

# 弾性抵抗が作用する下腿の屈曲伸展運動に伴う 膝関節モーメントに対する *Mathematica* パッケージの開発

橋浩久 関谷全\* 畠中泰彦† 中俣孝昭†

Development of *Mathematica* Package to Simulate Moment of Force around Knee Joint in Flexion and Extension Movement of Lower Extremity on which Elastic Resistance acts

Hirohisa TACHIBANA, Tamotsu SEKIYA\*, Yasuhiko HATANAKA†, Takaaki NAKAMATA†

## 要 約

弾性抵抗が作用する下腿の屈曲伸展運動によって生じる膝関節モーメントの力学的メカニズムが明らかにされる。さらに、そのようなメカニズムを基にして、膝関節モーメントを数値的にシミュレートする *Mathematica* パッケージを開発するためのプログラミングの方法が述べられる。

**キーワード**：下腿運動，弾性抵抗，膝関節モーメント，*Mathematica*，*Mathematica* パッケージ

**Key words**：Movement of Lower Extremity, Elastic Resistance, Moment of Force around Knee Joint  
*Mathematica*, *Mathematica* Package

## 1. 序論

大腿四頭筋トレーニングにおいて、被験者を椅子等に座らせ、弾性バンド（ゴムバンド）の一端を下腿下部の足関節近傍に、もう一端を下腿後方に取り付けて弾性抵抗を生じさせ、その抵抗力に抗するように下腿を伸展または屈曲させるという運動がよく行われている。その際、弾性バンドとして、Thera-Band<sup>1)</sup>が一般的に使用されているようである。このようなことから、本論文でも、想定する弾性バンドを Thera-Band に限ることとする。

上記のように、Thera-Band を用いたトレーニングが頻繁に行われているにもかかわらず、それについての力学的あるいは数学的な議論はほとんどなされていないようである。そのトレーニングには多くの調整可能パラメータ<sup>2)</sup>が含まれているが、それらのパラメータの調整はいまだトレーナーの経験や感などの恣意的な因子に依存し

ているという問題をかかえている。

このような恣意的な問題を解決するひとつの方法として、次のことが考えられる。すなわち、想定するトレーニングの力学的あるいは数学的モデルを構築してそのメカニズムを明らかにし、数値計算できるような何かがしかのシステムを考案し、数値シミュレーションを繰り返し遂行した上で、客観的・数量的な結果を導出する。このことを成し遂げるためには、コンピュータ上で、*Mathematica*<sup>3)</sup>等の数理解析システムを利用するのが最も容易な方法である。こうして我々は、弾性抵抗を用いた大腿四頭筋トレーニングをシミュレートするための *Mathematica* パッケージを開発するという目的にたどり着くのである。

本論文では、Thera-Band を用いた大腿四頭筋トレーニングの力学的（数学的）モデルを構築し、そのメカニ

吉備国際大学保健科学部理学療法学科  
岡山県高梁市伊賀町8  
\*高梁学園情報教育センター  
岡山県高梁市伊賀町8  
†鈴鹿医療科学大学理学療法学科  
三重県鈴鹿市岸岡町1001-1

Department of Physical Therapy, School of Health Science, Kibi International University,  
8 Iga-machi, Takahashi-city, Okayama 716-8508, Japan  
\*Computer Center for Education, Takahashi Educational Institution,  
8 Iga-machi, Takahashi-city, Okayama 716-8508, Japan  
†Department of Physical Therapy, Suzuka University of Medical Science,  
1001-1 Kishioka-cho, Suzuka-city, Mie 510-0293, Japan

ズムを明らかにする。さらに、そのようなメカニズムを基礎にして開発された、数値シミュレーション可能な *Mathematica* パッケージにおけるプログラムを解説することにする。

## 2. 理論

このセクションでは、想定する運動の力学的モデルを理論的に構築する。なお、単位系は MKS 単位系を用いることとする。また、便宜上、下腿と足部を合わせたものをひとつの剛体と見なし<sup>9)</sup>、それを膝下部とよぶことにする。

### 2-1. 記号とモデル

議論の便宜を図るため、使用する記号をここでまとめておこう。

- H : 股関節点,
- K : 膝関節点,
- A : 足関節点,
- G : 膝下部重心の下腿上の点,
- P : 下腿上にない Thera-Band 端の取り付け位置,
- Q : 下腿上の Thera-Band 端の取り付け位置,
- A<sub>0</sub> : 下腿が鉛直になったときの足関節点,
- P<sub>0</sub> : P の鉛直線と A<sub>0</sub> の水平線の交点,
- Q<sub>0</sub> : 下腿が鉛直になったときの点 Q,
- μ : (被験者) 全質量,
- g : 重力加速度 (9.8 m/s<sup>2</sup>),
- κ : 膝下部質量/全質量,
- λ =  $\overline{KG} / \overline{KA}$  : G の膝からの位置の割合,
- I<sub>G</sub> : 膝下部の重心のまわりの慣性モーメント,
- l =  $\overline{KA} = \overline{KA_0}$  : 下腿長,
- d =  $\overline{A_0P_0}$  : 下腿上にない Thera-Band 取り付け位置の奥行き長,
- h =  $\overline{P_0P}$  : 下腿上にない Thera-Band 取り付け位置の高さ,
- h' =  $\overline{AQ} = \overline{A_0Q_0}$  : 下腿上の Thera-Band 取り付け位置の足関節からの距離,
- ρ<sub>0</sub> : Thera-Band 自然長,
- φ = 90° - ∠AKA<sub>0</sub> : 下腿屈曲角,
- ρ = ρ(φ) =  $\overline{PQ}$  : 下腿屈曲角が φ のときの Thera-Band 長,

