View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE

吉備国際大学
社会福祉学部研究紀要
第12号，93－102，2007

リーマンの多様体概念へのガウスとヘルバルトからの影響について

山本　敦之

The Influence of Gauss and Herbart to Riemann's Manifold Concept

Atsuyuki YAMAMOTO

Abstract

Riemann had introduced the concept of manifold into mathematics. We can regard the distinction of a qualitative variety from its coordinate system as one of the essential charicteristcs of Riemann's concept. This charicteristic makes us possible to estimate Gauss' and Herbart's influences on Riemann more precisely than ever.

Gauss and Riemann shared the common idea of abstract mathematical objects which are independent of our space-intuition and are free from the traditional dimensional barrier. But every Gauss' manifolds always has its coordinate system and metric system self-evidently. Riemann's general manifold and Herbart's serial-forms （Reihenformen）， especially the colours-triangle, have the essenntial characteristic in common. Riemann must have received from Herbart the concept of manifold as the genus of such species as the space and logical general concepts, the idea of the non-self-evident coordinate system of a manifold and the idea of the metric system which is peculiar to each manifold.

Key words ：Riemann, manifold, Herbart, Gauss
キーワード：リーマン、多様体、ヘルバルト、ガウス

第１節　序論

リーマン（Bernhard　Riemann，1826－1866）はゲッティンゲン大学における就任講演『幾何学の基礎にある仮説について』（以下『就任講演』）[1]において、現代数学の多様体概念の原型を提示した。それは「多重延長量 mehrfach ausgedehnte Grösse」[2]と呼ばれもするが、この概念を定義するに際しては、さまざまな規定 Bestimmungsweisen を許す或る概念が存在するとき、それら様々な規定のなす多様性・多様体 Mannigfaltigkeit として導入される[3]。このMannigfaltigkeit が多様性と訳されるだけでなく、対象物として多様体と訳されるべき意味を担うことは、Mannigfaltigkeit の中で位置を規定したり[4]、Mannigfaltigkeit を平面や空間と並置すること[5]からうかがわれる。リーマン以前には[6]多様なるもの das　Mannigfaltige と多様性 Mannigfaltigkeit

吉備国際大学社会福祉学部福祉ボランティア学科
〒716－8508　岡山県高梁市伊賀町８
Department of Welfare and Volunteer, School of Social Welfare, KIBI International University
8, Iga-machi, Takahashi-city, Okayama, Japan(716-8508)

が使用されており、リーマンとは若干用法が異なっている。

『就任講演』における多様体概念の導入は、一般的な多様体概念の導入と、それにもとづく微分幾何学的多様体概念の導入との二段階に分けられる。前者すなわち一般的多様体概念の形成にかかわる歴史的要因についての研究は、リーマン自身の証言[7)]によって、ガウス（Carl Friedrich Gauss, 1777－1855）とヘルバルト（Johann Friedrich Herbart, 1776－1841）からの影響という観念におおむね収束する。本稿の主題は、リーマンの概念に固有の特徴を、歴史的に、特にガウス、ヘルバルトの対応概念との対照において、浮かびあがらせること。ならびに、そのことを通じて、ガウスやヘルバルトからリーマンへの影響を再評価することである。

従来、ガウスの多様体概念からリーマンへの影響は、一様に承認されてきた。他方、ヘルバルトからの影響について、その評価は様々である。そこで、ヘルバルトからの影響という点に関し、最近の諸研究と日本での研究とをまず概観しておく。

トレッティは『リーマンからポワンカレまでの空間の哲学』[8)]の中で、非ユークリッド的な諸幾何学として、平行線公準の可否に関するいわゆる非ユークリッド幾何学の系譜、射影幾何学の系譜とならんで多様体概念の系譜を、まずガウスからリーマンの理論まで追跡している。その中でヘルバルトからの影響が考察されている。トレッティは、かつてラッセル（Bertrand A. Russell, 1872－1970）が、リーマンの発想のもとになったと想定される、ヘルバルトに由来する５つの要因を挙げていた[9)]ことを指摘している。５つの要因とは、空間の心理学的理論、点列から延長を構成すること、音や色の系列と空間とを比較すること、連続なものより離散的なものをこのむこと、空間を他の多様体（ヘルバルトが系列形式と呼んだもの）とともに分類することである。トレッティはこれら５つのうち第３のものを強調する。

