負次元自己相似集合について
On Negative Dimensional Self Similar Sets

永江　孝規
NAGAE Takanori

This paper introduces a brand-new concept of negative dimension, which has been regarded as a scientific function or a so pathological theory that no one dears to mention to it. First I would like to show a lot of negative dimensional self similar sets as examples embedded in normal Euclidean spaces. The notion of negative dimension is contradictory to familiar well-established definitions of dimension, such as topological or Hausdorff dimensions. But I try to find a reasonable ground for supporting the concept of negative dimension especially in the case of self similar sets. It would be of course preferable to generalize the negative and positive dimensions into a single concept in the future.

1．はじめに

本稿は筆者がおよそ十年ほど前にネット上（NetNews, E-mail）でコンピュータサイエンスの研究者たちと議論した話題に基づいている。最初は fj.sci.math で提議し，その後，主にメイルで討論した（というかおつきあいいただいた）相手は当時東京工業大学計算機センター助手の太田昌孝氏である。筆者は当時できることならば，この驚くべき発見，「負次元」について論文にまとめて投稿しようと考えた。しかし，この話題は解析学はもとより集合論や整数論，論理学、数学基礎論など際限なく広く深い数学の世界へと続いており、おいそれと足を踏み入れるわけには行かなかった。それは多少とも数学の素養を身につけた人と議論してみればすぐにわかることだ。当時フラクタル（fractal）[10] はコンピュータグラフィクスの基礎理論としてすで十分に知られていた（だからこそ私も研究してみようと思ったわけだが）が，この分野の「工学」の論文として投稿するにはあまりにも「アカデミック」すぎ，かといって数学界に投稿するには筆者の数学的能力は未熟すぎた。数学的に精密で必要十分な証明を与えることができず、数学の専門誌に投稿する勇気ももてな

かったので、 現在まで放置していたのである。現在においてもなお、このようなエッセイのような文章しか書けないことを、あらかじめお断りし、お許し願いたい。

私は当時流行していたフラクタルという目新しい研究分野に、複素整数を導入することを試みていた。これは私の学部生のときの卒業論文のテーマでもあった[1,2,3,8]。フラクタル図形生成のための関数に複素演算を用いるのは一般的である。複素数全体のうちで複素整数というもの、より正確に言えば虚二次体の整数 [7] を使うと、平面の空間充填（space filling）ということがうまく説明できるのである（日本語では平面の場合は平面充填と呼ぶべきか）。空間充填のフラクタルとはたとえば Peano 曲線や Dragon 領域のようなものを言う。私はフラクタル全般とか自己相似性（self similarity）、もしくは統計的自己相似性のようなものではなく、非常に複雑な軌跡を描きながら、重複も漏れもなく一定領域を埋め尽くしていく自己相似空間充填に面白さを感じた。さらに修士ではPeano走査の画像処理への応用について研究した[4、5、6、9、11、12、13、14]。統計的自己相似性は自然の一見複雑に見える現象を数学的道具を使って記述するためのものと言えるが、これに対して自己相似空間充填は Cantorの点集合論やPeano、Hilbertあたりの数学基礎論あたりに直結する分野である[15、16、17]。

負次元というものは、整数論（商や剰余など）を自己相似に直ちに導入した場合に導き出されるのであり、フラクタルや自己相似だけを眺めていてはなかなか見えてこないことであろうと思う。しかしいったん気づいてしまえば整数論はそれほど直接必要はない。以降では準備として自己相似、自己相似次元、Hausdorff次元と自己相似次元の関連性について述べ、負次元の実例を挙げ、最後に全体をまとめることにする。

2．自己相似

自己相似とは必ずしも凸凹した複雑な形状にだけ見られるものではなく、きわめて単純で幾何学的な図形にも多く見られる。この意味において自己相似は世間一般に誤解されているというか、別物と混同されているというか、あるいは偏った見方をされている。

たとえば一つの線分を考えてみよう。ある実数の区間と考えてもよい。これを途中の一点で分割して二つの線分に分けた場合、線分同士はいずれも互いに相似であるから、線分は全体と部分が相似である。したがって自己相似であるといえる。

