ROCA. Revista científico- educacional de la provincia Granma.
Vol.14 No. 2, abril-junio 2018. ISSN: 2074-0735. RNPS: 2090. roca@udg.co.cu

Revisión

LOS MOMENTOS DE KRAWTCHOUK Y TCHEBICHEF Y SUS APLICACIONES EN EL PROCESAMIENTO DE IMÁGENES DIGITALES

"Krawtchouk and Tchebichef´s moments and their applications in digital imagery"

Lic. Yunieska Guibert-Mulen, Universidad de Guantánamo, Cuba. gtmoicc@mail.mn.co.cu

Lic. Alicia María Centurión-Fajardo, Profesor Asistente, Universidad de Granma, Cuba. acenturionf@udg.co.cu

Dr. C. Anier Soria-Lorente, Profesor Titular, Universidad de Granma, Cuba. asorial@udg.co.cu

Recibido: 12/01/2018 Aceptado: 23/03/2018

RESUMEN

En este artículo se brinda una visión de los polinomios ortogonales discretos de Krawtchouk y Tchebichef, los cuales tienen disímiles aplicaciones en el trabajo con imágenes digitales. Se comienza dando una breve introducción histórica y seguidamente se resume la teoría de estos polinomios. Finalmente se presenta un breve apartado con algunas de las aplicaciones más significativas de estos polinomios en el trabajo con imágenes digitales.

PALABRAS CLAVE: Imágenes digitales; ortogonal; polinomios de Krawtchouk; polinomios de Tchebichef

ABSTRACT

In this article, there is an overview of Krawtchouk and Tchebichef´s orthogonal discreet polynomials, which have dissimilar on-the-job applications with digital imagery. A brief historic introduction is given, and then, the theory of these polynomials is summarized. Finally, a brief section with some of the most significant applications of these on-the-job polynomials with digital imagery is presented.

KEY WORDS: Digital imagery; orthogonal; Krawtchouk´s polynomials; Tchebichef´s polynomials

INTRODUCCIÓN

Los momentos ortogonales definidos en términos de un conjunto de base ortogonal son una de las herramientas más importantes en el análisis de imagen (Zhu, H., 2012) debido a su potencialidad para representar imágenes digitales con la cantidad mínima de redundancia en la información. Los momentos Legendre y Zernike para la reconstitución de imagen han sido extensamente estudiados en (Zhu, H., 2012; Chong, C. y Raveendran, P., 2007; Chong, C. et al., 2003; Hu, B. y Liao, S., 2013; Elshoura, S. M. y Megherbi, D. B., 2013). Sin embargo, estos momentos usualmente involucran dos clases de errores inherentes en las imágenes digitales con un alto costo computacional. Estos errores son: la aproximación discreta de las integrales continuas, y la transformación del sistema de imagen coordinada en el dominio de los polinomios, ver (Bayraktar, B. et al., 2007).

Para solucionar exitosamente este problema, se han introducidos los momentos Krawtchouk y Tchebichef en el campo de análisis de imagen (Zhu, H., 2012; Bayraktar, B. et al., 2007; See, K. W.,2007; Yap, P., 2003). Evidentemente, la implementación de los momentos ortogonales discretos no requieren cualquier aproximación numérica desde que el conjunto de la base es ortogonal en el dominio discreto del espacio de coordenada de la imagen (Bayraktar, B. et al., 2007).

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente en este trabajo se realiza un resumen de los momentos discretos de Krawtchouk y Tchebichef y sus aplicaciones en el trabajo con imágenes digitales.

DESARROLLO

BREVE RESEÑA HISTÓRICA DE LOS POLINOMIOS ORTOGONALES

La teoría de funciones especiales es bien conocida por su importancia dentro de la Física - Matemática y, más concretamente, la de los polinomios ortogonales por su aplicación en las más diversas áreas de la ciencia actual. Entre ellas se encuentra la teoría de números, el análisis numérico, la teoría de operadores, la teoría de representación de grupos y la mecánica cuántica. De hecho, el estudio de forma sistemática de tales funciones comienza a finales del siglo XVIII cuando se trataban de resolver problemas relativos a la mecánica celeste. Estas funciones son solución de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\tilde{\sigma}(x)\frac{d^2}{dx^2}y(x)+\tilde{\tau}(x)\frac{d}{dx}y(x)+\lambda y(x)=0,$$

donde $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$ son polinomios de grado a lo más 2 y 1, respectivamente, y λ es una constante.

