

ロボット・マニピュレータの運動学と動力学 に関する基礎的考察

小林 正明*・清水 光**・菅沼 春幸*

Fundamental Studies on the Kinematics and Dynamics of Robot Manipulator

Masaaki Kobayashi, Hikaru Shimizu and Haruyuki Suganuma

ABSTRACT

In this paper, we describe the algorithm for solving the inverse kinematic problem and the computation methods of joint torques of the revolute joint type manipulator.

At first, the computation methods of joint variables from the position and the configuration of end effector are considered in the case of the revolute joint type 6 link manipulator. Secondly, the manipulator dynamics equation of the revolute joint type 3 link manipulator is derived, and then, the effective inertia force, coupling inertia force, centripetal force, Coriolis force and gravity are computed in detail. Finally, using the digital simulation the variations of joint torque with respect to joint angular velocity and acceleration of 3 link manipulator are studied when it moves along a straight line.

キーワード：逆問題計算法、関節トルク、求心力、コリオリカ

1. まえがき

ロボットの歴史は比較的新しく1920年に初めてロボットという言葉が用いられた⁽¹⁾。しかし、これはSF小説としてのロボットであり、現在広く用いられているようなロボットが作られたのは、それから40年後の1960年である。現在の産業用ロボットにあたるものは1960年にGeorge Devolによって初めて実演された。これ以後、産業用ロボットは急速な発展を遂げた。

今日、産業用ロボットが成功した理由は、数値制御工作機械と同様に、正確な、再現可能な、デジタルサーボ制御系によって作業位置が完全に定まっている仕事に応用されたこと、そして適応性ではなく信頼性と位置の再現性のためである⁽²⁾。現在、最も一般的に用いられているロボット・マニピュレータは、剛体リンクの直鎖的な結合によって構成されている多関節ロボット・マニピュ

レータである。マニピュレータのリンク間を結合する直動関節（スライド・ジョイント）や回転関節（レボリュート・ジョイント）には、アクチュエータが配置され、先端には手に相当する手先効果器（エンドイフェクタ）が取り付けられている。

本報告では、マニピュレータの手先の位置・姿勢より関節角度を求める逆問題計算法を既報⁽³⁾よりも、より一般的なマニピュレータである6リンク回転関節マニピュレータに関して求めた。次に、マニピュレータの動特性方程式を求め各関節における関節トルク式を求めた。そして、3リンク回転関節マニピュレータを対象に関節角速度、関節角加速度と関節トルクの関係についてシミュレーションにより考察した。

2. マニピュレータの逆問題計算法

回転関節ロボット・マニピュレータの手先の位置・姿勢はA行列により容易に導き出すことができる。A行列とは、各リンクに1つずつ固定された座標系を考え、あるリンクとつぎのリンク間の関係を表す同次変換行列である。したがって、A行列は単にリンク座標間の相対的な並進と回転を表す行列である。このA行列を掛け合わせるによりマニピュレータの手先の位置・姿勢が求められる。

ここでは、手先の位置・姿勢より各関節角度を求める逆問題計算法について考える。これは、マニピュレータの動作軌道を与えた時、その姿勢を実現するために各関節角度をいくらにすればよいかという問題であり、マニピュレータの動作を考える上で基本的に重要な問題である。

2. 1 関節の位置と平面幾何の関係を用いた逆問題計算法

ここでは、マニピュレータのリンク機構を構成する各関節の局所的な関係を幾何学的、物理的、かつ各座標系の単位ベクトルのスカラー積や外積などの簡単なベクトル演算と平面幾何の性質を組み合わせることにより、直接関節角度を導出する。

マニピュレータの手先の位置・姿勢 T_h は次式の 4×4 行列として表される。

$$T_h = \begin{bmatrix} n_{hx} & o_{hx} & a_{hx} & p_{hx} \\ n_{hy} & o_{hy} & a_{hy} & p_{hy} \\ n_{hz} & o_{hz} & a_{hz} & p_{hz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

これは Fig. 1 に示すような手より考えることができる。この Fig. 1 で手を表す座標系の原点を2本の指先の丁度中間にとる。この原点をベクトル p で表す。つぎに、姿勢を表す3つのベクトルは次のように定める。zベクトルは手が対象物に接近する方向にとり、これを接近ベクトル (approach vector) a 、yベクトルは片方の指先からもう一方の指先に向かう方向になり、これは手の方向を指定するので方向ベクトル (orientation vector) o 、最後にxベクトルは法線ベクトル (normal vector) n として表す。(2.1)式より Fig. 2 に示される6リンク回転関節マニピュレータの関節角度を求める手順を示すと次のようになる。