このように、線分は直感的に自己相似であると言える。また、正方形は四等分して、半分の長さの辺の正方形に分けることができる。したがって正方形も自己相似

の範疇に含まれそうである。

このような正方形や線分などのように「至るところ微分可能で連続」であるものも自己相似である。自己相似は「至るところ微分不可能」とか「至るところ不連続」などの性質、つまりフラクタルと関連づけて語られることが多いのだが、もともとまったく独立した概念である。フラクタルらしくないという理由でそれら「自明な自己相似」が情緒的に排除されることは避けなくてはならない。

この先、自己相似という概念をできるだけ一般化して精密に議論しようとすると、集合論や位相幾何学の深く迂遠な森に迷い込んでしまい、「有益」な結論にたどりつけなくなってしまう。そこで私はここで「準自己相似」「広義の自己相似」「狭義の自己相似」の三段階に分け、順にその扱う範囲を狭めていき、主に狭義の自己相似だけを扱うことにする。以降で単に自己相似と呼べばこれは狭義の自己相似であるとする。

2.1　準自己相似

準自己相似とはユークリッド空間の部分集合（つまり普通の点集合のことであるが）が自分自身の部分集合と相似であることである。数式で表すと、点集合 X が準自己相似であるとは、X の任意の元 x に関して必ず相似写像 a が存在して、a(x) ∈X となることである。すなわち

$$\forall x \in X, \exists a, x \in a(X)$$

「常識的」な「図形」はたいてい準自己相似である。準自己相似な図形にはHausdorff次元が定義できる（と思われる。未確認）。

2.1.1　準自己相似の例その一

円の内部の点の集合は準自己相似である。なぜなら、円は自分の内部に自分よりわずかに小さな円を必ず含むからである。同様に、正方形の内部の集合、三角形の内部の集合なども準自己相似である。

2.1.1　準自己相似の例その二

有理整数全体の集合は準自己相似である。なぜなら、有理整数全体の集合と、偶数全体の集合は相似であって、しかも有理整数全体の集合は偶数をすべて含むからである。同様の理由で自然数全体の集合もまた準自己相似である。

2.1.3　準自己相似集合に関する系

準自己相似集合は無限集合である。なぜなら、ある点集合が自分自身の一部と相似であるということは、全体と部分が一対一に対応するということであり、有限集合の場合、全体と部分の一対一対応は不可能だからである。

2.2　広義の自己相似

自己相似では分割や分岐、あるいはその（有限の）分岐数が問題にされる。これがなにか本質的な意味があるかどうかはわからないのだが、普通は漏れなく重複なく有限の部分に分割される場合だけが扱われるのである。このために徐々にその方向に誘導していく。

広義の自己相似とは、ある点集合がもれなく重複なく部分集合に分割され、そのいずれの部分集合も全体と相似であることである。

広義の自己相似であれば準自己相似であることは自明であろう。

広義の自己相似は点集合Xと相似写像の集合 A の組 {X, A} で表される。Xの任意の元xに対してAの中に唯一の元 a が対応して、$x \in a(X)$ となる。数式だけで表せば

$$\forall x \in X,\ \exists! a \in A,\ x \in a(X)$$

となる。ここで ∃! は「唯一存在する」を意味する。{X,A} を自己相似系 (self similar system. 或いは単に自己相似 self similarity）と呼び、Zをその自己相似集合、Aを写像系と呼ぶ。

ここで「もれなく重複なく」という制約を設けたことが、準自己相似との根本的な差異であり、そのために写像系 A というものが別途必要になったのである。

広義の自己相似は、しかしこのままでは非常に扱いにくいし、また我々が意図しているような「自己相似」からかけ離れたものを多く含む。たとえば円の内部の集合は無数の円の部分集合の集まりとして表すことが可能かもしれない。しかし円を「自己相似」と呼ぶのは「常識的」に困る。よくよく考えると、準自己相似集合と広義の自己相似集合とは実は同じものであって、後者には写像系が付随しているだけの違いかもしれない。そこでもう少し扱い易い定義を考えて、当面はその範囲だけで考察をしたい。