La teoría de polinomios ortogonales, además de estar estrechamente relacionada con las ecuaciones diferenciales, también está vinculada con la teoría de aproximación y la de fracciones continuas, es más, la conexión con esta última dan lugar al nacimiento de la teoría general sobre polinomios ortogonales.

Los trabajos de Thomas Jan Stieltjes Jr. (1856-1894) sobre fracciones continuas permiten ver de una manera clara dicha relación con los polinomios ortogonales. Más concretamente, Stieltjes en su famoso ensayo *Recherches sur les fractions continues*, publicado póstumamente, desarrolló la teoría general de las *S*-fracciones. Stieltjes probó que bajo ciertas condiciones sobre sus parámetros, la sucesión de denominadores, $\{p_n\}_n \geq 0$, de dichas fracciones formaban una sucesión de polinomios ortogonales.

Además de los trabajos de Stieltjes, se deben destacar también los realizados por el matemático Tchebichef, el cual estudió una gran variedad de problemas relacionados con los polinomios ortogonales, llegando a ellos al tratar de resolver ciertos problemas aplicados.

De ahí que tanto a Stieltjes como a Tchebichef se les consideren los padres de la teoría de polinomios ortogonales que estaba por llegar a principios del siglo XX quedando consolidada en 1939 con la aparición de la monografía *Orthogonal Polynomials* de Gabor Szegö.

Otras familias de polinomios ortogonales son las siguientes: Los polinomios de Hahn introducidos por W. Hahn como caso límite de los q-polinomios de Hahn en 1949 y estudiados en detalle por Karlin y McGregor en 1961 (quienes le dieron el nombre). Los polinomios duales de Hahn que fueron introducidos por Karlin y McGregor en 1961 a partir de la propiedad dual de ortogonalidad. Otro ejemplo de polinomios ortogonales son los polinomios de Racah que fueron introducidos por Askey y Wilson en 1979 al estudiar ciertas funciones hipergeométricas generalizadas.

Existen muchas otras familias de polinomios ortogonales, por ejemplo, los polinomios considerados en la tabla de Askey y su q-análogo, los polinomios de Bernstein- Szegö, Freud, entre otros.

Una vez introducida la reseña histórica de los polinomios ortogonales, se describen los polinomios ortogonales de Krawtchouk y Tchebichef.

POLINOMIOS DE KRAWTCHOUK

Los polinomios discretos de Krawtchouk de orden n, $K_n^{p,N}(x)$, con $0 < p < 1$ (Wang, G. B. y Wang, S. G., 2007), son aquellos polinomios que satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\sum_{0 \leq x \leq N} K_m^{p,N}(x) K_n^{p,N}(x) \omega^{p,N}(x) = \rho_n^{p,N} \delta_{m,n},$$

la cual está explícitamente dado por

$$K_n^{p,N}(x) = \; {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, -x \\ -N \end{matrix} \middle| p^{-1}\right), \qquad (1)$$

donde la función peso $\omega^{p,N}(\cdot)$ y el cuadrado de la norma $\rho_n^{p,N}$ están dado por

$$\omega^{p,N}(x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x},$$

y

$$\rho_n^{p,N} = (-1)^n \left(\frac{1-p}{p}\right)^n \frac{n!}{(-N)_n},$$

respectivamente.

Aquí, ${}_rF_s$ denota la serie hiper-geométrica ordinaria definida por

$${}_rF_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, & a_r \\ b_1, \dots, & b_s \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{(a_1, \dots, a_r)_k x^k}{(b_1, \dots, b_s)_k k!},$$

donde

$$(a_1, \dots, a_r)_k := \prod_{1 \leq i \leq r} (a_i)_k,$$

y $(\cdot)_n$ denota el símbolo de Pochhammer [2], también se le denomina factorial desviado, definido por

$$(x)_n = \prod_{0 \leq j \leq n-1} (x+j), \qquad n \geq 1, \qquad (x)_0 = 1.$$

Ciertamente, $\{a_i\}_{i=1}^r$ y $\{b_j\}_{j=1}^s$ son números complejos que cumplen la condición $b_j \neq -n$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ para $j = 1, 2, \dots, s$.