◎ 第5関節の位置 P_5 の算定

手先の位置・姿勢より第5関節の位置を求める。これは、マニピュレータの手先の長さ l_e 、手先の位置 (p_{hx} , p_{hy} , p_{hz}) と基準座標系に対するマニピュレータの方向ベクトル (a_{hx} , a_{hy} , a_{hz}) により求められる。

◎ 第1関節の角度 θ_1 の算定

第2～第4関節までは関節の回転軸が同方向のため、

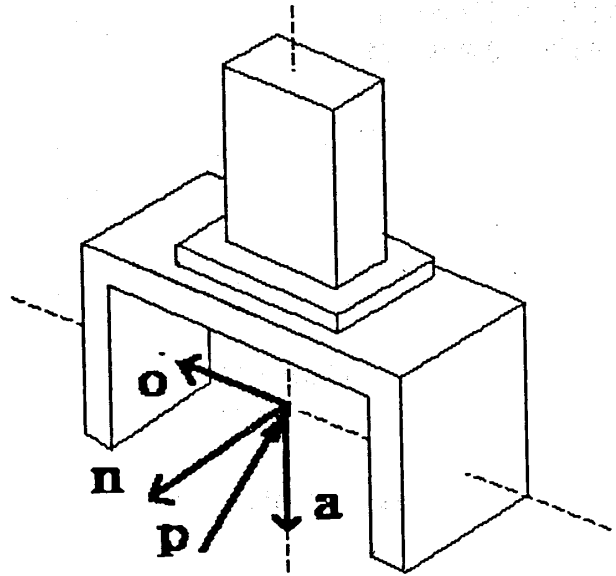


Fig. 1 $o, a,$ and p Vectors

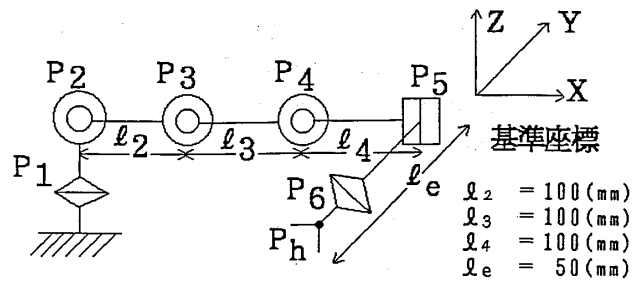


Fig. 2 Revolute Joint Type Six Link Manipulator

これらの関節が動作しても第5関節の位置と第1関節の角度 θ_1 の関係は変わらない。また第5関節のX、Y成分である p_{5x} 、 p_{5y} の正負により第1関節の角度 θ_1 は容易に求められる。

◎ 第4関節の位置 P_4 算定

第2、第3、第4関節の関節角度を求めるためには第4関節の位置を求めておかなければならない。そこで第4関節の位置は手先の位置 P_h 、第5関節の位置 P_5 としてリンクの長さ l_4 によって求められる。第4関節の位置はマニピュレータの姿勢により一意的に定まる場合と、第5関節の位置を中心にリンク4の長さ l_4 を半径とする円周上で無数に存在する場合がある。第4関節の位置が無数に存在するとマニピュレータの姿勢も無数となる。しかし、作業空間が制限されている場合には無数に存在するマニピュレータの姿勢も制限される。

◎ 第2関節の角度 θ_2 ，第3関節の角度 θ_3 の算定

第4関節の位置が定まるとそれによって第3関節の位置はFig.3に示すように P_3 と P_3' の2通りが考えられる。それによりマニピュレータの状態も $P_2-P_3-P_4$ と $P_2-P_3'-P_4$ の2通りが考えられる。第3関節の位置 P_3 と P_3' は、 P_2P_4 に対してお互いに反対になるため θ_3 は符号が反対となる。この図より第2、第3関節の角度は、リンクの長さ α 、 β 、 γ より求められる。このようにマニピュレータの姿勢は関節角度の範囲の制限がない場合、最低2通りの値を生じることになる。

◎ 第4関節の角度 θ_4 の算定

第4関節の角度 θ_4 は、第5関節と第4関節の位置より求められる手先が水平面に対する角度と、既に求められている第2関節と第3関節の角度とより求められる。しかし、第2関節と第3関節の角度は2通りあるために第4関節の角度も θ_4 、 θ_4' の2通りが求められる。

