



University of Groningen

Elke positieve actie begint met critiek"

Bastide-van Gemert, Sacha la

IMPORTANT NOTE: You are advised to consult the publisher's version (publisher's PDF) if you wish to cite from it. Please check the document version below.

Document Version

Publisher's PDF, also known as Version of record

Publication date:

2006

[Link to publication in University of Groningen/UMCG research database](#)

Citation for published version (APA):

Bastide-van Gemert, S. L. (2006). Elke positieve actie begint met critiek": Hans Freudenthal en de didactiek van de wiskunde. [Groningen]: Rijksuniversiteit Groningen.

Copyright

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

Take-down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from the University of Groningen/UMCG research database (Pure): <http://www.rug.nl/research/portal>. For technical reasons the number of authors shown on this cover page is limited to 10 maximum.

Freudenthal ziet het zo

Stel je voor wat ik een kwart eeuw geleden over zo'n gerontocraat zou hebben gezegd! Nee, geen gerontocraat – ik ben wel ambitieus maar nooit heerszuchtig geweest. Haantje de voorste, maar dan een die even gauw op de vlucht sloeg. Vooral voor gerontocraten.

Hans Freudenthal in *Schrijf dat op, Hans*, 1987¹

9.1 Inleiding: veranderingen van het strijdtoneel

In 1970 werd Freudenthal 65 jaar oud. In het hoofdstuk 'Kwalen van de ouderdom' uit zijn boek *Schrijf dat op, Hans* vertelde hij hoe hij tegen die tijd bewust zijn lopende activiteiten afbouwde en diverse voorzitterschappen opzegde. Toch lukte het hem niet een lege agenda te creëren: wat hij aan de ene kant aan activiteiten schrapte, kwam er aan de andere kant bij. "Andere, naar verhouding zwaardere verplichtingen", zo omschreef hij ze.²

Veel van deze andere activiteiten waren een direct gevolg van de (cultuur)veranderingen op het gebied van het wiskundeonderwijs in deze jaren. Veranderingen, waarvan Freudenthal zich niet afzijdig kon en wilde houden.

In 1968 was in Nederland het nieuwe wiskundeleerplan ingevoerd en was de Mammoetwet van kracht gegaan. Welke invloed dit zou hebben op het wiskundeonderwijs was toen nog niet duidelijk. Ook al waren de veranderingen in het leerplan niet zo radicaal 'New Math' als in sommige andere landen, het gevaar dat de invoering van moderne wiskunde de aandacht voor modernisering van de onderwijsmethoden zou overheersen was nog steeds reëel. Het bestrijden van dit gevaar bleef dan ook een geregeld terugkerend onderwerp in Freudenthals artikelen en voordrachten.³ Hij schreef zelf over de noodzaak ervan:

- 1 Freudenthal over zichzelf en zijn activiteiten op het gebied van het wiskundeonderwijs in de jaren zeventig en tachtig; Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 329.
- 2 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 328.
- 3 Over het verschil tussen het onderwijzen van moderne wiskunde en het moderniseren van het wiskundeonderwijs schreef hij onder andere in de volgende artikelen: Hans Freudenthal, 'Why to teach mathematics so as to be useful', *Educational Studies in Mathematics* 1-2 (1968) 3-8; Freudenthal, 'Modernisering Leerplan Wiskunde. Antwoord aan Prof. de Bruyn', *Euclides* 43 (1968) 321-322; Freudenthal, 'Les tendances nouvelles de l'enseignement mathématique', *Revue de l'Enseignement Supérieur* 46-47 (1969) 23-29; Freudenthal, 'Introduction', *NEW TRENDS in Mathematics Teaching* 11 (1970); Hans Freudenthal, 'Die neuen Tendenzen im Mathematik-Unterricht', *Neue Sammlung* 11 (1971), 146-153; Hans Freudenthal, 'De Middenschool', *Rekenschap* 20 (1973) 157-165.

Reform continues, and it is too soon to evaluate the results. This is a period of transition and uncertainty. Without exaggerating the importance of some less acceptable tendencies, they nevertheless must be pointed out in order to be complete and perhaps to warn those who might otherwise be victimized by them.⁴

Maar over het algemeen was eind jaren zestig dit onderwerp niet meer zo vaak aan de orde als enkele jaren eerder. Parallel met de veranderingen in het maatschappelijk klimaat in de jaren zestig (waarin gelegenheid tot zelfontplooiing en bevestiging van de eigen identiteit belangrijk werden) zette ook een (voorzichtige) cultuuromslag binnen het wiskundeonderwijs in. Hierbij kwam, zij het aanvankelijk nog zeer mondjesmaat, steeds meer aandacht voor de didactiek van de wiskunde en daarmee de leerling. De tijd waarin hoofdzakelijk de wiskunde *an sich* als uitgangspunt voor de invulling en uitvoering van het wiskundeonderwijs genomen werd, leek voorbij.

Door deze toenemende aandacht voor de didactiek groeide ook de erkenning voor het belang van ervaringen uit de praktijk van het klaslokaal. In *Euclides* is deze kentering goed waar te nemen aan de hand van de onderwerpen die in de artikelen aan bod kwamen. De praktijk van het wiskunde onderwijzen nam in verhouding tot (de hogere) wiskunde sec een steeds grotere plaats in.⁵ In 1969 werd dit door de redactie zelfs expliciet genoemd in haar voornemen voor het tijdschrift:

Toen de redactie aan de uitgever verzocht *Euclides* een nieuw jasje aan te trekken, was dat niet alleen met het doel dit tijdschrift een meer eigentijds uiterlijk te geven. Het vernieuwde omslag moet ook een symbool zijn voor een verandering van de inhoud. Al dikwijls werd er van verschillende zijden opgemerkt, dat *Euclides* maar weinig waar maakte van de ondertitel op het omslag: Tijdschrift van de didactiek van de wiskunde. Veel van de artikelen waren van vaktechnische aard, interessant, maar niet in de eerste plaats gericht op de didactiek. De redactie wil ernstig proberen daarin verandering te brengen. [...] Het spreekt vanzelf dat de redactie zijn doel slechts kan bereiken in samenwerking met de lezers. Vragen, suggesties, artikelen, lesverslagen, enz. zijn daarom niet alleen van harte welkom, ze zijn een noodzakelijke voorwaarde om van *Euclides* een tijdschrift voor de didactiek van de wiskunde te kunnen maken.⁶

Met de groeiende erkenning voor het belang van praktijkervaringen, zou ook ‘het kijken op de millimeter’ binnen het wiskundeonderwijs meer aandacht krijgen. In eerste instantie gebeurde dit in *Euclides* nog naast de aandacht die er traditiegetrouw was voor de zuiver wiskundige onderwerpen, maar in de jaren zeventig kwam de microdidactiek meer aan bod. Het ‘kijken naar het kind’ won daardoor terrein als hulpmiddel bij het leren (wiskunde) onderwijzen.

Niet alleen was er meer ruimte voor praktijkervaringen door de toegenomen aandacht voor didactiek, omgekeerd werkte dit ook: onderwijspraktijkervaringen

4 Freudenthal, ‘Recent tendencies in the teaching of mathematics’, in: W.E. Lamon, ed., *Learning and the nature of mathematics* (Chicago 1972) 11-18, aldaar 13-14; identiek aan: Freudenthal, ‘Les tendances nouvelles de l’enseignement mathématique’, *Revue de l’enseignement supérieur* 46-47 (1969) 23-29.

5 *Euclides. Maandblad voor de Didactiek van de Wiskunde* 43-50 (1967-1975).

6 G. Krooshof, ‘Euclides. Tijdschrift voor de didactiek van de wiskunde’, *Euclides* 45 (1969) 1.



Groepsfoto van de deelnemers van het colloquium ‘How to teach mathematics so as to be useful’ in Utrecht (1967), met onder andere: Pollak (links achteraan), Wansink (met hand op revers), Monna (rechts van Wansink), Freudenthal (middenvoor met vlinderstrik), Servais (achter Freudenthal), Van der Blij (derde rij, vierde van rechts met gestreepte das), Behnke (tweede rij, links naast Van der Blij) en mevrouw Krygovska (uiterst rechts).

hadden weer hun invloed op de ontwikkeling van de didactiek en de invulling van les en leerplan. Ook kwam er met de invoering van de Mammoetwet meer aandacht voor de wiskunde op andere schoolsoorten dan die van het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs. Zelfs kleuter- en basisschool kwamen aan bod – iets wat tot dan toe ongekend was.

Naast en door deze tendens groeide de wiskundedidactiek als vakdidactiek. Deze ontwikkeling was ook af te leiden uit het groeiende aantal (internationale) congressen en bijeenkomsten met als thema wiskundeonderwijs. Zo was er op initiatief van Freudenthal onder andere het ICMI-colloquium met als thema ‘How to teach mathematics so as to be useful’, gehouden in Utrecht van 21 tot 25 augustus 1967. Het was een vervolg op het eerder in Utrecht gehouden colloquium ‘Modern curricula in secondary mathematical education’ van 19 tot 23 december 1964. ‘How to teach mathematics so as to be useful’ was het eerste internationale colloquium, waarin voor een internationaal forum de discussie tussen de verschillende opvattingen omtrent de rol van het nut van de wiskunde centraal stond. Het eerste ICMI-congres – ‘Premier Congrès International de l’Enseignement Mathématique’ – werd ook voorgezeten door Freudenthal. Dit ICMI-congres (ICME) vond plaats in

Lyon van 24 tot 31 augustus 1969 en kreeg in 1972 in Exeter een vervolg. Het zou daarna elke vier jaar herhaald worden. Daarnaast waren er didactiekbijeenkomsten met fysici zoals die in 1967 in Lausanne, die een voorloper was van het ICMJ-colloquium van later dat jaar. Freudenthal was op de meeste van dergelijke congressen aanwezig. Het ‘Congress on the Integration of Science Teaching’ in 1968 in Varna was in Freudenthals herinnering een van de beste congressen die hij ooit meemaakte: “I think because of its scientifically mixed public – a typical non-nonsense [sic] conference”.⁷

In Nederland zou de oprichting van het IOWO een belangrijke factor in deze ontwikkelingen blijken.⁸ Als instituut was het uniek in zijn soort in Nederland en daarmee een teken van het toenemende belang van vakdidactiek – in ieder geval binnen het vak wiskunde. In het nieuwe didactische klimaat was er blijkbaar ruimte voor een dergelijk initiatief. De oprichting ging organisatorisch bepaald niet van een leien dakje. Het had niet veel gescheeld of de wiskundendidactiek had net als andere vakken moeten wachten op een overkoepelend leerplan-instituut.

Het IOWO was niet alleen een voortvloeisel uit die nieuwe belangstelling voor de wiskundendidactiek, het was er tegelijkertijd een wezenlijk onderdeel van. Bovendien was het een instrument om die nieuwe aandacht te voeden, de vakdidactiek te doen groeien en vorm te geven. De invloed van het daar ontwikkelde wiskundeonderwijs zou ongekend blijken.⁹ Ook – en juist – binnen de werkwijze van het IOWO werd ‘het kijken naar het kind’ het motto.

Waar stond Freudenthal in dit alles? Hoewel bijna pensioengerechtigd, stond hij allesbehalve aan de zijlijn. Naast een met de jaren steeds groter wordende stroom van artikelen en voordrachten over wiskundeonderwijs van zijn hand verscheen in 1973 Freudenthals boek *Mathematics as an educational task*, zowel in het Engels als (tweedelig) in het Duits.¹⁰ Hierin waren bijna al zijn eerder geschreven artikelen in één lijvig boekwerk van bijna 700 pagina’s samengebracht. Het zou niet zozeer als een integraal te lezen boek (ook al was het wel zo opgezet), maar eerder als een belangrijk en indrukwekkend naslagwerk voor wiskundendidactici gaan fungeren. Inhoudelijk voegde het weinig opzienbarende vernieuwende inzichten toe aan Freudenthals al in artikelen en voordrachten uitgedragen gedachtegoed, maar als teken van zijn nu bijna algehele toewijding aan het wiskundeonderwijs en de wiskundendidactiek was het van groot belang.¹¹

7 Freudenthal aan Howson, 1983; RANH, Freudenthal Papers, inv.nr. 1771, 38.

8 Over (de oprichting van) het IOWO, zie paragraaf 9.3.

9 Voor een kijkje in de ‘IOWO-keuken’ zie bijvoorbeeld ook: De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde*; Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs*.

10 Freudenthal, *Mathematics as an educational task* (Dordrecht 1973); Freudenthal, *Mathematik als pädagogische Aufgabe I, II* (Stuttgart 1973).

11 Er waren enkele onderwerpen die (in vergelijking met Freudenthals artikelen) in *Mathematics as an educational task* extra nadruk kregen, zoals de aandacht die hij besteedde aan de geschiedenis van de wiskunde en de appendix die hij wijdde aan kritiek op Piaget. Zie ook paragraaf 9.6.3. In een bespreking van Van Streuns proefschrift *Heuristisch wiskunde-onderwijs* uit 1989 schreef Freudenthal over

Naast deze publicaties was hij ook in het veld actief en overal bij betrokken: van activiteiten op het organisatorische vlak, bijvoorbeeld het oprichten van een internationaal tijdschrift voor wiskundededictiek, tot het observeren van de praktijk in het klaslokaal.¹² Als hoogleraar-directeur van het IOWO profileerde hij zich in Nederland als dé wiskundededicticus. Maar ook internationaal speelde hij een voraanstaande rol binnen de wiskundededictiek. Tegelijkertijd bleef Freudenthal zijn eigen gedachtegoed ontwikkelen, aanscherpen en uitbreiden.

Het ligt voor de hand deze ontwikkeling toe te schrijven aan de invloed van bovenstaande tendensen – en met name aan de invloed van het IOWO-werk. Of was Freudenthal juist de voorloper en katalysator van de nieuwe ontwikkelingen in de wiskundededictiek? Wat was zijn rol in de ontwikkelingen van het IOWO en welke rol speelde het IOWO in de zijne? Hoe ontwikkelde zich zijn gedachtegoed? Hoe profileerde Freudenthal zich in deze jaren in het nationale en internationale veld?

9.2 Educational Studies in Mathematics

Binnen alle nieuwe activiteiten die Freudenthal eind jaren zestig ontplooidde en de onvermoeibare inzet die hij daarbij tentoonspreidde, nam die van de oprichting van het tijdschrift *Educational Studies in Mathematics* een bijzondere plaats in. Er waren namelijk weinig ondernemingen waarbij hij zo duidelijk in zijn eentje de kar trok en initiatief nam. Anders dan bij de totstandkoming van het IOWO het geval zou zijn, was de rol van Freudenthal bij de oprichting van dit tijdschrift niet alleen explicieter, maar ook veel meer een soloactie.

9.2.1 Met frisse tegenzin: de oprichting

De aanleiding tot oprichting was duidelijk. Op het ‘Colloquium on modern curricula in secondary education’, in december 1964 in Utrecht, werd een resolutie aangenomen waarin besloten werd tot de oprichting van een internationaal tijdschrift over wiskundeonderwijs.¹³ In Freudenthals herinnering was het Monna die als secretaris van het colloquium met deze suggestie kwam.¹⁴ Vier maanden later deed Freudenthal een eerste informele poging om tot de vorming van een ‘editorial board’ te komen. Hij stuurde een brief aan een door hem zelf gemaakte selectie uit

zijn eigen *Mathematics as an educational task*: “[*Mathematics as an educational task*] is nauwelijks meer dan een bundeling van artikelen die vanaf het midden van de jaren 50 tot de late 60 zijn verschenen en dus ná 1973 geen verplichte lectuur meer zijn.” Hans Freudenthal, ‘Boekbesprekingen’, *Nederlands tijdschrift voor opvoeding, vorming en onderwijs* 5 (1989) 302-304, aldaar 302.

12 Over het oprichten van het internationale tijdschrift voor wiskundededictiek, zie paragraaf 9.2.

13 Dit colloquium werd georganiseerd in opdracht van ICMJ; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1831.

14 Freudenthal aan Howson, 1983; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 38.

de deelnemerslijst van het colloquium.¹⁵ Allen reageerden positief. Beberman was de enige die aangaf het te druk te hebben om zitting te nemen in de redactie.

Om onduidelijke redenen liet Freudenthal het hierbij. Pas in 1967 deed hij opnieuw moeite om de resolutie uit te voeren. Aanleiding hiervoor was dat hij had vernomen dat de Amerikaanse wiskundige Peter Hilton ook met het idee rondliep een dergelijk tijdschrift op te zetten. Freudenthal stelde voor de krachten te bundelen. Hilton ging hier enthousiast op in, hoewel hij Freudenthals voorstel om samen hoofdredacteur te worden afsloeg.¹⁶ Samen stelden zij een nieuwe lijst met potentiële redactieleden samen.¹⁷ Het belangrijkste criterium daarbij was uit zoveel mogelijk verschillende landen een vertegenwoordiger te benaderen die binnen dat land een vooraanstaande positie binnen het wiskundeonderwijs vervulde. Freudenthal stak echter ook persoonlijke voorkeuren niet onder stoelen of banken:

I did not insert Papy; he is an impossible man to work with; in any case from Belgium Servais is much better, and he is a professeur de lycée.¹⁸

Over de naam van het tijdschrift werden de heren het snel eens. 'Mathematics Education' en dergelijke vond Freudenthal te nietszeggend, bovendien wist hij bijna zeker dat er al periodieken met een dergelijke naam in een taal bestonden.¹⁹ Hilton stelde 'Educational Studies in Mathematics' voor.²⁰

In zijn brief van 1 november 1967 schreef Hilton over de plannen die er zouden zijn voor de oprichting van nog twee tijdschriften over wiskundeonderwijs. 'The Chicago Center for International Mathematical Education Information' zou hier-

15 Deze brief ging op 13 april 1965 uit naar de volgende personen: prof. M. Beberman (Verenigde Staten), E. Castelnuovo (Italië), L. Félix (Frankrijk), dr. A.Z. Krygovska (Polen), prof. W. Servais (België), prof. P. Suppes (Verenigde Staten), prof. B. Thwaites (Groot-Brittannië) en prof. A. Wittenberg (Canada); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1785.

16 Freudenthal aan Hilton, 10 oktober 1976; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1786.

17 Correspondentie tussen Hilton en Freudenthal, oktober-december 1967; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1786. Op Freudenthals suggestie werden toegevoegd: dr. A. Engel (Duitsland), prof. A.M. Gleason (Verenigde Staten), prof. h.b. Griffiths (Groot-Brittannië), C. Hope (Groot-Brittannië), dr. H.O. Pollak (Verenigde Staten), prof. A. Revuz (Frankrijk), prof. S. Sobolev (Sovjet-Unie), prof. dr. H.G. Steiner (West-Duitsland) en prof. I.M. Yaglom (Sovjet-Unie). Hilton stelde de volgende personen voor: dr. D.K. Abbiw-Jackson (Ghana), prof. E.G. Begle (Verenigde Staten), prof. G. Choquet (Frankrijk), prof. E.B. Dynkin (Sovjet-Unie) en prof. W.T. Martin (Verenigde Staten).

18 Freudenthal aan Hilton, 20 oktober 1967; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1786. In een discussie op een conferentie van Belgische onderwijzers in 1961 was Freudenthal zodanig door Papy beleedigd dat hij hiervoor door de organisatie achteraf in een brief verontschuldiging aangeboden kreeg. Papy zou volgens Freudenthal geroepen hebben: "Even Professor Freudenthal [volgens Freudenthal "– with the undertone of that gaga –"] confesses to teach linear algebra". Freudenthal had zo'n hekel aan Papy, dat hij pas na Papy's aftreden als CIEAEM-voorzitter in 1970 de CIEAEM-bijeenkomsten ging bijwonen. Later zou dit nog enigszins bijtrekken. Dat Freudenthals relatie met Servais – ondanks enorme meningsverschillen aangaande wiskundeonderwijs – aanzienlijk beter was bleek wel uit zijn uitspraak in diezelfde brief aan Howson: "Never in my life, with people I met, was friendship and profound disagreement more closely knitted than in my relation with Servais"; Freudenthal aan Howson, 1983; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 38.