Además, estos polinomios satisfacen la siguiente ecuación diferencial de segundo orden (ecuación de tipo hiper–geométrica)

$$(1-p)x \,\Delta\, \nabla K_n^{p,N}(x) + (N_p - x)\Delta K_n^{p,N}(x) + nK_n^{p,N}(x) = 0,$$

así como la relación de recurrencia de tres términos

$$-xK_n^{p,N}(x) = p(N-n)K_{n+1}^{p,N}(x) - [p(N-p) + n(1-p)]K_n^{p,N}(x) + n(1-p)K_{n-1}^{p,N}(x),$$
$$n \geq 1$$

con las condiciones iniciales $K_0^{p,N}(x) = 1$ y $K_1^{p,N}(x) = (Np - x)(Np)^{-1}$. Este resultado es usado para calcular los polinomios de Krawtchouk de orden superior. Aquí, Δ y ∇ denotan los operadores en diferencias progresivas y regresivas definidos por $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ y $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$, respectivamente.

Según algunos autores (Yap, P., 2003; Barmak, S. A. y Jan, F., 2014) el cálculo de los momentos ortogonales de Krawtchouk usando (1) presenta las fluctuaciones numéricas y por tanto, proponen utilizar una versión más estable, dada mediante

$$\bar{K}_n^{p,N}(x) = K_n^{p,N}(x)\sqrt{\frac{\omega^{p,N}(x)}{\rho_n^{p,N}}},$$

la cual satisface la siguiente relación de recurrencia de tres términos (Hu, B. y Liao, S., 2013)

$$\alpha_n(Np - 2np + n - x)\bar{K}_n^{p,N}(x) = p(n-N)\bar{K}_{n+1}^{p,N}(x) + \beta_n n(1-p)\bar{K}_{n-1}^{p,N}(x), \quad n \geq 1,$$

con las condiciones iniciales

$$\bar{K}_0^{p,N}(x) = \sqrt{\omega^{p,N}(x)p^{-1}},$$

y

$$\bar{K}_1^{p,N}(x) = (Np - x)(Np)^{-1}\sqrt{\omega^{p,N}(x)(1-p)(Np)^{-1}},$$

donde

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{(1-p)(n+1)}{p(N-n)}},$$

y

$$\beta_n = \sqrt{\frac{(1-p)^2(n+1)n}{p^2(N-n)_2}}.$$

POLINOMIOS DE TCHEBICHEF

Los polinomios discretos de Tchebichef de orden n, $t_n^N(x)$ (Wang, G. B. y Wang, S. G., 2007), son aquellos polinomios que satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\sum_{0 \leq x \leq N-1} t_m^N(x) t_n^N(x) = \rho_n^N \delta_{m,n},$$

el cual está dado implícitamente por

$$t_n^N(x) = (1-N)_n \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n, -x, \ 1+n \\ 1, 1-N\end{matrix}\middle| 1\right), \qquad (2)$$

donde el cuadrado de la norma está dado por

$$\rho_n^N = (2n)!\binom{N+n}{2n+1}.$$

Además, estos polinomios satisfacen la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$x(N-x)\Delta\nabla t_n^N(x) + (N-1-2x)\Delta t_n^N(x) + n(n+1)t_n^N(x) = 0,$$

así como la relación de recurrencia de tres términos

$$(2n+1)(2x-N+1)t_n^N(x) = (n+1)t_{n+1}^N(x) + n(n^2-n^2)t_{n-1}^N(x), \qquad n \geq 1,$$

con las condiciones iniciales $t_0^N(x) = 1$ y $t_1^N(x) = 2x - N + 1$. Esta relación de recurrencia es usada para calcular los polinomios de Tchebichef de orden superior.