たとえばAを有限集合に限る、或いはAの元は互いに全て「合同」であることにすれば良い。特に我々にとって「おもしろく」かつ「関心が高い」のはAの要

素数がごく小さなもの、たとえば二つや三つくらいまでである。あまりに要素数が大きいと、非常に雑多な図形が紛れ込んでくるし、自己相似性を直感するのがほとんど困難になる。

Aの元が互いに合同でなくてもかまわないのだが、これもあまりおもしろい例はないので、特に断らない限り合同であることにしよう。Aの元の個数は通常「分岐数」と呼ばれる。すなわち次のような定義が考えられる。

2.2.1　広義の自己相似に関する系

$\{X,A\}$ が広義の自己相似、bが任意の相似変換ならば、$\{bX, bA\}$ もまた広義の自己相似である。ただし $X=\{x_0, x_1,\cdots\}$, $A=\{a_0, a_1,\cdots\}$ として $bX=\{bx_0, bx_1,\cdots\}$, $bA=\{ba_0, ba_1,\cdots\}$である。

つまり、自己相似図形に相似な図形は自己相似である。これは自明であるが、以降でしばしば利用する性質であるので、系として用意しておくことにする。

2.3　狭義の自己相似

狭義の自己相似とは、$\{X,A\}$ が広義の自己相似であって、さらにAの任意の二つの元が互いに合同であることである。ここで二つの相似写像 a, b が互いに合同とは、a, b に対して合同写像 c が存在して、任意の点 x に対して $a(x) = c(b(x))$ となることである。

2.3.1 自己相似の例その一

0以上1未満の実数の集合、つまり区間記号で表せば $[0,1)$ となる区間、は自己相似である。なぜならば、

$$X = [0,1),$$
$$A = \{a_0(x) = x/2,\ a_1(x) = (x+1)/2\}$$

とするならば、

$$a_0(X) = [0, 1/2),$$
$$a_1(X) = [1/2, 1)$$

となり、$[0, 1/2)$, $[1/2, 1)$ともに $[0,1)$ と相似であり、さらに $[0,1)$ はも

れなく重複なく $[0, 1/2)$, $[1/2, 1)$ に分割されるからである。

さて、実数の区間はたいてい自己相似かと言えばそうではない。上の2.3.1の例は有界の、片方が閉じていて片方が開いた区間であるが、有界の場合にはこのような場合だけが厳密には自己相似である。

たとえば有界閉区間は自己相似ではない。有界閉区間はすべて互いに相似であるから、例として $[0,1]$ を見てみよう。$[0,1]$ を半分の長さに二分すると、$[0, 1/2)$, $[1/2,1]$ になるか、$[0, 1/2]$, $(1/2,1]$ になるかどちらかであるが、これらはもともとの区間と相似ではないからである。同様に有界開区間 $(0,1)$ も自己相似ではない。

また半開区間も半閉区間も自己相似ではない。実数全体の集合も自己相似ではない。実数全体を二つの区間に切れば、それらは半区間となって、もとの実数全体とは相似でないからである。

2.3.2　自己相似の例その二

正方形があり、この内部と左辺と下辺だけからなる集合を考える。つまり、左辺と下辺の上ではこの集合は閉じているが、右辺と上辺の上では開いている。このような集合は、正方形の辺の中央で切って、全体と相似で互いに合同な四つの部分集合にすることが可能であることがわかるだろう。

一般に2.3.1で示したような、片方が閉じて片方が開いているような有界実数区間の直積になっていれば、どんなに次元が高くても自己相似になることが言える。

2.3.3　自己相似の例その三

A3用紙はちょうど二つのA4用紙に切り分けられる。A4は二つのA5に、A5は二つのA6に、と再帰的に切り分けられるのであるが、これはまさに自己相似性に他ならない。

