans indvendinger.

Marion åbner for en forståelse af de matematiske, logiske og filosofiske problemer Wittgenstein kæmpede med, uden de samtidige diskussioner tabes af syne. Det er bemærkelsesværdigt i hvor høj grad Wittgenstein deltog i disse diskussioner og det er en stor fortjeneste ved Marions studier, at han gør op med billedet af Wittgenstein som filosofisk enegænger. Dette kommer blandt andet til udtryk i diskussionerne med Frank Ramsey fra deres første møde i 1923. Denne historie går over Wittgensteins kritik af Bertrand Russell og Alfred North Whiteheads *Principia Mathematica*, Ramseys forbedringer af dette værk gennem *Tractatus*, Wittgensteins indrømmelser overfor Ramsey og samtidig fundamentale kritik af videreførelsen af det logicistiske program, sammen med Ramsey kritik af Wittgensteins vej og endelig til – kort før sin tidlige død i 1930 – Ramseys omvendelse til Wittgensteins position. Det er blot et af mange eksempler på sammenhængen mellem Wittgensteins kommentarer og engagement i de problemer og deres historie, der blev diskuteret i matematikkredse. Wittgenstein var i langt højere grad med i disse diskussioner, kendte de fundamentale problemer og arbejdede selv intenst på at løse dem, end det er kommet til udtryk hos matematiske og filosofiske kommentatorer. Wittgenstein var bestemt klar over hvad der foregik og han investerede mange intellektuelle ressourcer og ikke mindst tid på behandling af problemerne.

Historien om det matematikfilosofiske engagement bidrager i vigtig grad til forståelsen af *overgangsfasen* i Wittgensteins tækning. Der var ikke tale om et skarpt brud, men istedet om en *udvikling* af tankerne. Marion påpeger, at de punkter af uoverensstemmelse mellem *Tractatus* og *Filosofiske Undersøgelser*, som Wittgenstein selv var den første til at pege på, hovedsagelig har rod i matematikfilosofiske problemer. Vil vi forstå denne forskel, bliver vi således nødt til at forstå i det mindste hvad det var for problemer Wittgenstein tumlede med og som ligger under overfladen af de tilsyneladende rent filosofiske kommentarer i *Filosofiske Undersøgelser*.

Logikkens grundproblem: filosofiske håndværkere i arbejde på verdens stillads

Der er en tæt sammenhæng mellem Wittgensteins tidlige overvejelser over logikkens grundlag og de senere overvejelser over matematikkens grundlag fra 1927 og frem. Jeg har andetsteds argumenteret for, at den kritiske metode Wittgenstein anvender i *Tractatus*, ikke stammede fra Russells ønske om at udskifte tvivl med sikkerhed, men istedet fra en videnskabelig tradition formidlet gennem fysikerne Heinrich Hertz og Ludwig Boltzmann (Kjærgaard 2002 og Kjærgaard 2003). De stræbte begge efter at lade en teoris afklaring komme til syne gennem teoriens fremstillingsform. Det er denne metodes form, Wittgenstein brugte til at gøre op med den russellske logiks indhold, en form han bibeholdt i de senere overvejelser over matematikkens grundlag.

I et brev til Russell, sendt fra Skjolden i Norge i november eller december 1913, skrev Wittgenstein: "Det store spørgsmål er nu: hvordan skal et tegnsystem være sammensat for at gøre enhver tautologi genkendelig som en sådan *på en og samme måde*? Det er logikkens grundproblem!" (Wittgenstein 1974, R.23). Året efter, under udarbejdelsen af *Tractatus*, kan vi læse i hans dagbog: "Min grundtanke er, at de logiske konstanter ikke repræsenterer noget. At kendsgerningernes *logik* ikke *lader* sig repræsentere". En måned senere lød det: "*Hele* min opgave består i at forklare sætningens karakter" (Wittgenstein 1989a, 25.12.14 og 25.1.15).[3] Hvordan hang det sammen?

Logikkens grundproblem, som det fremgår, var dens præsentationsform. Spørgsmålet var, hvordan den skulle fremstilles for at fremstå klar, utvetydig og uden indre modsigelser. Vejen var, mente Wittgensetin, at fjerne enhver usikkerhed og uklarhed, ikke ved nye teoretiske konstruktioner, men gennem et arrangement af logikken, der ikke tillod nogen modsigelser. Der forestod dermed en begrebsafklaring, der skulle modvirke forskellige konsekvenser af tautologiske udsagn – forhindre at det samme fik anden eller forskellig brug. Første skridt var at slå fast, at de logiske tegn ikke repræsenterede noget: at der ikke fandtes logiske genstande og at intet logisk tegn *stod* for noget andet. For eksempel repræsenterede tegnene *s* og *f* ikke noget. *Det sande* og *det falske* kunne ikke optræde som genstande eller argumenter i en sætning, da logikken ikke repræsenterede kendsgerninger, men blot handlede om muligheden for, at en sætning kunne være sand eller falsk. Derfor angav sætningerne p og $\sim p$ ikke to forskellige faktiske situationer, men sandhedsmulighederne for en sætning der – uanset om den er sand eller falsk – svarede til en og samme virkelighed.[4]

Logikken handlede for Wittgenstein ikke om den virkelige verden. Den repræsenterede ikke noget som helst. Logik var ikke det, sætninger talte om, men det der overhovedet gjorde dem i stand til at tale om noget. Den var ikke selv en repræsentation, men det der muliggjorde repræsentation. Den var simpelthen repræsentationens mulighed. Dens sætninger gengav blot verdens stillads. Disse sætninger handlede ikke om noget, men udsagde alle det samme. Alle logikkens sætninger var med andre ord ligeberettigede. Det vil sige, at de alle var tautologier, hvilket indebar, at "Hvis en sætning nogensinde vil kunne dannes, vil den allerede kunne dannes nu" (Wittgenstein 1989a, 21.11.16). Ved at udvikle et logisk system som Gottlob Freges eller Bertrand Russells, deducerede man sig ikke frem til flere og flere sandheder om verden, men skabte kun klarhed over de logiske sætningers interne relationer.

Man skulle imidlertid være på vagt. Hvis man udviklede logikken som et hierarkisk system, så kom nogle sandheder let til at fremstå som mere fundamentale end andre. Aksiomer så for eksempel ud til at være mere fundamentale end andre sætninger, der afhang af dem. Denne opfattelse af logikkens opbygning blev dog problematisk i de tilfælde hvor forskellige systemers grundbegreber kunne defineres af hinanden. Når, for eksempel "det '$\supset$', som vi definerer ved hjælp af '$\sim$' og '$\vee$', er identisk med det '$\supset$', som vi sammen med '$\sim$' bruger til at definere '$\vee$', og at dette '$\vee$' er det samme som det første, osv." (Wittgenstein 1996, 5.42. Sammenlign med 5.43, 6.1 og 6.124).