> これらの項目のうちでは第３のものが厳密にヘルバルト的なもので、類種関係の種の集合として「多様体」を一般に描写することにリーマンをおそらくみちびいた。この描写は、空間の点よりむしろ色の多様体や音の高さの多様体に似つかわしい[10)]。

ショルツは、1979年にボン大学に提出した学位論文にもとづく『リーマンからポワンカレまでの多様体概念』の中で、リーマンの複素解析研究も念頭において、リーマンの幾何学観の成立を探求した[11)]。ショルツはその後ゲッティンゲンのリーマン文庫の草稿を調べることで、リーマン研究に新しい局面をもたらした[12)]。しかし、これらの草稿研究は、ショルツにとっては、彼の最初の探求の結論を補強するものでしかなかった。すなわち一連の研究でショルツが主張するのは、数学において19世紀前半に進展した代数的・解析的システムの幾何学化の傾向というものが、リーマンの多様体概念の形成にとって本質的であって、それはガウスを通じてリーマンにもたらされたものでありヘルバルトとは無関係であるということである[13)]。

ショルツは、リーマンの多様体概念とヘルバルトの「系列形式 Reihenformen」との類似を認めつつ、ヘルバルトとリーマンのつながりを、空間論よりむしろ一般的な認識論や学問論のレヴェルに多く求めている[14)]。リーマンの多様体概念形成に対する、ヘルバルトの系列形式からの影響について、以下のごとき評価である。

> ヘルバルトの幾何学的議論と「幾何学化」という数学界での傾向との間の構造的類似に促されて、概念形成においてどのように進むべきかという一般的なヒントはうけとったかもしれな

い[15]。

リーマンの多様体概念形成への、ヘルバルトの直接的影響は強いものとは考えていない。ショルツがそう結論した理由は、リーマンの多様体概念の本質的特徴を高次元性（4次元以上も可能であること）、局所的に単純な性質と大局的に複雑な性質との対照、計量的側面と質的側面との分離、多様体上での構造の分離と考え、その上でこれらはヘルバルトの幾何学的発想と何ら関係ないものと判断したことにある[16]。

ノヴァークは、リーマンの『就任講演』をカント的空間論への挑戦とみなす観点を提示し、ショルツに反対した。そしてリーマンが高次元幾何とガウスの微分幾何学との一層ゆたかな結びつきを創造するのに貢献したヘルバルト由来の3要因を挙げている[17]。すなわち第1に、空間を構成するという姿勢、第2に、思考のア・プリオリなカテゴリーとしての空間というカントの見解の拒絶、第3に、空間的対象の構成は直観において可能で、物理空間での知覚からは独立であるとする立場、これら3つである。これらのうち第1と第3は、空間表象あるいは表象の系列形式にかかわるものである。

日本においては、非ユークリッド幾何学およびリーマン幾何学の形成に関し、近藤洋逸氏による世界的に見ても先駆的な研究[18]がある。近藤氏はリーマン幾何学成立の背景として以下の諸要素を挙げている。すなわち、ガウスの反カント的空間論[19]、2次元多様体としてのいわゆるガウス平面[20]、3次元以上の多様体へのガウスの言及[21]、ガウスの曲面論での内部的研究法[22]、曲面の微分幾何と非ユークリッド平面幾何との関連[23]、ヘルバルトの認識論の反カント的空間論[24]、量的関係と時空的関係と強度関係が並列されていること[25]である。このような背景から多様体概念一要素として空間をとらえるために、抽象化と具体化の二重の過程が必要とされる。具体化の過程とは、リーマンが『就任講演』で展開したような、一般的な多様体概念から出発して空間を目指して行われた議論である。抽象化の過程は、