A系列の用紙も、B系列の用紙も、半分ずつに切って相似になるような辺の比

$$1 : \sqrt{2}$$

になっている。$\sqrt{2}$ の方を二等分すれば

$$1 : (\sqrt{2})/2 = 1 : 1/\sqrt{2}$$

となるが、これは$\sqrt{2}:1$に等しい。

ただし数学的に厳密に分割するためには、2.3.2で示したように、長方形の内部と左辺と下辺だけを含む、などのような工夫が必要になる。この分割境界の問題は実は非常にややこしい。分割境界上の点だけを最初から除外して考察すれば一応回避できる問題であるが、話をこれ以上混乱させないため、今回は言及しないほうがよかろうと思う。

辺の長さの比が$1:\sqrt{3}$であるような長方形は、同様にして三等分できる。同様に辺の長さの比が$1:\sqrt{n}$であるような長方形は、n 等分できるのである。

これらの例も同様に高次元に拡張することができる。例としてまず3次元で分岐数が2の場合を考えてみよう。辺の長さの比が

$$1:2^{-1/3}:2^{-2/3}=(2^{-1/3})^0:(2^{-1/3})^1:(2^{-1/3})^2$$

の直方体を考えてみよう。この三つの比は$2^{-1/3}$を公比とする等比数列になっている。このとき、長さ1の辺を二等分すると、辺の長さの比は

$$2^{-1}:2^{-1/3}:2^{-2/3}=(2^{-1/3})^3:(2^{-1/3})^1:(2^{-1/3})^2$$

となるのであるが、これは先の場合と同じように$2^{-1/3}$を公比とする公比数列になっていて、比としては同じものであることがわかる。すなわち、分岐した部分ともとの直方体とは相似であるから、これも自己相似である。一般に d 次元の超直方体の場合、辺の比が

$$1:2^{-1/d}:2^{-2/d}:\cdots:2^{-(d-1)/d}$$

となっていれば2分岐の自己相似になる。

2.3.4 自己相似の例その四

有理整数全体の集合Zは偶数全体の集合2Zと奇数全体の集合2Z+1にもれなく重複なく分割でき、また、偶数全体と奇数全体とは合同であり、有理整数全体とは相似の関係にある。従って有理整数全体の集合は自己相似である。このとき写像系Aは

$A = \{a_0(x) = 2x,\ a_1(x) = 2x + 1\}$

と記述できる。

同様にして自然数全体の集合Nも自己相似である。また、自然数全体の集合の直積、有理整数全体の集合の直積もまた自己相似であるのは自明であろう。

3．自己相似次元

3.1　自己相似次元の導出

自己相似次元 d は分岐数 n と相似比 r から

$$d = -(\log n)/(\log r)$$

でアプリオリに与えられることが多い。この不可思議な式は後で述べるように、Hausdorff 測度や Hausdorff 次元などと密接に関連している。

測度（measure）とは長さ、面積、体積、…などの総称であり、一般化である。個々の次元には個々の測度がある。つまり、1次元測度は「長さ」、2次元測度は「面積」、3次元測度は「体積」などである。相似比と測度のことを考えれば、相似比が2ならば長さの比も2であるが、面積の比は4であり、体積の比は8である。このようにして相似比が r ならば d 次元測度比は r^d である、と一般化することができる。

ここで、ある（広義の）自己相似 {X, A} を考える。Xは n 個の自己相似な部分集合からなるとして、Aの元の相似比を順に

$$r_0, r_1, \cdots, r_{n-1}$$

としよう。すると、

$$r_0^d + r_1^d + \cdots + r_{n-1}^d = 1$$

が成り立つのは自明である。つまり、部分の測度の総和は全体の測度に等しいのである。ここで

$$r_0 = r_1 = \cdots = r_{n-1} = r$$

である場合、つまりAの任意の二つの元が合同である場合（すなわち狭義の自己相似）を考えると、

$nr^d = 1$

となる。この式からただちに

$d \log r = -\log n$

となり、本節の冒頭の

$d = -(\log n)/(\log r)$

が導かれることがわかる。

さて、この式で d は n がちょうど r の整数の巾になっていれば整数になるが、それ以外の場合には半端な数になり、このためにフラクタル次元などと呼ばれるわけである。しかし、整数でないからという理由で自己相似次元をフラクタル次元と呼ぶのは、誤解を招く恐れがあると言わざるを得ない。