Valget af grundaksiomer forekom dermed arbitrært og Wittgenstein påpegede, at det blev vanskeligt at bestemme et sådant grundaksioms status. Hvis det for eksempel hvilede på en selvindlysende sandhed, som Frege mente, kunne man spørge, om selve den selvindlysende sandhed så var mere grundlæggende end aksiomet. Wittgensteins løsning på problemet bestod i at fastslå, at enhver slutning udelukkende hvilede på de interne relationer mellem sætninger. Der var dermed ikke noget, der var mere grundlæggende end andet. Alle sætninger var på samme niveau: "Alle logikkens sætninger er ligeberettigede, der findes ikke væsentlige grundsætninger og afledede sætninger. Enhver tautologi viser selv, at den er en tautologi" (Wittgenstein 1996, 6.127). Slutningslove som Freges og Russells blev dermed overflødige. Udtrykt som sætninger var de blot sætninger som alle andre logiske sætninger. At man behandlede noget som aksiomer var kun et spørgsmål om belejlighed, og sagde ikke noget om logik, ifølge Wittgenstein (Se Wittgensetin 1996, 3.322, 5.131, 5.132, 5.141, 5.142, 5.2 og 6.1271, samt Mounce 1981, 45ff.).

Løsningen: forskellen på at tale og at vise

Med sin afvisning af aksiomer og logiske konstanter som grundlæggende for logikken, tog Wittgenstein – som det fremgår – afstand fra den aksiomatiske opbygning af logiske systemer, som Frege og Russell repræsenterede. For Wittgenstein var der ikke *noget* der kom før *noget andet*. Det hele var der på en gang, eller også var der ingenting. De udefinérbare grundbegreber, som Russell betragtede som den nødvendige rest i en logisk analyse, og som dermed *stod* for noget – hvilket indebærer at vi har muligheden for at finde dem ved hjælp af et *mentalt teleskop* – kom under stærk kritik. Russells synspunkt i denne situation var for Wittgenstein ikke spor bedre, end hvis logikken repræsenterede empiriske objekter. Logikken repræsenterede ikke noget som helst, hvad enten det var empirisk eller pseudo-empirisk. Det var ikke sådan, at de fysiske videnskaber fortalte os om en fysisk verden og logikken om en ikke-fysisk (Se Mounce 1981, 12).[5]

Grundlaget for dette opgør med Russell skal findes i påstanden om, at et tegns betydning skulle *vise* sig i en korrekt symbolsk fremstilling. Den skulle ikke *udtrykkes*. Et tegns betydning ville vise sig i dets formelle relationer: "Når alt forholder sig, som om et tegn har betydning, så har det betydning" (Wittgenstein 1996, 3.328). Det var netop hér, Russell kom ind på det forkerte spor, ifølge Wittgenstein. I stedet for at lade logikken komme til udtryk gennem dens symbolske udtryk, *talte* han direkte om dens slutninger og løsninger. Denne fejl udfoldede sig blandt andet i udviklingen af typeteorien, hvor "Russells fejltagelse viser sig i, at han ved opstillingen af tegnreglerne er nødt til at tale om tegnenes betydning" (Wittgenstein 1996, 3.328). Det var rigtigt, mente Wittgenstein, at ingen sætning kunne udsige noget om sig selv, fordi sætningens tegn ikke kunne indeholdes i sig selv. Men det var forkert at konstruere en teori, hvis funktion var at udsige dette forhold. Den eneste korrekte måde på hvilken man kunne erkende dette, var når det viste sig i sin symbolske form. Det Wittgenstein ønskede var, at

> enhver typeteori må gøres overflødig af en korrekt symbolsk teori [..] enhver typeteori må fjernes af en symbolteori, der viser, at hvad der lader til at være *forskellige slags ting* bliver symboliseret ved forskellige slags symboler, som det *ikke* er muligt at sætte istedet for hinanden[6].

Opgøret med typeteorien var fundamentalt for Wittgenstein. Ikke fordi det var et af Russells mest succesfulde bidrag til logikken. Det var fint nok. Problemet var, at den hvilede på et fuldstændig forkert grundlag. Dens succes ville bringe endnu mere forvirring og vildfarelser ind i diskussionerne om logikkens og matematikkens grundlag. Med typeteorien lod Russell grænserne mellem empiriens kontingens og logikkens nødvendighed flyde og mente at kunne konstruere sig ud af indre modsigelser i logikken. Det var ikke tilfældet for Wittgenstein. En modsigelse kunne ikke ophæves ved at konstruere en teori, der opløste den. Modsigelsen kunne kun forsvinde af sig selv i et korrekt sammensat symbolsk sprog. Hvad typeteorien sagde, kunne ikke siges, men kun vises: "Logiske sætninger *viser* noget, fordi det sprog de er udtrykt i kan *sige* alt hvad der kan *siges* [..] Derfor er en *type<u>teori</u>* umulig. Den prøver at sige noget om typer, hvor man kun kan tale om symboler" (Wittgenstein 1979a, 109)[7].

Hvis Russell havde ret i sin typeteori, altså hvis sætninger eller funktioner, der refererer til sig selv, selv kunne optage positionen som deres eget argument, så ville det kunne symboliseres F(F).[8] Men dette er ikke blot *et enkelt* symbol. Det er to forskellige. Da tegnet var arbitrært, ifølge Wittgenstein, var de to tegns identitet ikke garanteret af deres fysiske form, men af deres brug, det vil sige den sammenhæng de optrådte i. I dette tilfælde vil det sige, at de to tegn ikke er identiske: ”Fælles for de to funktioner er kun bogstavet F, som taget for sig selv intet betegner” (Wittgenstein 1996, 3.333). At tegnets fysiske form ikke var nogen garanti for dets egenskaber, skete under forudsætning af, at to forskellige symboler kunne have tegnet (skrifttegn eller lydtegn etc.) tilfælles, selvom måderne de betegner på, var forskellige:

> At vi betegner to genstande med det samme tegn, men på to forskellige *betegnelsesmåder*, kan aldrig indicere de to genstandes fælles kendemærke. Thi tegnet er jo vilkårligt. Man kunne altså også vælge to forskellige tegn, og hvor ville så det, der var fælles i betegnelsen, blive af” (Wittgenstein 1996, 3.322. Sammenlign med 5.473, 5.4732 og 5.47321).

Det kunne ikke nytte noget, at lave konstruktioner med det ene formål at sikre det formelle system mod inkonsistens og indre modsigelser. Russell troede, at hun kunne redde logikken ved at *sige* noget. Det kunne han ikke, mente Wittgenstein. Tingene skulle vise sig – og med den måde at opfatte logikken, som Frege og Russell repræsenterede, skete det altså ikke af sig selv. Derfor blev det så vigtigt for Wittgenstein at arbejde på en korrekt og konsistent fremstillingsform.