19 Freudenthal aan Hilton, 20 okt 1967; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1786.

20 Hilton aan Freudenthal, 1 november 1967; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1786.

voor niet alleen hele concrete ideeën hebben, maar ook het plan om Freudenthal voor het editorial board van een van de twee te vragen.²¹ Freudenthal zag hierin geen probleem. Volgens hem was er zeker ruimte voor drie of meer periodieken. Was hij echter eerder van deze plannen op de hoogte geweest, had hij waarschijnlijk niet de organisatie van een nieuw tijdschrift op zich genomen:

Nevertheless I must say if I had known about the Chicago projects, I would not have started. I did it because no other seemed to do [sic]. It is with reluctance that at my age I take new charges on my shoulders. However, now I cannot withdraw.²²

Freudenthal zag op zich geen bezwaar in overleg met het Centrum in Chicago, maar wilde er geen tijd mee verdoen. Er was juist nu een belangrijke aanleiding om werk van een tijdschrift over wiskundendidactiek te maken. In de manuscripten van het colloquium in Utrecht 'How to teach mathematics so as to be useful' van eerder dat jaar had hij een naar eigen zeggen "excellent collection of studies", die hij graag integraal gepubliceerd zag. Hij wilde hier niet te lang mee wachten:

not to be the first on the market (this would be ridiculous), but because I have good manuscripts and can show people that good manuscripts can be published.²³

Dit gebeurde dan ook. Uitgegeven door Reidel Publishing Company verschenen alle voordrachten van het colloquium, inclusief de paneldiscussie, in het eerste nummer van *Educational Studies in Mathematics (ESM)*.²⁴ Freudenthal ontving veel felicitatiebrieven naar aanleiding van het verschijnen van zijn tijdschrift. De enige openlijke kritiek was die op de relatief hoge prijs van het tijdschrift.²⁵ In *Euclides* werd de komst van *ESM* beschreven als een zeer welkome en noodzakelijke aanvulling op het toenmalige tijdschriftenaanbod, want:

In de huidige periode van snelle evolutie op het gebied van modernisering van het wiskundeonderwijs in alle landen ter wereld is er aan zo'n tijdschrift stellig behoefte.²⁶

Dat Freudenthal editor van het tijdschrift was, was volgens de recensent niet verbazingwekkend gezien zijn internationale activiteiten. Door het internationale karakter vormde *ESM* ook geen directe bedreiging voor *Euclides*. Anders lag dat in het geval van *l'Enseignement Mathématique*, het officiële tijdschrift van de ICMI. In oktober 1968 sprak Freudenthal met Cartan over de positie van beide tijdschrif-

21 Het zou hier gaan om een 'Journal of International Mathematical Education', het andere tijdschrift was 'Mathematical Education Abstracts'; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1786.

22 Brief aan Hilton, 9 november 1967; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1786.

23 Ibid.

24 *Educational Studies in Mathematics* 1 (1968) 1-243. De 'panel discussion' was een letterlijke weergave van de discussie over het doel van het wiskundeonderwijs van het panel bestaande uit Behnke, Hammersley, Krygovska, Pollak, Revuz, Servais en Sobolev, onder leiding van Freudenthal.

25 Correspondentie met D. Reidel Publishing Company, de uitgever van *Educational Studies in Mathematics*, recensie in: *The New Era. The World Education Fellowship Journal* 51 (1970), recensie in: *Euclides* 45 (1969); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1789, 1790.

26 Boekbespreking door Joh.H. Wansink, *Euclides* 45 (1969) 38-39, aldaar 38.

ten, waaruit de concurrentie ter sprake kwam die vanuit ICMI wel degelijk gevoeld werd.

Henri Cartan was lid van de Bourbaki-groep en stond ook de introductie van moderne wiskunde in het onderwijs voor. Freudenthal was lange tijd goed bevriend met Cartan, tot een heftig meningsverschil naar aanleiding van Freudenthals lezing ‘Enseignement des mathématique modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’ in 1961. Freudenthal schreef hierover:

In Bologna [...] I seriously clashed with H. Cartan, who had been my friend for many years. These people could not understand that a mathematician of my rank did not hail Bourbaki at school but saw deep problems in such silly things as word problems in arithmetic, though he could not yet be excused by senility.²⁷

Ook in de jaren erna zouden Cartan, als prominente figuur binnen de IMU, en Freudenthal, als ICMI-lid, regelmatig lijnrecht tegenoverelkaar komen te staan. Aan deze animositeit lag achteraf bezien ook nog het volgende incident ten grondslag volgens Freudenthal:

At some opportunity I might unintentionally have insulted Cartan. On 5 September 1966 I asked him an explanation about a proof he had given (or sketched) of a so-called Weil Statement (on invariants of Lie groups). I should have known, though I can swear I didn't, that everybody knew the proof was wrong. Cartan never answered that letter. And that was that.²⁸

Freudenthal schreef achteraf over het gesprek met Cartan over *ESM*:

He complained about *ESM*, which he feared would be a deadly competitor to *L'Enseignement Mathématique*. In order to prove the excellence of the latter, he showed me an issue with, indeed, excellent survey papers by excellent mathematicians, though none about education. If I had shown him an issue of *ESM*, he would probably only have noticed the minor importance of the authors in mathematics. He was unable to grasp the difference.²⁹

Deze anekdote toont duidelijk aan op welke manier *ESM* een unieke functie vervulde.

9.2.2 Freudenthal als bewaker van het niveau

Het streven van het tijdschrift was het publiceren van “high level material on mathematical education of more than national interest”.³⁰ Anders dan bijvoorbeeld het nieuwe voornemen van *Euclides* om een (meer laagdrempelig) tijdschrift voor wiskundeonderwijs te zijn, was de inzet bij *ESM* hoger. Het doel was een forum te vor-

27 Freudenthal aan Howson, 1983; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 38.

28 Ibid.

29 Ibid.

30 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1790.

men voor publicatie en uitwisseling van *onderzoek* op het gebied van wiskundeonderwijs. Bovendien moesten de bijdragen van internationale waarde zijn.

In zijn openingstoespraak van het colloquium ‘How to teach mathematics so as to be useful’ benadrukte Freudenthal het belang van uitwisseling van ervaringen op internationaal niveau met een reeks retorisch bedoelde vragen:

Is the variety of national educational philosophies really a drawback to international talks on mathematical education or should I say that there is no better opportunity to test them than to have them bump against each other? Are not we too often and too readily inclined, when reading or hearing about the educational experiences in another country, under another educational system, to sigh: it is just a pity, but this does not apply to our situation? I would say whenever this happens, then something is wrong either in the one system or in the other, or, most likely, in both.³¹

Deze openingstoespraak werd min of meer als een redactioneel statement afgedrukt als eerste artikel in *ESM*.

Het internationale karakter kwam in het eerste nummer redelijk uit de verf met vooral Amerikaanse en West-Europese bijdragen.³² Freudenthal nam in zijn eentje de verantwoordelijkheid voor het niveau van de artikelen op zich. Vaak nodigde hij collega's uit iets voor *ESM* te schrijven, soms naar aanleiding van iets dat hij eerder van ze las, soms naar aanleiding van een voordracht.³³ Ook kreeg hij geregeld spontaan artikelen ter publicatie aangeboden. Veel artikelen probeerde hij nog te laten herschrijven, nog vaker wees hij ze af als ze niet aan zijn standaard en criteria voldeden. In zijn afwijzingen gebruikte hij vaak de volgende passage:

Almost every day the editor receives papers on mathematical subjects which show no or only weak relations to education. Such papers cannot be considered for publication. In particular, “educational” is not meant to include all elementary mathematics, nor are subjects from the history of mathematics to be considered as educational as such. Likewise mathematical studies in education (such as discussing mathematical techniques of processing educational data) are no subject of *Educational Studies in Mathematics*.³⁴

Wanneer een artikel gebaseerd was op experimenten eiste Freudenthal vóór eventuele publicatie inzage in het volledige materiaal. Volgens eigen zeggen was dit noodzakelijk en effectief gebleken. Het leek erop dat Freudenthal in zijn functie als editor een ‘one-man-show’ met *ESM* opvoerde. Toch deed hij zijn best niet alleen

31 Freudenthal, ‘Why to teach mathematics so as to be useful’, *Educational Studies in Mathematics* 1 (1968) 3-8, aldaar 4.

32 Met name Frankrijk en de Verenigde Staten waren goed vertegenwoordigd. Een uitzondering was een Poolse bijdrage van mevrouw Krygovska. In latere nummers verschenen ook steeds vaker Russische artikelen; *Educational Studies in Mathematics* 1 (1968).

33 Freudenthal schreef met een dergelijk verzoek onder andere aan Van Hiele (14 augustus 1968), Van Albeda (15 augustus 1968), Revuz (29 oktober 1968), Van Dormolen (11 november 1968) en Vredenduin (11 november 1968); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 1790 – 1794.

34 *ESM*-correspondentie; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1790.

zijn eigen mening als maatstaf te nemen. Aan Schoenfeld, van wie Freudenthal een artikel had afgewezen, schreef hij:

Finally, what matters is not writing a paper “mere consisting with my taste”. A large number of papers published in *ESM* were not my taste at all. I had a lot of papers published which I did not like. There are other tastes than mine and I try to respect them. It is the same as in mathematics itself. There are subjects and methods I never liked but I would not daresay they are bad mathematics. Education is different. There is certainly no unanimity about what is heuristics, problem solving, good teaching, and so on, but I am convinced that in principle you are closer to my interpretation than you show in “Heuristics Do make a difference”, which I consider a mistake.³⁵

Ondanks zijn altijd kritische houding was Freudenthal nooit tevreden over het niveau van de artikelen in *ESM*. In 1977 schreef hij in een brief aan Pollak:

I can tell you that the majority of the papers submitted never reach the point to be announced in the periodical circulars. Most of the papers are nonsense or hoax. Some people think that bad mathematics can be published as education. (Even good mathematics is not yet education.) The greatest danger is the so-called empirical work, processed with statistical nonsense methods. Even, in spite of my criticism the level of *ESM* is still far below what I would like it to be.³⁶

Volgens Freudenthal accepteerden andere onderwijsbladen een op de tien artikelen. Freudenthal accepteerde – meestal na intensief herschrijven – ongeveer een op de drie artikelen. Hij had graag meer geweigerd om het niveau nog verder op te krikken, maar het grote gebrek aan aanbod maakte dat onmogelijk.

In 1977 ging Freudenthal actief op zoek naar een opvolger voor de positie van hoofdredacteur “like a father who looks for somebody I can trust, if I am not able to care for the journal”.³⁷ Als eerste vroeg hij Pollak, volgens Freudenthal het enige redactielid dat zich oprecht geïnteresseerd had getoond.³⁸ In een brief zette hij de vereisten voor die positie uiteen:

As long as I can, I will work for *ESM* but I feel I have to look for a successor who will and can do this work. I wonder whether you feel you can or know somebody who could. The first demand is criticism. At this point I believe, I can trust you. The second is some universality with respect to mathematical education (from k[indergarten] to college), which is more difficult, the third some acquaintance with general education and its jargon. It is difficult to combine this.³⁹

35 Freudenthal aan Alan Schoenfeld, 22 augustus 1978; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1806.

36 Freudenthal aan Pollak, 1 april 1977; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1807.

37 Freudenthal aan Fletcher, 5 november 1977; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1807.

38 Pollak had volgens Freudenthal als enige redactielid bijna alle manuscripten op zijn gebied opgevraagd ter goedkeuring; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1807.

39 Freudenthal aan Pollak, 1 april 1977; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1807.

Toen Pollak tot twee keer toe niet antwoordde, nam Freudenthal aan dat hij zichzelf niet capabel genoeg achtte. Enkele maanden later vroeg hij Fletcher, die weigerde.⁴⁰ Uiteindelijk kwam Freudenthal bij Alan J. Bishop uit, Brits wiskundeonderwijskundige in Cambridge, die accepteerde.⁴¹ Freudenthal gaf hem nog de volgende wijze woorden mee:

The third: do not trust the members of the Board. Except one they have never been active. [...] I will support him [the new Chief] as long as I can, even without mentioning my name on the cover, say as a secret referee.⁴²

Helemaal loslaten wilde Freudenthal *ESM* dus niet. Het tijdschrift was en bleef op een bepaalde manier een beetje zijn ‘kindje’, waar hij zich verantwoordelijk voor bleef voelen. Met het – in zijn ogen, en vaker dan hem lief was – gebrekkige materiaal voor handen zette hij zich altijd tot het uiterste in om ervan te maken wat er van te maken viel. Het tijdschrift zou (met name in de jaren zeventig) behoorlijk aanzien genieten. Artikelen van belangrijke en bekende (wiskunde)didactici als Begle, Z.P. Dienes, F. en G. Papy, Revuz, Servais, Stone en Behnke vulden de pagina’s.⁴³

Ondanks zijn sterke persoonlijke binding wist Freudenthal de afstand te bewaren om een neutraal tijdschrift neer te zetten. Ook al was de band natuurlijk sterk en geregeld aanwezig in de vorm van publicaties, *ESM* verwerd bijvoorbeeld nooit tot een verkapt *IOWO*-promotiemiddel. Zoals op zoveel vlakken in Freudenthals professionele leven gold ook hier: liever een tijdschrift publiceren dat niet altijd helemaal aan zijn voorkeur en niveau-eisen voldeed, dan zonder tijdschrift – en invloed – langs de zijlijn staan.

9.3 Het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs

9.3.1 Van CMLW naar *IOWO*

Ook binnen het werk van de CMLW hield Freudenthal zijn credo ‘meedoen om bij te sturen’ altijd hoog. Na het grote succes van de cursussen moderne wiskunde voor leraren was het al in 1964 duidelijk dat het werk van de CMLW het beste door een eigen instituut uitgevoerd zou kunnen worden. In 1967 werd wiskundeleraar en kweekschool docent Edu Wijdeveld als eerste wetenschappelijk medewerker van de CMLW aangesteld, al gauw gevolgd door anderen, onder wie wiskundeleraar Adri Treffers in 1969.⁴⁴ De belangrijkste argumenten voor het aanvragen van een instituut waren toen vooral het belang van permanente leerplanontwikkeling, heroriën-

40 Freudenthal aan Fletcher, 5 november 1977; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1807.

41 Bishop zou in 1991 de ‘preface’ voor Freudenthals postuum gepubliceerde boek schrijven; Freudenthal, *Revisiting mathematics education. China lectures.*

42 Freudenthal aan Bishop, 25 november 1977; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1807.

43 *Educational Studies in Mathematics* 1-6 (1968-1975).

44 E. Wijdeveld, ‘Omzien in verwondering’, *Euclides* (2003) 218-225.

tering en begeleiding van leraren, maar ook de vestiging van een documentatie- en informatiecentrum voor wiskundeonderwijs. Een eerste aanvraag voor een eigen instituut bij het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen werd (pas in 1968!) afgewezen met een verwijzing naar de op handen zijnde plannen voor landelijke organisatie voor leerplanontwikkeling. Hierin zou de CMLW te zijner tijd moeten opgaan.⁴⁵

Na de invoering van het nieuwe leerplan in 1968 werd de noodzaak van institutionalisering nog duidelijker gevoeld. Al snel bleek namelijk dat de heroriënteringscursussen voor leraren geen afdoende voorbereiding voor de praktijk van het klaslokaal vormden. In de jaren erna werden door de leraren steeds nadrukkelijker didactische handvatten voor de behandeling van de nieuwe stof gemist. Met ingang van het cursusjaar 1968-1969 werd er in de bijscholingscursussen naast de wetenschappelijk wiskundige voordrachten ook in groepsverband over didactische vraagstukken gediscussieerd, maar ook dit bleek niet afdoende.⁴⁶

Het werk dat verricht moest worden om de taak die de CMLW op zich had genomen – de modernisering van het totale wiskundeonderwijs – daadwerkelijk succesvol te maken, begon de CMLW langzamerhand boven het hoofd te groeien. Dit was helemaal het geval toen op 30 mei 1968 deze taken ook nog eens uitgebreid werden met de ontwikkeling van wiskunde in het basisonderwijs (WISKOBAS) en het technisch onderwijs.⁴⁷

By 1970 the activity of our Commission, carried forth by a small number of fulltime and a few hundreds of part time collaborators and an administrative office, had developed into a chaotic many millions business.⁴⁸

De noodzaak van een instituut om de hiervoor aangestelde medewerkers en voorzieningen onderdak te geven werd steeds urgenter. Als tussenoplossing van het Ministerie werden de medewerkers van de CMLW in dienst van de Pedagogische Centra aangesteld, en vervolgens bij CMLW gedetacheerd.⁴⁹ De CMLW nam hier geen genoegen mee. Overigens gingen andere moderniseringscommissies (zoals de Commissie Modernisering Moderne Talen en de Commissie Modernisering Klassieke Talen) wel met deze constructie akkoord.⁵⁰

De in Utrecht gezetelde CMLW had op dat moment naast een dagelijks bestuur maar liefst elf subcommissies. Ook werd de noodzaak van een hoogleraar-directeur

45 De Commissie Organisatie Leerplan Ontwikkeling (COLO) werd een jaar later ingesteld.

46 CMLW-map, 1968-1969; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 418, 1725.

47 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1725; Wijdeveld e.a., ‘Van CMLW tot Freudenthal Instituut’, in: Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs* 355-374, aldaar 359.

48 Freudenthal in de lezing ‘The Institute on Developing mathematical Education (IOWO) in the Netherlands’, Argentinië 1972; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 571.

49 De drie landelijke Pedagogische Centra zijn het APS (Algemeen Pedagogisch Studiecentrum), CPS (Centraal Pedagogisch Studiecentrum) en het KPC (Katholiek Pedagogisch Centrum). Zij ondersteunen het onderwijs, adviseren scholen en overheid en organiseren cursussen, conferenties en studiedagen.

50 Notulen plenaire vergadering van de CMLW, 6 juni 1969; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1725.

gevoeld, zo bleek uit de notulen van de vergadering van het dagelijks bestuur in september 1969:

Na enige discussie is men het erover eens, dat het “bedrijf”, zoals dat binnen de CMLW is uitgegroeid, gecoördineerd zou moeten worden door een directeur op het niveau van een hoogleraar (in een vrijwel volledige dagbetrekking). Het lijkt echter vrijwel uitgesloten op dit moment een dergelijke figuur aan te trekken.⁵¹

In diezelfde maand werd Freudenthal officieel door de staatssecretaris J.H. Grosheide van het Ministerie van O&W tot voorzitter van de CMLW benoemd.

Wanneer de gelegenheid zich voordeed, hamerde Freudenthal ook persoonlijk op het belang van institutionalisering van de CMLW. Zo kaartte hij een maand later het belang van de oprichting van een instituut voor heroriëntering van wiskunde-docenten aan op een persbijeenkomst in de Uithof in Utrecht over de activiteiten van de CMLW:

Toch staan we voor problemen. We vragen ons af hoe lang we nog zo door kunnen gaan, met massacursussen een paar keer per jaar, met telkens een beroep doen op honderden die er naast hun gewone werk aan medewerken. We hebben enkele jaren geleden een plan ontworpen voor een instituut voor de heroriëntering van wiskunde-leerkrachten, dat continu het hele jaar doordraait en waar kleine groepen leraren elk een week heroriënteringsonderwijs ontvangen en dat tevens een centrum voor onderwijskundige informatie zou zijn. Zoiets bestaat op grote schaal in Denemarken en in Hongarije en op kleinere schaal in Westduitsland. Er is tot nu toe bij ons nog niets van gekomen, maar we geven de moed niet op. Het is een dringende noodzaak en zal komen omdat het er moet komen.⁵²

In december 1969 stelden Monna, Wijdeveld en Freudenthal een ontwerp op voor een instituut voor wiskundeonderwijs. Naast de hierboven door Freudenthal genoemde herscholing, was het vooral het project WISKOBAS dat – door een brede opzet van het in 1968 ontworpen 10-jaren plan – zonder instituut en geld om mensen in dienst te nemen als onuitvoerbaar vast dreigde te lopen.⁵³

In eerste instantie was de weerstand van het Ministerie te wijten aan de angst ook dergelijke verzoeken van andere vakgebieden te moeten inwilligen. Later zag men de voorbeeldfunctie van de activiteiten op het gebied van het wiskundeonderwijs wel in, maar wachtte men liever op de instelling van een overkoepelende organisatie voor alle vakken. Freudenthal schreef hierover:

51 Notulen vergadering 10 september 1969; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 418, 1725.

52 Freudenthal op een persconferentie van de CMLW, 22 oktober 1969. In een persconferentie van 12 november 1975 noemde hij ook de leerplanontwikkelaars in Engeland en Italië als voorbeelden van ontwikkelaars van wiskundeonderwijs “vanuit en vlakbij de realiteit”; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 603, 1725.