Según [44] el conjunto de polinomios definidos por (2), no es apropiado para momentos definidos desde el valor (2) hasta N^n. Para solucionar este problema, se introdujeron los polinomios modificados de Tchebichef, definidos por

$$\bar{t}_n^N(x) = \frac{t_n^N(x)}{\sqrt{\rho_n^N}},$$

la cual satisface la siguiente relación de recurrencia (Prattipati, S., 2015)

$$\bar{t}_n^N(x) = \left(\theta_{1,n}^N x + \theta_{2,n}^N\right)\bar{t}_{n-1}^N(x) + \theta_{3,n}^N \bar{t}_{n-2}^N(x), \quad n \geq 2,$$

con las condiciones iniciales $t_0^{-N}(x) = 1/\sqrt{N}$ y

$$\bar{t}_1^N(x) = (2x - N + 1)\sqrt{\frac{3}{N(N^2-1)}},$$

donde

$$\theta_{1,n}^N = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{4n^2-1}{N^2-n^2}}, \quad \theta_{2,n}^N = \frac{1-N}{n}\sqrt{\frac{4n^2-1}{N^2-n^2}} \quad \text{y} \quad \theta_{3,n}^N = \frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{2n+1}{2n-3}}\sqrt{\frac{N^2-(n-1)^2}{N^2-n^2}}.$$

APLICACIONES DE LOS MOMENTOS DE KRAWTCHOUK Y TCHEBICHEF EN IMÁGENES DIGITALES

Los momentos de Krawtchouk y Tchebichef son ampliamente usados en visión por computador y aplicaciones de procesamiento de imagen (Honarvar, B. y Flusser, J., 2014). Además muestran muchas propiedades atractivas en el campo de análisis de imagen (Yap, P., 2003; Shu, H. et al., 2010), proyección imagen, evaluación de calidad de la imagen (Wee, C., et al., 2010), reconstrucción de imagen (Bayraktar, B. et al., 2007; See, K. W.,2007), imagen médica (Dai, X. B., et al., 2010), marca de agua en la imagen, compresión de imagen (Prattipati, S., 2015), reconocimiento de patrones e implementación de software (Wang, G. B. y Wang, S. G., 2007), etc.

Ciertamente uno de los pioneros en el trabajo con momentos invariantes fue Hu, el cual introdujo este concepto para el reconocimiento de patrones. Aproximadamente dos décadas más tarde Teague propuso los polinomios ortogonales continuos como las funciones bases para calcular momentos continuos y así reconstruir la imagen a partir de estos momentos ortogonales. Teague basándose en la teoría de polinomios ortogonales continuos, demostró que la imagen puede ser reconstruida fácilmente a partir de un conjunto de momentos ortogonales, como momentos de Zernike y Legendre los cuales han sido extensamente estudiados, por ejemplo (Zhu, H., 2012; Chong, C. y Raveendran, P., 2007; Bayraktar, B. et al., 2007; Yap, P., 2003; Wee, C., et al., 2010).

Además, han sido aplicados en esteganografía, por ejemplo: Elshoura, S. M. y Megherbi, D. B, (2013) presentaron dos esquemas de ocultamiento de la información con alta capacidad, en los cuales se puede esconder gran cantidad de información en las imágenes de niveles gris con alta transparencia usando momentos de Tchebichef. Elshoura y Megherbi, propusieron un esquema seguro con alta capacidad de ocultamiento de la información donde son separadas completamente dos imágenes arbitrarias con gran nivel a escala de gris, una imagen oculta la información y una imagen de autenticación de la marca de agua es incrustada en los momentos de Tchebichef de la imagen trasportada con alta imperceptibilidad.

Yap, P., (2003) propuso utilizar los momentos de Krawtchouk como descriptores de imágenes, gracias a la ortogonalidad discreta de los momentos de Krawtchouk, sus resultados experimentales mostraron que están mejor en términos de error de reconstrucción cuando son comparados con los momentos de Zernike, Legendre y Tchebichef. En el mismo trabajo se describe el cálculo de los momentos de Krawtchouk para una imagen y se presentan dos métodos originales que utilizan las salidas de filtros digitales en cascadas derivados de los momentos de Krawtchouk, el primer método utiliza las salidas del filtro digital para formar momentos geométricos y a través de estos se obtienen los momentos de Krawtchouk, el segundo método utiliza una relación directa para obtener los momentos de Krawtchouk a partir de las salidas del filtro digital.

En (Wee, C., et al., 2010) se investigan las propiedades de las transformadas de los polinomios de Tchebichef, demostrando que pueden ser aplicadas en algoritmos de compresión y reconstrucción de imágenes. Además los resultados concluyen que para imágenes en escala de gris, la Transformada de Tchebichef exhibe mejores resultados que los obtenidos a partir de la Transformada Discreta de Coseno (DCT).