Vejen til en konsistent fremstillingsform

Problemet var, at man forvirres over situationer hvor tegn, der ser ud til at være identiske har forskellige funktioner. Løsningen var ikke at konstruere en teori til at slippe af med forvirringen. Dermed begik man en fejl, der ikke fjernede problemet, men blot flyttede det et andet sted hen. I stedet drejede det sig for Wittgenstein om at synliggøre de grundlæggende mekanismer og deres indbyrdes relationer, så den slags misforståelser ikke længere opstod. Derfor blev problemet med et formelt tegnsystems sammensætning, ja, selve logikkens fremstillingsform, så vigtig. For eksempel kan det være vanskeligt at se, at en sætning som ‘2+3=5’ består af ækvivalente tegn. Men i den rette fremstillingsform, ’(1+1)+(1+1+1)=(1+1+1+1+1)’, bliver dette forhold åbenbart. Det blev derfor en vigtig opgave for Wittgenstein at reducere antallet af logiske konstanter og fjerne den pluralitet i det logiske tegnsystem, der kun blev forøget med indførelsen af *ad hoc* aksiomer og teorier som typeteorien, reducérbarhedsaksiomet og uendelighedsaksiomet. Mange konstanter bragte en vis arbitraritet ind i symboliseringen af et bestemt forhold. Dette var ikke ønskeligt. I stedet krævede Wittgensetein fuldkommen logisk klarhed, hvor *en* operation i logikken blev repræsenteret af *et* tegn i den symbolske repræsentation:

> Occams devise er selvsagt ikke nogen vilkårlig regel eller en regel, der er retfærdiggjort ved sin praktiske nytte: Den udsiger, at *unødvendige* tegnenheder ikke betyder noget som helst. Tegn som tjener *et* og samme formål er logisk ækvivalente; tegn som ikke tjener noget formål er logisk betydningsløse (Wittgenstein 1996, 5.47321).[9]

Her var Wittgenstein fuldstændig på linie med fysikeren Heinrich Hertz, der i sin *Mekanikkens Principper* fra 1894 konstruerede den klassiske mekanik som et fuldstændigt formelt system. Et af de store problemer med mekanikken var ifølge Hertz en massiv begrebsforvirring og en udbredt brug af mere eller mindre metafysiske antagelser. Derfor fremstod mekanikken som fuld af modsigelser. Dem ønskede Hertz at ophæve. Vejen gik gennem et imponerende oprydningsarbejde for at fremstille den klassiske mekanik på et konsistent formelt grundlag. Det gik blandt andet ud over det ellers centrale begreb om 'kraft' i mekanikken. Wittgensteins eliminering af logiske konstanter kan sammenlignes med elimineringen af kraftbegrebet hos Hertz (Se Kjærgaard 2002 og Kjærgaard 2003).[10] Fælles for begge projekter var, at forvirringen blev fjernet ved at bringe det formelle system på dets rette form i en simpel fremstilling af relationerne mellem kun de nødvendigste grundbegreber, uden at introducere konstituerende ydre relationer. Dette stod allerede klart for Hertz i 1891:

> Der ligger i det forhold, at den samme ting kan fremstilles på forskellige måder, en betydelig hindring for forståelsen af hver enkelt måde. De samme betegnelser står i de forskellige former for beslægtede, men alligevel forskellige begreber eller forestillinger. Den første betingelse for en forståelse er altså, at man forsøger at forstå hver fremstilling for sig, og undgår at indrage forestillinger fra andre fremstillinger (Hertz 1891, 23).

Hos Wittgenstein udtryktes løsningen på afklaringen ved en konsistent fremstillingsform således: "vi er i besiddelse af en rigtig, logisk opfattelse, hvis blot alt i vort tegnsprog stemmer" (Wittgenstein 1996, 4.1213). I denne afklaringsproces kom 'Sheffers streg' til at spille en central rolle.

Den amerikanske logiker Henry M. Sheffer havde tidligere fundet en metode til at udtrykke de kendte logiske konstanters funktioner ved et enkelt symbol '/', kaldet Sheffers streg. Oversat til almindelig sprogbrug kan den udtrykkes ved 'hverken.. eller..'. Sheffer, der præsenterede sin metode i 1913, benyttede definitionen $p/q \equiv \sim p \cdot \sim q$ (Sheffer 1913). En anden metode, men med samme formelle egenskaber, blev udviklet af Jean Nicod i 1916 (Nicod 1917). Denne benyttede i stedet definitionen $p/q \equiv \sim p \vee \sim q$. Forvirrende nok bruges den samme notation '/' og den samme betegnelse 'Sheffers streg' om begge metoder. I Sheffers egen udgave har symbolet den egenskab, at p/q kun er sand, når både p og q er falske, hvor det hos Nicod gælder, at p/q kun er falsk, når både p og q er sande. Begge metoder har de samme egenskaber, men afviger selvfølgelig fra hinanden i udledningen af ækvivalenser. Det er derfor principielt underordnet, hvilken man benytter. Fælles er, at man med disse egenskaber forholdsvis simpelt kan udtrykke negation, disjunktion, konjunktion, implikation og ækvivalens ved at vise deres ækvivalens – det vil sige vise, at udtrykkene har ens sandhedsbetingelser – med udtryk opstillet udelukkende med sætningsvariablerne p og q, samt symbolet /. Parenteserne i de følgende ækvivalenser er blot pædagogiske redskaber og ikke formelt nødvendige.
I Sheffers udgave får vi ækvivalenserne:

$\sim p \equiv p/p$	[negation]
$p \vee q \equiv p/q \,/\, p/q$	[disjunktion]
$p \cdot q \equiv p/p \,/\, q/q$	[konjunktion]
$p \supset q \equiv (p/p \,/\, q) \,/\, (p/p \,/\, q)$	[implikation]
$(p \equiv q) \equiv (p/p \,/\, q) \,/\, (p \,/\, q/q)$	[ækvivalens]

Ud fra Nicods metode får vi istedet ækvivalenserne:

$\sim p \equiv p/p$	[negation]
$p \vee q \equiv p/p \, / \, q/q$	[disjunktion]
$p \cdot q \equiv p/q \, / \, p/q$	[konjunktion]
$p \supset q \equiv p \, / \, q/q$	[implikation]
$(p \equiv q) \equiv (p/p \, / \, q/q) \, / \, p/q$	[ækvivalens]

I *Tractatus* benyttede Wittgenstein sig af Sheffers egen metode, som han imidlertid forlod i de senere skrifter til fordel for Nicods. Med Wittgensteins til tider lidt nonchelante facon, kan disse tilfælde tage sig ud som tegn på formel inkonsistens. Det er de ikke. De er blot to forskellige symbolske beskrivelsesformer, der viser det samme.[11] I *Aufzeichnungen über Logik* – *samme* år som Sheffer introducerede sin metode – skrev Wittgenstein: "Funktionen *p*/*q* er blot et mekaniske redskab til at danne alle mulige *symboler* for *ab*-funktioner" (Wittgenstein 1989b, 202).[12] Der var altså tale om et symbolsk redskab, hvis formelle egenskaber var de eneste vigtige. Tegnet selv kunne lige så vel se anderledes ud og virke på anden vis, som Nicod viste tre år senere. Det essentielle var, at dette tegn gjorde det muligt at danne alle de mulige symboler for en sætnings sandhedsfunktioner. Samtidig pegede selve betegnelsen *mekanisk værktøj* netop i denne sammenhæng på, at den oprydning og afklaringsproces, som Wittgenstein var i færd med indenfor logikken var af samme type som Hertz' indenfor mekanikken.