53 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 603, 1725.

Dem Schnecken tempo jener gründlichen Plänenschmiede konnten wir uns aber nicht anpassen; wir waren ja viel weiter als die anderen Fächer. Mitte 1970 kam es zu einem Bruch met dem Ministerium, der schon lange gedroht hatte.⁵⁴

Het probleem rond WISKOBAS was volgens de minister voornamelijk een financiële: de salarissen waren te hoog. Inwilliging van de eis tot institutionalisering zou “de salarisverhoudingen tussen medewerkers van pedagogische centra, wetenschappelijke medewerkers van de universiteiten enz. volledig verstoren”.⁵⁵ In 1970 had de CMLW inmiddels een budget van vierenhalf miljoen.⁵⁶

Na lang touwtrekken met het Ministerie werd in januari 1971 door staatssecretaris Grosheide uiteindelijk het gewenste instituut ingesteld: het Instituut voor Ontwikkeling van Wiskundeonderwijs (IOWO), als zelfstandige afdeling voor wiskundeonderwijs aan de Rijksuniversiteit Utrecht.⁵⁷ Freudenthal werd hoogleraar-directeur, Wijdeveld was algemeen directeur. Het IOWO kreeg een formatie van 37 mensen (waaronder 21 wetenschappelijk medewerkers).⁵⁸ Het IOWO had toen vijf afdelingen, te weten: AVO, HBO & informatica, LBO, lagere school en speciale onderwerpen.⁵⁹

9.3.2 Freudenthal en het IOWO

Het IOWO wordt tot op de dag van vandaag sterk geassocieerd met de persoon Freudenthal.⁶⁰ Officieel was de instelling van het IOWO de inwilliging van de vraag van de CMLW naar een instituut, oorspronkelijk voornamelijk bedoeld voor de coördinatie en uitvoering van de heroriënteringscursussen. Bij het afscheid van Freudenthal als directeur van het IOWO refereerde staatssecretaris Grosheide als volgt aan het instituut:

Als vervolg op het voortreffelijke werk dat de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde heeft verricht, is het instituut onder leiding van Prof. Freudenthal in belangrijke mate verantwoordelijk voor dit succes. Dat een hoogleraar van zijn formaat en standing zich aan dit werk heeft willen wijden heeft denk ik in belangrijke mate tot

54 Freudenthal, ‘Strategie der Unterrichtsenerueung in der Mathematik’, *Beiträge zum Mathematikunterricht* (1972) 41-45, aldaar 42.

55 Correspondentie CMLW, 18 september 1970; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1726.

56 Ter vergelijking: bij aanvang in 1961 bedroeg de begroting vijf ton; Wijdeveld e.a., ‘Van CMLW tot Freudenthal Instituut’, in: Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs 355-374*, aldaar 359.

57 Een uitgebreidere beschrijving van de totstandkoming van het IOWO is te vinden in: Wijdeveld e.a., ‘Van CMLW tot Freudenthal Instituut’, in: Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs 355-374*.

58 R.A. de Jong, *Wiskobas in Methoden* (Utrecht 1986) 11.

59 Wijdeveld hanteert een andere indeling, waarbij drie inhoudelijke afdelingen onderscheiden worden: WISKOBAS, WISKIVON (voor VWO, HAVO, MAVO, LBO, MBO, HBO en speciale onderwerpen) en de afdeling algemene kadervorming en leerplanontwikkeling; Wijdeveld e.a., ‘Van CMLW tot Freudenthal Instituut’, in: Goffree e.a., eds., *Honderd jaar wiskundeonderwijs 355-374*, aldaar 360; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 571.

60 Deze associatie werd natuurlijk versterkt doordat het instituut – na opheffing in 1981 – via de Utrechtse universitaire vakgroep ‘Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijscomputercentrum’ (ow&oc) in 1991 over ging in het ‘Freudenthal Instituut’.

Freudenthal op het IOWO
(1975).



de goede resultaten bijgedragen. Het lijkt mij meer dan billijk bij het afscheid van Prof. Freudenthal dit nog eens uitdrukkelijk te vermelden.⁶¹

Als instituut van de CMLW met hoogleraar Freudenthal als ‘de man achter het instituut’, zo werd het IOWO gezien. Toch is het te zwart-wit om te stellen dat het nadrukkelijk *Freudenthals* instituut was. Freudenthal had zich waar hij maar kon uitgesproken en ingezet voor de instelling van een instituut, maar een meer concrete eerste invulling van dat instituut kwam niet direct van zijn hand.

Volgens een Voorstel-discussienota voor het project ‘Modernisering wiskundeonderwijs in de basisschool’ van de CMLW ontstond WISKOBAS – zij het op persoonlijk initiatief van een drietal mensen medio 1967 – officieel als werkgroep-initiatief van de CMLW “om de mogelijkheden te onderzoeken een project in het leven te roepen tot modernisering van het basiswiskundeonderwijs in Nederland”.⁶² Freudenthal schreef hierover in 1972:

61 Mr.J.H. Grosheide ter gelegenheid van het afscheid van Freudenthal als directeur van het IOWO op 14 augustus 1976; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 420.

62 Voorstel discussienota; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1738.

1968 zog eine Gruppe junge, der Kommission mehr oder weniger verbunderener Mathematikpädagogen den Grundschulunterricht ins Blickfeld.⁶³

Deze commissie van initiatiefnemers bestond uit Brandenburg, Wijdeveld en F. Goffree, leraar wiskunde- en rekendidactiek aan de Rijkskweekschool te Hengelo, waarbij zich in maart ook nog wiskundeleraar B. van der Krogt voegde.⁶⁴ De nota van deze commissie werd door het IOWO overgenomen en in 1968 werd WISKOBAS – nu ook uitgebreid met Treffers – officieel een subcommissie van de CMLW.

Het was de werkwijze zoals die binnen en door het WISKOBAS-project gebruikt werd die kenmerkend zou worden voor het IOWO. In het IOWO-jaarsverslag van 1971/1972 stond er over het effect van die werkwijze het volgende geschreven:

... het ziet er naar uit dat het IOWO bezig is een brug te slaan tussen het abstracte nivo [sic] van de leerplantheorie en het concrete [sic] nivo van de onderwijspraktijk. Enerzijds de fundamentele doordenking van onze eigen doelstelling, annex leerplantheorie, anderzijds de konkretisering van een ontwerp-onderzoek en -overdrachtsmodel, wijzen duidelijk in die richting.⁶⁵

Waar bestond die werkwijze uit? Het basisprincipe was om de onderwijsdoelen en leerplannen niet bij voorbaat vanuit het instituut vast te leggen. In nauwe samenwerking met het veld werd doelbewust een traject doorlopen waarbij een continue wisselwerking in stand werd gehouden met alle betrokkenen van het basisonderwijs: leerlingen van het basisonderwijs, hun onderwijzers en leerlingen en leraren van de Pedagogische Academies.

Es ist, wenigstens auf kurze Sicht, eine Strategie enger Verknüpfung von Lehrstoffentwicklung und Fortbildung, und zwar gleichzeitig auf allen Niveaus: des Schülers, Grundschullehrers und derjenigen, die die Grundschullehrer ausbilden, fortbilden und begleiten sollen. Um auszuloten, was an Erneuerung möglich sei, und wie es zu geschehen habe, ist das unserer Meinung nach unumgänglich.⁶⁶

Dat het hierbij eerder ging om de achterliggende filosofie en de werkwijze bij de totstandkoming van wiskundeonderwijs, -didactiek en -leerplannen, en niet zozeer om de concrete invulling ervan, benadrukte Freudenthal in een lezing in 1975:

Een schoolwerkplan, zoals WISKOBAS het nu verstaat, moet vrij gedetailleerd ingevuld zijn, ingevuld met voorbeelden kwa [sic] *leerstof én metode* [sic]. Gedetailleerd ingevuld – ja, maar niet om gedetailleerd te worden nagevolgd. De details van de invulling dienen niet om de gebruiker aan banden te leggen, maar om hem iets van de geest te laten proeven die de samenstellers bezielde. Het goede voorbeeld wordt ontkracht als

63 Freudenthal, ‘Strategie der Unterrichtserneuerung in der Mathematik’, *Beiträge zum Mathematikunterricht* (1972) 41-45, aldaar 42.

64 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1738.

65 Jaarsverslag IOWO 1971/1972; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 418.

66 Freudenthal, ‘Strategie der Unterrichtserneuerung in der Mathematik’, *Beiträge zum Mathematikunterricht* (1972) 41-45, aldaar 44; RANH, Freudenthal Papers, inv.nr. 575. Een vergelijkbare tekst gebruikte hij onder meer in zijn voordracht: ‘Leerplanontwikkeling in de wiskunde’ van 21 september 1973.

het slaafs wordt nagebootst; in de geschiedenis van onderwijsvernieuwing is dat[:] telkens uit een ruim hart vrijheid van interpretatie toestaan; sterker, deze vrijheid moet in het goede voorbeeld zijn ingebouwd.⁶⁷

Zeldzaam waren Freudenthals uitlatingen over de te volgen koers of werkwijze van het IOWO. Eén van de weinige keren dat Freudenthal dit toch deed, was in het volgende handgeschreven briefje. Dit stukje was waarschijnlijk een reactie op een stuk van de IOWO-medewerker G. Schoemaker, directeur van de IOWO-werkgroep WISKIVON (wiskunde in voortgezet onderwijs), en slechts voor intern gebruik bedoeld:

Wat hier gewoon is wordt ten onrechte als algemeen bekend ondersteld. Na tegenwoordige toestand en opdracht allereerst uiteenzetten:

Principes van te creëren onderwijs

- wiskunde vanuit en binnen de realiteit, derhalve in
- context
- eigen activiteit van de leerling, anders dan naïap- en invuloefeningen, wél:
- mathematiseren, derhalve
- rijke context en
- reflexie, vergemakkelijkt door
- interactief onderwijs, met nadruk op interactie van leerlingen, derhalve
- werken in kleine groepen
- homogeen – heterogeen? voor- en nadelen

Dit is maar een losse aanwijzing.

Ontwikkelingsproces

Pas daarna behandelen

- nadruk op ontwikkelingsonderzoek
- [...] feedback ontwikkeling onderwijs door
- reflexie⁶⁸

Deze tekst was niet meer dan het op schrift stellen van wat binnen het IOWO al expliciet gemaakt was, en niet een door Freudenthal persoonlijk verzonden actieplan. Dit was dan ook tekenend voor de sfeer en werkwijze binnen het IOWO. Geen van bovenaf opgelegd stappenplan, maar een zich al doende uittekenende ontwikkelingsstrategie, zoals dat in die jaren vaker ging.

De ontwerpen die met deze ‘democratische’ leerplanontwikkelingsprocedure ontstonden, hadden een traject doorlopen dat begon met de heroriëntering van de onderwijzers met stukjes leerstof. Het heroriënteringsmateriaal dat hieruit ontstond werd weer op grotere schaal aan onderwijzers én hun leerlingen beproefd – de zogenaamde veldverkenning. Deze verkenningsfase werd door WISKOBAS pas in 1975 afgesloten met de presentatie van een ontwerp leerplan, waarin visie, didactische

67 Freudenthal, ‘Stenen voor brood’ of ‘door een rijstebrijberg naar luilekkerland’, in: *Wiskobasbulletin* 1975; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1371.

68 Handgeschreven briefje door Freudenthal aan de IOWO-stafleden, ongedateerd; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 404.



Tekst van Freudenthal over de werkwijze binnen WISKOBAS en WISKIVON (jaren zeventig).

aanpak en materiaal werd gepresenteerd als eerste stap op weg naar een nieuw rekenonderwijs.

Freudenthal kon zich uitstekend in deze 'democratische' werkwijze vinden. Met zijn weinig behoudende instelling paste hij in het algemeen dan ook goed in de democratiserende tendensen zoals die eind jaren zestig (ook binnen de universiteit) opgeld deden.⁶⁹ Daarnaast had hij grote bewondering en respect voor wat de (jonge!) praktijkmensen van de WISKOBAS-werkgroep durfden aan te pakken.⁷⁰

Niet alleen de totstandkoming van de projecten en de werkwijze binnen het IOWO pasten in Freudenthals straatje, ook inhoudelijk kon hij zich er goed in vinden. In een voordracht in 1973 over leerplanontwikkeling in de wiskunde verwoordde hij het als volgt:

In de afdeling WISKOBAS is een aanzet tot een integrale benadering wat betreft kleuter- en basisonderwijs. [...] Onder Moderne Wiskunde verstaat men hier niet, zoals veelal in 't buitenland, zogenaamd moderne onderwerpen zoals verzamelingenleer en pro-

69 Vergelijk ook zijn houding ten aanzien van de studentenrevolutie, zoals beschreven in paragraaf 3.5.
 70 Mondelinge mededeling van A. Treffers, 22 april 1999.

positiologica, waarvan zin en bedoeling nooit duidelijk zijn, maar het inzichtelijk werkzaam zijn en het bewust mathematisch structureren van de realiteit.⁷¹

Het uitgangspunt waarbij zo veel mogelijk de nodige tijd en ruimte werd genomen voor leerplanvernieuwing verschilde natuurlijk hemelsbreed met die van bijvoorbeeld een commissie als de CMLW – nog geen acht jaar eerder – toen in enkele luttele jaren een compleet leerplan voor heel het middelbare onderwijs ontworpen en gepresenteerd werd. Freudenthal zei hierover in 1974:

Tegenover een reglementerende leerplanontwikkeling van achter het bureau hebben we voor de democratische participatie van het veld gekozen. In alle bescheidenheid mag ik zeggen dat dit instituut internationaal een reputatie geniet om trots op te zijn.⁷²

Ook de vergelijking van het IOWO met de Freudenthal ooit zo dierbare Wiskunde Werkgroep ging wat hem betrof mank. In een brief aan Van Hiele schreef hij over een door Van Hiele gesteunde poging midden jaren zeventig om de werkgroep nieuw leven in te blazen:

Wat ik ook in de Werkgroep heb geleerd (in mijn boek heb ik ervan getuigd) de Werkgroep was voor mij een gepasseerd stadium – ik deed niet meer één keer per maand aan wiskunde didactiek, maar dagelijks. In het begin van het IOWO hebben we nog een wekelijks colloquium op 't IOWO met buitenstaanders geprobeerd, maar dat was geen succes.⁷³

In al zijn voordrachten en artikelen sprak Freudenthal wanneer hij het over het werk en de werkwijze van het IOWO had altijd over 'wij'. Hij was ontzettend trots op wat het IOWO deed en bereikte, en stond vierkant achter het instituut en zijn mensen. Toch moest hij – zeker in de beginfase van het instituut – geregeld met verschillende en ogenschijnlijk tegenstrijdige petten op opereren.

Sinds 1971 was Freudenthal namelijk ook actief als vertegenwoordiger van de CMLW in de Commissie Organisatie Leerplan Ontwikkeling (COLO), een beweging feitelijk geheel tegengesteld aan de vakspecifieke van de CMLW en het IOWO. De COLO was eind jaren zestig door het Ministerie ingesteld met als doel tot een overkoepelende organisatie te komen waarbinnen complete – dus voor alle vakken – leerplannen ontwikkeld konden worden. In 1975 werd het werk van de COLO afgerond met de instelling van de Stichting Leerplan Ontwikkeling (SLO), waarna de CMLW verwerd tot een adviescommissie van de SLO. Hoe het IOWO hierin zou moeten passen, was toen nog niet duidelijk.⁷⁴

Door de ministeriële ondersteuning leek het pad COLO-SLO van begin af aan het kansrijkst en het IOWO aanvankelijk niet veel meer dan een afdwaling van de wis-

71 Voordracht van Freudenthal voor Amicitia Naturae Interpres op 21 september 1975; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 575.

72 Voordracht gehouden ter gelegenheid van het bezoek van de minister van Onderwijs, J. van Kemenade, aan het IOWO, 27 november 1974; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 589.

73 Freudenthal aan Van Hiele, 4 juni 1987; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 37.

74 Correspondentie CMLW-IOWO, 1975; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1731.

kundigen van het door de minister gekozen pad. Blijkbaar zag Freudenthal er geen tegenstrijdigheid in om ‘op twee paarden te wedden’. Het was al heel snel duidelijk dat het IOWO en zijn mensen zijn hart hadden gestolen.⁷⁵ Natuurlijk had hij ook kritiek, die hij evengoed uitsprak. Maar fundamenteel was deze niet en zijn bewondering en enthousiasme voerden altijd de boventoon.⁷⁶

Dat enthousiasme betrof niet alleen de inhoud van het IOWO-werk, maar – misschien wel juist – de sfeer en werkwijze op het instituut. Freudenthal bloeide op binnen het uit voornamelijk jonge mensen bestaande IOWO-team, waarbinnen hij functioneerde als volwaardig teamlid: openstaand voor nieuwe ideeën en inzichten, kritisch, maar zelf ook kritiek verwachende. IOWO-medewerker Treffers karakteriseerde Freudenthals aanwezigheid en invloed op WISKOBAS als volgt:

... his personableness, his intriguing off-hand remarks, his elaborations on seemingly futile observations of learning processes, his passion, his ability to use simple examples to show that mathematics is everywhere, his attention for both ‘simple’ and ‘complex’ forms of mathematics, his respect for practitioners of teaching, his admiration for a point well argued, his style of writing, his undisguised disapproval of developers and researchers who do not do justice to mathematics nor to the child, do no justice to mathematics as a human activity, to ‘mathematics as an educational task’...⁷⁷

Freudenthal was altijd aanwezig op de wekelijkse vergaderingen van zowel WISKOBAS als WISKIVON hoewel, of misschien juist omdat, hij daarbinnen geen vastgelegde functie vervulde. Freudenthals rol binnen deze teams en het IOWO in het algemeen is moeilijk te definiëren. Ontegenzeglijk drukte hij zijn stempel op de groep, maar op het hoe en waar is moeilijk precies de vinger te leggen. Hij verbond zijn grote naam en reputatie aan een actueel initiatief dat al functioneerde, leverde met zijn kennis en kijk inspiratie en gaf het geheel een gigantische versnelling. Daarbij stond voorop, dat hij alle moeite deed de teamgeest van het IOWO zo min mogelijk te verstoren.⁷⁸ Zijn door anderen vaak ervaren ongenaakbaarheid – grotendeels door sociale onhandigheid – viel binnen de bijna hiërarchieloze sfeer van het IOWO grotendeels weg. Van der Blij kenmerkte die sfeer treffend met de uitspraak “je moest er haast een muziekinstrument kunnen bespelen”, een heel andere sfeer dan bijvoorbeeld die op het Mathematisch Instituut. Bovenal leek Freudenthal door het

75 Deze paragraaf is grotendeels gebaseerd op gesprekken met Van der Blij, Treffers en Grootendorst, voorjaar 1999.

76 Een voorbeeld van die kritiek is die op de sprookjeswereld waarin de WISKOBAS-projectjes gegoten werden, zie ook paragraaf 9.5.4; Freudenthal op een WISKOBAS-conferentie in 1975; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 412.

77 A. Treffers, ‘Wiskobas and Freudenthal – realistic mathematics education’, in: L. Streefland, ed., *The legacy of Hans Freudenthal* (Dordrecht 1993) 89-108, aldaar 106.

78 In zijn boek *Van vormleer naar realistische wiskunde* bespreekt De Moor de resultaten van een enquête onder ex-WISKOBAS-medewerkers, toegespitst op het werk voor meetkundeonderwijs. Over de beleving van de invloed van Freudenthal op het WISKOBAS-werk concludeerde hij dat deze per persoon sterk verschilde. Freudenthals bijdragen waren in de herinnering van de meeste medewerkers vooral van microdidactische aard; De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde* 497.

