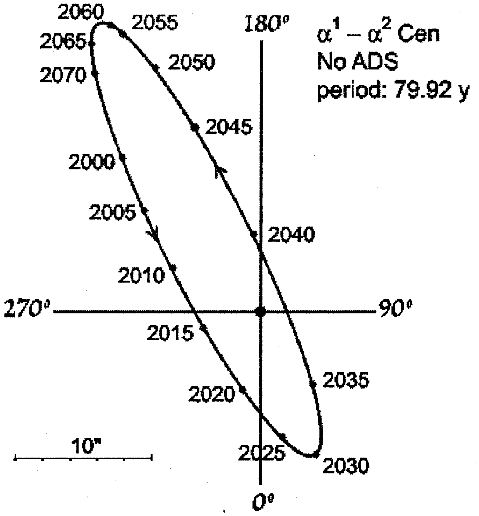
Opći oblik III. Keplerovog zakona

Ettore Tamajo[1], *Zagreb*

Više od polovice zvijezda u Galaksiji nalazi se u dvojnim ili višestrukim sustavima zvijezda. U dvojnom sustavu zvijezde kruže oko zajedničkog centra mase sustava. Uzmimo dvije zvijezde s masama M_1 i M_2 koje obilaze centar mase sustava C (sl. 1) u kružnim orbitama s polumjerima r_1 i r_2.



Slika 1. Dvojni sustav α Centauri u kojem komponente kruže oko gravitacijskog središta s periodom 80 godina.

U svakoj točki staze pojedine zvijezde gravitacijska sila između zvijezda F_g jednaka je centripetalnoj sili F_c:

$$\frac{GM_1M_2}{(r_1+r_2)^2} = M_1r_1\Omega^2, \tag{1}$$

$$\frac{GM_1M_2}{(r_1+r_2)^2} = M_2r_2\Omega^2, \tag{2}$$

gdje je G konstanta gravitacije, a Ω kutna brzina zvijezda, i za obje mora biti jednaka. Sređene, jedn. (1) i (2) možemo napisati u obliku:

$$\frac{GM_2}{(r_1+r_2)^2} = r_1\Omega^2, \tag{3}$$

---

[1] Autor je mlađi asistent u Fizičkom odsjeku Prirodoslovno–matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-mail: etamajo@phy.hr

$$\frac{GM_1}{(r_1+r_2)^2}=r_2\Omega^2. \tag{4}$$

Iz (3) i (4) slijedi

$$\Omega^2=\frac{G(M_1+M_2)}{(r_1+r_2)^3}. \tag{5}$$

U slučaju kružnih staza kutna brzina Ω određena je iznosom perioda kruženja P

$$\Omega=\frac{2\pi}{P}. \tag{6}$$

Uvrstimo izraz za kutnu brzinu Ω u jedn. (5) i preuredimo dobiveni izraz tako da izrazimo sumu masa zvijezda pomoću ostalih veličina

$$M_1+M_2=\frac{4\pi^2}{G}\cdot\frac{(r_1+r_2)^3}{P^2}. \tag{7}$$

Gornji je izraz poopćeni oblik III. Keplerovog zakona gibanja planeta. Johannes Kepler (1571. – 1630.) je 1619. godine otkrio da su kvadrati sideričkih perioda obilaska planeta oko Sunca razmjerni s kubovima velikih poluosi njihovih eliptičnih staza

$$\frac{P_p^2}{a_p^3}=\text{konstanta}.$$

U planetarnim sustavima, poput Sunčevog, gdje se masa planeta u odnosu na matičnu zvijezdu (Sunce) može zanemariti, vrijedi Keplerov harmonijski zakon. U slučaju dvojnih zvijezda takva aproksimacija više nije opravdana i potrebno je koristiti opći oblik III. Keplerovog zakona (jedn. 7).

Podijelivši jedn. (3) i (4) dobivamo uvjet za polumjere staza

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{M_2}{M_1} \tag{8}$$

ili

$$M_1r_1=M_2r_2.$$

Drugim riječima, točka C je centar mase dvojnog sustava (vrijedi zakon poluge).