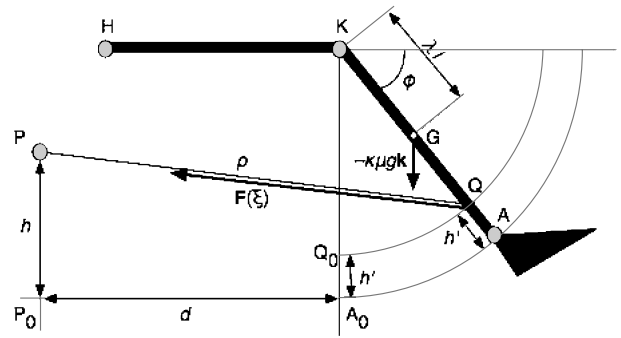


図 1. Thera-Band を用いた大腿四頭筋トレーニングモデル

$$\xi = \xi(\phi) = \frac{\rho(\phi) - \rho_0}{\rho_0} : \text{下腿屈曲角が}\phi\text{のときの}$$

Thera-Band の伸び率,

$F(\xi)$  : Thera-Band の伸び率が ξ のときのその弾性力の大きさ,

$\mathbf{k}$  : 鉛直上向き単位ベクトル,

$\mathbf{l} = \overline{KA}$  : 下腿ベクトル,

$\mathbf{e} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PQ}}$  : Thera-Band の弾性力ベクトルの方向を示す単位ベクトル,

$\mathbf{F}(\xi) = F(\xi)\mathbf{e}$  : Thera-Band の弾性力ベクトル.

上記記号のうち、κ, λ, I<sub>G</sub> は生体力学定数の一部であり、何人かの研究者がそれらの値を与えているが、本論文では、Dempster<sup>9)</sup> のものを採用することにする：

$$\kappa = 0.06, \quad \lambda = 0.437, \quad I_G = 0.1. \quad (1)$$

さて、想定するモデルは、図 1 に示すとおりである。すなわち、(仮想的な) 被験者は、大腿 HK が水平で、下腿 KA を鉛直に降ろしたとき (KA<sub>0</sub>) に足部が地面に着かないように椅子等に座る。被験者の後方の点 P に Thera-Band の一端が取り付けられており<sup>9)</sup>、もう一端は被験者下腿上の足関節近傍 Q に取り付けられている。この状態で被験者は、下腿をゆっくりと (あまり速くない角速度で) 進行方向に伸展させ、その後に屈曲させるという運動を繰り返す。

### 2-2. 膝関節モーメントのベクトル式

下腿に作用する外力による膝のまわりのモーメント  $\mathbf{M}_{\text{ext}}$  を求めよう。下腿 (剛体) KA に作用する重力は、膝下部質量が λμであることを考慮すると、KA の重心 G

に  $-\kappa\mu g \mathbf{k}$  として作用している力であると見なすことができる。膝関節  $\mathbf{K}$  から  $\mathbf{G}$  までのベクトルが  $l\mathbf{l}$  であることに注意すると、重力による膝のまわりのモーメントは、 $-\kappa\lambda\mu g l \times \mathbf{k}$  で与えられる。一方、Thera-Band が下腿上の点  $\mathbf{Q}$  に取り付けられており、その点で後方に弾性力  $\mathbf{F}(\xi)$  でもって下腿が引っ張られているので、 $\mathbf{F}(\xi)$  による膝のまわりのモーメントは  $\overline{\mathbf{KQ}} \times \mathbf{F}(\xi)$  である。 $\overline{\mathbf{KQ}} = l - h'$  であることに注意すると、下腿に作用する Thera-Band の弾性力による膝のまわりのモーメントは  $(1 - \frac{h'}{l})F(\xi)l \times \mathbf{e}$  で与えられる。想定するモデルの膝のまわりの全外力のモーメント  $\mathbf{M}_{\text{ext}}$  は、上の2つの外力のモーメントの和であるから、我々は

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = -\kappa\lambda\mu g l \times \mathbf{k} + (1 - \frac{h'}{l})F(\xi)l \times \mathbf{e} \quad (2)$$