n 分岐の自己相似図形は、明らかに、n^2 分岐の自己相似図形でもある。なぜなら n 個の自己相似な部分はさらにそれぞれが n 個の自己相似な部分に分かれるからである。さらに当然のことながら、p を正数（再帰の深さの度合い）とすると、 n^p 分岐の自己相似図形でもあって、このときの相似比は rp となる。従って $0 < r < 1$ かつ $p \to \infty$ のとき $r^p \to 0$ である。これは次に述べる Hausdorff 次元とのアナロジーで考えるとき重要である。

n^p 分岐で相似比 r^p の自己相似図形の自己相似次元を考えれば、

$$(n^p)(r^p)\ d = 1$$
$$d \log r^p = -\log n^p$$
$$dp \log r = -p \log n$$
$$d \log r = -\log n$$
$$\therefore d = -(\log n)/(\log r)$$

すなわち、n 分岐で相似比 r の場合の次元に一致するのである。

3.2 Hausdorff次元

Hausdorff次元は「球による被覆」という概念を用いて定義される。ある点集合を正数 ε よりも小さな（必ずしも一定ではない）直径の n 個の球によって「もれなく重複なく」覆っていく。これらの球の直径を $r_0, r_1, \cdots, r_{n-1}$ としよう。ここで $\varepsilon \to 0$ の極限を取ると $n \to \infty$ であり、このとき

$$m = r_0^d + r_1^d + \cdots + r_{n-1}^d$$

が 0 に収束することもなく、∞にも発散せず、或る有限の数値に収束するとき、m をHausdorff測度と言い、d をHausdorff次元というのである。この極限においてｍもｄもただ一つずつしか存在しないことが数学的に証明されている。

このように、Hausdorff次元と自己相似次元の定義は非常に近いものであり、Hausdorff次元は厳密に自己相似性が成立しなくても定義できるのであって、自己相似次元や自己アフィン次元などをすべて含めた一般化になっていることがわかる。自己相似次元というものは写像を相似だけに限って扱う範囲を限定し、分岐数 n が有限のままでも成立するようにしたものである。

しかし、自己相似ということは、必然的に自分自身への無限の一対一射影というものを含むのであるから、自己相似の表向きの定義（分岐数や相似比）が有限の範囲でできるとしても、その本質では極限というものを避けて通れない。極限が不要であることを意味しない。

3.3 発散とは何か

相似比が 1 より大きいということはこれは直ちに「発散」を意味するのであるから、極限は存在しない、または不定ということにならざるを得ない。負次元自己相似は極限の話に持ち込むと破綻するのであり、極限を見せかけの上で逃れる方便が自己相似なのである。極限が発散する以上負次元は存在しないという結論に達するのが当然である。反論者の多くはそう主張するであろう。

ここではより本質的な議論が必要である。ここでは次元と測度が密接に関係してくる。逆の発想で、もし、相似比が 1 より大きいにもかかわらず、測度が発散することなく、収束して一定の有限の正数値をとるならば、これすなわち次元が

負であることを要するのである。

我々は点集合が有界でなく、だんだんにまばらになっていくことを発散と考えている。いわゆる ε-δ 論法の裏返しである。しかし、点集合そのものではなく、その測度に着目すれば、測度さえ一定有限値に収束すれば、この測度は実在すると言えるのであって、測度と対応するその次元も正負にかかわらずまた実在すると言えないだろうか。