Astronomi najčešće udaljenosti planeta od zvijezda, ili zvijezda u dvojnom sustavu, izražavaju u astronomskim jedinicama AJ, orbitalni period u godinama, a mase u jedinicama Sunčeve mase $M_\odot$. Tada je konstanta $4\pi^2/G$ u jedn. (7) jednaka jedinici. (Provjerite za vježbu!)

Zadatak 1. Izračunajte mase zvijezda u dvojnom sustavu Cyg X-1 na osnovi podataka da je udaljenost među komponentama 0.21 AJ, a period ophoda je 5.6 d, te da se udaljenosti komponenata od centra mase odnose kao $1:3$. Jedna od zvijezda u tom sustavu je kandidat za crnu rupu.

Rješenje. Iz uvjeta

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{3} \tag{9}$$

i jednadžbe (8) slijedi

$$M_1=3M_2. \tag{10}$$

Kao drugu jednadžbu po masama (imamo dvije jednadžbe jer imamo dvije nepoznanice), iskoristit ćemo opći oblik III. Keplerovog zakona (jedn. 7),

$$M_1+M_2=\frac{4\pi^2}{G}\cdot\frac{r^3}{P^2},$$

gdje smo s r označili udaljenost među komponentama ($r = r_1 + r_2$). Sve poznate veličine stavili smo na desnu stranu jednadžbe. Nakon uvrštenja njihovih numeričkih vrijednosti ($G = 6.67\,10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}) dobivamo:

$$M_1 + M_2 = 40\,\mathrm{M}_\odot. \tag{11}$$

Rješenje sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice (jedn. (10) i (11)) daje pojedinačne mase komponenata u dvojnom sustavu Cyg X-1:

$$M_1 = 30\,\mathrm{M}_\odot,$$
$$M_2 = 10\,\mathrm{M}_\odot.$$

Cyg X-1, kao što sam naziv objekta govori, jedan je od prvih otkrivenih i vrlo snažnih izvora rendgenskog zračenja. U spektru se vidi samo komponenta manje mase, dok je komponenta s trostruko većom masom skrivena. Zbog toga je Cyg X-1 kandidat za crnu rupu.

Zadatak 2. Izvedite izraz za brzinu kruženja tijela u dvojnom sustavu ako je period ophoda sustava P, komponente sustava kruže na udaljenostima r_1 i r_2 od gravitacijskog središta, a mase su im M_1 i M_2. Iskoristite podatke iz prethodnog zadatka i odredite kojim se brzinama kreću komponente u sustavu Cyg X-1.

Rješenje. Brzine tijela dvojnog sustava na kružnoj stazi komponenata su

$$v_1 = \frac{2r_1\pi}{P}, \tag{12}$$

$$v_2 = \frac{2r_2\pi}{P}. \tag{13}$$

Treći Keplerov zakon za dvojni sustav glasi

$$M_1 + M_2 = \frac{(r_1 + r_2)^3}{P^2}\frac{4\pi^2}{G}. \tag{14}$$

Iz čega je period

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{G(M_1 + M_2)}}. \tag{15}$$

Uvrštavanjem izraza za period u izraze za brzine, dobijemo:

$$v_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_2}\sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{r_1 + r_2}}, \tag{16}$$

$$v_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2}\sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{r_1 + r_2}}. \tag{17}$$

Uvrštavanjem poznatih veličina za Cyg X-1 dobili bismo $v_1 = 72$ km s^{-1} i $v_2 = 216$ km s^{-1}. Uočimo da komponenta veće mase ima manju brzinu kruženja i bliže je centru mase od komponente čija je masa manja.

Zadatak 3. Jupiter se nalazi 5.2 AJ od Sunca i ima masu od 0.001 M$_\odot$. Koliki je polumjer Sunčeve staze oko zajedničkog centra mase zbog gravitacijske sile Jupitera? (1 AJ$=1.496\,10^{11}$ m)

Uputa. Sunčeva staza zbog privlačenja Jupitera ima polumjer $7.8\cdot10^8$ m, što je malo veće od Sunčevog polumjera i, prema tome, pojava koja se može utvrditi preciznim mjerenjima.