◎ 第5関節の角度 θ_5 の算定

第5関節の角度 θ_5 は、手先の位置、第4関節、第5関節の位置、そして、リンクの長さと手先の長さより求められる。

◎ 第6関節の角度 θ_6 の算定

ロボット・マニピュレータの手先の回転角である第6関節の角度 θ_6 は、リンク間を表すA行列 ($A_1 \sim A_6$ 行列) とすでに求められている第1～第5関節の関節角度 ($\theta_1 \sim \theta_5$) より求められる。

最後に、第1関節の角度 θ_1 は、マニピュレータの方向(前方、後方)により2通りの値をとるので、計4通りが得られる。この逆問題計算法の流れ図を示すとFig.4のようになる。

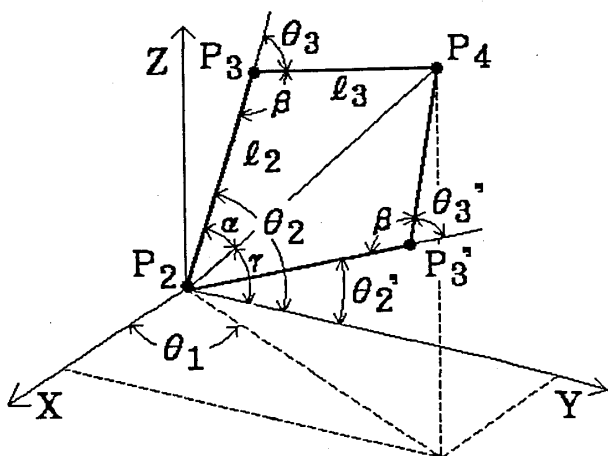


Fig. 3 Geometric Representation between Joint 2 and 4

2. 2 逆問題計算法の計算結果

2. 1で述べた逆問題計算法の数値計算を単精度で行った。この計算法の計算誤差を吟味するためにつぎのような手順で誤差の評価を行った。初めに、6個の任意の関節角を選び、運動学方程式に代入してマニピュレータの手先の位置・姿勢を計算する。次に、得られた手先の位置・姿勢を用いて、各関節角を求め、最初に与えた関節角度と比較して計算誤差の大きさを調べた。その結果の1例をTable 1に示した。このTable 1に示すように4通りの解を得たが結果1の解は、与えた数値と比較して最大誤差は第5関節の角度の 0.0007° である。また、結果2から結果4までの解を運動学方程式に代入して手先の位置・姿勢を求めた結果、全て与えた手先の位置・姿勢とほぼ等しい値となった。そして、関節角の解を代入して得られた値の手先の位置・姿勢もとの手先の位置の誤差は最大 0.0006 (mm)と非常に小さな値となった。ただし、手先の位置誤差はリンクの長さ α に左右される。

Table 1 Comparison for the computation results with respect to four computation methods

関節角度	与えた角度 (deg.)	得られた角度(deg.)			
		結果1	結果2	結果3	結果4
θ_1	10.0000	9.9999	9.9999	-170.0000	-170.0000
θ_2	45.0000	45.0001	-15.0000	135.0000	-135.0000
θ_3	-60.0000	-60.0000	60.0000	60.0000	-60.0000
θ_4	-30.0000	-30.0002	-90.0002	30.0002	90.0002
θ_5	45.0000	44.9993	44.9993	-224.9999	-224.9999
θ_6	30.0000	30.0002	30.0002	210.0000	210.0000

3. マニピュレータの動特性方程式

ロボット・マニピュレータは大変複雑な力学系でありその動特性を解析するためには体系だった方法をとらなければならない。ここでは、非常に複雑なシステムに対して最も簡単に動特性方程式を導くことができるラグランジュ力学の手法を用いてマニピュレータの動特性方程式を求める。

本章で用いるラグランジアンは次式で表される。

$$L = K - P \quad (3.1)$$

上式のようにラグランジアン L はシステムの運動エネルギー K と位置エネルギー P の差として定義されている。運動方程式は、運動および位置エネルギーを表した座標によって次式のように表される。