を得る。

大腿四頭筋が発揮する膝のまわりの力のモーメント（膝関節モーメント） $\mathbf{M}$  は、力学的には単に、外力のモーメント  $\mathbf{M}_{\text{ext}}$  が作用している下腿が、大腿と膝関節で接触して屈曲伸展運動する場合の抗力のモーメントとして与えられる。よく知られた接触剛体に対する D'Alembert の原理<sup>79)</sup>に従えば、 $I_K \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{M}_{\text{ext}} + \mathbf{M}$  となる。ここで、 $\mathbf{w}$  は下腿の角速度、ドット記号は時間に関する微分を意味する。また、 $I_K$  は膝下部の膝のまわりの慣性モーメントで、 $I_K = I_G + \kappa\lambda^2 \mu l^2$  で与えられる。こうして我々は、膝関節モーメント  $\mathbf{M}$  に対するベクトル方程式として、

$$\mathbf{M} = \kappa\lambda\mu g l \times \mathbf{k} - (1 - \frac{h'}{l})F(\xi)l \times \mathbf{e} + (I_G + \kappa\lambda^2 \mu l^2) \dot{\mathbf{w}} \quad (3)$$

を得る。

### 2-3. 膝関節モーメントの実効成分

原点  $\mathbf{O}$  を膝関節  $\mathbf{K}$  にとり、進行方向単位ベクトルを  $\mathbf{j}$ 、側方向単位ベクトルを  $\mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k}$  ととると、ひとつの右手系直交座標系  $(\mathbf{O}; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  ができる。さて、基本ベクトル  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  が沿う座標軸をそれぞれ、 $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸とする。このとき、ベクトル  $\mathbf{k}, \mathbf{e}, l$  が  $y$ - $z$  平面（矢状面）に乗る（平行である）ことに注意すると、ベクトル積  $l \times \mathbf{k}$  および  $l \times \mathbf{e}$  は、 $x$  成分のみをもつことが分かる。また、膝のまわりの下腿回転運動が、 $y$ - $z$  平面に水平な平面でしか起こらないことに注意すると、下腿の角速度  $\mathbf{w}$ （あるいは角加速度  $\dot{\mathbf{w}}$ ）もまた、 $x$  成分のみのベクトルである。これら

のことに(3)より結局、膝関節モーメント  $\mathbf{M}$  は、 $x$  成分のみをもち、残りの成分は常にゼロであるようなベクトルであることが分かる。これゆえ、今後我々は、 $\mathbf{M}$  の  $x$  成分のみを取り扱い、それを単に  $M$  と記すことにしよう。すなわち、

$$M := [\mathbf{M}]_x \quad (4)$$

直交座標系  $(\mathbf{O}; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  において、 $\mathbf{A}(\mathbf{O}, l \cos \phi, -l \sin \phi)$ 、 $\mathbf{P}(\mathbf{O}, -d, -l + h)$ 、 $\mathbf{Q}(\mathbf{O}, (l - h') \cos \phi, -(l - h') \sin \phi)$  と表されるので、

$$l = \overline{\mathbf{KA}} = \overline{\mathbf{OA}} = l \cos \phi \mathbf{j} - l \sin \phi \mathbf{k}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{QP}} &= -[d + (l - h') \cos \phi] \mathbf{j} \\ &\quad + [-(l - h) + (l - h') \sin \phi] \mathbf{k} \end{aligned} \quad (6)$$

である。また、Thera-Band 長が  $\rho = \overline{\mathbf{QP}} = |\overline{\mathbf{QP}}|$  であったことを思い起こすと、(6)より、

$$\begin{aligned} \rho(\phi) &= [d^2 + (l - h)^2 + (l - h')^2 \\ &\quad + 2(l - h')\{d \cos \phi - (l - h) \sin \phi\}]^{1/2} \end{aligned} \quad (7)$$

となり、さらに(6)と(7)より、

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{\overline{\mathbf{QP}}}{\rho(\phi)} \\ &= -\frac{1}{\rho(\phi)} [d + (l - h') \cos \phi] \mathbf{j} \\ &\quad + \frac{1}{\rho(\phi)} [-(l - h) + (l - h') \sin \phi] \mathbf{k} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。さて、これで(3)の右辺の第1項と第2項に現れているベクトル積の部分の計算する準備が整った。上でも述べたように、それらのベクトル積には  $x$  成分しか現れてこないのので、同成分のみを計算することで十分である。計算を遂行すると、

$$[l \times \mathbf{k}]_x = l \cos \phi, \quad (9)$$

$$[l \times \mathbf{e}]_x = -\frac{l}{\rho} [d \sin \phi + (l - h') \cos \phi] \quad (10)$$

を得る。

定義から、角速度ベクトル  $\mathbf{w}$  は、膝のまわりの下腿の回転運動が反時計回りであるとき、正の  $x$  軸方向に向く。一方、下腿屈曲角  $\phi$  は正の  $y$  軸から始まって、時計回りに増加してゆく。このことに注意すると、 $\mathbf{w} = -\dot{\phi} \mathbf{i}$  と記さなければならない。これゆえ、

$$[\dot{\mathbf{w}}]_x = -\ddot{\phi} \quad (11)$$

である。

Thera-Band の弾性力の大きさ  $F(\xi)$  は、伸び率  $\xi$  を  $\xi = (\rho(\phi) - \rho_0) / \rho_0$  と書けることから、これを自然長  $\rho_0$  が与えられたときの  $\phi$  の関数と見なすことができる。また後で示すように、ここで使用する Thera-Band はその弾性力の違いによって 7 種類に分類されている。さらに、トレーニングでは  $n$  本の (同じ種類の) Thera-Band を束ねて使用する場合がある<sup>10)</sup>。これらのことを明確にするために、

$$F(\xi) = F\left(\frac{\rho(\phi) - \rho_0}{\rho_0}\right) = n f_{i,\rho_0}(\phi) \quad (12)$$