3.4　自己相似次元の例

3.4.1　実数区間

実数の有界な半開区間［0, 1）を考えると、これは［0, 1/2）と［1/2, 1）に分かれるから、分岐数2、相似比 1/2 であって、自己相似次元は

$$-(\log 2)/(\log 1/2)=1$$

である。

また、［0, 1/3), [1/3, 2/3), [2/3, 1）と分岐すると考えれば分岐数3、相似比 1/3 であって、自己相似次元はやはり

$$-(\log 3)/(\log 1/3)=1$$

である。

このように自己相似次元は分割の仕方に依存せずに一意であって（証明を要することだが略す)、さらに常識的な位相次元に一致するのである。

3.4.2　自然数と有理整数

自然数全体の集合Nは奇数全体の集合

$$2N-1=\{1,1,5,\ldots\}$$

と偶数全体の集合

$$2N=\{2,4,6,\ldots\}$$

の二つに漏れなく重複なく分割されて相似比は２であるから、自己相似次元は

$-(\log 2)/(\log 2)=-1$

である。

$3\,N=\{3,6,9,\ldots\}$,
$3\,N-1=\{2,5,8,\ldots\}$,
$3\,N-2=\{1,4,7,\ldots\}$

の三つに分割した場合は相似比３であるから、やはり自己相似次元は

$-(\log 3)/(\log 3)=-1$

である。

有理整数全体の集合Ｚも、自然数全体の集合とまったく同様の考察によってその自己相似次元が－１であることがいえる。

整数全体の集合は離散的な点集合であるから、位相次元は０にしかならず、自己相似次元と一致しない。またHausdorff次元も０にしかならない。

3.4.3 有理整数の直積空間

有理整数全体の集合Ｚの直積Z^2を考えれば、これは

$(2Z,2Z)$,
$(2Z+1,2Z)$,
$(2Z,2Z+1)$,
$(2Z+1,2Z+1)$

の四つに分割され、相似比は２であるから、自己相似次元は

$-(\log 4)/(\log 2)=-2$

となる。

同様の考察により、有理整数の d 次元の直積Zd の自己相似次元は－d となる。

3.4.4 虚二次体の整数

二次の係数が1、一次の係数と定数項が有理整数の二次方程式

$$x^2 + ax + b = 0 \ (a, b \in Z)$$

が虚根を持つとき（つまり判別式が負のとき）、この根の一つを ω として、

$$\Xi = \{\xi = p + q\omega \mid p, q \in Z\}$$

を虚二次体の整数という[7]。たとえば、$a = 0, b = 1$ の場合は $\omega = i$（ここで i は虚数単位）となって、

$$\Xi = \{\xi = p + qi \mid p, q \in Z\}$$

と書きあらわされ、この Ξ にはガウスの整数[7]という特別な名前がついている。Ξ はZ 2に複素演算を導入したものに相当する上に、商や剰余などの整数らしい性質を満たす。

たとえば1＋ i を法（modulus）とすると、Ξ は二つの剰余類に分かれ、片方は0と合同で、もう片方は1に合同である。0に合同な数は有理整数との類比で「偶数」と呼ばれ、1に合同な数は奇数と呼ばれる。ここで偶数というのは1＋ i の倍数に等しく、（1＋ i ）Ξ と書き表される。すなわち

$$\begin{aligned}(1+i)\,\Xi &= \{(1+i)(p+qi) \mid p, q \in Z\}\\ &= \{p - q + i(p+q) \mid p, q \in Z\}\end{aligned}$$

また、奇数は偶数の残りであって、1＋ i で割ると1余る整数の集まりであり、（1＋ i ） Ξ＋1と書ける。ちなみにZは Ξ と実軸上で偶奇が一致する。Ξ と（1＋ i ） Ξ は当然のことながら相似であって、その相似比は $|1+i| = \sqrt{2}$ である（一般に虚二次体の整数では、法を μ とした場合の相似比は $|\mu|$ であり、

分岐数は$|\mu|^2$となる)。よって自己相似次元は

$$-(\log 2)/(\log\sqrt{2})=-2$$

となるのである。つまりZ^2に等しい。

虚二次体にはガウスの整数以外にも多くの整数（厳密な言い方をすれば整数環）が存在する。その中には分岐数が2で相似比が$\sqrt{2}$の「偶奇」が存在する整数環も若干存在する。これについては文献［1］で考察したが、合同で等価な場合を除外すればあとは

$$x^2+x+2=0, (\omega=(-1\pm i\sqrt{3})/2)$$

の場合と

$$x^2+2=0, (\omega=\pm i\sqrt{2})$$

の場合の二つしかない（実は、辺の比が1：$\sqrt{2}$の矩形が2分岐の自己相似であることは$x^2+2=0$の虚二次体の小数展開として説明できるのである)。いずれにしても、虚二次体の整数環の自己相似次元はすべて-2となる。