Sheffers streg havde den fordel for Wittgenstein, at den tydeliggjorde logikkens tautologiske status:

> Når vi slutter os fra p∨q og ~p til q, så er relationen mellem 'p∨q's og '~p's sætningsformer skjult af betegnelsesmåden. Men hvis vi istedet for 'p∨q' for eksempel skriver 'p/q · / · p/q' og i stedet for '~p' skriver 'p/p' (p/q = hverken p eller q), så bliver den indre sammenhæng åbenlys (Wittgenstein 1996, 5.1311).[13]

De logiske konstanter repræsenterede altså ikke forskellige operationer, men var alle tautologiske udtryk. Da de logiske konstanter, som vi har set, kunne defineres ud fra andre og – med indførelsen af Sheffers streg – af et enkelt symbol, måtte der være en fundamental operation, der lå til grund for dem alle og dermed for sætningsdannelsen, mente Wittgenstein. Denne fundamentale operation, hvorved sætninger blev dannet af elementarsætninger kaldte han sætningens almene form. "Man kunne sige: Den eneste logiske konstant er det, som alle sætninger ifølge deres natur har fælles med hinanden. Men det er jo den almene sætningsform. Den almene sætningsform er sætningens væsen" (Wittgenstein 1996, 5.47 og 5.471).[14] Da sætningernes struktur stod i interne relationer til hinanden, kunne disse relationer fremhæves i udtryksmåden "ved at vise om en sætning, at den fremkommer som resultatet af en operation, der frembringer den af andre sætninger (som er operationens basis). Operationen er et udtryk for en relation mellem dens resultats og dens basis' strukturer. Operationen er det, som må foretages med en sætning for at lave en anden ud af den" (Wittgenstein 1996, 5.2, 5.21, 5.22 og 5.23).

Sætningens almene form er defineret ved: $[\bar{p}, \bar{x}, N(\bar{x})]$, hvor enhver sætning er et resultat af succesive anvendelser af operationen $N'(\bar{x})$ på elementarsætningerne. 'ξ' repræsenterer et udsnit af elementarsætningerne, og $N(\bar{x})$ er negationen af alle værdier af ξ. Den succesive anvendelse af en operation er ækvivalent med begrebet og *så* videre – det vil sige, den fortsatte anvendelse af en operation på dens eget resultat – og er en forudsætning for at der overhovedet kan dannes sætningerne ud fra de logiske konstanter. Ellers ville man aldrig nå videre end til og *så*..[15] Resultatet af den succesive anvendelse på elementarsætninger, der kendetegner enhver sandhedsfunktion, repræsenteres også ved operationen '(---S)(ξ...)'. Den venstre side repræsenterer en sandhedstabel, hvor alle F'erne er fjernet, medens den højre side repræsenterer et udsnit af elementarsætningerne.[16] Denne operation negerer alle sætninger i den højre parentes og repræsenteres af ''. Dette kan eksempelvis skrives som (FFFS)(p,q), og er altså ækvivalent med '' og kan udtrykkes ved '~p · ~q'-definitionen af '/'.

Udtrykt i en sandhedstabel ser det således ud:

p	q	~p · ~q
s	s	f
f	s	f
s	f	f
f	f	s

Når ” er sand er både p og q falske, hvilket giver os de ækvivalente sandhed-betingelser for Sheffers streg. Den succesive anvendelse af denne operation på elementarsætningerne vil da – idet det er muligt at konstruere alle andre logiske symboler udfra dette ene – give alle andre sætninger. For eksempel kan den komplekse sætning ’p ∨ q’ dannes udfra elementarsætningerne p og q gennem operationen ”. Vi får da N(p,q), der er det samme som p/q, altså ’hverken p eller q’. Gentager vi operationen, får vi N(N(p,q)), det vil sige, ~(p/q), der er det samme som p/q / p/q, altså ’hverken, hverken p eller q, eller, hverken p eller q’, der er ækvivalent med ’p ∨ q’.

Undersøger vi sandhedsværdierne for ’p ∨ q’, får vi:

p	q	p ∨ q
s	s	s
f	s	s
s	f	s
f	f	f

Undersøger vi derefter sandhedsværdierne for 'p/q / p/q', får vi:

p	q	p/q	p/q / p/q
s	s	f	s
f	s	f	s
s	f	f	s
f	f	s	f

Det ses hermed, at p/q / p/q ≡ p ∨ q. På tilsvarende vis kan de øvrige logiske konstanter udledes.

Det var også sætningens almene form, der reddede Wittgensteins taldefinition fra de pseudo-empiriske antagelser, som Russell med begrebet om klasse var henvist til i sin typeteori. Tallet var for Wittgenstein en operations eksponent, det vil sige, et tegn for at et stadie i den successive anvendelse af operationen blev fikseret. Således kan det hele tals almene form skrives: [0, ξ, ξ+1]. Udtrykket i parentesen er en variabel. Det første led i parentesen er den formale rækkes begyndelse, det andet er formen for et vilkårligt led i ξ-rækken, og det tredie led er formen for det led i rækken, der følger umiddelbart på ξ. Gennem succesiv anvendelse af det hele tals almene form, fremstår talrækken: 0+1=1, 0+1+1=2, 0+1+1+1=3, og så videre (Se Wittgenstein 1996, 5.2522, 5.553, 6.02, 6.021, 6.022 og 6.03).

Operationen kan belyses ved en slægtskabsmetafor: forfædre i mandelinien kan forklares ved at sige 'min fader', 'min faders fader', 'min faders faders fader' og så videre.[17] Man forstår begrebet 'forfædre i mandelinie', når man forstår, at man kan lægge 'faders' til et uendeligt antal gange. Men ønsker man at kende navnet på en bestemt af sine forfædre, kræves der et nummer i rækken for at kende svaret. Dette viser, at tallet er iboende i enhver formel operation. Forskellen ligger mellem en uendelig applikation af en operation på en base – den formale serie – og en endelig, eller bestemt, applikation af en sådan operation der giver det bestemte tal. Pointen er, at det er referencen til et bestemt punkt i applikationen af operationen der kaster lys på tallene, ikke omvendt. Tal står ikke for noget, de repræsenterer ikke genstande og genstande kan ikke bruges til at definere tal. Wittgenstein leverede dermed en fundamental kritik af Russells uendelighedsaksiom, som han mente hvilede på et fuldstændig forkert grundlag. Teorien om klasser var ifølge Wittgenstein dermed gjort overflødig. I stedet mente han at have lavet en formel udvikling af talbegrebet, der gjorde rede for dets almenhed, uden henvisning til ydre antagelser. Alle ydre antagelser – som Russells uendelighedsaksiom – bragte et element af tilfældighed ind i logikken og underminerede dermed muligheden for formel konsistens.

Opgøret med metasprog: fra logik til matematik

I 1927 erklærede matematikeren David Hilbert selvsikkert, at "matematikken er en forudsætningsløs videnskab" (Hilbert, 1927, 479)[18] Det skete med en overbevist forventning om, at det endelige bevis for postulatet var trivielt og lå lige for. Dermed ville man se afslutningen på næsten et halvt århundredes forsøg på at konstruere et modsigelsesfrit, formelt grundlag for matematikken, et grundlag uden behov for ydre garantier andre end de formelle gyldighedsbeviser. Derfor var rystelsen over det uafvendelige i Gödels erklæring kun godt tre år senere forståelig. Efter grundigt at have undersøgt betingelserne for formelle systemer, med Russell og Whiteheads som eksempel, lød konklusionen: "for intet formelt system kan man med sikkerhed bekræfte, at alle de indeholdte overvejelser kan fremstilles gennem det" (Gödel, 1986, 200).[19] Gödels afvisning af Hilberts program beroede på en formel argumentation og måtte derfor betragtes som definitiv i formel forstand. Der var med andre ord ikke længere noget at stille op for logikken i forsøget på at lade den begrunde sig selv.