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (3.2)$$

ここで q_i は運動および位置エネルギーを表した座標、 \dot{q}_i

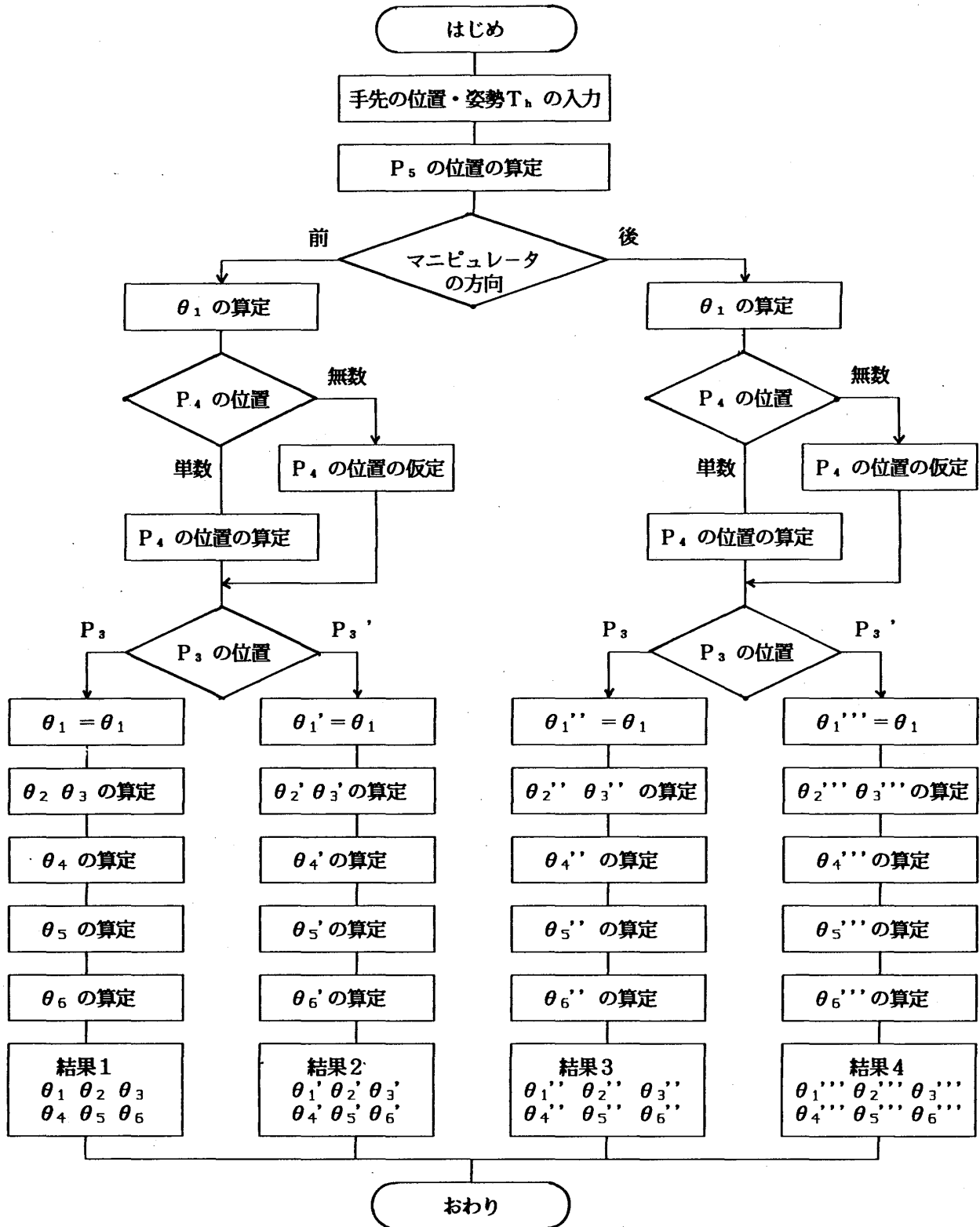


Fig. 4 Flowchart Deriving the Joint Angles from the Position and Configuration of the Manipulator End Effector

はその速度、 F_i は対応する力またはトルクである。これらの力、トルク、座標はそれぞれ、一般化力、一般化トルク、一般化座標と呼ぶ。nリンクを持つロボット・マニピュレータの第i関節の関節トルクは一般的に次式で表される。²⁾

$$F_i = \sum_{j=1}^n D_{ij} \ddot{q}_j + I_{ai} \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ijk} \dot{q}_i \dot{q}_k + D_i \quad (3.3)$$

ここで、 D_{ii} の形の項は関節iの有効慣性を表し、 D_{ij} は関節iとjの間の相互慣性を表す。 D_{ij} の項は関節jにおける速度によって関節iに生じる求心力を表す。