とおく。ここで、 $n$  は取り付ける (同種類の) Thera-Band の本数、 $f_{i,\rho_0}(\phi)$  は 1 本の  $i$  番目 ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) の種類で自然長  $\rho_0$  の Thera-Band の弾性力である。こうして、(3), (4), (9), (10), (11) および (12) より、我々は膝関節モーメント (の  $x$  成分) を次のような形で書くことができる：

$$M = \kappa \lambda \mu g l \cos \phi + \frac{l-h'}{\rho(\phi)} n f_{i,\rho_0}(\phi) [d \sin \phi + (l-h) \cos \phi] - (I_G + \kappa \lambda^2 \mu l^2) \ddot{\phi} \quad (13)$$

ここで、 $\rho(\phi)$  は (7) で与えられているとおりである。

(13) の右辺において、不確かな項が 1 つだけ存在する。それは、第 3 項、もっと正確に言えば、第 3 項にかかっている角加速度  $\ddot{\phi}$  である。したがって厳密に言えば、 $\ddot{\phi}$  が決定されない限り、膝関節モーメント  $M$  の値を計算することはできない。この角加速度は、被験者の自由意志で変化させることができるもので、(トレーナーが被験者に対してそれを制御するように) 何らかの条件を課さない限り決定できないであろう。しかしながら、 $\ddot{\phi}$  の係数  $I_G + \kappa \lambda^2 \mu l^2$  が、 $10^{-1}$  のオーダーの比較的小さい値しか取らないことに注意せよ。さらに、ここで想定されている運動はリハビリテーションにおける運動であって、トレーナーが被験者に、(下腿の屈曲伸張) 運動を比較的ゆつくりと行うこと、また急激な角速度変化を伴わないように (等角速度運動に近い) 運動を行うことを指導し、被験者はそれを実行することができるかと仮定する。そうすると、 $\ddot{\phi}$  を小さい値に制御することができるであろう。このように、 $\ddot{\phi}$  の係数が実際に小さい量であることと、 $\ddot{\phi}$  を小さい値に制御できることが合わさって、問題の

第 3 項を高々 0.1~1 程度に制御することが可能である<sup>11)</sup>。そして、その程度の差異は、種々の調整可能パラメータの設定誤差に吸収されてしまう。これゆえ我々は、(13) の右辺の第 3 項を無視することができる<sup>12)</sup>。したがって、我々が取り扱うべき膝関節モーメントの方程式は、

$$M \approx \kappa \lambda \mu g l \cos \phi + \frac{l-h'}{\rho(\phi)} n f_{i,\rho_0}(\phi) [d \sin \phi + (l-h) \cos \phi] \quad (14)$$

とすることができるのである。

### 3. *Mathematica* プログラム

セクション 2 で述べられた理論に基づいて、本論文における力学モデルの *Mathematica* パッケージを開発した。ただし、ページ数の制限から、パッケージ全体をここに記載することは不可能であるので、その主要部分のプログラムのみを議論し、組み込みのコマンドやパッケージの詳細な組み立て方は、*Mathematica* プログラムを扱ったいくつかの著作<sup>13)-16)</sup>に譲ることにする。

*Mathematica* のコマンドやプログラム内で扱われる文字を、本論文のその他の文字と区別するために、Courier 書体 (タイプライター書体) を用いて記すことにする。パッケージにはエクスポートされる関数とそのパッケージ内でのみ使用される関数が含まれるが、これらを明確するために、エクスポートされる関数名の頭文字を (アルファベットの) 大文字で表し、そうでない関数名の頭文字を小文字で表すことにする。

#### 3-1. TbForce 関数

最初に、Thera-Band の弾性力を求める関数を定義しよう。その関数名を **TbForce** とする。残念なことに、Thera-Band 弾性力は、Hooke の法則に従わず、伸び率に対する弾性力の増加傾向が (比例直線に対して) 頭打ちになるような曲線を描く。したがって、**TbForce** 関数を新たにプログラムしなければならないのである。

さて、Thera-Band は弾性力の弱いものから順に、Yellow, Red, Green, Blue, Black, Silver, Gold というようにバンド色によって分類されており、それらの伸び率と弾性力の関係は表 1 のとおりで、これはメーカーが公表している<sup>17)</sup>。我々のプログラムでは、バンド色を単に 1 から 7 までの番号によって分類することにしている：

表 1. Thera-Band の伸び率と弾性力

	伸び率									
	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
Yellow	0.5	0.8	1.1	1.3	1.5	1.8	2	2.2	2.4	2.6
Red	0.7	1.2	1.5	1.8	2	2.2	2.5	2.7	2.9	3.2
Green	0.9	1.5	1.9	2.3	2.6	3	3.3	3.6	4	4.4
Blue	1.3	2.1	2.7	3.2	3.7	4.1	4.6	5	5.5	6
Black	1.6	2.9	3.7	4.4	5	5.6	6.1	6.7	7.4	8
Silver	2.3	3.9	5	6	6.9	7.8	8.6	9.5	10.5	11.5
Gold	3.6	6.3	8.2	9.8	11.2	12.5	13.8	15.2	16.6	18.2