> 曲面を代表とするさまざまの二次元連続体、ユークリッド空間を代表とするさまざまの三次元連続体があるばかりでなく、解析学ではもっと高次元の連続多様体が出現している。そこで次元を限定しない一般のn次元連続多様体を考えなければならない。（中略）彼自身が関数論において導入したリーマン面は非計量的であるし、また色彩という感覚的多様体では計量がまだ決まっていない。そこで多様体から計量性を捨象して延長という位相性のみを残すならば、きわめて一般的な連続多様体という概念が確立する[26]。

と推測されている。

近藤氏は、抽象化具体化の二重方法を有効に使うことができたことの根本的理由を以下のように考えた。すなわち、リーマンは空間をエーテルの満ちた充実空間と考えたため、それを連続多様体という普遍概念で包括することが可能になったと考えた[27]。さらに近藤氏はその議論を進めて、エーテルの充実した場としての空間という観念の形成について、リーマンの認識論的考察にもとづく事象の連続的変化という因果観、これと結びついた、物理学における近接作用の見地に、その有力な根拠を主張した。また、この点に、リーマンの哲学・物理学研究およびヘルバルト哲学からの影響を見ている[28]。

エーテル仮説、事象の連続的変化という因果観、近接作用論がリーマンにいかなる影響を及ぼしえたかについての近藤氏の見解は独特なものである。しかし19世紀初頭における光の波動説確立以降の、近藤氏が述べたような特別な認識論的基礎づけを欠いたエーテル仮説の流布という事態を鑑みれば、牽強

附会に思われる。

この見解を除くと、ヘルバルトからの影響についての評価は、これまで取り上げてきた各論者が、ほぼ同様の要因を挙げて、その当否を問題にしている。それらを整理すれば、ヘルバルトの反カント的空間論[29]、表象の系列形式という概念あるいは色や音の系列と空間との比較という考えになる。各論者はほぼ同様の要因を考慮しつつ、異なる結論に到達していた。その理由は、リーマンの多様体概念をそれ以前の類似概念から区別する、その特徴についての共通了解の不足である。そこで、過去の議論を整理しつつ、共通の枠組みとなるべきものを提示する。

トレッティは、色や音の系列形式を空間と比較するヘルバルトの議論が、リーマンによる多様体の記述に似ていることを指摘していた。しかし、概念内容が、他のものとの間には考えられないような共通性をもつことを示していない。ノヴァークは、高次元幾何とガウスの微分幾何との一層豊かな結びつきを促進したヘルバルトからの要因について述べるが、それがなければ、より貧しい結びつきをしたであろうことを示すわけではない。近藤氏は、いくつもの要因を挙げていたが、たとえば色彩多様体が、それ以外では考えられない影響を、リーマンの概念形成に及ぼしたかを問題にしていない。これらはすべて、リーマンの多様体概念の歴史的特徴づけの不十分さによるものである。

ショルツだけは、リーマンの多様体概念の本質的特徴なるものを、自覚的に記述していた。しかしそれは、『就任講演』での微分幾何学的多様体と『学位論文』[30]および『アーベル関数研究』[31]での多様体概念とから抽出された本質的特徴であった。それは、リーマンの多様体概念が諸分野で使用され、諸分野がそれ以降発展していった事実を最重要視して抽出された本質と言えよう。ショルツが挙げる特徴の第２、多様体の局所性と大局性の対照は、リーマンの概念にショルツが読み込んだものであって、リーマン自身がそのように強調しているわけではない。特徴の第３、延長量の計量的側面と質的側面との分離というのは、トポロジー研究への道をひらいた点のみを強調したものである。特徴の第４、多様体上での構造の分離というのは、微分可能多様体の微分幾何学的構造やいわゆるリーマン面の双有理同値にもとづく構造を念頭に置いたものである。

しかし、リーマンの多様体概念の形成あるいはその背景を論じる際に参照されるべきリーマンの概念は、ショルツの記述する、後世の数学から眺められたものでは不十分である。むしろリーマンの概念が、ガウスやヘルバルトにおける対応概念、あるいは同時代の類似概念から区別される内容を初めて獲得したときのものに可能な限り近づくべきである。