Imidlertid fandtes der samtidig et andet principielt argument mod Hilberts program. Det var af en helt anden type end Gödels formelle afvikling og blev formuleres af Wittgenstein som et opgør mod forestillingen om, at et system kunne forstås gennem konstruktionen af et andet. Dette kom blandt andet til udtryk i diskussionen med Wienerkredsens medlemmer. Til et af disse møder slog han fast: "Man kan ikke nå til en principiel forståelse af matematikken, hvis man venter resultatet af en teori" (Wittgenstein 1993a, 129). Wittgenstein præsenterede dermed et fundamentalt opgør med Hilberts metamatematik, hvis udgangspunkt var at opstille formaliserede beviser for matematiske funktioner og dermed behandle definitioner af disse funktioner fremfor funktionerne selv: "Hvad Hilbert laver er matematik og ikke metamatematik. Det er endnu en beregning lige så vel som en hvilken som helst anden" (Wittgenstein 1993a, 121).[20]

Det var, mente Wittgenstein, en misforståelse af problemet at tro, man kunne komme usikkerheden i forbindelse med at opstille et modsigelsesfrit grundlag for matematikken til livs gennem beviser. I stedet drejede det sig om at se klart: "Beviset beviser kun, hvad det beviser.. Er jeg usikker på matematikkens væsen, så kan intet bevis hjælpe mig. Er jeg derimod klar over matematikkens væsen, så kan spørgsmålet om modsigelsesfrihed overhovedet ikke stilles" (Wittgenstein 1993a, 122). Det drejede sig ikke om at forklare en regel med en ny regel. Enten ville det formelle systems konsistens vise sig, eller også var det ikke konsistent. Denne sammenhæng skulle *ses*, men ikke gennem noget andet. Det vil sige, den kunne ikke udtrykkes: "Tingene må stå i direkte forbindelse med hinanden, uden noget reb, det vil sige, de må stå i forbindelse med hinanden som leddene i en kæde" (Wittgenstein 1993a, 129. Sammenlign med Wittgenstein 1996, 2.03).

Opgøret med Hilbert byggede på de samme forudsætninger som det tidligere opgør med Russell. I *The Big Typescript* skrev Wittgenstein:

> Gennem Russell, og særligt gennem Whitehead, er der dukket en pseudoeksakthed op i filosofien, der er den virkelige eksaktheds værste fjende. Til grund herfor ligger den fejl, at en beregning kan være det metamatematiske grundlag for matematikken (Wittgenstein 1932-33, folio 1857, 540).[21]

Tilsvarende lød det i et tidligere manuskript: "Der findes ingen metalogik. Ligesom ordet 'forståelse' i udtrykket 'at forstå en sætning' ikke er metalogisk" (Wittgenstein 1932, folio 79).[22] Det fandtes altså intet metasprog der kunne *forklare* logikken, matematikken eller noget andet formelt system for den sags skyld. Det Wittgenstein krævede var *forståelse*. Den kunne man ikke få gennem konstruktionen af et metaniveau. Tværtimod ville det forhindre den nødvendige forståelse. I stedet drejede det sig for Wittgenstein om at give en klar fremstilling af matematikken, der synliggjorde dens indre arrangement af tegn og relationer. Kun således kunne matematikken fremstå som modsigelsesfri. Det kunne man ikke konstruere sig til. De modsigelser Russells system var plaget af og som gik igen hos Hilbert, for at få det formelle argument for deres uafvendelighed hos Gödel, skulle ikke løses ved introduktionen af et eller flere metaniveauer (se Shanker 1991, 155ff). Modsigelserne ville opløses, når man ikke længere stillede illegitime spørgsmål og dermed kom med ugyldige svar. Spørgsmålet om modsigelsesfrihed skulle stilles og besvares *indefra* gennem en klar repræsentation, hvor tomme relationer blev synliggjort, så det formelle system kunne betragtes under et. Denne kritiske metode var inspireret af Hertz og derigennem en tradition, der lå uden for den filosofiske. Vil vi forstå, hvad der ligger i hele Wittgensteins opgør med metasprog i grundlagsdiskussionerne, er vi nødt til at tage denne tradition alvorligt.[23]

Hovedindvendingen mod Hilbert kan udtrykkes i sætningen *beviset beviser kun det, det beviser*. Det vil sige, at beviset blot viser det formelle systems struktur i en hensigtsmæssig form. Det har ingen mulighed for at demonstrere dets gyldighed. I *Bemærkninger om matematikkens grundlag* skrev Wittgenstein: "Til beviset hører overskuelighed" (Wittgenstein 1989d, 95).[24] At *overskuelighed* er en central del af forståelsen af bevisets funktion udfoldes her, hvorimod det ikke *lader* til at have spillet nogen rolle i *Filosofiske bemærkninger* og *Filosofiske grammatik*. Det får Shanker til at hævde, at tanken er ny for Wittgenstein (Shanker 1987, 120). Imidlertid var netop overskueligheden en vigtig funktion i Hertz' formelle mekanik, idet den gav os mulighed for at overskue hele mekanikkens område og derigennem vise dette områdes grænser indefra. Det var en tanke, som Wittgenstein overtog i *Tractatus*, hvor den ligeledes blev afgørende i den interne afklaring af det formelle systems mekanismer og derigennem også af afgrænsningen indefra.[25]

Muligheden for at overskue det formelle system gennem en klar og hensigtsmæssig fremstilling var en metode, Wittgenstein fandt hos Hertz og som han viderebragte fra *Tractatus* til den senere filosofi. Denne tanke finder man overalt i såvel de matematiske skrifter som i de øvrige fra slutningen af 1920erne og frem til hans død i 1951. Et markant eksempel finder vi *The Big Typescript*, som Wittgenstein forberedte til udgivelse på Cambridge University Press i begyndelsen af 1930erne: "Hele opgaven i min måde at filosofere på består i at arrangere udtrykket således at overbevisende problemer/utryghed forsvinder (Hertz)" (Wittgenstein 1932-33, folio 1556, 421). Modsigelser var misforståelser. Det var der imidlertid ingen der forstod. Wittgensteins kritik kom derfor til at gå upåagtet hen og fik kun begrænset indflydelse på matematikfilosofien i sidste halvdel af det 20. århundrede.

Litteratur:

Baker, Gordon: (1988) *Wittgenstein, Frege and the Vienna Circle*, Oxford.

Barker, Peter: (1980) "Hertz and Wittgenstein", *Studies in the History and Philosophy of Science* 11, 243-56.

Black, Max: (1964) *A Companion to Wittgenstein's 'Tractatus'*, Ithaca, New York.