Yellow  $\leftrightarrow$  1, Red  $\leftrightarrow$  2, Green  $\leftrightarrow$  3, Blue  $\leftrightarrow$  4,  
Black  $\leftrightarrow$  5, Silver  $\leftrightarrow$  6, Gold  $\leftrightarrow$  7. (15)

この 1 から 7 の番号が、(1本の) Thera-Band 弾性力  $f_{i,\rho_0}(\phi)$  の添字  $i$  に対応する。表 1 からは、1 種類のバンドについて、伸び率-弾性力 2 次元平面上の複数の点 (伸び率 0 のところも含めると計 11 点) しか分からない。これらの点と点の間を繋ぎ、なめらかな曲線を得るためには、よく知られた 3 次 Spline 補間法を使うのであるが (そして多くのプログラム言語では、そのためのプログラムを記述しなければならないのであるが)、*Mathematica* にはそれを実行するための組み込み関数 *Interpolation* がある。これを利用すると、煩雑な手続きが一挙に消滅する。さらに、表 1 の弾性力は Kg-w の力の単位で表されているが、我々の関数では、それを N (ニュートン) で出力するようにしておく。そうすると、*TbForce* 関数は非常に簡単に、次のようにプログラムされる：

```
TbForce[i_] :=
Module[
{
perElg = {0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5,
1.75, 2, 2.25, 2.5},
fTbl =
9.8*
{
{0, 0.5, 0.8, 1.1, 1.3, 1.5, 1.8,
2.0, 2.2, 2.4, 2.6},
{0, 0.7, 1.2, 1.5, 1.8, 2.0, 2.2,
2.5, 2.7, 2.9, 3.2},
{0, 0.9, 1.5, 1.9, 2.3, 2.6, 3.0,
3.3, 3.6, 4.0, 4.4},
{0, 1.3, 2.1, 2.7, 3.2, 3.7, 4.1,
4.6, 5.0, 5.5, 6.0},
{0, 1.6, 2.9, 3.7, 4.4, 5.0, 5.6,
6.1, 6.7, 7.4, 8.0},
{0, 2.3, 3.9, 5.0, 6.0, 6.9, 7.8,
8.6, 9.5, 10.5, 11.5},
```

```
{0, 3.6, 6.3, 8.2, 9.8, 11.2, 12.5,
13.8, 15.2, 16.6, 18.2}
}
},
Interpolation[
Transpose[ { perElg, fTbl[[i]] } ]
]
]
```

*Module* 内局所変数定義リスト中で、伸び率のリスト *perElg* と各バンド番号の弾性力 2 次元リスト *fTbl* を表 1 にしたがって定義している (弾性力の値を N で返したいので 9.8 が掛かっていることに注意せよ)。*fTbl* 2 次元リストから、指定された番号  $i$  の Thera-Band の弾性力 1 次元リストを取り出し、*perElg* リストと合わせて、1 つの 2 次元リスト  $\{\{ \text{伸び率 } 1, \dots, \text{伸び率 } 11\}, \{\text{弾性力 } 1, \dots, \text{弾性力 } 11\}\}$  にまとめる。これに *Transpose* 関数を用いてその 2 次元リストを転置させると、 $\{\{\text{伸び率 } 1, \text{弾性力 } 1\}, \dots, \{\text{伸び率 } 11, \text{弾性力 } 11\}\}$  の形のリストが出来上がる。さらにこのリストに *Interpolation* 関数を用いて作用させることによって、( $i$  番目の種類の 1 本の Thera-Band の) 伸び率-弾性力連続関数が得られる。注意すべき点としては (プログラム上では明確ではないが)、*TbForce* 関数には、引数が 2 つあるということである。これは、*Interpolation* 関数が返り値として数値を返すためには、あらゆる形でもう 1 つ (数値の) 引数を与えなければならないという仕様に起因している。したがって、*TbForce* 関数から結果の数値を得るためには、*TbForce*[番号][伸び率] としなければならない。ここで、番号は (15) の Thera-Band 番号で、伸び率は Thera-Band 伸び率 (0 から 2.5 までの範囲) である。

### 3-2. TbKneeMoment 関数

エクスポートする関数ではないが、Thera-Band 長  $\rho$  の値を求める関数を *tbLength* で定義しておき、後で現れる関数に使用する：

```
tbLength[l_, d_, h_, phi_, hPrime_] :=
Sqrt[
d^2 + (1-h)^2 + (1-hPrime)^2 +
2*(1-h)*(d*Cos[phi]-(1-hPrime)*Sin[phi])
]
```