(Wee, C., et al., 2010) propone un nuevo conjunto de funciones de momentos ortogonales basado en los polinomios discretos de Tchebichef. En Chong, C. et al., (2003) se analizan aspectos de reconstrucción imágenes para la compresión de estas y usan la transformada de los momentos de Tchebichef en lugar de DCT. En Zhu, H., (2012) se desarrolla un nuevo algoritmo de compresión de imagen que usa los momentos ortogonales discretos de Tchebichef basado en la curva de Hilbert.

CONCLUSIONES

1. En este trabajo, se introducen los polinomios ortogonales discretos de Krawtchouk y Tchebichef.
2. Se formulan los momentos ortogonales que se derivan de las funciones hipergeométricas de los polinomios de Krawtchouk y Tchebichef.
3. El estudio y análisis de los momentos de Krawtchouk y Tchebichef, muestra que los polinomios propuestos tienen potencialidades prometedoras, especialmente para el trabajo con imágenes digitales.

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

Barmak, S. A. y Jan, F. (2014). Fast computation of Krawtchouk moments. *Inform. Sci*, vol. 288, pp. 73-86.

Bayraktar, B., Bernas, T., Robinson, J. y Rajwa, B., (2007). A numerical recipe for accurate image reconstruction from discrete orthogonal moments". *Pattern Recognition*, vol. 40, pp. 659-669.

Chong, C. y Raveendran, P., (s/a). "On the computational aspects of Zernike moments. Image and Vision Computing", vol. 25, pp. 967-980.

Chong, C., Raveendran, P. y Mukundan, R., (2003). A comparative analysis of algorithms for fast computation of Zernike moments. *Pattern Recognition*, vol. 36, pp. 731-742.

Dai, X. B., Shu, H. Z., Luo, L. M., Han G. N. y Coatrieux, J. L., (2010). Reconstruction of tomographic images from limited range projections using discrete Radon transform and Tchebichef moments. *Pattern Recognition*, vol. 43, pp. 1152-1164.

Elshoura, S. M. y Megherbi, D. B. (2013). A secure high capacity full-gray-scale-level multi-image information hiding and secret image authentication scheme via Tchebichef moments. Signal Processing: Image Communication. http://dx.doi.org/10.1016/j.image.2012.12.005.

Honarvar, B. y Flusser, J., (2014). Fast computation of Krawtchouk moments. Information Sciences, pp. 73-86.

Hu, B. y Liao, S., (2013). Local Feature Extraction Property of Krawtchouk Moment. Lecture Notes on Software Engineering, vol. 1, pp. 356-359.

Prattipati, S., Swamy, M. y Meher, P. K, (2015). A Comparison of Integer Cosine an Tchebichef Transforms for Image Compression Using Variable Quantization. *Journal of Signal and Information Processing*, vol. 6, pp. 203-216.

See, K. W., Loke, K. S., Lee, P. A. y Loe, K. F., (2007). Image reconstruction using various discrete orthogonal polynomials in comparison with DCT. *Appl. Math. Comput*, vol. 193, pp. 346-359.

Shu, H., Zhang, H., Chen, B., Haigron, P. y Luo, L. (2010). Fast Computation of Tchebichef Moments for Binary and Grayscale Images. IEEE *Trans. Image Process*, vol. 19, pp. 3171-3180.

Yap, P., Paramesran, R. y Ong, S. H. (2003). Image Analysis by Krawtchouk Moments. IEEE *Trans. Image Process*, vol. 12, pp. 1367-1377.

Wee, C., Raveendran, P. y Mukundan, R. (2010). Image quality assessment by discrete orthogonal moments. *Pattern Recognition*, vol. 43, pp. 4055-4068.

Wang, G. B. y Wang, S. G., (2007). Recursive computation of Tchebichef moment and its inverse transform. *Pattern Recognition*, vol. 39, pp. 47-56.

Zhu, H., (2007). Image representation using separable two-dimensional continuous and discrete orthogonal moments. Pattern Recognition, vol. 45, (2012), pp. 1540-1558. ISSN: 0305-0548