D_{ijk} の項は関節jおよびkにおける速度によって関節iに生じるコリオリ力を表す。そして、最後の D_i の項は関節iにおける重力負荷を表す。

3. 1 関節トルクの算定

ここではFig.5に示した3リンク回転関節ロボット・マニピュレータの関節トルクを算定した。ここで用いるマニピュレータは、手先の回転関節が省略された比較的単純な構造である。このマニピュレータの先端が $P_1 = (0.4, -0.25, 0)$ (m)から $P_2 = (0.4, 0.25, 0.5)$ (m)の直線軌道を行く場合の関節トルクの算定について述べる。マニピュレータのリンクの質量をそれぞれ m_1, m_2, m_3 の質点で代表し、リンクの長さは l_1, l_2, l_3 とする。これらの値とアクチュエータ慣性をTable 2に示す⁴⁾ ラグランジアンLを m_1, m_2, m_3 の運動エネルギーと位置エネルギーの差として求めると次式となる。

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} m_2 (\dot{l}_2^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2 + \dot{l}_2^2 \dot{\theta}_2^2) \\ & + \frac{1}{2} m_3 \{ \dot{l}_2^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2 + \dot{l}_3^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 (\theta_2 + \theta_3) \\ & + (\dot{l}_2^2 + \dot{l}_3^2) \dot{\theta}_2^2 + \dot{l}_3^2 \dot{\theta}_3^2 \} \\ & + m_3 l_2 l_3 \{ \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 \cos (\theta_2 + \theta_3) + \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_3 \\ & + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 \} + m_3 l_3^2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\ & - (m_2 + m_3) g l_2 \sin \theta_2 - m_3 g l_3 \sin (\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (3.4)$$

このラグランジアンLを(3.2)式に代入して3リンク回転関節ロボット・マニピュレータの動特性方程式の各項を求めることができる。その結果は以下に示す通りである。

有効慣性

$$D_{11} = m_3 \{ l_3^2 \cos^2 (\theta_2 + \theta_3) + l_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2 l_2 l_3 \cos \theta_2 \cos (\theta_2 + \theta_3) \} + m_2 \{ l_2^2 \cos^2 \theta_2 \} \quad (3.5)$$

$$D_{22} = m_3 \{ l_2^2 + l_3^2 + 2 l_2 l_3 \cos \theta_3 \} + m_2 l_2^2 \quad (3.6)$$

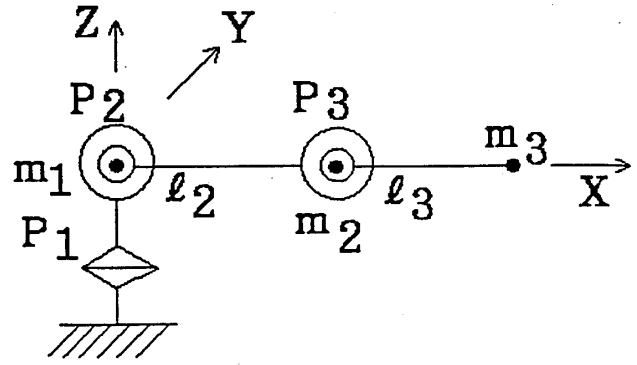


Fig. 5 Revolute Joint Type Three Link Manipulator

Table 2 Link length, Mass and Actuator for the Revolute Joint Type Three Link Manipulator

リンク	長さ l_i (m)	質量 m_i (kg)	アクチュエータ慣性 I_{ai} ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)
1	0.0	20.0	5.654609
2	0.4	6.6	2.004699
3	0.336	7.5	0.8237586

$$D_{33} = m_3 l_3^2 \quad (3.7)$$

相互慣性

$$D_{23} = m_3 (l_3^2 + l_2 l_3 \cos \theta_3) \quad (3.8)$$

求心力

$$D_{211} = m_3 \{ 0.5 l_2^2 \sin^2 (2\theta_2) - 0.5 l_3^2 \sin^2 (\theta_2 + \theta_3) + l_2 l_3 \sin (2\theta_2 + \theta_3) \} + m_2 \{ 0.5 l_2^2 \sin (2\theta_2) \} \quad (3.9)$$

$$D_{233} = -m_3 l_2 l_3 \sin \theta_3 \quad (3.10)$$

$$D_{322} = m_3 l_2 l_3 \sin \theta_3 \quad (3.11)$$

$$D_{311} = m_3 \{ l_2 l_3 \cos \theta_2 \sin (\theta_2 + \theta_3) - 0.5 l_3^2 \sin^2 (\theta_2 + \theta_3) \} \quad (3.12)$$