このプログラムについては、変数  $l, d, h, \phi, h'$  と読み替えれば、(7) のとおりである。

膝関節モーメントを求めるための関数を定義しよう。これを、*TbKneeMoment* と名付ける。まず、この関数の

コアとなる baseTbKneeMoment 関数を定義しておく：

```
baseTbKneeMoment[ i_, rho0_, mu_, l_, d_, h_, angle_, n_, deg_, hPrime_ ] :=
Module[{g = 9.8, kappa = 0.06, lambda = 0.437, phi, roh},
If[deg == True, phi = Pi*angle/180, phi = angle];
roh = tbLength[l, d, h, phi, hPrime];
Which[
roh < roh0,
kappa*lambda*mu*l*g*Cos[phi],
roh > 3.5*roh0,
-9999,
True,
kappa*lambda*mu*l*g*Cos[phi] +
n*((1 - hPrime)/roh)*TbForce[i][ (roh - roh0)/roh0]*(d*Sin[phi] + (1 - h)*Cos[phi])
]
]
```

引数の  $i, \rho_0, \mu, l, d, h, n, h'$  をそれぞれ  $i, \rho_0, \mu, l, d, h, n, h'$  に、また右辺の Module 内局所変数定義リストの  $g, \kappa, \lambda, \phi, \rho$  をそれぞれ  $g, \kappa, \lambda, \phi, \rho$  に読み替えよ。屈曲角に対応する引数に (直接  $\phi$  を使わずに)  $angle$  という文字列を使っている理由は、Module 内で行われる関節モーメントの計算において、常に”ラジアン”の屈曲角を使用したいためである。つまり、Module 内の If ブロック内で、引数  $deg$  に True 値が格納されている場合には、 $angle$  に”度”の角が格納されていると見なされ、局所変数  $\phi$  にそれを”ラジアン”の角に直して渡す。そうでない場合にはそのままの (”ラジアン”の) 角を  $\phi$  に渡す。こうして、それ以後の処理における屈曲角  $\phi$  の値は、常に”ラジアン”の角で表されていることになる。

次に、上で定義した tbLength 関数で Thera-Band 長を求めて、値を局所変数  $roh$  格納し、続く Which ブロックに移る。Which 内では、次の3つの条件分岐処理を行う。  
(i)  $roh$  が  $roh_0$  より短い場合、(ii)  $roh$  が  $3.5*roh_0$  より長い場合、および(iii) (i)と(ii)以外の場合の3つの条件下でのそれぞれの膝関節モーメントを計算している。

さて、(i)のケースでは、 $roh$  を Thera-Band 長とするの

```
Options[TbKneeMoment] = {{IsDegree -> True}, {BandsNumber -> 1}, {OptionHeight -> 0}}
TbKneeMoment[i_, roh0_, mu_, l_, d_, h_, angle_, opts___] :=
baseTbKneeMoment[ i, roh0, mu, l, d, h, angle,
BandsNumber /. {opts} /. Options[TbKneeMoment],
IsDegree /. {opts} /. Options[TbKneeMoment],
OptionHeight /. {opts} /. Options[TbKneeMoment]
]
```

上のプログラムによって、baseTbKneeMoment 関数で指定しなければならなかった、Thera-Band の本数  $n$ 、屈曲角  $\phi$  の表現 (”度”か”ラジアン”のどちらを使用するか) および Thera-Band 端の下腿上取り付け位置の足関節からの距

ではなく、それを単に (下腿上と下腿上にない) 2つの Thera-Band 端取り付け位置の間の距離  $\overline{PQ}$  と見なす。そうすると、このケースでは  $\overline{PQ}$  が Thera-Band 自然長より短くなっているのだから<sup>18)</sup>、その弾性力はゼロである。これゆえ、外力のモーメントは(14)の右辺の (第2項の寄与が消滅し) 第1項の重力部分の寄与のみになり、これをそのままプログラムしている。(ii)のケースでは、Thera-Band 長  $roh$  が自然長  $roh_0$  の 3.5 倍より長くなる、つまり伸び率として  $2.5 (= (\rho - \rho_0)/\rho_0 = (3.5\rho_0 - \rho_0)/\rho_0)$  倍より大きくなるケースに該当し、これは表1で示したとおり、Thera-Band 伸び率定義域の範囲から外れる。よって、関数が信頼できる膝関節モーメント値を返すことは不可能で、あり得ない値-9999を返すようにしてユーザに注意を促すようにしている。最後の(iii)が、(i)と(ii)の以外のケース、すなわち Thera-Band の伸び率が閉区間 $[0, 2.5]$ の範囲に収まるケースである。この場合のみ、(14)の右辺が完全に有効で、したがってそれをそのままプログラムしている。

こうして、コア部分のプログラムが出来た。今度はこの関数を用いて実際にエクスポートする関数 TbKneeMoment を次のようにプログラムする：

離  $h'$  をデフォルトで指定しないで済ませることができる。デフォルトでは、 $n = 1$ 、 $\phi$  は”度”で表され、 $h' = 0$  (Thera-Band 端の下腿側取り付け位置が足関節上) である。そのときの膝関節モーメントを算出するには、

TbKneeMoment[番号,自然長,質量,下腿長,奥行,高さ,角度]とすればよい。ここで、番号と自然長はそれぞれThera-Bandの番号と自然長、質量と下腿長はそれぞれ被験者の質量と下腿長、奥行と高さはそれぞれ下腿上にないThera-Band取り付け位置の奥行と高さ、そして角は屈曲角である。