10WO zijn gedachtegoed razendsnel verder te ontwikkelen en uit te bouwen. Hij vond er een uitlaatklep voor zijn bijna vergeten (en in de jaren vijftig en zestig nauwelijks aan bod gekomen) interesse: het observeren van kinderen, het kijken naar leerprocessen en het delen van die ervaringen met anderen om te verwerken in onderwijs.

9.4 Wereldverkennen van de straatstenen tot de maan

9.4.1 Observeren als vader in ‘Rekendidaktiek’

In zijn ‘Rekendidaktiek’ van 1944 stipte Freudenthal al het belang van het observeren aan. In de context van het ontwikkelen van leermethoden voor het rekenonderwijs ging het hem om de kracht van de kleine, alledaagse gebeurtenissen als bron voor wetenschappelijk onderzoek:

[...] onder de onderwijzers zijn er misschien toch sommigen, die zonder theoretisch opzet, geheel zakelijk, in een dagboekachtig relaas stukje bij beetje achter elkaar kunnen aantekenen, hoe er feitelijk les wordt gegeven – schijnbare onbenuiligheden zouden voor iemand, die zulk een relaas wetenschappelijk gaat ontleden, misschien meer verrassen en te denken geven dan een diep aangelegd theoretisch onderzoek.⁷⁹

In de oorlogsjaren maakte Freudenthal dergelijke dagboekachtige aantekeningen van observaties van zijn kinderen. Veel was dit niet, van de 352 bladzijden aantekeningen waren er 8 aan observaties van zijn kinderen gewijd.⁸⁰ Hij schreef in zijn manuscript van 1944 over het observeren van kinderen:

Er is veel verlokkelijks in het individueel observeren en experimenteren op psychologisch terrein. [...] Zelfs de slechtste onder deze publicaties mag men, zonder voorbarig te zijn, niet overbodig noemen, maar toch mag men de waarde van dergelijk onderzoek niet overschatten. Want het zo vergaarde materiaal bezit bij al zijn goede eigenschappen, die niemand zou willen loochenen, de slechte zijde, dat het immers uitgesproken individueel materiaal is. Aan het individuele karakter verdankt [sic] dit materiaal echter ook zijn aantrekkelijkheid – de levensgeschiedenis van een een kind van 0-6 jaar te lezen is zelfs, wanneer de verslaggever zou trachten, alle bekoorlijkheid te elimineren, aantrekkelijker werk dan het bestuderen van een catalogus van cijfers, percentages, gemiddelden, correlatie-coëfficiënten en wat er meer is aan statistische hulpmiddelen in de moderne psychologie.⁸¹

79 Freudenthal, ‘Rekendidaktiek’ (ongepubliceerd 1944) 54-55; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465.

80 Zo schreef hij af en toe over het getalbegrip van Tom en noteerde hij uitspraken van Thijs en Didi; notitieboekje uit 1943, pagina’s 9, 16, 17, 35, 43, 54; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 440.

81 Freudenthal, ‘Rekendidaktiek’ 4; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 465.

Hij gaf in ‘Rekendidaktiek’ een voorbeeld van een gesprek tijdens een wandeling met een van zijn zoontjes. Het was een vermakelijk voorbeeld van hoe moeilijk het bleek voor Freudenthal – in de rol van onderwijzer – om tot een ‘spontaan’ socra-tisch vraaggesprek te komen:

Ik: Waar komt de wind vandaan?

A.: Uit het Westen.

Ik: Neen, dat bedoel ik niet. Steek je vinger op!

A : Daar komt-ie vandaan.

Ik: Juist! Hoe heet die richting?

A: Noord.

Ik: Neen. Waar staat de zon?

A: In het zuiden.

Ik: Neen. Wijs even, waar de zon staat!

A: Daar!

Ik: Staat de zon dus aan dezelfde kant, als waar de wind vandaan komt, of aan een andere kant? ⁸²

Freudenthal stopte hier even voor een intermezzo met de lezer:

De lezer bemerkt, dat ik niet de moed bezit te vragen “welke betrekking bestaat tussen de richting, waar de zon staat, en de richting waar de wind vandaan komt? ”, een vraag, die fraaier zou staan en beter in het schema der socratische methode zou passen. ⁸³

Daarna vervolgde hij de dialoog met zijn zoontje:

A: Aan dezelfde kant.

Ik: En waar staat de zon nu in de ochtend?

A: Daar!

Ik: Neen, je hebt net gezegd, dat-ie dààr stond. Hoe heet die richting?

A: Zuid.

Ik: Neen, ik bedoel, hoe die kant heet, waar de zon altijd in de ochtend staat.

A: Oost.

Ik: Dus waar komt de wind vandaan?

A: Daar!

Ik: Neen, hoe heet de richting, waar de wind nu vandaan komt?

A: West.

Ik: Waar is West?

A: Waar de zon staat.

Ik: Neen! Wanneer staat de zon in het westen?

A: 's Avonds.

Ik: Ja. Is het nu avond?

A: Neen. Nu is [het] 's ochtends.

Ik: Dus waar moet de zon nu staan?

⁸² Ibid., 70-71.

⁸³ Ibid.

A: Waar de wind vandaan komt.

Ik: Ja, daar staat de zon. Maar ik bedoel: hoe heet de streek, waar de zon elke ochtend staat – wind of geen wind.

A: Het Oosten.

Ik: Goed. En waar komt de wind nu vandaan? ⁸⁴

De socratische tweespraak werd toen afgebroken, omdat volgens Freudenthal de wind ondertussen was gaan draaien. Hij concludeerde vervolgens:

Leermeesters zijn meestal even hardnekkig in het ondervragen als leerlingen in het niet weten (of niet willen weten), maar zoveel er ook aan de socratische methode prijzenswaardigs is – toch zal de leermeester soms beter doen, om minder hardnekkig socratisch te zijn en eenvoudigweg te vertellen: ‘Kijk, daar staat de zon, daar komt de wind vandaan, en dat heet Oosten, want Oosten noem je ’t, waar de zon altijd in de ochtend staat’.⁸⁵

In zijn ‘Rekendidaktiek’ was het voor Freudenthal duidelijk dat de waarde van dergelijke observaties niet in het individuele geval kon liggen, maar pas bij herhaling en vergelijking van grote groepen kinderen iets wetenschappelijk waardevols zou opleveren. Niet alleen de kleine steekproef was een belemmering, ook het feit dat dergelijke observaties in de literatuur voornamelijk bij kinderen uit een intellectueel milieu, namelijk dat van de proefnemer, gedaan werden, was voor Freudenthal een nadeel.⁸⁶

De observaties die hij in deze jaren van zijn kinderen deed, hadden over het algemeen weinig spontaan. Freudenthal speelde zelf als onderwijzer een nadrukkelijke rol in de dialogen die hij noteerde. Van het onbevangen ‘kijken naar het kind’ was nog weinig sprake, van het afdwingen van leermomenten des te duidelijker, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt:

Tom 3,6. *

Pak vijf suikerparsels. Hij pakt een voor een en gaat onbeperkt door. Hoeveel zijn dat[?]: “3” (juist), dat[?] “4” (juist) dat[?] geen antwoord (vijf; wordt hem gezegd), dat? Geen antwoord (2), ondanks herhaalde pogingen geen antwoord. Zijn dat twee? “Ja” Waarom zeg je dat niet? Geen antwoord. Zeg eens 2. Geen antwoord. Het blijkt dat hij het woord 2 niet uitspreken kann [sic]. Spraakoefening. Hij benoemt de hoeveelheden 1, 2, 3 over het algemeen goed; de hoeveelheid 4 met 30% fouten. [...] Enkele dagen later: Zeg “tik tik tik”. Hij zegt onbeperkt tik. Zeg tik tik. Idem. Zeg tik tik tik. (Met zwaar accent op de eerste tik.) Lukt. Zeg tik tik met accent. Hij zegt weer tik tik tik. Na herhaalde pogingen kan hij zoowel tik tik als ook tik tik tik zeggen. Het lukt niet hem een viervoudige tik te zeggen ondanks alle rythme.

Zeg	eens	tik tik tik.	Hoeveel	heb	je	tik	gezegd.	Goed.
”	”	tik tik.	”	”	”	”	”	Goed.

Analoge uitkomsten met tak en boem.⁸⁷

⁸⁴ Ibid.

⁸⁵ Ibid.

⁸⁶ Zie ook paragraaf 4.4.

⁸⁷ Aantekeningenboekje ‘Rekendidaktiek’, 1943; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 440.

Wel gaf Freudenthal ook toen al aan als leraar zelf ook veel te leren van zijn bewust observeren en manipuleren van zijn leerlingen tijdens de rekenlessen en de fouten die zij – en hij – daarbij maakten.

In de jaren erna hield Freudenthal zich weinig bezig met dergelijke observaties, of maakte er in ieder geval geen (bewaard gebleven) vergelijkbare aantekeningen van. Het leven en werken in Utrecht na de oorlog nam hem volledig in beslag en maakten ‘Rekendidaktiek’ tot een uitzonderlijk uitstapje. Wel was hij begin jaren vijftig – gezien zijn stukjes in *De Groene Amsterdammer* – begaan met de schoolperikelen van zijn kinderen, maar tijd voor dagelijkse wandelingen en observaties had hij niet meer.⁸⁸ Hij hield zich in de jaren vijftig en zestig weinig bezig met het observeren van het lerende kind. Zijn bemoeienissen en activiteiten op het gebied van het onderwijs lagen in die jaren voornamelijk op het didactisch-theoretische of organisatorische vlak.

9.4.2 Observeren als grootvader: wandelen met kleinkinderen

Het veldwerk dat binnen WISKOBAS en later binnen het IOWO gedaan werd, wakkerde Freudenthals oude interesse in het observeren van leerprocessen weer aan. ‘Het observeren van lerende kinderen’ speelde binnen de werkwijze van het IOWO van begin af aan namelijk een prominente rol.⁸⁹ Maar tegelijkertijd werd ook op een veel speelsere manier zijn interesse voor het doen van observaties hernieuwd. In de jaren zestig werd Freudenthal grootvader. En in het bijzonder met de kinderen van zijn dochter Mirjam, die op loopafstand woonden, had hij veel contact.⁹⁰ Met Bastiaan, de oudste, die in 1970 geboren werd en later ook met zijn twee jaar jongere zusje Monica maakte Freudenthal wandelingen die aanleiding gaven tot talloze – niet per se direct aan de wiskunde gerelateerde – observaties. Dat hij zich als grootvader bewust minder nadrukkelijk als leraar opstelde, bleek uit zijn volgende woorden:

I gave a 9 years old girl the problem to double a square. Of course she did not succeed. If it had been my daughter, I would have led her safely to find the solution. But she was my granddaughter so I said: ‘I see, it is too hard, let us try it another time’.⁹¹

Juist die meer ontspannen en onbevangen houding als grootvader en niet zozeer als leraar gaf Freudenthal de mogelijkheid de wiskunde in de wereld van het kind te zien. Toen Bastiaan zo’n 28 maanden oud was, begon Freudenthal met het opschrij-

88 Zie ook paragraaf 5.1.1.

89 Freudenthal was bij het observeren op de ontwerpsscholen van WISKOBAS en WISKIVON, maar ook op de Pedagogische Academies altijd intensief betrokken geweest; Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 359.

90 In zijn boeken *Mathematics as an educational task* en *Appels en peren. Wiskunde en psychologie. Gebundelde opstellen* schreef hij ook over oudere kleinkinderen; Freudenthal, *Mathematics as an educational task*; Hans Freudenthal, *Appels en peren. Wiskunde en psychologie. Gebundelde opstellen* (Apeldoorn 1984).

91 Voordracht ‘The Institute on Developing Mathematical Education (IOWO) in the Netherlands’, 1972 Argentinië, 9 pagina’s; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 571.

Wandelen met kleinkinderen.



ven van zijn belevenissen met het jongetje in een schriftje.⁹² Hij deed dit niet enkel als trotse grootvader, maar in de eerste plaats met de bedoeling een zo objectief mogelijke weergave van Bastiaans cognitieve ontwikkeling te geven.⁹³

Vijfentwintig jaar later memoreerde Bastiaan aan de wandelingen in een artikel in *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. Veel van wat zijn grootvader over de wandelingen geschreven had, wist hij zich niet meer zo gedetailleerd te herinneren. Hij schreef:

I do not remember, e.g., that we walked so often together. What I do know is, that I liked to walk to distant places like the DE Coffee factories. They all seemed very far away then, today I walk to the railway station or to town in fifteen minutes, in my memory it seems far away like Australia. The park where we went to most of the time was [...] a place so common to me, I could draw a plan by memory.⁹⁴

Zo dwingend ‘socratisch’ als met zijn eigen kinderen ondervroeg hij zijn kleinzoon tijdens de wandelingen niet. Zijn beschrijvingen waren zoveel mogelijk gespeend van emotie en waardeoordeel. Zelden schreef hij er in zijn schriftjes een conclude-

92 In twee schriftjes schreef Freudenthal over de belevenissen met zijn kleinzoon, die de periode augustus 1972 – september 1977 besloegen; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 446 en 447.

93 Het observeren en noteren van activiteiten van en met kinderen is een vaak voorkomend fenomeen bij pedagogen als W. Stern en O. Decroly. Zo noteerde Decroly gebeurtenissen en uitspraken van zijn dochtertje op vergelijkbare leeftijd als Bastiaan. Freudenthal kende dit werk overigens al uit zijn studie tijdens de oorlogsjaren en noteerde in 1944 hierover “Decroly vindt zijn middelen niet als Mont[essori] in formeel materiaal, maar in ‘t volle leven”. Ook Kohnstamm beschreef af en toe een observatie van zijn kleinkind; C. Philippi-Siewertsz van Reesema, *Uit en over de werken van Prof.Dr. Ovide Decroly* (Groningen 1931); Kohnstamm, *Keur uit het didactisch werk van Prof.dr. Ph. Kohnstamm* 90; Freudenthals aantekeningenboekje 1943; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 440.

94 Bastiaan van der Velden, ‘Between “Bastiaan ou de l’éducation” and “Bastiaan und die Detektive”’, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 32 (2000) 201-202, aldaar 201.

rende of analyserende opmerking bij. Het doel leek voornamelijk een zo exact mogelijke weergave van de kleine gebeurtenissen weer te geven. Wel gaf hij af en toe wat meer uitleg over de (spraak)gewoonten van Bastiaan bij sommige van zijn uitspraken. Een treffend voorbeeld van de stijl waarin hij gesprekken en gebeurtenissen opschreef is het volgende fragment:

5-2-74 Enkele dagen geleden: Hij vindt een glazen knikker. “Als ik hard duw, zou hij op straat rollen” (wat hij niet wil). De irrealis wordt meestal alleen in de hoofd- óf de bijzijn gebruikt. In antwoord op een vraag: “Anders zou ...”.

De knikker rolt onder een band van een geparkeerde auto. Hij kan hem niet te pakken krijgen. Ik wijs hem een stokje. Hij, op het gezicht: “Dat is niet hard genoeg.” Inderdaad een slap stokje, maar het lukt er wel mee.⁹⁵

Om diverse redenen is een dergelijke weergave van de belevenissen van een (klein) kind natuurlijk nooit objectief te noemen. Ook al deed hij minder moeite Bastiaan nadrukkelijk iets te leren – zoals hij dat dertig jaar eerder met zijn eigen zoons wel deed –, niet zelden kon Freudenthal het toch niet laten Bastiaan met vragen of aanwijzingen een bepaalde kant op te sturen. Zo komt in het volgende voorbeeld nog even de socratische vraagmethode om de hoek kijken:

15-9-74. Op straat vindt hij een wioldop van een Fiat. ‘Ik heb er al zo een’.

– ‘Hoeveel heb je er dan nu?’

– ‘Twee.’

– ‘Hoeveel heb je er voor een hele auto nodig?’

– ‘Dat weet ik niet.’

– ‘Hoeveel wielen heeft een auto?’

– ‘Vier.’

– ‘Hoeveel heb je er dan nu nog nodig?’

– ‘Vier.’

– ‘Nee, hoeveel moet je er nog bij vinden?’

– ‘Twee’.

Thuis, opgewonden, roept hij al voor de deur [zijn vader] Frans toe: ‘Ik moet er nog twee bij vinden, dan heb ik er vier!’⁹⁶

Vaker probeerde Freudenthal zijn vraagstelling zo open mogelijk te houden, om het jongetje zo veel mogelijk zelf zijn conclusies te laten trekken. Daarin lag voor Freudenthal de grootste waarde van de observaties. Toch was Freudenthal zich wel bewust van de betrekkelijkheid van de spontaniteit van zijn observaties. Over de invloed van zichzelf als waarnemer bij dergelijke terloops gedane waarnemingen schreef hij in zijn boek *Appels en peren*:

95 Schriftje met observaties van Bastiaan en Monica, 1972-1976; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 446. Deze anekdote is ook opgenomen in het artikel: Freudenthal, ‘Wandelingen met Bastiaan. Wereldverkennen van de straatstenen tot de maan’, *Pedomorfose* 25 (1975) 51-64, aldaar 58.

96 Freudenthal, ‘Wandelingen met Bastiaan. Wereldverkennen van de straatstenen tot de maan’, *Pedomorfose* 25 (1975) 51-64, aldaar 62.

Het kon weleens spontaan starten, maar een woord, een blik, een geste van de waarnemer is voldoende om het spontane een bepaalde kant op te buigen. Is dit erg? Welnee. Er is spontaniteit, maar voor alle ontwikkeling is er ook een sociale context. Dwarsdoorsneden zijn onvoldoende, om ontwikkeling te achterhalen, zolang er geen theorie is om de dwarsdoorsneden te verbinden. Longitudinale observatie is praktisch onmogelijk. Wat heb je dan aan die terloopse observaties, in de wandeling? ⁹⁷

Ja, wat heb je aan die terloopse observaties? Freudenthal gaf hierop zelf vervolgens het antwoord: juist in het terloops observeren zag hij een belangrijk werktuig bij de ontwikkeling van wiskundeonderwijs. Dat hij daarbij wel juist die observaties selecteerde waarvan hij dacht of verwachtte er (later) meer uit te kunnen concluderen, bleek uit zijn opmerking over de keuze van de beschreven belevenissen met Bastiaan:

Wel, uit de wijze waarop ik ze heb verteld, zal u duidelijk zijn geworden, dat het voor mij meer waren dan anekdoten. Ik heb niet wat ik heb waargenomen te kust en te keur genoteerd, maar alleen datgene wat me te denken gaf. Gedachten bij elkaar vormen nog geen theorie, maar elke gedachte kan aanzet tot theorie zijn.⁹⁸

9.4.3 Opa Hans: een kritische noot

Met deze nieuwe invalshoek begaf Freudenthal zich nadrukkelijk buiten zijn eigen vakgebied, de wiskunde, en openlijk op het gebied van de pedagogiek, de ontwikkelingspsychologie en de taalwetenschappen. Zijn wandelingen met Bastiaan publiceerde hij in *Pedomorfose*, het tijdschrift voor Jenaplanonderwijs waarvan mevrouw Freudenthal redactrice was.⁹⁹ Blijkbaar was een tijdschrift als *Euclides* niet de aangewezen plek voor dergelijke weinig wiskundige observaties. De reacties die Freudenthal op zijn artikelen kreeg, kwamen dan ook vooral uit taalkundige hoek.

Zo reageerde de filoloog E.M. Uhlenbeck op de meer taalkundige aspecten van Freudenthals observaties.¹⁰⁰ Hij verweet Freudenthal, als niet-taalkundige te gemakkelijk over taalverschijnselen te spreken en oordelen.