ところでショルツが1983年に公刊した資料から、リーマンの多様体概念のより古いかたちのものが知られる。それは、可変的対象・事物の変動性 Veränderlichkeit の様々な規定法の集合としての多様体[32]である。そして n 次元多様体の要素は、n 個の実数の順序対への対応によって表現される。また、この多様体の計量は自明には備わっていない。これは、『就任講演』の一般的多様体概念からさかのぼられるもので、しかも数学界でのリーマンの先行者の対応物、すなわちガウスが多様体とよんだものから区別されるものである。したがって、『就任講演』の多様体概念の原型であり、数学的伝統の中では、固有にリーマン的な概念とみなされる。ここから抽出されるのは、何らかの集合とその座標系、あるいは質的多様性とその座標系という２項的枠組である。この枠組に依拠して、ガウスおよびヘルバルトとリーマンの多様体概念形成とのかかわりを、以下の２節で再検証する。

第２節　ガウスの多様体概念

本節では、ガウスが das Mannigfaltige あるいは

Mannigfaltigkeitと呼んだものとその周辺を概観する。リーマンが「n重延長量（n次元多様体)」の一般的概念を『就任講演』において記述した際、その先行者として利用可能であったとするのは、ガウスに関しては4乗剰余についての第2論文、その解説文、学位50周年記念論文にある簡単に述べられた見解であった[34)]。

これら3作品のうち前2者、特に解説文においてガウスは複素数の使用の正当化を明確に試みている。複素数が直観的意味を持たないという一般的非難に対して、いわゆるガウス平面でもって応答している[35)]。さらにガウスは、複素数の直観的意味づけをこえて、数学的対象についてのあらたな存在論を主張する[36)]。その際、例えば「対象が一列には並べられず、列の列Reihen von Reihenとして並べられるとき、それは2次元の多様性をeine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionenなす」[37)]という表現を用いている。あるいは、いわゆる多元数に関して、「2次元以上の多様性を示す事物間の関係die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten」[38)]という表現を用いている。

ガウスは学位50周年記念論文では、多様なものdas Mannigfaltige、多様体・多様性Mannigfaltigkeitという術語を用いない。それでもリーマンは、この論文の中に、みずからの一般的多様体概念の先駆を見出したと主張する。それは以下の点であろうと推測される。すなわち、ガウスは、この論文で代数学の基本定理の第4証明を与えるに際し、それを直観性と単純さのために、トポロジー（「位置の幾何Geometrie der Lage」）から借用したスタイルで提示している。これについてガウスは、みずからの理論の内容が、根底においては「空間的なものから独立した、普遍的・抽象的な量論の高度な領域に属する」[39)]と主張する。この普遍的量論の対象は、「連続性によってつながった、量の組合せ（実数の順序対）die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Grössencombinationen」[40)]と呼ばれる。

4乗剰余についての論文以外で、ガウスが「多様なもの」、「多様体」といった術語を用いる事例として、最小二乗法についての講義があげられる。リーマンは、この題名の講義を1846年度の冬学期に聴講している[41)]。リッター（August Ritter）の講義ノートによると、有意味な不等式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b \geqq 0$$

が一つ与えられたとき、求める点は「n-1次元多様体の中にin einem Mannigfaltigen von n-1 Dimensionen」あると言われ、二つの有意味な不等式に対してはn-2次元多様体の中にあると言われる[42)]。あるいはn元連立一次方程式により決定される点を、「n個のn-1次元多様体Mannigfaltigkeitの交点であると表象する」と言う[43)]。

ガウスはいわゆる内的なintrinsic微分幾何学の創始者であるが、その微分幾何学的曲面論において、曲面を2次元多様体と呼んだりはしない。彼が曲面論を書いた時期にMannigfaltigkeitの語を用いるのは、例えば『曲面の一般的研究』に対する解説文における「空間直線の方向の多様性eine Mannigfaltigkeit von Richtungen gerader Linien im Raume」[44)]なる表現が示すように、日常的用法である。