コリオリ力

$$D_{112} = -m_3 \{ l_3^2 \sin (2\theta_2) + l_3^2 \sin^2 (2\theta_2 + 2\theta_3) + 2 l_2 l_3 \sin (2\theta_2 + \theta_3) \} - m_2 \{ l_2^2 \sin (2\theta_2) \} \quad (3.13)$$

$$D_{113} = -m_3 \{ l_3^2 \sin^2 (2\theta_2 + 2\theta_3) + 2 l_2 l_3 \cos \theta_2 \sin (\theta_2 + \theta_3) \} \quad (3.14)$$

$$D_{223} = -m_3 (2 l_2 l_3 \cos \theta_3) \quad (3.15)$$

重力

$$D_1 = 0 \quad (3.16)$$

$$D_2 = g \{ m_3 [l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos (\theta_2 + \theta_3)] + m_2 l \cos \theta_2 \} \quad (3.17)$$

$$D_3 = g m_3 l_3 \cos (\theta_2 + \theta_3) \quad (3.18)$$

3. 2 関節トルクの計算結果

ここで設定した動作軌道は先に述べたように直線軌道である。この軌道をマニピュレータの手先の最高速度が0.5 (m/s)と1.0 (m/s)の一定速度で移動したときに表れる第2関節の各トルクの変動について求めた。第2関節を選んだ理由は慣性力、重力、求心力、コリオリ力の全ての項について検討ができるためである。その結果をFig.6～Fig.13に示す。

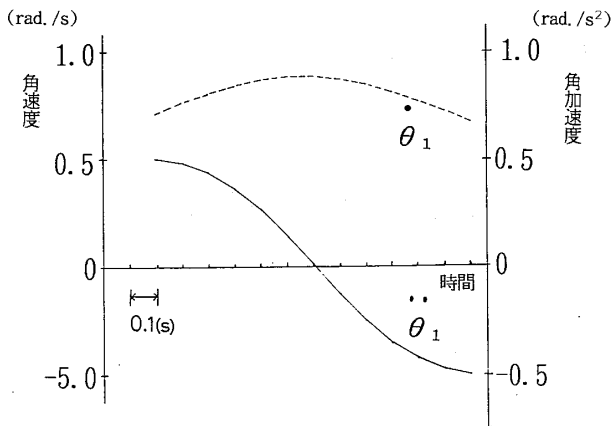


Fig. 6 Variation of Joint 1 Angular Velocity $\dot{\theta}_1$ and Acceleration $\ddot{\theta}_1$ when the Maximum Speed of End Effector is 0.5 m/sec.

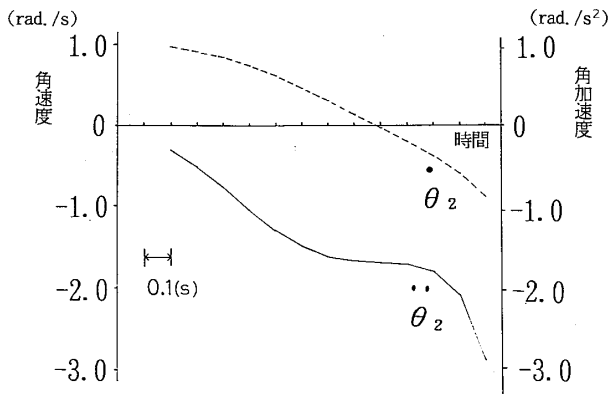


Fig. 7 Variation of Joint 2 Angular Velocity $\dot{\theta}_2$ and Acceleration $\ddot{\theta}_2$ when the Maximum Speed of End Effector is 0.5 m/sec.

Fig.6～Fig.8は、最高速度0.5 (m/s)で移行させた場合の各関節の角速度と角加速度の変化を示す。またFig. 10～Fig. 12は、最高速度1.0 (m/s)の場合の各関節の角速度と角加速度の変化を示す。この時の第2関節に働く各トルクをFig.9, Fig.13に示す。

Fig.9に示すように最高速度が0.5 (m/s)の場合、関節の各トルクの総和より求めた全関節トルクは、ほとんど重力の影響によるものであることがわかる。重力以外では慣性力による影響が大きいことがわかる。しかし、

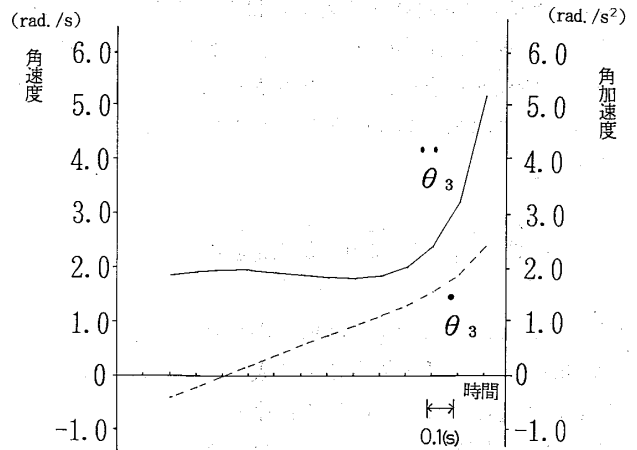


Fig. 8 Variation of Joint 3 Angular Velocity $\dot{\theta}_3$ and Acceleration $\ddot{\theta}_3$ when the Maximum Speed of End Effector is 0.5 m/sec.