Wat altijd weer verbazing wekt, is het gemak waarmee niet-taalkundig geschoolden over taalverschijnselen spreken en oordelen. Zijn zulke personen professor in een ander vak, dan worden hun pseudo-taalkundige uitspraken door een aantal onkritische lezers nog geloofd ook.¹⁰¹

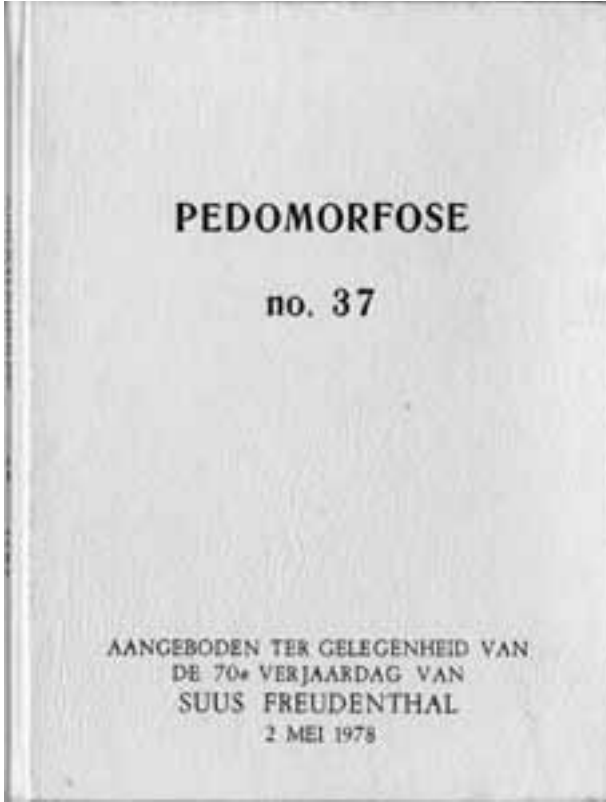
97 Dit artikel dateert uit 1977/1978, samengesteld uit *Jaarverslag over 1977*, Provinciaals Utrechts Genootschap (1978) 8-18 en *Weeding and sowing*; Freudenthal, *Appels en peren* 101.

98 Freudenthal, 'Cognitieve ontwikkeling – kinderen geobserveerd'; *ibid.*

99 Freudenthal, 'Wandelingen met Bastiaan', *Pedomorfose* 25 (1975) 51-64, Freudenthal, 'Bastiaan's lab', *Pedomorfose* 30 (1976) 35-54, Freudenthal, 'Bastiaan meet zijn wereld', *Pedomorfose* 37 (1978) 62-68.

100 Uhlenbeck reageerde op een interview van Freudenthal in *Resonans* (1975-76) 18-22, aldaar 20-21: E.M. Uhlenbeck, 'Professor Freudenthals kleinzoontje verdedigd tegen zijn grootvader', *Forum der Letteren* 16 (1975) 253-254; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 616.

101 E.M. Uhlenbeck, 'Professor Freudenthals kleinzoontje verdedigd tegen zijn grootvader', *Forum der Letteren* 16 (1975) 253-254, aldaar 254.



Feestelijke uitgave van *Pedomorfose* ter gelegenheid van mevrouw Freudenthals zeventigste verjaardag (1978).

Freudenthal reageerde hier onmiddellijk op. Het ging hem niet om de kwaliteit van het Nederlands waarin Bastiaan met zijn grootvader sprak, maar om de taalkundige niveaus van communicatie. Aangezien dat net zomin het vak van Uhlenbeck was, kaatste Freudenthal de bal terug:

‘Wat altijd weer verbazing wekt is het gemak waarmee niet-taalkundig geschoolden over taalverschijnselen spreken en oordelen. Zijn zulke personen professor in een ander vak ...’ eindigt E.M.U. zijn verhaal. Ik had er eigenlijk een grapje op willen maken, maar het zou zonde zijn. Deze passage spreekt beter voor zichzelf.¹⁰²

Een uitgebreide kritische reactie op zijn wandelingen met Bastiaan kreeg Freudenthal van Bruce Pelupessy, een medewerker van het Project Leerpakket Ontwikkeling Natuurkunde uit Utrecht.

Ik wil proberen, hier en daar, wat opmerkingen, twijfels en vragen te plaatsen bij hetgeen door opa Hans is geschreven. Ik doe dit omdat ik het – bescheiden – gevoel heb

¹⁰² Freudenthals reactie werd niet integraal afgedrukt in *Forum der Letteren*. Wel mocht Freudenthal een korte reactie plaatsen, met de aanbieding “op wens aan elke lezer portvrij” de volledige tekst toe te zenden; Freudenthal, ‘Commentaar’, *Forum der Letteren* 17 (1976) 263; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 616.

dat er uit de vele akties [sic] die Bastiaan onderneemt, hier en daar heel andere konklusies [sic] te trekken zijn dan opa Hans doet. We zullen er wel nooit achterkomen welke konklusies de juiste zijn. Of zou Bastiaan ons – nog – kunnen helpen ...¹⁰³

Pelupessy liet vervolgens aan de hand van voorbeelden zien hoe Freudenthal onbewust de richting van de gesprekjes met zijn kleinzoon stuurde. Volgens hem leefde Freudenthal zich niet genoeg in in de fantasiewereld van het jongetje. Juist de door Freudenthal zo geroemde en vaak gebruikte vraag: “Hoe weet je dat?” en die uit de vergelijkbare categorie: “Wat denk jij?” zetten de kleuter op het verkeerde been. Volgens Pelupessy moest Freudenthal figuurlijk meer door de knieën in zijn gesprekken met Bastiaan. Een mooi voorbeeld was Freudenthals analyse van het taartjes tellen in de zandbak:

10-9-'74. In de zandbak in het park. Bastiaan maakte – voor het eerst – een hele rij taartjes op de rand. Ik telde mee. Het waren er 18. Toen begon hij zelfstandig van het begin af aan te tellen: 1, 2, 3, 4, 5, 8. Hij zei: “Ik wou dat het er zes waren.” (“zes” betekende tot nu toe “veel”). Ik wees hem tot waartoe het er zes waren; er was daar toevallig een gleuf in de rand van de zandbak. Hij wees op de rest en zei zoiets als “dat moeten er ook zes zijn”. Ik wees dienovereenkomstig, maar hij, door iets anders afgeleid, hield ermee op. We hadden vlierbessen geplukt en in een mandje gedaan. Hij droeg het en zei: “6 pond”. Ik: “Hoe weet je dat?” Hij: “Mijn moeder kan het wegen.” – “Hoe?” – “Met de weegschaal”.¹⁰⁴

Pelupessy vermoedde dat Freudenthal ook hier te hoog inzet met zijn vraag: “Hoe weet je dat?” en bovendien als leermeester om de hoek kwam kijken:

Wat had Bastiaans opmerking over het mandje met vlierbessen te betekenen? “6 pond” zei hij. Het mandje is dus behoorlijk zwaar, volgens Bastiaan. Zo maar, een ‘emotionele’ opmerking. Net zo’n opmerking als “Het is vandaag behoorlijk koud”. Dat voel je gewoon. Wat moet je dan met zo’n vraag als “Hoe weet je dat?”. Nadenken, en er proberen een zo goed mogelijk antwoord op te geven. Waarom stelt Hans Freudenthal die vraag eigenlijk? Een reactie op Bastiaans opmerking? Of wil hij hem iets leren?¹⁰⁵

Freudenthal ging hieraan in zijn reactie op Pelupessy volkomen voorbij. Hem interesseerde slechts het antwoord van Bastiaan:

Elk kind schijnt een zekere tijd lang een zeker telwoord voor ‘veel’ te gebruiken. Bij Monica is dat nu nog ‘zeven’, hoewel zij veel verder kan tellen. Bastiaan had op dat ogenblik zeker geen notie hoe zwaar 6 pond weegt. Het verbazingwekkende, het vol-

103 B. Pelupessy, ‘Enkele annotaties bij “Wandelingen met Bastiaan”’, *Onderwijs in Natuurwetenschap. Een nieuwsbrief over de integratie van natuurwetenschappen in het basis- en voortgezet onderwijs* 2 (1975) 17-20, aldaar 17.

104 Freudenthal, ‘Wandelingen met Bastiaan’, *Pedomorfose* 25 (1975) 51-64, aldaar 61.

105 Pelupessy, ‘Enkele annotaties bij “Wandelingen met Bastiaan”’, *Onderwijs in Natuurwetenschap* 2 (1975) 17-20, aldaar 19.

strekt ongewone in deze situatie is dat hij op mijn vraag “hoe weet je dat?” een terzake doend antwoord geeft. Dat hij in ’t geheel een verband legt tussen ‘6 pond’ en ‘iets wegen’. Dit is op het punt waar het mij op aankomt. Bastiaan is op dat ogenblik 4 1/2 jaar! ¹⁰⁶

Met die nadruk op de 4 1/2 jaar van Bastiaan kwam toch nog even de trotse grootvader om de hoek kijken. Hij legde de schrijver uit dat Bastiaans fantasiewereld een heel andere was dan de schrijver vermoedde. Vragen stellen was voor Bastiaan gewoon een spel, zijn manier om te communiceren. Hij speelde geen rollenspel en de sprookjeswereld was op vierjarige leeftijd voor hem “niet meer dan een intellectueel spelletje”.¹⁰⁷ Dit rechtvaardigde volgens Freudenthal zijn onconventionele vragen aan de kleuter. Maar hij was de eerste om toe te geven hoe moeilijk het was uitspraken van kinderen te interpreteren:

Het doen en laten, zelfs het zich taalkundig uiten van kinderen – van wie dan ook die niet onze gelijke is – is moeilijk te interpreteren. Ik heb me wel honderden malen vergist. Conclusies trekken is nog lastiger – wie wandelingen met Bastiaan leest, merkt op dat het vaak relaas en zelden conclusie is. Misschien worden door deze dictie juist conclusies gesuggereerd, die vanzelfsprekend lijken. Ook wel door het feit dat Bastiaan veelal hardop denkt en dus zelf de conclusies schijnt te trekken.¹⁰⁸

Zo pareerde Freudenthal de kritiek. Omdat de situaties zo eigen, zo persoonlijk waren, kon niemand controleren of, hoe en in welke mate hij de situaties met zijn kleinkinderen manipuleerde en stuurde. Maar, zo stelde Freudenthal, dit deed ook niet ter zake. Elke observatie had een zekere mate van subjectiviteit. Altijd had de inmening van een volwassene invloed op de spontaniteit van het kind. Maar dit was niet belangrijk. Mits met de nodige bescheidenheid in het achterhoofd geanalyseerd, ging het er voornamelijk om wát er gebeurde. Analyse was moeilijk en makkelijk te bekritisieren. Desalniettemin was er volgens Freudenthal juist uit de kleine gebeurtenissen grote wiskunde te halen, al zag hij het zelf ook niet altijd in één keer.

9.4.4 Wandeling over de rails: wiskunde van een driejarige

Eén van de meest gebruikte anekdotes uit de schriftjes van Freudenthal was die waarin hij met Bastiaan en Monica over een verlaten treinrails wandelde. Frappant was dat van de vele anekdotes in zijn schriftjes hij juist deze zo frequent gebruikte. Frappant, omdat dit een pas achteraf in 1975 in het schriftje opgenomen belevenis was. De eerste keer dat deze anekdote opdook was in een voordracht voor de WISKOBAS-conferentie in Noordwijkerhout in 1974. Later gebruikte hij hem ondermeer nog in een voordracht in Polen in 1975 en op een conferentie in 1977.¹⁰⁹ Het

¹⁰⁶ Freudenthal, ‘Annotaties bij annotaties, vragen bij vragen’, *Onderwijs in Natuurwetenschap* 2 (1975) 21-22, aldaar 22.

¹⁰⁷ Ibid.

¹⁰⁸ Ibid., 21.

¹⁰⁹ RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nrs. 606, 618.

Vandaag was't eerst Monica naar de rails meegenomen.
 Bastiaan was iets ouder toen ik het eerst met hem deed.
 In gelouf deed het de tweede keer tussen de rails ^(tussen de rails) ~~dat de rails~~
~~was~~ ^{de eerste keer} ~~dat de rails~~ gebeurde die ik in allerlei artikels heb verteld: ik zie dat hij iets opzette-
 lijk probeert en hij ziet dat ik het zie. Hij: "Opa, kijk hoe ik het doe, een schoen erop,
 een schoen erin" – namelijk op en tussen de biels. Maanden later: "Opa, nu doe ik op
 de grote mensen manier" – van biel tot biel. Monica ontdooide pas toen ze zich tus-
 sen de biels van mijn hand had losgemaakt. Ik zag, dat ze bewust deed: één voet erop
 en voet ertussen in. Ik riep Bastiaan toe: "Moet je eens kijken wat Monica doet". Hij
 luisterde niet, maar Monica ging direct tot inspanningen over om het op de grote men-
 sen manier te doen.

De grote mensen manier" – van biel tot biel.
 Monica ontdooide pas toen ze zich tussen de rails van mijn
 hand had losgemaakt. Ik zag, dat ze bewust deed: één voet erop
 en voet ertussen in. Ik riep Bastiaan toe: "Moet je eens kijken
 wat Monica doet". Hij luisterde niet, maar Monica ging direct
 tot inspanningen over om het op de grote mensen manier
 te doen.

De 'biels-anekdote' uit Freudenthals aantekeningenboekje (1975).

moest omstreeks 1973 zijn geweest dat Freudenthal de desbetreffende wandeling maakte, die hij pas twee jaar later in zijn schriftje noteerde:

Vandaag voor 't eerst Monica naar de rails meegenomen. Bastiaan was iets ouder toen ik het eerst met hem deed. Ik geloof dat het de tweede keer tussen de rails was dat de geschiedenis gebeurde die ik in allerlei artikels heb verteld: ik zie dat hij iets opzette-lijk probeert en hij ziet dat ik het zie. Hij: "Opa, kijk hoe ik het doe, een schoen erop, een schoen erin" – namelijk op en tussen de biels. Maanden later: "Opa, nu doe ik op de grote mensen manier" – van biel tot biel. Monica ontdooide pas toen ze zich tussen de biels van mijn hand had losgemaakt. Ik zag, dat ze bewust deed: één voet erop een voet ertussen in. Ik riep Bastiaan toe: "Moet je eens kijken wat Monica doet". Hij luisterde niet, maar Monica ging direct tot inspanningen over om het op de grote mensen manier te doen.¹¹⁰

¹¹⁰ Aantekening van 20 april 1975 in het schriftje met observaties van Bastiaan en Monica, 1972-1976; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 446. Opvallend en typerend is Freudenthals hypercorrecte taalgebruik wanneer hij het over "biel" en de bijbehorende meervoudsvorm "biels" heeft (met dank aan prof.dr. A. Treffers voor zijn opmerking hierover, 9 november 2001).

Freudenthal verweet zichzelf achteraf, de uitspraak van het jongetje niet goed genoeg geïnterpreteerd te hebben. In zijn voordracht van 1975 vertelde hij dat zijn vrouw hem thuis duidelijk maakte, dat Bastiaans uitroep “Opa, kijk hoe ik het doe ...” een uitnodiging was om hem na te doen:

I was stupified by this example of feminine intuition, and I was sorry I had disappointed the boy by my stupidity¹¹¹

bekende hij zijn publiek. De tweede fout die hij met betrekking tot dit incident in eerste instantie maakte, was deze in het licht van Bastiaans ontwikkeling wiskundig gezien niet serieus genoeg te hebben genomen:

Several times I told this story at lectures and I added: This is the first mathematics in this boy’s life: one foot therein, one foot above. It is mathematics not because he did it, this periodical activity, but because he became conscious of it and formulated it in a way that resembles mathematical intuition. I called it mathematics in a slightly joking way but people would believe I am silly. I was wrong.¹¹²

De uitspraak van Bastiaan over ‘de grote mensen manier’ een paar maanden later maakte pas dat Freudenthal de eerste uitspraak goed begreep: er zat nog meer wiskunde in de gebeurtenis dan hij oorspronkelijk dacht. Niet alleen het herkennen van de periodieke activiteit en het formuleren ervan was als wiskunde te interpreteren:

I now know that my first interpretation was wrong and that what the boy said a year before was mathematics in an even deeper sense than I understood then. Probably without knowing it I had always made steps from one tie to the next. He would imitate it but he knew it was too long a step so he replaced my period by half of it: because isomorphism was difficult to attain he was then satisfied with a homomorphism. Only a year later he was able to perform the isomorphism, but in both cases he was conscious about the two phenomena and about their relatedness. This is the reason why I was right to call it his first mathematicism and wrong to do it jokingly.¹¹³

Dit maakte ook gelijk duidelijk waarom Freudenthal deze gebeurtenis niet direct genoteerd had: blijkbaar zag hij pas veel later de significantie van het moment in. Dit bleek ook wel uit het feit dat hij het in de jaren erna zo vaak in voordrachten als voorbeeld van ‘de eerste wiskundige actie van een peuter’ opvoerde, en tegelijkertijd impliciet als voorbeeld van de moeilijkheid van het terloops observeren. Twijfel over zijn achteraf-interpretatie uitte hij niet, enkel verbazing dat hij dit nooit eerder op de juiste manier had begrepen. “Herhalingsstructuren waarnemen en scheppen – dit is een bezigheid in ontelbare variaties met vaak een wiskundige inslag”, dat was de les die Freudenthal uit deze gebeurtenis trok.

De wandeling-over-de-rails-anekdote was in zoverre uniek dat het één van de

111 Voordracht in Polen 1975; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 606.

112 Ibid.

113 Ibid.

weinige was waarbij Freudenthal redelijk vergaande wiskundige analyse toepaste en deze in zijn voordrachten openbaar maakte. Commentaar op zijn observatie en analyse was er niet. Nu ging het hem ook niet zozeer om dit betreffende voorbeeld en de daarbij behorende conclusie, maar om het voorbeeld als illustratie van de rol en de kracht van het doen van observaties van kleine kinderen in hun eigen wereld. En juist in het wiskundeonderwijs was het nodig om bij het alledaagse, kleine te beginnen. In 1974 zei Freudenthal hierover:

Der Fehler dieser stark formalisierten Mathematik ist, daß sie darüber hinweggeht, wieviel wirkliche Mathematik Kinder vom ersten Schuljahr an, vielleicht schon im Kindergarten lernen können. Aber wirkliche Mathematik, die so einfach ist, daß wir Erwachsenen, die wir uns so sehr an sie gewöhnt haben, nicht mehr sehen, daß es sich um lernenswerte Dinge handelt, die Kinder lernen müssen.¹¹⁴

9.4.5 Observeren en het IOWO

In een brief aan Goffree over het wiskundeonderwijs-ontwikkelwerk noemde Freudenthal desgevraagd het kijken naar kinderen en studenten “zijn rijkste ervaringsbron”.¹¹⁵ Observeren speelde dan ook een prominente rol binnen het ontwikkelingswerk van het IOWO en was op deze schaal toegepast misschien wel een van de meest vernieuwende aspecten van het IOWO-ontwikkelingswerk. Heel concreet kwam de rol van het observeren natuurlijk tot uiting door het gebruik van de ontwerpscholen en het observeren op de Pedagogische Academies.¹¹⁶

Maar ook op de wekelijkse bijeenkomsten van de werkgroepen werd veel aandacht besteed aan het bespreken van observaties. Freudenthal stimuleerde dat en benadrukte het belang van het onbevangen kijken naar kinderen. Tegelijkertijd werd hij op zijn beurt geïnspireerd en geënthousiasmeerd door hetgeen hij op deze manier binnen het IOWO tot stand zag komen.¹¹⁷

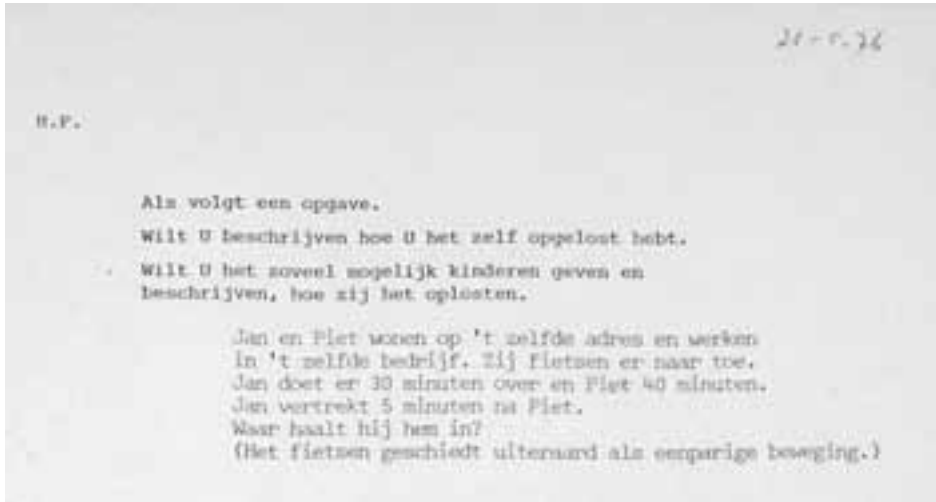
Het werken binnen het IOWO was voor Freudenthal heel vruchtbaar. Zo kon hij binnen de context van de IOWO-teams zijn eigen ideeën toetsen. Heel concreet deed hij dat met zijn observaties, die hij in katebelletjes optekende en verspreidde in de

114 Freudenthal, ‘Mathematische Erziehung oder Mathematik im Dienste der Erziehung’, voordracht Universiteitsweek te Innsbruck, 21 juni 1974; memiografische weergave, 18 pagina’s, aldaar 12; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1055.