ガウスが、複素数の基礎づけ以降、多様なもの、多様体・多様性の名で呼ぶのは、我々の直観と密接にむすびついていると信じられた古典幾何学的空間と区別される、抽象的な、量の組合せGrössencombinationenの拡がりのことであった。この多様体概念は、数学的存在の伝統的解釈を、次元に関して克服する枠組を提供するものであった。しかし、リーマンにおけるような、何らかの集合とその（局所）座標、あるいは何らかの一般的概念とその（局所）座標という2項的図式、すなわち表現されるものと表現するものとが分化した2項的図式が、ガウスにおいては不在である。

そのような図式を我々がかろうじて読みとることのできる、複素数とガウス平面、あるいはn元数とn次元ユークリッド空間においては、表現されるものと表現するものが一通りの仕方で結びついていて、その結合が自明である。従って表現されるものの、自明でない計量が問題にされることもない。この意味で、表現される多様体自体と、表現するその座標系とが未分化であると言えよう。

第3節　ヘルバルトの多様体・系列形式・色彩三角形とリーマン

ヘルバルトはdas Mannigfaltige, die Mannigfaltigkeitの語を、カントなどと同様に日常語として用いていると思われる。それらは単に「多様なもの」「多様性」と訳されるべきものであって、ヘルバルトに固有のものではない。表象の系列形式という概念こそ、これまで多くの研究者にも認められたように、ヘルバルトに固有で、リーマンの多様体概念との関係が想定されるものである。

系列形式とは、ヘルバルトによると、強度的差異をもった無数の表象から、それら諸表象相互の融合をへてつくられる系列的秩序のことである。たとえば、おもに視覚・触覚を通じての諸表象から、空間という、唯一、完全に展開されつくした系列形式がつくられる。ほかに、時間、数、度（内包量）もそれぞれ系列形式の一種である。あるいは、音の高さの総体を表示する直線と色彩三角形もそうであり、論理学においていくつかの種概念が対置され、それらが類概念の下に総括されたものも系列形式であるとされる[45]。

ヘルバルトによる系列形式の説明には、リーマンへの影響を示唆するものが見うけられる。たとえば

> それら諸対象die Gegenständeは、それらが一定のままでいるvest stehnかぎり、漸次形成し整列し結合する表象系列の中に、確定した場所Plätzeを獲得する[46]。

は、リーマンの未完の草稿R13での、多様体に関する「可変的対象の規定の仕方Bestinnungsweise eines veränderlichen Gegenstandes」[47]という表現を想起させる。あるいは、表象の結合方式についてのヘルバルトによる説明、

> 第1種の結合方式により、表象は、時間のなかに位置Stelleを獲得する。第2種のものにより、空間のなかに位置Ortを獲得する。第3種のものにより、概念の領域の中に位置Platzを獲得する[48]。

における、3種のものの並列すなわち時間・空間・概念の並列も注目に値する。なぜなら、時間、空間、概念を種とする類概念を示唆するからである。さらに第3種のものは、リーマンの「種々の規定の仕方をゆるす概念」[49]を想起させるものである。

ショルツが報告する、ヘルバルトの著作からのリーマンによる抜粋箇所[50]から考えて、リーマンはまず確実にそれらの表現を見ている。リーマンは、系列形式についてのヘルバルトによる記述を、自身の一般的な多様体の記述に借用していると言えよう。しかも、リーマンの多様体概念の表現だけでなく内容も、系列形式概念と、他のものとの間にはない共通性を持っている。というのも、リーマンの一般的な多様体概念は、通常の空間やいわゆる非ユークリッド空間、微分幾何学的な多様体の類概念として定義されたのではなく、空間や論理学的な一般概念の類概念として定義されたのである。

ところで、様々な系列形式のうち特に色彩三角形は、リーマンにおける多様体概念の発達過程で独自の位置を占めていると考えられる。ヘルバルトは、赤・黄・青の3原色から混合によって他のすべての中間色が得られるという考えにしたがい、3原色を