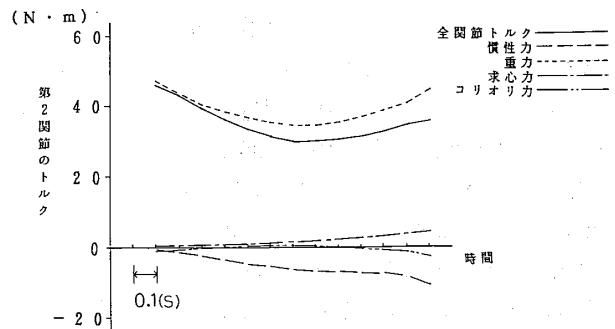


Fig. 9 Joint Torques acted at Joint 2 when the Maximum Speed of End Effector is 0.5 m/sec.

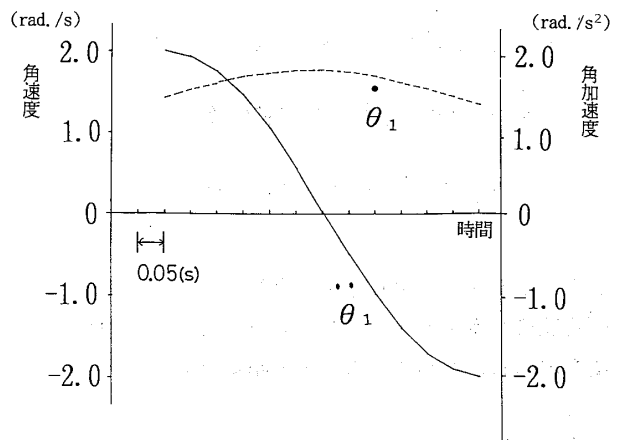


Fig.10 Variation of Joint 1 Angular Velocity $\dot{\theta}_1$ and Acceleration $\ddot{\theta}_1$ when the Maximum Speed of End Effector is 1.0 m/sec.

Fig.13に示される最高速度が1.0(m/s)の場合、全関節トルクは、慣性力による影響を大きく受け、それ以外に求心力とコリオリ力による影響も大きいことがわかる。これは、次式の第2関節の関節トルク式より説明することができる。

$$F_2 = [(D_{22} + I a_2) \ddot{\theta}_2 + D_{23} \ddot{\theta}_3] + [D_{211} \dot{\theta}_1^2 + D_{233} \dot{\theta}_3^2] + [D_{223} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3] + D_2 \quad (3.19)$$

ここで、 $[(D_{22} + I a_2) \ddot{\theta}_2 + D_{23} \ddot{\theta}_3]$ は慣性力、 $[D_{211} \dot{\theta}_1^2 + D_{233} \dot{\theta}_3^2]$ は求心力、 $[D_{223} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3]$ はコリオリ力、そして、 D_2 は重力を示す。(3.19)式より慣性力は関節角加速度に、そして、求心力とコリオリ力は関節速度の積にそれぞれ依存するのに対し、重力は角速度にも角加速度にも依存していないことがわかる。これより、最高速度を2倍にすると慣性力、求心力、コリオリ力は、4倍になるが重力は変化しない。したがって速度を2倍にすると全関節トルクにおける慣性力、求心力、コリオリ力の割合は大きくなることがわかる。

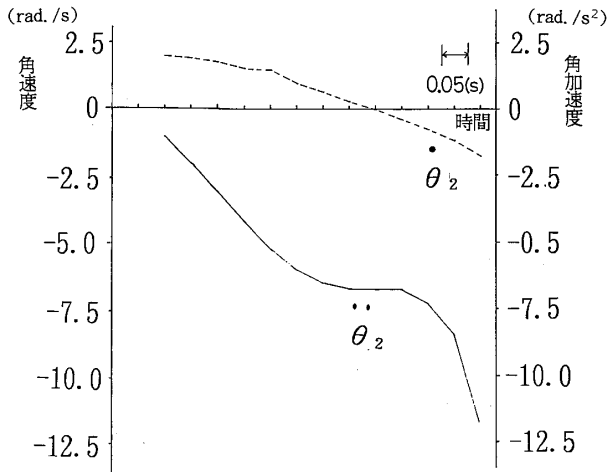


Fig.11 Variation of Joint 2 Angular Velocity $\dot{\theta}_2$ and Acceleration $\ddot{\theta}_2$ when the Maximum Speed of End Effector is 1.0 m/sec.