Dummett, Michael: (1959) "Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics", *The Philosophical Review* 68, 324-48

Gödel, Kurt: (1986) "Diskussion zur Grundlegung der Mathematik", i *Collected Works*, bd. 1, Oxford.

Hacker: Peter. M. S.: (1986) *Insight and Illusion – Themes in the Philosophy of Wittgenstein*, 2..udg., Oxford.

Hertz, Heinrich: (1891) *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, Gesammelte Werke* bd 2, Leipzig (1910).

_________ .: (1894) *Die Prinzipien der Mechanik in Neuem Zusammenhang Dargestellt, Gesammelte Werke* bd 1, Leipzig (1910).

Hilbert, David : (1904) "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", i *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931, J. van Heijenoort, J. (red.), Boston (1967).

_________ .: (1925) "Über das Unendliche", i *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931, J. van Heijenoort, J. (red.), Boston (1967).

_________ .: (1927) "Die Grundlagen der Mathematik", i *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931, J. van Heijenoort, J. (red.), Boston (1967).

Kjærgaard, Peter C.: (2002) "Hertz and Wittgenstein's Philosophy of Science", *Journal for General Philosophy of Science* 33:121-149.

_________ .: (2003) *Wittgenstein og videnskaberne*, Århus.

McGuinness, Brian: (1988) *Wittgenstein: A Life – Young Ludwig 1889-1921*, Berkeley.

Marion, Mathieu: (1998) *Wittgenstein, Finitism and Foundations of Mathematics,* Oxford.

Maxwell, James Clerk: (1890) "On Physical Lines of Force", i *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, bd 1, Cambridge.

Monk, Ray: (1991) *Wittgenstein, The Duty of Genius*, New York

Mounce, Howard Owen:(1981) *Wittgenstein's Tractatus – An Introduction*, Chicago.

Nicod, Jean: (1917) "A Reduction in the Number of Primitive Propositions of Logic" *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 19:32-41.

Post, Emil Leon: (1921) "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", i *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, J. van Heijenoort, J. (red.), Boston (1967).

Ramsey, Frank: ([1925] 1978) "The Foundations of Mathematics" i *Foundations, Essays in Philosophy, Logic, Mathematics and Economics,* London.

Russell, Bertrand: (1943) *The Principles of Mathematics,* New York.

Schmitz, François: (1988) *Wittgenstein – la philosophie et les mathématiques,* Paris.

Schönfinkel, Moses: (1924) "On the building blocks of logic", i *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, J. van Heijenoort, J. (red.), Boston (1967).

Shanker, Stuart: (1987) *Wittgenstein and the Turning Point in the Philosophy of Mathematics,* London

_________ .: (1991) "Wittgenstein's Remarks on the Significance of Gödel's Theorem", i Stuart Shanker (red.) *Gödel's Theorem in Focus,* London.

Sheffer, Henry M.: (1913) "A Set of Five Independent Postulates for Boolean Algebras, with Applications to Logical Constants", *Transactions of the American Mathematical Society* 14: 481-88.

Wittgenstein, Ludwig: (1932) *TS 214*.

_________ .: (1932-33) The Big Typescript (TS 213).

_________ .: (1933-36) MS 115.

_________ .: (1939-41) MS 161.

_________ .: (1974) *Letters to Russell, Keynes and Moore*, Georg Henrik von Wright & Brian McGuinness (red.), Oxford.

__________.: (1979a) "Notes dictated to Moore in Norway" [1914], i *Notebooks* 1914-1916, Oxford.

__________.: (1979b) *Wittgenstein's Lectures: Cambridge, 1932-1935*, Alice Ambrose (red.), Chicago.

__________.: (1980) *Wittgenstein's Lectures: Cambridge, 1930-1932*, D. Lee, (red.), Oxford.

__________.: (1984) *Philosophische Bemerkungen*, Frankfurt am Main.

__________.: (1989a): *Tagebücher 1914-16*, Frankfurt am Main.

__________.: (1989b) *"Aufzeichnungen über Logik"*, Frankfurt am Main.

__________.: (1989c) *Philosophische Grammatik* , Frankfurt am Main.

__________.: (1989d) *Bemerkungen über der Grundlage der Mathematik*, Frankfurt am Main.

__________.: (1989e) *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics,* Cambridge, 1939, Cora Diamond (red.), Chicago.

__________.: (1990) *Zettel*, Frankfurt am Main.

__________.: (1993a) *Wittgenstein und der Wiener Kreis,* nedskrevet af Friedrich Waismann, Frankfurt am Main.

__________.: (1993b) "Wittgenstein's Lectures in 1930-33", nedskrevet af G. E. Moore, i Ludwig Wittgenstein, *Philosophical Occasions*, James Carl Klagge og Alfred Nordman (red.), Indianapolis (1993).

__________.: (1993c) "Notes for Lectures on 'Private Experience' and 'Sense Data'" i Ludwig Wittgenstein, *Philosophical Occasions*, James Carl Klagge og Alfred Nordman (red.), Indianapolis (1993).

__________.: (1994) *Filosofiske undersøgelser*, København.

__________.: (1996) *Tractatus Logico-Philosophicus*, København.

__________.: (2000) *Wittgenstein's "Nachlass" – the Bergen Electronic Edition,* Oxford.

von Wright, G. H.: (1993) "The Wittgenstein Papers" i Ludwig Wittgenstein, *Philosophical Occasions*, James Carl Klagge og Alfred Nordman (red.), Indianapolis.

Noter:

[1] Rush Rhees fortalte historien til Ray Monk og var ikke i tvivl om dens rigtighed, selvom om redaktøren John Wisdom ikke havde nogen klar erindring om episoden (se Monk 1991, 466 og 628).

[2] Forelæsningerne er udgivne under titlerne "Wittgenstein's Lectures, 1930-33", *Wittgenstein's Lectures: Cambridge, 1930-1932, Wittgenstein's Lectures: Cambridge, 1932-1935*, samt *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics: Cambridge, 1939.*

[3] Sammenlign dagbogsnotat fra d. 25.12.14 med passage i *Tractatus* (Wittgenstein 1996, 4.0312). Allerede den 22.6.12 skrev Wittgenstein til Russell: "Logikkens sætninger indeholder KUN TILSYNELADENDE variabler og hvad der end måtte vise sig at være den bedste forklaring af tilsyneladende variabler må dets konsekvens være, at der INGEN *logiske* konstanter findes" (Wittgenstein 1974, R.2).

[4] Se Wittgenstein 1989b, 208 og Wittgenstein 1996, 4.0621, 4.431, 4.441, 5.44, samt 6.111.

Dette forhold kommer tydeligt frem i tautologien og kontradiktionen, der i sig selv er meningstomme: ”Jeg ved for eksempel ingenting om vejret, når jeg ved, at det enten regner eller ikke regner”, Wittgenstein 1996, 4.461. Se også Ramsey 1978, 161.

5 Russells *mentale teleskop* stammer fra Principles of Mathemaics (Russell 1943, xv) og er en metafor, han brugte på foranledning af opdagelse af planeten Neptun (1846), hvis position forinden var beregnet udfra uregelmæssigheder i Uranus' bane. At de aksiomer, Frege og Russell benyttede i opbygningen af deres systemer, var forskellige, ændrer intet ved Wittgensteins argument. Se endvidere Mounce 1981, kap. 4, Hacker 1986, kap. 2 og Baker 1988, kap. 3.3.