頂点に配した正三角形を考えた[51]。すべての色は、この三角形の内部に配置されると考えたわけである。

この三角形が正三角であるとすることに関し、ヘルバルトは赤と黄、黄と青、青と赤の間には同じだけの混合の多様性 Verschiedenheit があると、独断的に主張する[52]。さらに、「赤と青の間の距離の十分の一」などというものが、色彩三角形に対し、完全に確定した量であると主張している[53]。あるいは、「生理学的・物理的・化学的色彩論をいずれも顧慮することなく、心の中の表象だけを考えたとき」[54]という際にも、青と赤の間のすべての可能な紫色、赤と黄の間の橙色、青と黄の間の緑色のうちで、それぞれ２原色の丁度真ん中に、ある確定した紫・橙・緑色があると主張する。しかも

> ここで真ん中 Mitte という語は隠喩であると考えるものは誤っている。中間 Mittler という概念は、空間のことで考えられているわけでなく、この（すべての色彩からなる）質的連続体自体から産出されるだろう[55]

とさえ言うのである。

このように、色彩三角形での計量に関し、ヘルバルトは通常の空間表象に由来する先入観を持っていた。それでも、色彩全体のなす質的連続体を、空間とは独立に存在するものと考えていた。彼は、

> 色彩三角形は、徹頭徹尾、感覚的な世界空間から独立である。両者は共通の尺度 Maaß をもたず、色彩三角形の尺度は、それ自体から取り出さなければならない[56]

と明確に述べてもいた。

色彩三角形でのヘルバルトによる計量は、色彩という質的連続体に計量をもちこんだこと、および世界空間から独立な質的連続体上で固有の計量を問題にしたことに分けて考えられる。これら二点に関し、以下のごとく結論できよう。すなわち第一点では、色彩全体のなす質的連続体上での「２原色の厳密な真ん中」を、心の中での表象という前提で、主張するのは独断的である。色彩三角形自体は自明な計量を持っていないのであるから、質的連続体の計量に関するヘルバルトの議論は、リーマンにも独断的とうけとられたと推察される。第二点の、世界空間とは独立に存在する質的連続体上で、それに固有の計量を問題にするというヘルバルトの視点は、リーマンの多様体概念での、位置規定と独立な計量という考えと、ほかのものとの間では見られない共通点を有していると言えよう。しかも、色彩三角形についてのヘルバルトの議論をリーマンが読んでいることはまず確実である。

色彩三角形では計量が自明でないのみならず、どのような座標がはいるかも自明ではない。このことは、リーマンが一般的多様体概念を定義する前に知りえた、他の多様体に比べて、独自の点である。このことは、ガウスの多様体のみならず、リーマンの複素関数論研究からでてきた様々な多様体、すなわち、『学位論文』でのいわゆるリーマン面[57]･･･それはいわゆるガウス平面を多重に覆う面として導入された･･･や、式で表された関数の集合を、式に現れた係数をパラメーターとして、多様体と見なしたもの[58]に比較しても、色彩全体のなす多様体に独自の点と言える。

このような色彩多様体こそ、多様体に座標が所与でなくそれをあとから導入する必要があるという点、多様体の計量が、通常の空間からは独立に、その多様体に固有であるという点において、リーマンの一般的多様体概念の定義にとって枢要であった。ヘルバルトの系列形式、特に色彩三角形以外とはリーマンの概念はそのような共通点をそなえていない。

第４節　結論と展望

ガウスやヘルバルトからの影響というものの年代特定は、現状では困難である。伝記的記述から、ガウスに関しては、1846年度夏学期の、４乗剰余についての論文に刺激されての、幾何の公理の意味についての研究[59)]、1846年度冬学期の「最小二乗法講義」聴講[60)]、ヘルバルトに関しては1849年にはじまった哲学研究[61)]が注目される程度である。今後の資料発掘が待たれる。