もし、省略されている引数のデフォルト値以外の値を指定したい場合は、TbKneeMoment関数の引数の最後に記号"→"を使って、オプション引数として、そのことを明記すればよい。例えば、4本のThera-Band使用したい場合には、BandsNumber→4、角にラジアンを使用した

```
baseTbMaxKneeMoment[i_, roh0_, mu_, l_, d_, h_, n_, deg_, deltaPhi_, hPrime_] :=
Module[{phi, dPhi, tbl, maxPhi, momLis, maxPos},
  If[deg == True, (maxPhi = 90; dPhi = deltaPhi), (maxPhi = Pi/2; dPhi = deltaPhi*Pi/180)];
  tbl =
  Table[
    { phi, baseTbKneeMoment[i, roh0, mu, l, d, h, phi, n, deg, hPrime] },
    { phi, 0, maxPhi, dPhi }
  ];
  momLis = Transpose[tbl][[2]];
  maxPos = Position[momLis, Max[momLis]][[1]][[1]];
  tbl[[maxPos]]
]
Options[TbMaxKneeMoment] =
{{IsDegree -> True}, {BandsNumber -> 1}, {IntervalDegrees -> 1}, {OptionHeight -> 0}}
TbMaxKneeMoment[i_, roh0_, mu_, l_, d_, h_, opts___] :=
baseTbMaxKneeMoment[ i, roh0, mu, l, d, h,
  BandsNumber /. {opts} /. Options[TbMaxKneeMoment],
  IsDegree /. {opts} /. Options[TbMaxKneeMoment],
  IntervalDegrees /. {opts} /. Options[TbMaxKneeMoment],
  OptionHeight /. {opts} /. Options[TbMaxKneeMoment]
]
```

引数および局所変数  $i$ ,  $roh0$ ,  $\mu$ ,  $l$ ,  $d$ ,  $h$ ,  $n$ ,  $deg$ ,  $hPrime$ ,  $\phi$  は TbKneeMoment 関数と同様に、それぞれ  $i$ ,  $\rho_0$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $d$ ,  $h$ ,  $n$ ,  $h'$ ,  $\phi$  に対応する。

関数 baseTbMaxKneeMoment で、最大膝関節モーメントとそのときの屈曲角を探し出す。アルゴリズムは単純で次のようになる。まず、baseTbKneeMoment 関数のときと同様に、論理値 (True または False) をとる引数 deg で、取り扱う角が"度"か"ラジアン"かを定め、それを Module 内の If ブロック内で場合分けしている(もし deg が True なら角を"度"で、False なら"ラジアン"で扱う)。次に、すぐ下の Table ブロック内で、調整可能パラメータ  $i$ ,  $roh0$ ,  $\mu$ ,  $l$ ,  $d$ ,  $h$ ,  $n$ ,  $hPrime$  の値が与えられたときの関数 baseTbKneeMoment において、屈曲角  $\phi$  を  $0^\circ$  (または  $0[\text{rad}]$ ) から  $90^\circ$  (または  $\pi/2[\text{rad}]$ ) まで、区切り角  $\text{deltaPhi}$  で順に(離散的に)動かしていき、各々

いときには IsDegree→False, また Thera-Band 端の下腿側取り付け位置を足関節から 5cm 上に取りたい場合は OptionHeight→0.05 と記述する。

### 3-3. TbMaxKneeMoment 関数

TbMoment 関数は、伸展角  $\phi$  (と種々のパラメータ群) が与えられたときに膝関節モーメントの値を求める関数であったが、今度は  $\phi$  を  $0^\circ$  から  $90^\circ$  まで変化させたときの最大膝関節モーメントを求めるための Mathematica 関数, TbMaxKneeMoment をプログラムしよう。その内容は以下のようになる：

の角と対応する膝関節モーメント値の対リストを並べた 2次元リスト  $\{\{\text{角 } 1, \text{モーメント } 1\}, \{\text{角 } 2, \text{モーメント } 2\}, \dots\}$  を生成し、これを局所変数 tbl に格納する。Transpose 関数を tbl に作用させてその 2次元リストを転置させ、第 2成分のみを取り出すと  $\{\text{モーメント } 1, \text{モーメント } 2, \dots\}$  という 1次元リストが出来るが、これを局所変数 momLis に格納する。さらに、momLis リストの最大成分の位置 (リスト中の順番) を Position 関数を用いて求め、その値を局所変数 maxPos に格納する。ここで、maxPos に格納されている値は、tbl に格納されている角-モーメント対リストの並びのなかで、最大モーメントがある対リストの位置と同一であることに注意せよ。そうすると、2次元リスト tbl の maxPos 成分 tbl[[maxPos]]が求める角-モーメント対リストで、その第 2成分が最大膝関節モーメント、第 1成分がそのと