115 Freudenthal aan Goffree, 9 februari 1986; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 33.

116 In 1977 vertelde Freudenthal in een interview één keer per week naar de Pedagogische Academie in Gorinchem te gaan, één dag naar een school waar de PA-studenten stage liepen en ook nog één dag per week naar een school voor lager beroepsonderwijs in Utrecht. Hij zei erover: “Het plezierigste eigenlijk wat ik ooit gedaan heb in mijn leven is naar die P.A. gaan, met de studenten daar werken en met de kinderen van die school”; interview met Hans Freudenthal: ‘Wiskunde in andere wetenschappen’, in: *De vakidoot. Maandblad van de subfaculteiten wiskunde en natuur- en sterrekunde* 9 (1977) 14-20, aldaar 15; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1849.

117 Zijn lezing gehouden op een CIEAEM-conferentie in Bordeaux in 1974 was een introductie bij filmmateriaal van een lessituatie over IOWO-materiaal (‘Kijk op kans’). In deze lezing verhaalde Freudenthal over diverse observaties van lessituaties in de klas; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 588.



Kattebelletje van Freudenthal aan WISKOBAS-medewerkers (1976).

postvakjes van de medewerkers. In deze notities schetste hij korte verhaaltjes, ruwe ideeën, anekdotes, maar vooral vraagstukjes. Voor deze vraagstukjes vroeg hij dan aan alle medewerkers hun oplossing op schrift te stellen:

Als volgt een opgave. Wilt u beschrijven hoe U het zelf opgelost hebt. Wilt U het zoveel mogelijk kinderen geven en beschrijven, hoe zij het oplosten.¹¹⁸

Blijkbaar was hij erg geïnteresseerd in oplossingsstrategieën en gebruikte hij de IOWO-medewerkers als proefkonijnen. Deze informele acties kwamen het dichtst bij wat systematisch onderzoek genoemd zou kunnen worden, maar iets direct concreets deed Freudenthal er niet mee. Dergelijke acties en aantekeningen droegen vooral impliciet bij aan de vorming van Freudenthals gedachtegoed, een letterlijke verwijzing is in zijn werk dan ook niet te vinden. Net als zoveel van wat op zijn pad kwam, nam hij het direct op in het grote geheel van zijn gedachtegoed.

Sporadisch bevatten de kattebelletjes in de postvakjes wel een meer uitgekristalliseerd idee, zoals bij het volgende:

Het blijkt bij proeven dat kinderen 1e klas basisschool, die sommen als $3+2$ en $4+3$ enz.. al behoorlijk kunnen, op de vraag “wat prefereer je, die twee stapels met snoepjes van 3 en 2 of die ene van 5” enz. in 't algemeen foutief antwoorden. Geen wonder indien ze nooit geleerd hebben optelsommen op preferenties toe te passen. Het lijkt mij een vruchtbaar gebied – ook met vragen erbij waar het optelmodel niet op de preferentie past. Dus ook bijv. een touwtje zo lang of hetzelfde in twee stukken. Een taart of dezelfde in parten. Een sinaasappel als geheel of in parten. Drie appels en twee peren, of drie peren en twee appels. Enz.¹¹⁹

¹¹⁸ Freudenthal aan de WISKOBAS-medewerkers, 21 mei 1976; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 405.

¹¹⁹ Freudenthal aan de WISKOBAS-medewerkers, 7 februari 1973; *ibid.*

Ook veel van de Bastiaan-anekdotes kwamen op deze manier in de postvakjes terecht, vaak nog voor Freudenthal ze in zijn voordrachten en artikelen gebruikte. Net als in zijn artikelen waagde Freudenthal in deze kladversie van de anekdotes het niet ze te verklaren of te analyseren. Hij gooide ze zo blanco mogelijk in de groep om een zo objectief mogelijke respons terug te krijgen. Een uitzondering maakte hij in de beschrijving van de volgende wandeling, waarbij hij zich ter afsluiting een sneer richting het niveaurekenen veroorloofde:

28-11-76 Met Bastiaan en Monica bij de Leijen. Een groot aantal amazones passeert ons. Ik vraag: “Hoeveel zijn het er wel geweest?” Monica meteen: “Zeven”. Bastiaan: “40”. Ik: “Neen”. Bastiaan: “20”. Ik: “Ik denk 15 à 20”. Ik, voor de grap: “We hoeven toch alleen maar de hoeven in het zand te tellen.” Bastiaan telt van 1 tot 20 terwijl hij telkens in een andere afdruk stapt. “Dus 20”. Ik: “Maar een paard heeft vier poten”. Hij, springend met grote stappen: “4, 8, 16, (aarzelend) 20, 24, (aarzelend) 27, (aarzelend) 30, 34, (aarzelend) 37, (aarzelend) 40, Dus 20 paarden”. Ik: “Maar 40 hoeven zijn 10 paarden. Een paard heeft 4 poten. 10 paarden hebben tien linkervoortpoten, 10 rechtervoortpoten, dit zijn er al twintig”. Bastiaan: “Dus 80; 20 paarden hebben 80 poten”. De fout in de tafel van 4 ontstaat blijkbaar door tellen 24, 25, 26, 27.
Conclusie: leve het niveaurekenen.¹²⁰

9.5 De observatie als bron

9.5.1 Professor of kindse grootvader?

Ten tijde van zijn ‘Rekendidaktiek’ in 1944 was de kiem van Freudenthals belangstelling voor observaties dus al gelegd. In het observeren van zijn kleinkinderen dertig jaar later herontdekte Freudenthal de kracht van de observatie: observatie als dé bron van inspiratie en informatie voor het leerproces. Dat hield voor Freudenthal echter niet op bij het op waarde leren schatten van de uitspraken van een peuter tijdens een wandeling. Sterker nog: hij zag in de observatie het uitgangspunt voor de ontwikkeling van wiskundeonderwijs. Dat hij ook wel beseftte dat dit een niet voor de hand liggend en nog weinig gangbaar standpunt was, bleek uit zijn toespraak in 1977:

¹²⁰ Freudenthal aan de WISKOBAS-medewerkers, 30 november 1976; *ibid.* Freudenthals “leve het niveaurekenen” sloeg waarschijnlijk op de rekenmethode *Niveaucursus rekenen* van de werkgroep o.l.v. H.M.M. Vossen, een sterk mechanistische rekenmethode. In het onderzoek van R.A. de Jong, zoals beschreven in zijn *Wiskobas in methoden*, bleek deze methode weinig verwantschap te hebben met hetgeen WISKOBAS karakteriseerde: De Jong vond nauwelijks iets van de door hem gedefinieerde WISKOBAS-karakteristieken (waaronder bijvoorbeeld “veelzijdige benadering van getalbegrip en operaties” en “geen geïsoleerde begripsverwervende activiteiten, speciaal voor het aanvangsonderwijs”) in deze methode terug. Dit zou Freudenthals sneer richting “niveaurekenen” verklaren: Bastiaan (die klaarblijkelijk volgens de methode *Niveaucursus rekenen* les heeft) bleek moeite te hebben zijn rekenvaardigheden in deze context begrijpend toe te kunnen passen; R.A. de Jong, *Wiskobas in methoden* 180-183.

I agree it is not easy to observe individual developments, and the laboratory of the psychologist is the least appropriate place to do it. The easiest place is the family and the next easiest the classroom. So if there are so many families and so many classrooms in the world, why do we know so little about learning processes? The answer is that you need a strategy of observing – a highly sophisticated strategy but which can be expressed in one principle: look and listen with an open mind and have the courage to notice and to report events that most people would consider as too silly to be noticed and to be reported – there might be a minority who can appreciate them, and this minority will be right.¹²¹

Ook buiten het IOWO hamerde Freudenthal in lezingen en voordrachten steeds vaker op het belang van de observatie. Hiermee stak hij wel zijn nek uit in onderwijsland. Want er was volgens Freudenthal moed voor nodig om juist aan die kleine, dagelijkse gebeurtenissen belang te hechten en ze wereldkundig te maken. Zoals hij zelf al aangaf bij het voorbeeld van de wandeling over de rails met Bastiaan werden zijn observaties nogal lacherig ontvangen. Freudenthal speelde daar ook expres op in door zichzelf als ‘onnozele oude leermeester’ af te schilderen en meermalen de zogenaamde onbenulligheid van de gebeurtenissen te benadrukken:

We rijden met hem door de Veluwe waar een geweldige storm veel bomen heeft geveld. Het meest indrukwekkende voor hem is, dat dit hetzelfde hout is als waarmee zijn vader thuis timmert. Hij raakt er niet over uit gepraat – een hele week niet – ‘Bastiaan bomen zagen’.

Ik vertel hier heel onbenullige verhaaltjes – ik waarschuwde u al eerder. Misschien vindt u me kinds. Inderdaad, ik leef mee met een jongetje van nog geen drie, voor wie dit – de gelijksoortigheid van hout in het bos en houten planken – een geweldige ontdekking is en ik ben niet te oud om zijn Aha-Erlebnis mee te voelen. (Of ben ik er net weer oud genoeg voor?)¹²²

Hij stelde zich hierdoor schijnbaar kwetsbaar op als een zich over kinderlijke onbenulligheden verwonderende en vertederde grootvader. Schijnbaar, want juist door zijn al opgebouwde autoriteit als hoogleraar wiskunde én die op het gebied van het wiskundeonderwijs kon hij dit doen zonder zijn geloofwaardigheid te verliezen. Sterker nog, zijn boodschap: terug naar het kleine, de huis-tuin-en-keuken-gebeurtenissen om te leren over wiskunde-leren kwam daardoor des te beter over.

Ich erzählte einmal versammelten Pädagogen, wie sich eine Viereinhalbjährige aufregte, als sie merkte, daß sie auch unsichtbare Dinge (die Beine unter dem Tisch der Herumsitzenden) zählen konnte, von einem Achtjährigen, der sich ebenso aufregte, als er

121 Freudenthal tijdens de openingstoespraak van ‘The first conference of the international group for the psychology of mathematics education’ in Utrecht, 29 augustus – 2 september 1977; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1840.

122 Freudenthal, ‘Cognitieve ontwikkeling – kinderen geobserveerd’, artikel samengesteld uit *Jaarverslag over 1977*, Provinciaals Utrechts Genootschap (1978) 8-18 en Freudenthal, *Weeding and sowing*; Freudenthal, *Appels en peren* 105.

entdeckte, daß ein Hundertstel mehr sei als ein Tausendstel. Es regte keinen der Zuhörer auf, es langweilte sie. Und doch sind das die wahrhaft tiefen mathematischen Erlebnisse, wichtiger als das Einmaleins und algebraische Formeln – wichtig nicht nur psychologisch, auch als Mathematik!¹²³

Bovendien gaf hij met deze boodschap indirect aan, welke lange weg er nog te gaan was bij de ontwikkeling van wiskundeonderwijs. Immers, als iemand met het aanzien dat Freudenthal genoot al aangaf de bron op zijn hurken, in het kleine, alledaagse te zoeken – en zelfs dan nog niet meer vond dan aanwijzingen voor de richting waarin hij antwoorden moest zoeken – was het wel duidelijk dat een pasklare invulling van wiskundeonderwijs nog lang niet verwacht kon worden. En dit was precies Freudenthals boodschap: we staan pas aan het begin van een lange weg. En dat begin, dat was het kleine kind en hoe het in zijn wereld stond. En dan waren het vanzelfsprekend de kleine, schijnbaar onbenullige gebeurtenissen waar het om ging, juist als je op zoek was naar handvatten voor de ontwikkeling van wiskundeonderwijs. Want in die kleine onbenulligheden was wiskunde te vinden.

9.5.2 Het paradigma: voorbeeld der voorbeelden

Leken de observaties die hij ten tijde van ‘Rekendidaktiek’ deed nog voornamelijk bedoeld om bestaande ideeën over onderwijs en kennisvorming te weerleggen, nu vervulden observaties een actievere functie: uitgangspunt en aanzet tot theorie, zo werkte het observeren van kinderen bij Freudenthal. Observaties die leidden tot kleinere inzichten, zoals de eerste wiskundige activiteit van een drie-jarige, maar ook observaties die leidden tot grotere, algemenere inzichten en richtlijnen die hem in de jaren zeventig en tachtig bezig bleven houden.

Freudenthal verkondigde al veel langer voorstander te zijn van het principe van de geleide heruitvinding in het wiskundeonderwijs. Nu kwam daar nog iets bij. Bij het principe ‘het wiskunde leren door actief wiskunde te mogen doen’ lag volgens Freudenthal de essentie in het vinden van een sleutelvoorbeeld: het paradigma.¹²⁴

Wetenschapshistoricus en -filosoof Thomas Kuhn (1922-1996) introduceerde het begrip paradigma in zijn boek *The structure of scientific revolutions* uit 1962.¹²⁵ Hij schetste hierin een ontwikkelingsmodel voor de wetenschap waarin hij een periode van ‘normale wetenschap’ afgewisseld zag met een periode van ‘revolutie’. Die eerste werd gekarakteriseerd door de overeenstemming die er tussen wetenschappers

123 Freudenthal, ‘Der Ärger mit der Mengenlehre’, als artikel: Hans Freudenthal, ‘Was fehlt der modernen Mathematik?’, in: *Deutscher Zeitung* 38 (21 september 1973); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1621.

124 Ook in zijn latere publicaties zou het paradigma een belangrijke rol blijven spelen. Hij schreef hier onder andere over in *Mathematics as an educational task*, maar beter nog kwam de waarde die hij aan het concept ‘paradigma’ hechte naar voren in *Weeding and Sowing*. Ook in *Revisiting mathematics education* kwam hij er uitgebreid op terug.

125 T.S. Kuhn, *The structure of scientific revolutions* (Chicago 1962); G. de Vries, *De ontwikkeling van wetenschap. Een inleiding in de wetenschapsfilosofie* (Groningen 1984) 91-117.

te vinden was. In de normale periode werden door de wetenschappelijke gemeenschap dezelfde prestaties van voorgangers als maatgevend beschouwd. Deze prestaties (en de bijbehorende problemen en methode van onderzoek) functioneerden als typisch, als exemplarisch voorbeeld voor de wetenschapsbeoefening: het paradigma. Wanneer zich voldoende problemen voordeden die niet langer binnen dit kader opgelost konden worden, viel overeenstemming weg en brak een tijd van ‘crisis’ aan. Een wetenschappelijke revolutie was dan nodig om weer tot consensus over een nieuw paradigma en een periode van normale wetenschap te komen.

Kuhns boek en de door hem geïntroduceerde terminologie (waaronder ‘paradigma’) werden in de jaren zestig en zeventig veelbesproken en met name in sociaal wetenschappelijke kring populair. Freudenthal verwees in didactische context nergens naar Kuhns paradigma. Toch zouden ‘paradigma’ en ‘paradigmatic instruction’ in de jaren zeventig een belangrijk onderdeel van Freudenthals didactische terminologie worden. De manier waarop was typerend voor Freudenthals gave om op actuele ontwikkelingen in te springen en ze in zijn eigen gedachtegoed te assimileren door er zijn eigen draai aan te geven.

Een van de eerste keren dat Freudenthal de term paradigma gebruikte, was in zijn artikel ‘Trends in modern mathematics’ van 1962. Daar had hij het over de wiskundige tendens de (wiskundige) taal aan te passen aan de toenemende complexiteit van de wiskundige structuren. Hij zag in deze tendens “a paradigm which shows how mathematics can be applied in chaotic working fields like human language, namely by remodelling the field rather than simply by describing it”.¹²⁶

In 1972 gebruikte Freudenthal de term in meer didactische context in een voordracht.¹²⁷ Net als in zijn artikel van 1962 legde Freudenthal in zijn gebruik van de term paradigma het accent op de discontinuïteit in het leerproces: het paradigma als voorbeeld voor de leerling van andere, nabij gelegen wiskunde en daarmee als uitgangspunt voor uitbreiding van wiskundig inzicht bij de leerling. Het onderliggende idee had zich natuurlijk al eerder gevormd, maar het was pas in 1972 dat hij het voor het eerst zo aan de orde stelde: zoek in het leerproces naar een voorbeeld, dat cruciaal is bij het reflecteren en het je bewust maken van hetgeen je onbewust doet of kent. Een dergelijk voorbeeld stond model en diende als uitgangspunt voor generalisatie naar andere situaties, naar reflectie op het eigen handelen en uiteindelijk naar een sprong in het leerproces en een zekere niveauverhoging. Freudenthals uitgangspunt bleef hierbij overigens dat het (wiskundige) leerproces niet geleidelijk, maar sprongsgewijs verliep.

126 Hans Freudenthal, ‘Trends in modern mathematics’, *ICSU Review* 4 (1962) 54-61, aldaar 61. Zie voor het volledige citaat ook paragraaf 8.4.1.

127 Het begrip paradigma kwam voor in de twee lezingen in 1972: ‘Tendenzen zur Mathematik in der Grundschule’, gehouden op ‘Der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung’ en in de lezing die hij in Argentinië hield, getiteld: ‘The Institute on Developing Mathematical Education (IOWO) in the Netherlands’: Freudenthal, ‘Tendenzen zur Mathematik in der Grundschule’, *Didaktik der Mathematik* 1 (1973) 2-11; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 571.

In order to explain what we like to consider as mathematics, I will stress two main features: mathematizing reality, and generality by paradigms with a vast scope. [...] “Generality by paradigms” aims at a philosophy of interpreting mathematics for the primary level which is opposed to the prevailing ones. We do not believe that abstraction is being achieved by accumulating a large number of concrete examples, nor generality by adducing a collection of special cases, in particular if behavioural responses have to be reinforced, if some technique has to be settled and improved by exercises and drill, but this is not characteristic of mathematics. True mathematics has to be found in the discontinuities of the learning process.¹²⁸

Zo kwamen met Freudenthals hernieuwde aandacht voor het doen van observaties alle belangrijke karakteristieken in zijn visie op het ontwikkelen van wiskundeonderwijs samen: het analyseren van het leerproces, om te zoeken naar de sprongen daarin en het vinden van paradigmatische situaties – waarbij voor hem voor die situaties gold: hoe realistischer, hoe beter. In 1972 vond de gebeurtenis plaats die voor hem ‘het paradigma van het paradigma’ was:

I begin with the event that for me, if my memory does not deceive me, was the paradigm of the paradigm. Certainly I had pressed for paradigmatic instruction for long, and I could sprinkle others and myself with examples of paradigms, but not until a talk with 8-year old (8;2 to 8;6) did I discover the one paradigm that I really found convincing as an example of a paradigm. The area to which it belongs is not included in traditional arithmetic and mathematics teaching – this made my experience possible – though it would fit at least into the second grade, but even kindergarten teachers who participated in our refresher courses tried it convincingly. Meanwhile I expounded this paradigm many times: I drew a map with three towns A, B, C, where A and B are joined by three roads and B and C by two. The question is: In how many ways can I travel from A through B to C? [...] It is characteristic of the fundamental weaknesses of our traditional arithmetic instruction that 8-9 year olds have difficulties with this problem, and that even adults, including people who have enjoyed a higher education in the arts or social sciences, often do not know how to tackle such problems.¹²⁹

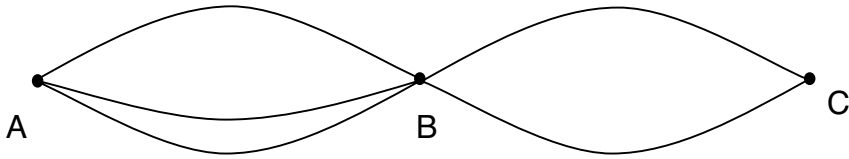
In *Schrijf dat op, Hans* legde Freudenthal uit waarom juist dit vraagstuk voor hem het ‘paradigma van het paradigma’ was, en vatte daarmee de belangrijkste essentie van een goed paradigma samen:

De vraag – en dus het antwoord – staat model voor een rits van vragen, gelijksoortige, ingewikkeldere, als beginpunt van een groot stuk wiskunde, van de onderbouw van de lagere school als je wilt tot heel hoog boven, een vaak door mij beproefde weg.¹³⁰

¹²⁸ Freudenthal in zijn lezing ‘The Institute on Developing Mathematical Education (IOWO) in the Netherlands’, 1972; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 571.