偶数と奇数の二つの剰余類があるということは、虚二次体上の整数でも二進展開が可能であることに他ならない。また一般にn進展開が可能であるかどうかということは、虚二次体ごとに決まっている。たとえばガウスの整数では二進展開は可能であるが、三進展開は不可能である。この詳細については文献［1,2,3］などを参照されたい。

なお、ガウスの整数環に基づく2進表現についてはDonald Knuthが高校生の頃に研究しコンテストに入選している[18]。その0から1までの小数展開全体の領域はDragon領域と呼ばれていて、Dragon曲線に深い関係がある。一般に、虚二次体の小数展開の小数部分は自己相似次元がちょうど2の空間充填となるのである。整数部分全体はすでに述べたように自己相似次元は-2となる。

5. おわりに

負の自己相似次元はHausdorff次元の被覆とは逆の操作、つまり逆被覆というか、

発散によって定義されている。普通のフラクタル集合は相似比 r が $0 < r < 1$ の縮小写像の集合（IFS, Iterative function system）によって定義されるのであるが、整数環は $r > 1$ の法（modulus）によって n 進表現されるのである。統一理論はすぐそこにありそうでなかなか見えてこない。それよりもこの議論を進めていくにはまず測度論について、また、虚二次体の整数環について、より詳細な検討をしておく必要があるように思う。

文献

1．永江他「複素数上での空間の充填について」、第３回 NICOGRAPH 論文コンテスト、pp.39～48, 1987。

2．永江他「二次の整数環上のＮ進表現」信学秋季全大Ｄ-209, 1988。

3 永江他「整数のＮ進展開から得られる力学系とフラクタル領域への収束」信学春季全大、667, 1989。

4．永江他「長方形領域の2進走査」信学春大,Ｄ－259, 1990。

5．永江他「一般化Peano走査を用いたランレングス法による任意矩形２値画像の圧縮」信学秋大,Ｄ-196, 1990。

6．永江他「一般化Peano走査を用いた階調画像の2値表現」信学春大,Ｄ－375, 1991。

7．高木　貞治「初等整数論講義」共立出版　1931。

8．永江他「複素数の商力学系から生成されるフラクタル領域」情処研報 vol.89, no.109, グラフィクスと CAD 89－CG－42－10, pp.71～78, 1989。

9．永江他「Peano 走査の一般化による任意の大きさの配列の走査」テレビ学技報 vol.14, no.37, pp.25～30, 1990。

10．高安 秀樹「フラクタル」朝倉書店　1986。

11．永江他「画像処理におけるフラクタルの利用」、光学 vol.22, no.1, pp.2～7, 1993。

12．Nagae et al, Generalized Peano Scans for Arbitrarily-sized arrays, IEICE Trans. E74, pp.1337～1342, 1991。

13．Nagae et al, Digital Halftoning Using a Generalized Peano Scan, Visual Communication and Image Processing '91, SPIE 1606, pp. 912－916, 1991.

14．永江他「Peano 走査の一般化とハーフトーン処理への応用」テレビ学技報 vol. 16, no. 9 , pp. 25～30, 1992。

15．G. Peano, Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane, Mathematische Annalen, vol. 36, pp. 157～160, 1890。

16. D. Hilbert, Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flaechenstueck, Mathematische Annalen, vol. 38, pp. 459～460, 1891。
17. W. Sierpinski, Sur une nouvelle courbe continue qui remplit toute une aire plane, Sciences Mathematiques, pp. 462～478, 1912。
18. C. Davis and D. E. Knuth, Number Representations and Dragon Curves, Journal of Recreational Mathematics, vol. 3, no. 2, pp. 66～81, no. 3, pp. 133～149, 1970。