さて、概念内容の比較と伝記的記述そしてリーマン自身の証言などから、相当の蓋然性をもって以下の主張がなされうる。すなわち、ガウスからは、直観から独立な、次元の制約のない、抽象的な数学的対象という観念を、ヘルバルトからは、空間や論理的概念を種とする類概念としての多様体（系列形式）という観念あるいは座標づけの自明でない計量の自明でない色彩多様体という観念を、リーマンは一般的な多様体概念の形成において受けとった。これらが、リーマン自身の証言する先行研究 Vorarbeiten[62)]の内容であろう。

ところでショルツは、19世紀前半の幾何学化の傾向が、ガウスを通じリーマンにもたらされたもので、ヘルバルト哲学とは無関係であると主張する点において、19世紀前半における数学と哲学を截然とわけ、ガウスとリーマンは前者に、ヘルバルトは後者に属するという図式を暗黙理に前提している。しかし、ヘルバルトとドロービッシュ（Moritz W. Drobisch，1802－1896）との間の書簡にあらわれるガウスへの言及[63)]、あるいはヘルバルトの系列形式についての説明（1824年出版）にあらわれる、「列の列、列の列の列、等々」[64)]という表現と、ガウスによる複素数の基礎づけにおける、２次元の多様性についての説明における「列の列」という表現との共通性、ヘルバルトが1833年にゲッティンゲン大学哲学部教授職に就任していることなどに鑑みても、ガウスとヘルバルトとの間に、何らかの関係を想定してみることが自然である。

リーマンあるいはガウスによる、数学への多様体概念導入を支えた背景・文脈･･･それはこんにち忘却されているだけでなく、おそらく当事者たちも部分的にしか意識していなかったものであろう･･･を、数学のみならず、より広く当時の学問的世界、思想的世界に探求することがもとめられよう。そのような研究によって初めて、Mannigfaltigkeit のごとき、日常語として通用しながら、ロックやヒューム、カントの認識理論においても重要な概念、それも非数学的といってよい概念が、数学に取りこまれた過程が理解されよう。

註と文献

１）B. Riemann, “Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu grunde liegen”（Habilitationsvortrag）. 初出は Abhandlungen der Königl. Ges. d. Wiss. Göttingen 13（1867）. Bernhard Riemann’s Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, hrsg. v. H. Weber und R. Dedekind（Leipzig，1876）に収録された。この全集の第２版（1892）が M. Noether と W. Wirtinger による附加をともない（1902）、リプリントされた（New York, 1953）。本稿では基本的にこのリプリント版を用い、R.W.として引用する。
２）Ibid., p. 272.
３）Ibid., p. 273.
４）Ibid., p. 274.
５）Ibid., p. 278.
６）I. Kant, Kritik der reinen Vernunft. 2te Aufl.（Riga，1787）を参照。あるいは、あとで述べる、ヘルバルトやガウス