¹²⁹ Freudenthal, *Weeding and sowing* 202.

¹³⁰ Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 358.



Hoeveel wegen van A naar C via B?

In zijn lezing van 1972 deed Freudenthal verslag van zijn ervaringen met kinderen met dit probleem. Hij vertelde hoe de kinderen met moeite het probleem oplosten. Daarna gaf hij de kinderen een nieuw vraagstuk: een muis moet door gaten in twee muren bij een stuk kaas komen. De eerste muur heeft drie en de tweede twee gaten:

The children answered the new question without any hesitation. They even answered the question of how many paths I must draw to join four houses directly with each other, that is to say, they answered it by 12 which shows that rather than counting the number of paths they used a paradigm, which in the present case was not refined enough.

This is true mathematics. It does not matter that the original problem was formulated with special numbers. One seemingly special case was sufficient to show the essentials of the structure. It was acquired by a hard but effective learning process, and it led to mastering a host of isomorphic problems. Do children grasp consciously this isomorphy? In general they do not, though it happened, that after such a lesson an intelligent seven years old girl told her parents: “Granddaddy is stupid, is he not? He gave me ten times the same problem and did not notice it.”¹³¹

In dit voorbeeld kwam naar voren hoe kinderen een oplossingsstrategie die ze in een specifieke situatie (onbewust) hadden ontwikkeld en gebruikt, zich bewust konden maken door deze uit die situatie los te maken en in andere, aan de oorspronkelijke gerelateerde situaties toe te passen. Dit maakte het ‘hoeveel wegen zijn er van A naar C via B?’-vraagstuk een goed voorbeeld van het paradigma. Een jaar later schreef Freudenthal over het karakteristieke sprongmatige van het wiskunde leren:

Und Mathematik ist nicht Routine, sondern das Einmalige, aber doch allgemein Bedeutungsvolle. Herauszufinden, was paradigmatisch sein könnte, ist die Kunst der Lehrplanentwicklung in der Mathematik.¹³²

Het zoeken naar paradigma’s was voor Freudenthal de weg in onderwijsontwikkeling. Het concept paradigma was ook een typisch voorbeeld van een door Freudenthal uit zijn (buitenwiskundige) omgeving opgepikte term, die in wisselwerking tussen Freudenthal en het werk van het IOWO verder ingevuld werd. Het was

¹³¹ Lezing van Freudenthal in Argentinië, eind 1972; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 571.

¹³² Freudenthal, ‘Was fehlt der modernen Mathematik?’, *Deutsche Zeitung*, 21 september 1973; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1621.

nauw geliëerd aan een ander IOWO-/Freudenthal-stokpaardje: dat van de rijke context.

Een rijk paradigma. Rijke contexten – ik weet niet wie op het IOWO het eerst deze term heeft gebruikt. In elk geval stamt het idee uit het concreet ontwikkelingswerk van het IOWO en het zal eventjes geduurd hebben voor het bewust gemaakt en verwoord werd – er is inmiddels veel op gereflecteerd. Oorspronkelijk was het alleen maar ‘context’. ‘Rijk’ kwam erbij toen de rijkdom zich onder het ontwikkelen manifesteerde.¹³³

Zelf kon Freudenthal zich achteraf dus blijkbaar niet meer herinneren wie dergelijke termen als eerste in deze context gebruikte. Observeren, het analyseren van leerprocessen, het zoeken naar sprongen en paradigma’s: het kwam allemaal terug in zowel het werk van Freudenthal als in dat van medewerkers van het IOWO. Freudenthal had in zijn gedachtegoed de basis hiervoor al gelegd in de jaren vijftig en zestig, maar zag het nu ook in de praktijk gebracht, uitgewerkt en toegepast in de onderwijsontwikkeling van het IOWO.

Als er één leerproces was dat van deze combinatie profiteerde, dan was het wel Freudenthals eigen leerproces. Met het IOWO als middel om zo vaak hij wilde tot de essentie – die van de realiteit in de klas – af te dalen, kon hij voor het eerst zijn tot nu toe voornamelijk theoretische beschouwingen over het wiskundeonderwijs aanscherpen, concreet maken en onderbouwen met praktijkervaringen. In combinatie met zijn hervonden enthousiasme voor de wereld van (zijn klein)kinderen leverde dit stof voor veel voordrachten, artikelen en daarmee ook voor zijn boeken.¹³⁴

9.5.3 Freudenthal ziet het zo: getalbegrip en didactische fenomenologie

Bij het observeren van jonge kinderen met een ‘wiskundige bril’ is de ontwikkeling van het getalbegrip een van de eerste dingen die in het oog springt. Zo verging het Freudenthal bij zijn eigen kinderen. Al in de aantekeningen voor ‘Rekendidaktiek’ noteerde hij observaties van tellende zoons.¹³⁵ Ook tijdens de wandelingen met Bastiaan kwam het tellen en het getalbegrip regelmatig aan de orde.

Getalbegrip was ook een vaak terugkerend onderwerp in Freudenthals artikelen en boeken in de jaren zeventig. Om een paar redenen nam het in de ontwikkeling van zijn gedachtegoed een belangrijke plaats in. Allereerst was de New Math-benadering van het getalbegrip een van de hoofdpunten van Freudenthals kritiek op New Math-ontwikkelingen voor het rekenonderwijs. In de tweede plaats was de ontwikkeling van het getalbegrip voor Freudenthal nauw verbonden met observe-

¹³³ Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 358.

¹³⁴ Deze thema’s – observeren en analyseren van leerprocessen, sprongen en discontinuïteiten, paradigma’s en wiskunde leren door wiskunde doen in realistische context – blijven terugkeren in zijn latere publicaties. Zo komt het paradigmatisch zijn van wiskundige stof voor in *Mathematics as an educational task* (met name voor de hogere wiskunde van het middelbare en universitaire onderwijs) en in *Weeding and sowing* komt het uitgebreid aan de orde op een meer abstracte manier als gereedschap voor onderwijsontwikkeling.

¹³⁵ Zie ook het ‘tik, tak en boem’-voorbeeld in paragraaf 9.4.1.

ren als hulpmiddel bij het ontwikkelen van wiskundeonderwijs. Tot slot zou het een indirecte aanleiding geven tot de ontwikkeling van een voor Freudenthal belangrijk didactisch handvat: didactische fenomenologie.

Getalbegrip in New Math

Onder invloed van New Math en de daarmee samenhangende wens tot modernisering van het rekenonderwijs kreeg ook het getalbegrip de nodige aandacht. Eind jaren zestig lag in het rekenonderwijs in Nederland de nadruk nog hoofdzakelijk op het mechaniseren van rekentechnieken.¹³⁶ Onder invloed van New Math kreeg het door de leerling zelf verkrijgen van (wiskundig) inzicht in zijn handelen meer nadruk, ook op de lagere school. De aansluiting met de ontwikkeling van het kinderlijk denken werd daarbij gezocht in de moderne wiskunde, met name in de logische structuren. Verzamelingsleer werd zo de nieuwe basis voor het rekenonderwijs.

Een rechtvaardiging voor deze invalshoek vonden voorstanders in het werk van Piaget. Voor Freudenthal was deze ontwikkeling een doorn in het oog. In een interview voor de *Haagse Post* in 1969 sprak hij hierover:

Prof. Freudenthal heeft vooral bezwaar tegen de in sommige leerboeken toegepaste benadering van de wiskunde, geheel vanuit de verzamelingsleer. ‘Dat is een grote vergissing’, meent hij, ‘je vindt dat in veel van de Amerikaanse literatuur, maar het is allemaal fout wat daar gebeurt. Dat hele gedoe is afkomstig van de Zwitserse psycholoog Piaget, waar sommige mensen in het wiskundeonderwijs wiskunde van schijnen te leren. Ik heb het al aan diverse vakmensen uitgelegd en die zeiden dan steeds weer: wat stom dat we die fout niet eerder hebben gezien.’¹³⁷

Wat was het geval? Piaget en zijn assistente Szeminska wijdden in 1941 een boek aan de ontwikkeling van het getalbegrip: *La g n se du nombre chez l’enfant*, waarin kinderen van diverse leeftijden getoetst werden op hun begrip van het kardinaalgetal (aantal). Uit Piagets bevindingen was – ten onrechte – afgeleid dat het begrip van het kardinaalgetal in de ontwikkeling van kinderen de belangrijkste plaats innam, belangrijker dan het ordinaalgetal (telgetal). Onterecht, zoals Piaget zelf ook al aangaf in een voetnoot van een artikel uit 1973:

Several authors (Freudenthal, etc.) seem to have understood that I think the ordinal number is more primitive than the cardinal number, or the opposite. I have never made such a statement and have always considered these two aspects of finite numbers indissociable and psychologically reinforcing one another in a synthesis that goes beyond both the inclusion of classes and the order of asymmetrical transitive relations.¹³⁸

136 De meest gebruikte rekenmethoden waren dan ook mechanistische methoden, vergelijkbaar met *Fundamenteel rekenen* (zie ook paragraaf 4.3); De Jong, *Wiskobas in methoden* 133 e.v.

137 Freudenthal in: Vuysje, ‘De wiskundeles verandert: $3+2=1$ ’, *Haagse Post* (december 1969, januari 1970); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1847.

138 J. Piaget, ‘Comments on mathematical education’, in: A.G. Howson, ed., *Developments in mathematical education. Proceedings of the second international congress on mathematical education* (Cambridge 1973) 79-87, aldaar 82.

De uitkomsten van Piagets onderzoek suggereerden dat de spontane ontwikkeling van het getalbegrip bij kinderen een grote overeenkomst vertoonde met de logische structuur van moderne wiskunde, waarbij met name het één-één afbeelden van twee verzamelingen op elkaar een belangrijke plaats in zou nemen. De conclusie dat de logica en structuur van moderne wiskunde dus als basis voor het rekenonderwijs genomen moesten worden, was vervolgens makkelijk getrokken.

Zo maakten de Franse Nicole Picard en de Canadees Zoltan Dienes in hun ontwerpen voor rekenonderwijs al op de kleuterschool een begin met logisch redeneren. In Nederland is Picards werk als uitgangspunt gekozen bij de structuralistische rekenmethode *Denken en Rekenen*, waarbij ook mevrouw Freudenthal betrokken was.¹³⁹ Volgens de Belgische pedagoog Valeer van Achter, redactielid van *Denken en rekenen*, moest er gezocht worden naar “de fundamentele en wiskundig verantwoorde vooroefeningen op het getal”.¹⁴⁰ Hij legde daarbij net als Dienes de nadruk op het gebruik van de één-één-afbeelding tussen twee verzamelingen om bij het getalbegrip van jonge kinderen aan te sluiten.

Redactielid De Iongh beschreef in het bij de methode horende *Tijdschrift Denken en Rekenen* hoe de verzamelingenleer aan het wiskunde-inzicht kon bijdragen. Hij sprak hierbij van het ‘ondercomplex’: “het geheel van de niet gemakkelijk in woorden te beschrijven “voorstellingen” en “herinneringen”, wat ons het wiskundige inzicht schonk”. Bij het vastleggen en aanleren van exact taalgebruik en het koppelen hiervan aan het al aanwezige ‘ondercomplex’ was volgens hem verzamelingenleer nodig:

Als we op deze wijze pogen het ‘ondercomplex’ voor het gewone rekenen te ontwikkelen, blijkt dat dit een deel vormt van wat de wiskundigen beschrijven in de elementaire verzamelingsleer en wel het deel, dat alleen de eindige verzamelingen bevat. Dit is de wezenlijke rechtvaardiging ervoor, dat we deze elementaire verzamelingsleer – neen, niet apart gaan bestuderen – maar wel gaan gebruiken om tellen en rekenen van de goede ‘plaatjes’ te voorzien. Dat we daardoor reeds heel vroeg de leerlingen vertrouwd maken met dat fundamentele deel van de wiskunde, de verzamelingsleer, dat de woorden en begrippen levert, waarmede tegenwoordig het gehele bouwwerk van de wiskunde wordt opgetrokken, is een extra voordeel, nu ook de wiskunde van de middelbare school zich meer en meer rondom de verzamelingsleer gaat herstructureren.¹⁴¹

In het onderzoek van R.A. de Jong uit 1986 kreeg de rekenmethode *Denken en rekenen* als typering: “biedt ruime mogelijkheid tot wiskundig rijk onderwijs”, maar met de kanttekening “of deze gerealiseerd kunnen worden is de vraag”. De methode zou uiteindelijk niet aanslaan in Nederland. In 1974 verschenen de laatste deeltjes.¹⁴²

139 De Jong, *Wiskobas in methoden* 158-161. *Denken en rekenen* werd uitgegeven door Malmberg. De eerste druk verscheen in 1968. In 1976 was de methode uit het fonds genomen. Zie ook paragraaf 8.5.2.

140 V. van Achter, *De modernisering van het rekenonderwijs op de basisschool* ('s-Hertogenbosch 1969) 23.

141 J.J. de Iongh, ‘Zeggen en zien’, in: *Keur uit de eerste jaargang van het tijdschrift Denken en Rekenen* ('s-Hertogenbosch 1970) 7-9, aldaar 8-9.

142 De Jong, *Wiskobas in Methoden* 161.

Getalbegrip en Bastiaans aalbessen

Dergelijk gebruik van verzamelingenleer op de lagere school was typerend voor de New Math-aanpak van het rekenonderwijs. Op deze manier kon ook op de basisschool al een begin gemaakt worden met wiskunde. Typerend voor deze aanpak met verzamelingen was om vervolgens de nadruk op het getalbegrip als *aantal* (kardinaalgetal of ‘numerosity aspect’) en niet als *telgetal* (ordinaalgetal, belichaamd door de oneindig doorlopende getallenrij) te leggen. Hierbij werd dan verwezen naar het door Cantor eind negentiende eeuw gedefinieerde kardinaalgetal (of: machtigheid). De grondslagen van de getallenleer en de bijbehorende rekenwetten leken vervolgens met het grootste gemak ‘bewezen’ te kunnen worden. Het (af)tel-len werd in deze aanpak vervangen door het kardinaalaspect van het getal en het één-één afbeelden en vergelijken van twee (eindige) verzamelingen.

Freudenthal verzette zich in diverse artikelen tegen deze aanpak.¹⁴³ “Dikdoenerij van handige auteurs” noemde hij het, dikdoenerij die volgens hem niets met wiskunde te maken zou hebben.¹⁴⁴ Zowel wiskundig als didactisch vond hij het fout om het aantalaspect als basis voor de natuurlijke getallen te nemen en daarbij het principe van volledige inductie te negeren. Wiskundig was deze aanpak ‘ronddraaien in een kringetje’, want ook bij het ontwikkelen van een theorie van eindige verzamelingen, die dan als basis van de natuurlijke getallen moest dienen, was uiteindelijk volledige inductie nodig:

The majority of the manuals suggest a concept of the natural number based purely on set theory and ignore or obscure the mathematical fact that this is impossible. Natural numbers are introduced as the cardinals of finite sets; but to explain what a finite set is, the familiar sequence of natural numbers is used. This is simply going around in a circle.¹⁴⁵

En ook didactisch was het ‘enzovoorts ...’ van de eindeloze getallenrij volgens Freudenthal voor kinderen onmisbaar bij de ontwikkeling van het getalbegrip. Het primitievere begrip van ‘aantal’ waarop sommige methoden steunden, was volgens Freudenthal ook bij dieren aanwezig en zeker niet afdoende als uitgangspunt:

Ik heb leerboekjes voor de lagere school gezien, waarin de kindren na twee jaar nog niet konden tellen. [...] Ze leren dan alleen om te zien dat vijf meer is dan drie enzovoort. Dat kunnen dieren ook. Een vogel ziet of een van de vijf eieren uit zijn nest verdwenen is, maar een vogel kan daarmee nog niet tellen! Die benadering is de puurste waanzin.¹⁴⁶

143 Freudenthal in: Vuysje, ‘De wiskundeles verandert: $3+2=1$ ’, *HP Magazine*; Freudenthal, ‘Les tendances nouvelles de l’enseignement mathématique’, *Revue de l’Enseignement Supérieur* 46-47 (1969) 23-29; Freudenthal, ‘Phaenomenologie van het getalbegrip’, *Wijsgerig Perspectief* (1971) 225-235; Freudenthal, ‘Tendenzen zur Mathematik in der Grundschule’, *Didaktik der Mathematik* 1 (1973) 2-11; Freudenthal, *Weeding and sowing*.

144 Freudenthal, ‘Ontsporingen’, *Wiskobas Bulletin* 1 (1971); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1351.

145 Freudenthal, ‘Recent tendencies in the teaching of mathematics’ 16.

146 Freudenthal in: Vuysje, ‘De wiskundeles verandert: $3+2=1$ ’; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1847.

Na dit eerste primitieve aantalaspect was voor de verdere ontwikkeling van het getalbegrip Freudenthals “psychologische *Enz.*” van groot belang. Hij volgde daarbij dezelfde gedachtegang als in zijn eerste *Euclides*-artikel uit 1948:¹⁴⁷

Het kind leert niet rekenen door Venn-Diagrammen [sic] met elkaar te vergelijken, maar door te tellen. Het telt op, niet door onoverzichtelijke verzamelingen bij elkaar te gooien, maar door *verder* te tellen. Het trekt af, door terug te tellen, het vermenigvuldigt de 3 door bij drieën verder te tellen. Het primitieve aantal, dat ook dieren bezitten, is spoedig door het veel effectievere telgetal overschaduwd.¹⁴⁸

Natuurlijk moest het ‘aantal’ in het rekenonderwijs ook aan de orde komen, maar “het is een wiskundig [sic] én didactisch drogbeeld als men meent, het met het aantal alleen te kunnen doen”.¹⁴⁹ Het telgetal speelde volgens Freudenthal in de vorming van het getalbegrip de eerste en belangrijkste rol, en dat moest in het rekenonderwijs óók onderkend worden.¹⁵⁰

Tellen was volgens Freudenthal de eerste bewuste wiskundige activiteit van een kind. Het begon als ritmisch spel.¹⁵¹ Spelenderwijs ondervond het kind vervolgens de invariante eigenschappen van dat tellen. Dit zag Freudenthal terug bij het observeren van zijn (klein)kinderen. Zo beschreef hij bijvoorbeeld hoe zijn toen vijfjarige kleindochter eindeloos plezier beleefde aan het tellen van alle ogen, oren, voeten etc. van een gezelschap. Het hoorde voor haar bij de lol van het spel elke keer opnieuw tot hetzelfde aantal te komen bij het tellen.¹⁵² Juist het tellen (en niet zozeer het één-één afbeelden van twee verzamelingen op elkaar) was op haar niveau het ultieme bewijs van ‘hetzelfde zijn’.

Het wiskundige concept ‘verzameling’ was volgens Freudenthal van een hoger niveau dan het vormen van getallen.¹⁵³ Desalniettemin was het mentaal vormen van verzamelingen wel nodig voor het getalbegrip, maar met een andere reden dan in New Math-kringen aangevoerd werd:

What matters is forming certain mental objects of which the numbers are properties; I call these objects sets because this is what we do with mathematical objects of this kind. Several times I signalled the confusion, which is all the fashion now: rather than forming sets, which is important for the number concept, one attempts to instil the set concept in the children. And one step further, rather than numbers one wishes to teach the children the number concept. It is ever and again the skipping of levels in the learning process. In the genesis of the set and number concept the lowest level is con-

147 Zie ook paragraaf 5.3.2.

148 Freudenthal, ‘Phaenomenologie van het getalbegrip’, *Wijzgerig Perspectief* (1971) 225-235, aldaar 234.

149 *Ibid.*, 234.