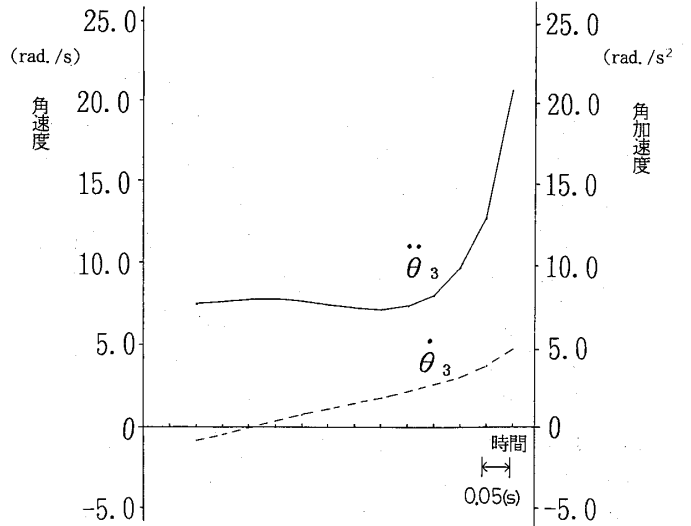


Fig.12 Variation of Joint 3 Angular Velocity $\dot{\theta}_3$ and Acceleration $\ddot{\theta}_3$ when the Maximum Speed of End Effector is 1.0 m/sec.

以上のことより、角速度が小さく、あまり動作の精度を要求しない場合については、求心力、コリオリ力の影響を考慮する必要はないが、手先の速度が速く関節の角速度が大きくなった場合には、複雑な計算を要するが求心力、コリオリ力を考慮に入れる必要がある。

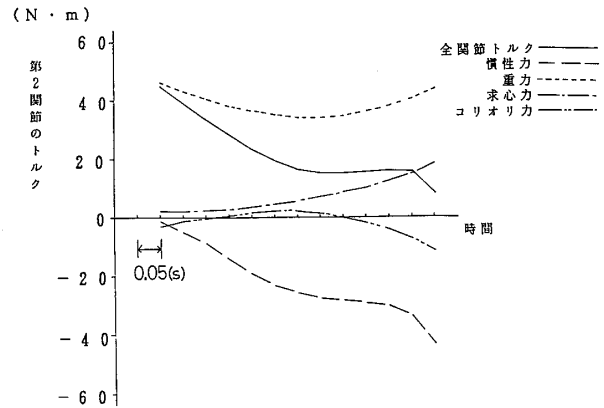


Fig.13 Joint Torques acted at Joint 2 when the Maximum Speed of End Effector is 1.0 m/sec.

4. むすび

6リンク回転関節マニピュレータの手先の位置・姿勢より各関節角度を求める逆問題計算法について考察した。計算結果より、ここで提案した逆問題計算法の計算精度は十分満足できるものであることが示された。次に、3リンク回転関節マニピュレータが簡単な直線軌道を移行した場合の関節トルクを算定した。その結果、マニピュレータの手先の速度が遅い場合には関節の角速度と角加速度は小さく、第2関節を例にとると全関節トルクはほとんど重力によって決まる。一方、手先の速度が速い場合には関節の角速度と角加速度は大きく、全関節トルクは慣性力、求心力、コリオリ力の影響を大きく受け、全関節トルクに占める求心力とコリオリ力の割合は大きくなることが確かめられた。

最後に、本研究を進めるにあたり、計算を手伝っていただいた同研究室の田中昌夫君に感謝の意を表します。

【参考文献】

- (1) 加藤一郎：ロボットと人間、日本放送出版協会、p.16～p.18 (1987)
- (2) R. P. Paul : Robot Manipulators, MIT Press (1981)
(吉川恒夫訳：ロボットマニピュレータ、コロナ社 (1984))
- (3) 小林、清水、菅沼：ロボット・マニピュレータの運動に関する基礎的検討、福山大学工学部紀要、第10号、p.23～p.29 (1988)
- (4) 宮里、大島：ロボットマニピュレータの非線形適応制御、計測自動制御学会論文集、24-1 p.63～p.68 (1988)