の著作。
7）R.W., p. 273.
8）Roberto Torretti, Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré（Dordrecht，1978）.
9）Bertrand A. Russell, An essay on the foundations of geometry（Cambridge，1897）, pp. 62f.
10）Torretti（1978）, op.cit., p. 107.
11）Erhard Scholz, Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré（Basel/Boston，1980）.
12）E. Scholz, "Riemanns Frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie", Archive for History of Exact Sciences 27（1983）. および E. Scholz, "Herbart's Influence on Bernhard Riemann", Historia Mathematica 9（1982）.
13）Scholz（1982）, op.cit., pp. 423－424. Scholz（1983）, op.cit., 214.
14）Scholz（1982）, op.cit., p. 421, pp. 424－429.
15）Ibid., p. 424.
16）Ibid. これらの、リーマン多様体の本質的特徴は、最初に Scholz（1980），pp. 30－36で提示されていた。
17）Gregory Nowak, "Riemann's Habilitationsvortrag and the Synthetic A Priori Status of Geometry", in The History of Modern Mathematics（San Diego，1989）, proceedings of the Symposium on the History of Modern Mathematics, p. 29.
18）近藤洋逸、『新幾何学思想史』（三一書房、1966）
19）Ibid., p. 164.
20）Ibid., p. 167.
21）Ibid.
22）Ibid., pp. 167－168.
23）Ibid., p. 168.
24）Ibid., pp. 171－172.
25）Ibid., pp. 173，179.
26）Ibid., pp. 207.
27）Ibid., pp. 209－210.
28）Ibid., p. 210.
29）この要因に関してはショルツだけが否定的である。しかし筆者もおおむねそれに賛同する。この要因は、本稿冒頭に区別して述べた、一般的多様体概念の形成にかかわるものではないので、本稿ではこれ以上あつかわない。
30）B. Riemann, "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse"（Inauguraldissertation）, in R.W., pp. 3－48.『学位論文』と略称する。
31）B. Riemann, "Theorie der Abelschen Functionen"，初出は Journal für reine und angewandte Mathematik 54（1857）. R.W., pp. 86－144.
32）Scholz（1983）, op.cit., pp. 222－223.
33）Ibid., pp. 223－224.
34）R.W., p. 274.
35）Carl F. Gauss, "Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda. Selbstanzeige", 初出は Göttingische gelehrte Anzeigen（1831）。ガウス全集 G.W. Bd. 2（Göttingen, 1863），p. 174.
36）Ibid., p. 176.
37）Ibid.
38）Ibid., p. 178.
39）C. F. Gauss, "Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen" 初出は Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 4（1850）. G.W. Bd. 3（Göttingen，1876）, p. 79.

40）Ibid.
41）R.W., p. 543.
42）G.W. Bd. 10－1（Leipzig，1917），p. 477.
43）Ibid., p. 478.
44）C. F. Gauss, “Disquisitiones generales circa superficies curvas, Selbstanzeige”，初出は Göttingische gelehrte Anzeigen（1827）. G. W. Bd. 4, p. 342.
45）Johann F. Herbart, Lehrbuch zur Psychologie（Königberg und Leipzig，1816）. Sämmtliche Werke in chronologischer Reihenfolge herausgegeben von Karl Kehrbach und Otto Flügel, Erstdruck（Langensalza，1899－1912）のリプリント（Aalen，1964），Bd. 5，p. 324．以後この全集は H.W.と略する。
46）J. F. Herbart, Psychologie als Wissenschaft neu gegründet auf Erfahrung, Metaphysik und Mathematik, Erster Synthetischer Theil（1824）, in H.W. Bd. 5, p. 425.
47）Scholz（1983）, op.cit., p. 222.
48）H.W. Bd. 5, p. 421.
49）R.W., p. 273.
50）Scholz（1982）, op.cit., p. 416. ゲッティンゲン大学図書館の手稿部門にあるリーマンの遺稿集の Folder18の Folio70v は H.W. Bd. 5, p. 425の抜き書きであり、Folio72r, 73v は H.W. Bd. 5, p. 428, p. 421の、系列形式についての説明の抜き書きである。
51）H.W. Bd. 5, p. 415.
52）Ibid.
53）Ibid., p. 416.
54）J. F. Herbart, Psychologie als Wissenschaft neu gegründet auf Erfahrung, Metaphysik und Mathematik, Zweitter Analytischer Theil（1825）, in H.W. Bd. 6, p. 192. ここからの抜き書きが Folio59r.
55）H.W. Bd. 6, p. 192.
56）H.W. Bd. 5, p. 416.
57）R.W., p. 7.
58）R.W., p. 25.
59）Ernst Schering, “Zum Gedächtniss an Bernhard Riemann” 初出は Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen（1867）. E. Schering’s Gesammelte mathematische Werke（Berlin，1902－1909）, hrsg. v. R. Haussner und K. Schering, Bd. 2, p. 375.
60）Richard Dedekind, “Bernhard Riemanns Lebenslauf” in R.W., p. 543.
61）Ibid., p. 545.
62）Ibid., p. 273.
63）H.W. Bd. 17, p. 166, Bd. 19, p. 7, pp. 98－99, etc.
64）H.W. Bd. 5, p. 414.