6 Dette ønske blev allerede formuleret i et brev til Russell, januar 1913, (Wittgenstein 1974, R.9), hvor Wittgenstein fortsatte ”Jeg håber, jeg har gjort dette rimelig klart!”. Dette håb kan måske være en af forklaringerne på, at han i afvisningen af typeteorien i *Tractatus* – som i så mange tilfælde – var sparsom med uddybningerne. Det gør imidlertid ikke argumentationen mindre klar. Den er fuldt gennemført i *Tractatus* (Wittgenstein 1996, 3.33ff). Vidnesbyrd i brevene til Russell, dagbogsnotaterne i krigsårene, samt i ”Aufzeichungen über Logik” (Wittgenstein 1989b) og ”Notes Dictated to Moore in Norway” (Wittgenstein 1979a) peger på den fundamentale rolle, opgøret med typeteorien og dens følgevirkninger havde for Wittgenstein. Se følgende eksempler fra brevvekslingen med Russell. D. 5.9.13: ”Jeg sidder her i et lille hus ved en smuk fjord og tænker på den skrækkelige typeteori. Der er stadig nogen *meget* svære problemer (og meget fundamentale problemer) der må løses” (Wittgenstein 1974, R.9 og R.16). D. 20.9.13: ”Typer er ikke helt løst endnu, men jeg har alle mulige ideer, der ser ud til at være meget fundamentale” (Wittgenstein 1974, R.17). D. 19.8.19: ”Du kan ikke tilskrive et symbol, hvad det *må* blive brugt til at symbolisere. Alt hvad et symbol *kan* udtrykke, *må* det udtrykke. Det er et kort svar, men det er sandt!” (Wittgenstein 1974, R.22 og R.37). For svar på Russells forsvar for sin typeteori som en teori om korrekt symbolbrug se Wittgenstein 1989a, 26.4.16, Wittgenstein 1989b, 208 (sammenlign med Wittgenstein 1996, 3.32), samt 1979a, 109f. Jeg mener dermed ikke – i modsætning til Max Black i *A Companion to Wittgenstein's Tractatus* – at Wittgensteins opgør med typeteorien er ”så utilfredsstillende som dets kortfattethed leder en til at forvente” og ”ikke vil overleve en undersøgelse” (Black 1964, 145f). Tværtimod, mener jeg, er det et centralt punkt for forståelsen af opgøret med Russell og senere forudsætningerne for kritikken af metateorier i overvejelserne over matematikkens grundlag (især i opgøret med Hilberts metamatematik og Gödels ufuldstændighedsbevis) fra slutningen af 1920erne frem til 1940. I understregningen af vigtigheden af at forstå kritikken af typeteorien er min tolkning på linie med McGuinness 1988, 165 og Monk 1991, 156.

7 Sammenlign med Wittgenstein 1996, 4.022, 4.116 og indledningen. Monk forklarer forskellen på at sige og vise ved at karakterisere sidstnævnte ved eksemplet ”at vi *ser*, at 'A' er det samme bogstav som 'A', den samme *type* bogstav som 'B' og en forskellig type fra 'x', 'y' og 'z'” (Monk 1991, 92). En teori ville sige at 'A' og 'A' er identiske, etc. Det er ikke nødvendigt, mente Wittgenstein, og forkert at tro det *legitimerer* identiteten, etc. Jævnfør diskussionen af identitet i *Tractatus* (Wittgenstein 1996, 5.53, 5.5301, 5.5302, 5.5303 og 5.533). I et brev til Russell dateret d. 17.10.13 skrev Wittgenstein: ”*Identitet er djævelen selv*!” (Wittgenstein 1974). En anden måde at illustrere forholdet mellem *at sige* og *at vise* fås ved at betragte tilstanden AB, der består af genstandene A og B, samt elementarsætningen ab, hvor a er navnet for A og b er navnet for B. At vi kan se, at navnene i elementarsætningen står i samme forhold til hinanden som genstandene i tilstanden, vil sige at de har samme

logiske form (”a går forud for b” og ”A går forud for B”): ab *siger* at a går forud for b og *viser*, at A går forud for B (se Barker 1980, 251). Eksempler på skellet mellem logik og empiri findes blandt andet i *Tractatus* (Wittgenstein 1996, 5.561, 5.61, 6.1222 og 6.1233), samt i dagbøgerne (Wittgenstein 1989a, 11.6.16).

[8] Formelt det samme som funktionen – som den optræder i Tractatus (Wittgenstein 1996, 3.333) – F(fx) der har sig selv som argument i F(F(fx)).

[9] Occams devise lyder: Enheder skal ikke mangfoldiggøres udover det nødvendige. Se også Wittgenstein 1996, 3.328: ”Hvis et tegn ikke nødvendigvis skal bruges, så er det betydningsløst. Det er meningen med Occams devise. (Når alt forholder sig som om et tegn har mening, så har det mening)”.

[10] Hvad angår Wittgensteins idé om at de logiske konstanter ikke repræsenterede noget fandtes en lignende tanke i Hertz' diskussion af *tomme relationer* i forbindelse med spørgsmålet om en teoris hensigtsmæssighed, hvor kraft optræder som en tom relation der ikke repræsenterer noget (Hertz 1894, 2f. Se også Hacker 1986, 14: ”Fysikeren Hertz og filosoffen Wittgenstein er fælles om den kritiske metode, der består i opløsningen af pseudo-problemer gennem eliminering af tomme relationer”. Et andet eksempel er Barker 1980, 248: ”Wittgenstein benægter, at logiske forbindelser repræsenterer noget som helst; Hertz siger det samme om begrebet 'kraft'. I begge tilfælde bliver det opdaget, at noget der kunne tænkes at repræsentere noget, ikke gør det, når en hensigtsmæssig fremstilling er nået”. Netop denne hensigtsmæssige fremstilling var det fælles mål for både Hertz og Wittgenstein. Wittgenstein accepterede da også fuldt ud Hertz' krav om *hensigtsmæssighed* i forbindelse med billeddannelsen og dermed selve teoridannelsen. Se Barker 1980, 249: ”Både Hertz og Wittgenstein er optaget af hensigtsmæssige repræsentationer, og deres kriterium for, hvad der er hensigtsmæssigt forenes i kravet om elimineringen af lingvistiske dele, der ikke har en repræsenterende funktion” – det vil sige elimineringen af *tomme relationer*.

[11] Se for eksempel Wittgenstein 1993a, 122f og Wittgenstein 1984, 191f, der begge viser, at Wittgenstein stadig omtalte '/' som Sheffers opdagelse, men hvor det var Nicods udgave der benyttes. Russell beskrev i *Introduction to Mathematical Philosophy* begges metoder, men lægger Nicods til grund og kalder tegnet *uforenelighed* (Russell 1943, 148ff) Derefter blev Nicods metode den hyppigst benyttede. Se blandt andet Schönfinkel 1924 (forelæst 1920), 358f, samt Post 1921, 275.