きの屈曲角を与えるのである。

さて、エクスポートする `MaxTbKneeMoment` 関数は (`TbKneeMoment` 関数と同様に),  $n=1$ ,  $\phi$  は”度”で表され,  $h'=0$ , そして区切り角を  $1^\circ$  としてデフォルト指定されたときの `baseTbMaxKneeMoment` を計算する. つまり, `TbMaxKneeMoment` [番号, 自然長, 質量, 下腿長, 奥行, 高さ] と入力すれば, 上記デフォルト指定での, {角, モーメント} という対リストを返すが, これのモーメントが最大膝関節モーメント値, 角がそのときの屈曲角ということになる. ここで, 番号と自然長はそれぞれ Thera-Band の番号と自然長, 質量と下腿長はそれぞれ被験者の質量と下腿長, 奥行と高さはそれぞれ下腿上にない Thera-Band 取り付け位置の奥行と高さである. もし省略されている引数についてデフォルト指定以外の値を指定したい場合は, オプション引数としてそれらを指定すればよい. `IntervalDegrees` 以外のオプション引数は, `TbKneeMoment` 関数と共通であるのでここでは省略する. オプション引数 `IntervalDegrees` は, 屈曲角の区切り角大きさで, デフォルトでは  $1^\circ$  になっている. これを例えば  $0.1^\circ$  に変更したい場合は, `TbKneeMoment` 関数の最後の引数で, `IntervalDegrees->0.1` とすればよい.

### 3-4. パッケージと使用例について

先に述べたように, ページ数の制限からパッケージ全体を本論文に掲載することは不可能である. また, プログラムされた関数の使用例も示すことはできなかった. そこで, これらについては Web 上で公開することにし, 読者の便宜を図ることとする<sup>19)</sup>.

### Abstract

It makes clear that the dynamical mechanism of the induced moment of force around knee joint by the flexion and extension movement of a lower extremity on which the elastic resistance acts. Furthermore, a *Mathematica* package is developed to simulate such a moment of force.

### 参考文献と脚注

- 1) Thera-Band は米国 Hygenic Corp. の登録商標である.
- 2) 調整可能パラメータとして, バンドの種類, バンド自然長, バンド巻き数, 下腿上のバンド取り付け位置, 下腿上にないバンド取り付け位置が考えられる.
- 3) *Mathematica* は米国 Wolfram Research, Inc. の登録商標である.
- 4) つまり, 下腿に対して足部がぐらぐらせず固定されているとして, それらを合わせてひとつの剛体と見なす.
- 5) W.T.Dempster, *WADC Technical Report 55*, Wright-Patterson Air Force Base (1955)
- 6) 地面に垂直に立った Thera-Band 取り付け棒が設置してあり, その棒上に 2 点 P,  $P_0$  があると想定せよ.
- 7) 接触剛体に対する D'Alambert の原理は要するに, Newton の運動方程式の右辺 (外力または外力のモーメントが記されている辺) に, 単に抗力または抗力のモーメントを加えあわせよという内容である.
- 8) L.D.Landau・E.M.Lifshitz 著, 広重徹・水戸巖訳, *力学*, 東京図書 (1974)
- 9) H.Goldstain 著, 瀬川富士・矢野忠・江沢康生訳, *古典力学 (上)*, 吉岡書店 (1983)
- 10) 例えばよく行われているように, Thera-Band をリング状にして取り付けると, 同種類のものを 2 本使用していることになる.
- 11)  $\omega_0$  を下腿平均角速度として, 角速度  $-(\pi\omega_0/2)\sin(2\omega_0 t)$  の周期運動を適用してみる. このとき,  $\mu=60(\text{kg})$ ,  $l=0.4(\text{m})$  の被験者に対して,  $\omega_0$  が  $45^\circ/\text{s}$ ,  $60^\circ/\text{s}$ ,  $90^\circ/\text{s}$  で, 第 3 項の力のモーメントの大きさの最大値はそれぞれ,  $0.16\text{Nm}$ ,  $0.72\text{Nm}$ ,  $1.63\text{Nm}$  程度になる.
- 12) このことは, 弾性バンドの代わりに重錘負荷を用いた同様の運動については当てはまらない. なぜなら, その場合の膝のまわりの慣性モーメント  $I_k$  は, 重錘質量を  $m$  としたとき,  $I_k=I_0+\kappa l^2\mu^2+m^2$  となり, この右辺の第 3 項の存在が, 慣性力のモーメント項の高々 1 程度という仮定を崩してしまうからである.
- 13) S.Wolfram 著, 田辺誠・他訳, *MATHEMATICA ブック (第 3 版)*, トッパン (1998)
- 14) R.Mader, 時田節訳, *プログラミング MATHEMATICA*, ピアソン (1999)
- 15) W.Gray 著, 時田節・武沢護訳, *Mathematica 方法と応用*, サイエンス社 (1996)
- 16) R.J.Gayload・S.N.Kamin・P.R.Wellin 著, 榊原進訳, *Mathematica プログラミング*, 近代科学者 (1994)
- 17) [http://thera-bandacademy.com/elements/clients/docs/TBInstruction-012706\\_013106\\_130451.pdf](http://thera-bandacademy.com/elements/clients/docs/TBInstruction-012706_013106_130451.pdf)
- 18) つまり, Thera-Band は張りが無く, 垂れ下がって状態である.
- 19) <http://www.kiui.ac.jp/~hiro/MathPacks/TbKneeMoment/>