[12] For de såkaldte *ab*-funktioner se Wittgenstein 1989b, 189f.

[13] '.' benyttes af Wittgenstein her – og følger dermed Russells og Whiteheads notation – i stedet for parenteser, og står altså ikke for den logiske konstant 'og'. Desuden påpegede han, at ”Det er klart, at antallet af 'logiske grundsætninger' er vilkårligt, da man jo kunne aflede logikken af een grundsætning ved for eksempel simpelthen at danne det logiske produkt af Freges grundsætninger” (Wittgenstein 1996, 6.1271).

[14] Sammenlign med Wittgenstein 1989a, 5.5.15: ”Findes der en almen sætningsform? Ja, hvis der dermed forstås den ene[ste] 'logiske konstant'”. Se endvidere dagbogsnotaterne fra 9.7.16 og 21.11.16.

[15] For sætningens almene form se Wittgenstein 1996, 5.5, 5.502, 6 og 6.001, den succesive anvendelse 5.2521 og 5.2523, samt Wittgenstein 1989a, 21.11.16. Se endvidere Mounce 1981, 51ff.

[16] Sandhedstabeller, der idag er standardudstyr i logiske analyser, blev introduceret i *Tractatus* som en repræsentationsform for en elementarsætnings sandhedsmuligheder eller sandhedsbetingelserne for en sætning, der er en sandhedsfunktion af elementarsætningen (Wittgenstein 1996, 4.31, 5, 5.01 og 5.101). Identiske sandhedsbetingelser udtrykker et tautologisk forhold og forskellige sandhedsbetingelser udtrykker et kontradiktorisk. Det betyder, at to sætninger med ens sandhedsbetingelser er ækvivalente, og omvendt med forskellige sandhedsbetingelser (Wittgenstein 1996, 4.46 og 4.465). Sandhedstabellerne har den fordel, at det er meget let at afgøre, hvorvidt to sætninger er ækvivalente eller ej, blot ved at sammenligne deres sandhedsbetingelser. I sine forelæsninger i Cambridge i begyndelsen af 1930erne, forklarede Wittgenstein sandhedstabellerne ved, at de ikke analyserede en sætning ved at beskrive dens mening, men blot var en anden og mere eksplicit repræsentationsform for sætningen (Wittgenstein 1980, 135f). Af *Lectures on the Foundations of Mathematics* i 1939 fremgår det, at Wittgenstein fik ideen med sandhedstabeller fra Frege i hans *Begriffschrift* (1879, §7): ”denne slags skema er ikke min opfindelse; Frege brugte den. Den eneste del af det, der er min opfindelse – ikke fordi det gør det mindste – var at bruge det som et symbol for sætningen, ikke som en forklaring af den (som Frege gjorde)” (Wittgenstein 1989d, 177). Det, mente Wittgenstein i ”Notes for Lectures on ’Private Experience’ and ’Sense Data’” fra 1935-36, var netop dét, der kendetegnede Nicods fremstilling af ’/’ (Wittgenstein 1993c, 214). Sheffers streg var ikke en analyse af en sætnings egentlige mening, men blot *analyse*.

[17] Slægtskabsmetaforen blev foreslået af Elizabeth Anscombe og er refereret i Mounce 1981, 61f.

[18] Hilberts formalistiske program for matematikkens grundlag blev allerede introduceret i 1904 under titlen ”Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik”, der indeholder det første forsøg på et konsistensbevis for aritmetikken. Men det var først fra omkring 1920, at argumenterne blev udviklet og gennemarbejdet. Se Shanker 1987, 220ff.

[19] Gödel fremkom med dette postulat under den anden konference for de eksakte videnskabers epistemologi afholdt af *Gesellschaft für empirische Philosophie* i Königsberg 5-7 september, 1930. Beviset for postulatet, der tog udgangspunkt i Russell og Whiteheads *Principia Mathematica*, blev indleveret under titlen ”Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I” den 17. november 1930 og trykt i *Monatshefte für Mathematik und Physik* i 1931.

[20] *Metamatematik* blev introduceret i ”Über das Unendliche”, som ”en indholdsteori om formaliserede beviser” (Hilbert 1925, 385). Denne bevisteori havde for Hilbert store muligheder, da den ”ikke alene er istand til at sikre matematikkens grundlag [..] Matematik udvikler sig, kan man sige, til et dømmende tribunal, en højesteret, der vil afgøre princip-spørgsmål – og på en sådan konkret basis må den universelle enighed være opnåelig og alle sætninger vil kunne verificeres” (Hilbert 1925, 383f).

[21] Sammenlign med Wittgenstein 1932-33, folio 1856, Wittgenstein 1933-36, folio 210, Wittgenstein 1984, 180, Wittgenstein 1989c, 46, 101, 116, 290 og 296, samt Wittgenstein 1990, 338. Angående nærmere oplysninger om Wittgensteins forskellige upublicerede maniskripter (MS og TS), henvises der til von Wrights opdeling i *The Wittgenstein Papers* (von Wright 1993).

[22] Sammenlign med Wittgenstein 1932, folio 80: ”Er det ikke besynderligt, at videnskaben og matematikken bruger sætninger, men ikke taler om forståelse af disse sætninger”. I *Tractatus* finder vi opgøret med metasprog som begrundelse for systemers gyldighed i blandt andet 3.332 og 5.141 (Wittgenstein 1996). Se endvider Black 1964, 218: ”Der er ikke plads til et ‘metasprog’ i Wittgensteins teori”.

[23] For en fremstilling af denne videnskabelige tradition og hvilken indflydelse den havde på Wittgenstein se Kjærgaard 2003. Hertz benyttede en *frihjuls-metafor* om de omtalte tomme relationer, som han overtog fra James Clerk Maxwell. Denne vending blev almindelig i Wittgensteins sprogbrug, med samme mening og funktion – påvisningen af tomme relationer – som den havde for både Maxwell og Hertz (friktionsløse partikler for Maxwell og kraftbegrebet for Hertz). Se Maxwell 1890, 486, Hertz 1894, 14, samt Wittgenstein 1984, 51 og Wittgenstein 1994, 88 og 136. Dette er tydeligere i den tyske originaltekst. Læs her paragrafferne 132 og 271.

[24] Wittgenstein fortsatte argumentet: ”Var den proces som jeg fik mit resultat igennem ikke overskuelig, så kunne jeg ganske vist notere, at det resulterede i dette tal – men hvilken kendsgerning skulle den bekræfte for mig? Jeg ved ikke hvad der *burde* komme ud af det..” Og lidt efter: ”Man kunne sige: Eksperimentets resultat er dette, at jeg ved slutningen, efter at have nået bevisets resultat, med overbevisning kan sige: 'Ja, det stemmer'” (Wittgenstein 1989d, 97). Se også Wittgenstein 1939-41, 13: ”Det mindste et bevis kan bevise er noget om dette beviselighedssystems geometri”. Geometriens formelle fremstillingsform i *Tractatus* blev sidestillet med Hertz' udgave af mekanikken (Wittgenstein 1996, 6.34ff).

[25] Sammenlign Hertz 1894, 45 og Wittgenstein 1996, 4.113 og 4.114.