150 Freudenthal, *Mathematics as an educational task* 191. Van Parreren schreef in zijn *Leren op school* iets vergelijkbaars als hij het heeft over de trapsgewijze vorming van begrippen volgens de theorie van de Russische psycholoog Gal’perin. Hij beschrijft de noodzaak van het *aftellen* als eerste trap in het leren optellen; C. van Parreren, *Leren op school* (Groningen 1976 (tiende herziene druk)) 30-31.

151 Freudenthal, ‘Recent tendencies in the teaching of mathematics’ 15.

152 Freudenthal, *Mathematics as an educational task* 191.

153 Zie ook: Freudenthal, ‘Kennst du deinen Vater?’, *Der Mathematikunterricht* 5 (1974) 7-18, 11.

stituting sets and numbers, and only at far higher levels is the constitution of the set concept and the number concept at home.¹⁵⁴

Bij Bastiaan zag Freudenthal de uitzondering op de regel bij de ontwikkeling van het getalbegrip. Bastiaan had volgens Freudenthal als kleuter geen plezier in het tellen-om-het-tellen, zoals de meeste kinderen hadden. Zijn ‘verwerving van het getalbegrip’ vond plaats in één duidelijke sprong in zijn leerproces, waarbij Freudenthal aanwezig was. Hij vertelde erover op een conferentie in 1975:

Dat kind weigert te tellen, de moeder werd wanhopig omdat het kind nooit zou leren tellen en het begon pas te tellen nadat het volledig het getalbegrip verworven had. De verwerving van het getalbegrip was heel duidelijk één ogenblik. We zaten te eten, aan het dessert. Hij had aalbessen op zijn bord. Hij hield het lepeltje omhoog en zei: dat is zoveel als wij hier aan tafel zitten. We waren met zijn zessen aan tafel en er lagen zes aalbessen op de lepel. Ik vroeg hem waarom, toen zei hij dat zie ik zo, en toen zei hij: er zijn twee kinderen, twee volwassenen en twee opa en oma.¹⁵⁵

Een paar dagen na dit voorval begon Bastiaan pas met tellen. Het was volgens Freudenthal uitzonderlijk voor een kind, om eerst zoals Bastiaan het getalbegrip te verwerven en daarna pas te tellen. Hij benadrukte in deze lezing het belang van de mentale verbinding die Bastiaan op het cruciale moment legde.¹⁵⁶ Weliswaar waren de personen en de aalbessen concreet aanwezig, het meest essentiële bij het ontstaan van het getalbegrip in dit voorbeeld was het ontstaan van het mentale aspect, het losmaken van het concrete.

De ‘aalbessen’-observatie zou Freudenthal – net als die van het lopen op de spoorrails – in veel artikelen en voordrachten opvoeren. Het was voor hem het ultieme voorbeeld van een discontinuïteit in het leerproces. Waar het volgens Freudenthal in deze observatie op aankwam verwoordde hij als volgt:

It shows that rather than sets it is structures that are fundamental in the mathematical development of children. Indeed how can an unstructured chaos, which a set is supposed to be, attain interest? The child likes structure and tries to put structures into the world around it in order to measure it.¹⁵⁷

Structuur was het sleutelwoord bij het ontwikkelen van wiskunde bij jonge kinderen. Aantal was een eigenschap van verzamelingen zonder structuur. Dus om het

¹⁵⁴ Freudenthal, *Weeding and sowing* 216.

¹⁵⁵ Freudenthal op de ‘Noordwijkerhout conferentie’ in 1975; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 412. Ook gebruikt en beschreven in onder andere: de voordracht in Polen in 1975, Freudenthal, ‘Wat is meetkunde?’, *Euclides* 50 (1974/75) 151-160, Freudenthal, ‘Wandelingen met Bastiaan. Wereldverkennen van de straatstenen tot de maan’, *Pedomorfose* 25 (1975) 51-64, aldaar 61, Freudenthal, *Weeding and sowing* 281.

¹⁵⁶ Ook hier is een parallel te trekken met Van Parrerens beschrijving van de theorie van de Russische psycholoog Gal’perin. Volgens Gal’perins trapsgewijze vorming van een mentale handeling wordt een handeling eerst op materieel, dan op verbaal en daarna pas op mentaal niveau geleerd; Van Parreren, *Leren op school* 32.

¹⁵⁷ Voordracht in Polen, 1975; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 606.

aantal als een mentaal object te ervaren, moest het kind het kunnen losmaken van de structuur van de te beschouwen verzamelingen. Dat was de sprong in het leerproces bij het verwerven van getalbegrip. In het geval van de aalbessen was het duidelijk:

The sets to be compared bear heavy structure, a structure by generations and by sides of the table of the one set, and the geometrical arrangement of the six [currants] in the second. By these heavy structures comparing the sets is achieved. Number is a property of sets without structure, and in order to constitute number as a mental object, the child has to eliminate – not necessarily explicitly but certainly implicitly – structures from sets to be compared.¹⁵⁸

Om het getalbegrip te verwerven moest men dus allereerst op zoek naar structuur. De één-één-afbeelding tussen twee verzamelingen waarop binnen New Math de nadruk gelegd werd, deed volgens Freudenthal aan dit inzicht te kort:

Onze verzamelingstheoretische vooroordelen eisen, dat we de relatie, die Bastiaan tussen de aalbessen en de personen schijnt te constitueren, als één-één-afbeelding interpreteren, maar het is een veel globalere relatie, waarbij verzamelingen niet in elementen geatomiseerd, maar in groeperingen gestructureerd worden.¹⁵⁹

“Ik zie het zo” en didactische fenomenologie

Het kwam er bij het observeren van jonge kinderen volgens Freudenthal op aan, alert te zijn op uitspraken als de “ik zie het zo” van Bastiaan in het aalbessenvoorbeeld. Dat gold niet alleen bij het verwerven van het getalbegrip. Freudenthal ging hierin zo ver dat hij meetkunde op de lagere school definieerde als “hetgeen in termen van het gedrag van de leerling door de reactie “ik zie het zo” op de vraag “waarom” gekarakteriseerd kan worden”.¹⁶⁰ De kunst was vervolgens, de kinderen zo ver te krijgen “hun interne visioenen als het ware naar buiten [te] laten kondenseren [sic]”, zonder ze hierbij een niet passend taalniveau op te dringen.¹⁶¹

Wie wiskunde onderwijst, ziet gaarne dat zijn leerlingen hun gedachten in onberispelijke formuleringen kunnen uiten; te schatten hoe ver de onderwijzende mag gaan met deze eis, is iets waarvoor tact en wijsheid van hem gevraagd worden. Wanneer het ‘ik zie het zo’ van een leerling door stamelen of het opleggen van formuleringen door de onderwijzende wordt vervangen, is men didactisch geen stap verder. Wie onderwijst, ga eens bij zich zelf na, hoe moeilijk het zijn kan te beredeneren hetgeen men al helder en duidelijk ziet.¹⁶²

Het soort meetkunde dat begin jaren zeventig in het WISKOBAS-team ontwikkeld werd, sloot volgens Freudenthal aan bij de sfeer van “ik zie het zo”: “leerlingen re-

¹⁵⁸ Ibid.

¹⁵⁹ Freudenthal, ‘Wat is meetkunde?’, *Euclides* 50 (1974/75) 151-160, 154.

¹⁶⁰ Ibid., 152.

¹⁶¹ Ibid.

¹⁶² Ibid., 153.

deneren met hand en oog, aan het model en op ’t papier, niet in een taalkundig vastgelegd begrippensysteem”.¹⁶³

De vraag, in hoeverre het aangeboden materiaal voorgestructureerd mocht of moest zijn was daarbij van belang. Freudenthal pleitte ervoor niet met gestructureerd materiaal te starten, maar fenomenologisch rijker materiaal te kiezen in een verticale leerstofplanning, waarbij dezelfde leerstof op steeds hoger niveau behandeld werd. Maar hoe pakte men zoiets nu aan?

Er was nog veel werk te verrichten bij het ontwikkelen van wiskundeonderwijs vanuit de door Freudenthal (en in WISKOBAS) voorgestane visie. Het aanbieden van een rijke context was slechts een begin. Door leerprocessen te observeren moest men verder zoeken naar niveaustructuren en beslissende stappen in het leerproces. In zijn artikelen beschreef Freudenthal legio voorbeelden uit zijn eigen observaties van (klein)kinderen en uit de ontwerpen waarmee bij WISKOBAS geëxperimenteerd werd. Maar een theoretische methode bij het ontwikkelen van wiskundeonderwijs gaf hij ook: “didactische fenomenologie” noemde hij die.

Zonder dat de term ‘fenomenologie’ genoemd werd, kon een kiem van dit theoretisch hulpmiddel al gevonden worden in Freudenthals artikel ‘De algebraïsche en analytische visie op het getalbegrip in de elementaire wiskunde’ uit 1948. Hierin pleitte hij voor het doordenken van de leerstof door de leraar vanuit een (niet per se wiskundig, maar zeker ook didactisch!) hoger standpunt. Vervolgens maakte hij een begin met wat hij in de jaren zeventig de didactische fenomenologie van het getalbegrip zou gaan noemen, hoewel bij lange na niet zo grondig als hij dat dertig jaar later zou doen.¹⁶⁴

Een eerste echte aanzet tot didactische fenomenologie volgde in Freudenthals artikel ‘Phaenomenologie van het getalbegrip’.¹⁶⁵ Het artikel gaf een wiskundige analyse van het getalbegrip waarmee tot een betere benadering van de bijbehorende didactiek kon worden gekomen. Freudenthal deed dit om de misstanden die hij zag bij de benadering van de ontwikkeling van het getalbegrip te kunnen bestrijden. Tegelijkertijd gaf hij een doortimmerde basis waarop een betere benadering zou kunnen worden gebouwd.

Aan ‘didactische fenomenologie’ wijdde Freudenthal in 1984 het boek *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren. Deel I*.¹⁶⁶ De oorsprong van dit boek was een artikel uit 1973, getiteld ‘Lernzielfindung im Mathematikunterricht’.¹⁶⁷ Dit artikel was als een van de hoofdstukken in het boek opgenomen. Hierin beschreef hij onder andere de werkwijze van het IOWO bij het ontwikkelen van wiskundeon-

¹⁶³ Ibid., 160.

¹⁶⁴ Zie ook paragraaf 5.3.2.

¹⁶⁵ Freudenthal, ‘Phaenomenologie van het getalbegrip’, *Wijsgerig Perspectief* (1971) 225-235.

¹⁶⁶ Freudenthal, *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren. Deel I* (Utrecht 1984). Het boek verscheen ook als: *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Dordrecht 1983). De Duitse versie is niet gepubliceerd (‘Didaktische Phänomenologie mathematischer Strukturen’, 1981); RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 632.

¹⁶⁷ Freudenthal, ‘Lernzielfindung im Mathematikunterricht’, *Zeitschrift für Pädagogik* 20 (1974) 719-738.

derwijs en de zoektocht naar leerdoelen door het observeren van leerprocessen. “Didactische Phänomenologie eines mathematischen Gebietes” was volgens hem voor alle betrokkenen bij dit proces een belangrijke theoretische methode:

Niveaus moeten niet in de *leerstof*, maar in het *leerproces* gezocht worden. Om die te vinden, moet men leerprocessen observeren. Dit kan worden voorafgegaan en begeleid door een analyse van de leerstof, in denkbeeldige processen geplaatst, die ik didactische fenomenologie heb genoemd.¹⁶⁸

Hierbij had hij geen filosofisch getinte fenomenologie voor ogen (dit in tegenstelling tot de rol die ‘fenomenologie’ bijvoorbeeld speelde in het werk van Langeveld), maar “eine Analyse der Mathematik als Phänomen, nicht nach ihren Grundlagen”, een gedetailleerde analyse van de bronnen van wiskundige ideeën in de werkelijkheid.¹⁶⁹ De toevoeging “didactische” duidde erop dat dit uit didactisch perspectief moest geschieden: gericht op het verkrijgen van al dat nodig is om het ‘ding’, het ‘fenomeen’, wiskundig te kunnen organiseren. In zijn boek van begin jaren tachtig gaf Freudenthal een uitgebreide omschrijving:

Onze wiskundige begrippen, structuren, denkbeelden zijn uitgevonden als werktuigen om de verschijnselen van de fysische, sociale, mentale wereld te ordenen. *Fenomenologie* van wiskundige begrippen, structuren, denkbeelden betekent: ze in hun relatie tot de fenomenen te beschrijven waarvoor zij geschapen en waartoe zij uitgebreid werden in het leerproces van de mensheid; en voorzover deze beschrijving met het leerproces van de jongere generatie te maken heeft, wordt zij *didactische fenomenologie*, wegwijzer voor de onderwijsgevende naar de instap van de lerende in het leerproces van de mensheid. Niet in haar geschiedenis, maar in haar nog voortdurende leerproces – sloppen en omwegen vermijdend en levende wortels sparend en versterkend.¹⁷⁰

Hoe belangrijk hij didactische fenomenologie als uitgangspunt bij het ontwikkelen van wiskundeonderwijs ook vond, uiteraard was een dergelijke theoretische analyse voor Freudenthal nooit afdoende bij de ontwikkeling van wiskundeonderwijs. Hij presenteerde het in de jaren zeventig dan ook slechts als *hulp*middel, vanachter het bureau gemaakt en voorlopig niet meer opleverend dan een (voortdurend voor verbetering vatbare) lijst ter ondersteuning van de *observerende* onderwijsontwikkelaar.

9.5.4 Het recht op zindelijke wiskunde voor allen

Met de nadruk op het observeren van leerprocessen bij kinderen schoof het uitgangspunt bij de ontwikkeling van wiskundeonderwijs steeds verder weg van de wiskunde als wetenschap. Niet alleen binnen het IOWO, maar ook in Freudenthals

¹⁶⁸ Freudenthal, ‘Taxonomieën – waarvoor?’, *Faraday* 45 (1976) 142; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 610.

¹⁶⁹ Freudenthal, ‘Lernzielfindung im Mathematikunterricht’, *Zeitschrift für Pädagogik* 20 (1974) 719-738, 730.

¹⁷⁰ Freudenthal, *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren* 9-10.

werk kwam dit aspect steeds vaker aan de orde. Door in de eerste plaats naar het lerende kind te kijken, kwam als vanzelf de wereld van dat kind als nieuw uitgangspunt naar voren. Deze zogenaamde realistische vakdidactiek was uitermate typerend voor de jaren zeventig.¹⁷¹

De democratische onderwijsontwikkelingsprocedure van het IOWO werkte dit ook in de hand. Geen “reglementerende leerplanontwikkeling vanachter het bureau” zoals Freudenthal het omschreef, maar “democratische participatie met het veld”, waarbij de ontwikkelaars de onderwijzers, PA-docenten en -studenten en scholen nauw bij het ontwikkelwerk betrokken.¹⁷² Dat hierbij ook de doelgroep het proces heel direct beïnvloedde, was vanzelfsprekend. In het onderwijsleerplan van WISKOBAS werd dit als volgt omschreven:

Het kader van de algehele doelstelling en van wiskundeonderwijs, van waaruit dit ontwerp ontwikkeld is, is:

- begeleiding van de kinderen in hun benadering van de wiskundige aspecten van de werkelijkheid, zoals men zich die nu en in de (nabije) toekomst voorstelt
- wiskundige vorming in harmonie met persoonlijke aanleg en met redelijke eisen van samenleving en voortgezette opleiding¹⁷³

En tegelijkertijd met en door dit uitgangspunt veranderde ook het doel van het nieuw te ontwikkelen wiskundeonderwijs: de leerstof moest in de eerste plaats ‘nuttig’ voor de leerling zijn. Freudenthal legde in het *Wiskobas Bulletin* uit wat voor hem hierbij het criterium was:

Je kunt je leerlingen niet uitleggen wat er allemaal met de wiskunde gedaan kan worden, en dat hoeft ook niet. Je kunt wel – op elk nivo [sic] – laten zien *dat* er iets met wiskunde kan worden gedaan en dat *iedereen* er iets mee kan doen. Iemand opzadelen met een wiskunde waar hij niets mee kan doen, is te veel van het goede. Iemand verstoken doen zijn van die wiskunde die hij wel kan gebruiken, is hem geestelijk uit-hongeren. [...] Laat ik dan dichter bij de grond blijven, heel dicht bij de grond. Ik dacht dat we alle leerstof moeten weren, waarvan we, als de leerling vraagt ‘waarvoor dient het?’ met een goed geweten alleen maar kunnen zeggen: ‘nergens voor’.¹⁷⁴

Het nuttigheids criterium vierde dus hoogtij. Het argument dat wiskunde voor de lerende ‘vormende waarde’ had, raakte daarmee in deze periode buiten beeld. De meer kindgerichte houding van de ontwikkelaars en de grote maatschappelijke relevantie van de wiskunde lagen hieraan ten grondslag. Freudenthal droeg hieraan bij door de organisatie van het colloquium ‘How to teach mathematics so as to be useful’ van 1967. In zijn voordracht op dit colloquium wijdde Freu-

171 Zie ook: Nelissen, ‘Eeuwenlang rekenen’, *Willem Bartjens* 18 (1998/99) 36-39.

172 RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 589.

173 ‘Onderwijsleerplan Wiskobas’, zoals deze uitgedeeld was op de WISKOBAS werkweek te Scheveningen van 16-19 maart 1971; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 407.

174 Freudenthal, ‘Een pijnlijke operatie’, *Wiskobas Bulletin* 3 (1973) 118-122; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1362.

denthal enkele woorden aan het ‘waarom’ van het onderwijzen van ‘nuttige wiskunde’:

Since mathematics has proved indispensable for the understanding and the technological control not only of the physical world but also of the social structure, we can no longer keep silent about teaching mathematics so as to be useful. In educational philosophies of the past, mathematics often figures as the paragon of a disinterested science. No doubt it still is, but we can no longer afford to stress this point if this keeps our attention off the widespread use of mathematics and the fact that mathematics is needed not by a few people, but virtually by everybody.¹⁷⁵

Het antwoord op de vraag ‘hoe te bereiken dat de onderwezen wiskunde nuttig is?’ had Freudenthal al klaar. Geen toegepaste wiskunde onderwijzen, geen zuivere wiskunde onderwijzen om achteraf toe te passen, maar:

The problem is not what kind of mathematics, but how mathematics has to be taught. In its first principles mathematics means mathematizing reality, and for most of its users this is the final aspect of mathematics, too. For a few ones this activity extends to mathematizing mathematics itself.¹⁷⁶

Door de leerling te leren mathematiseren deed je de wiskunde en de leerling pas recht. Het domweg aanleren van wiskundige technieken had volgens Freudenthal geen enkel nut:

Nobody can teach and nobody can learn enough prefabricated mathematics to meet all possible mathematizable situations. Moreover a mathematical subject that has reached the state of a technique, can with more efficiency be handled by machines than by man. [...] Mathematics as an aim in itself counts for a very small minority only. For all others mathematics is important enough to play a part in their education.¹⁷⁷

‘Wiskunde voor allen’, dat was zijn boodschap. En met de invalshoek van het leren mathematiseren in de realiteit zou dat mogelijk moeten zijn op een manier die functioneel was in de wereld van de gebruiker: het kind. Liever deed Freudenthal zo min mogelijk concessies aan die realiteit waarin wiskunde ontdekt moest worden. De ‘spreekjesverhalen’ waarin de lespakketjes van het IOWO gegoten werden, vond hij vaak te vergezocht en te kunstmatig:

Ik vind dergelijke dingen kun je ook realistisch doen en niet met kabouters. Die kaboutermentaliteit ... Maar goed, misschien wat ouderwets van me of zo. Ik erger me wanneer ik mijn kleinkinderen naar Paulus de boskabouter zie kijken. Ze vinden het verschrikkelijk leuk, maar het stoort me op één of andere manier.¹⁷⁸

175 Freudenthal, ‘Why to teach mathematics so as to be useful’, *Educational Studies in Mathematics* 1 (1968) 3-8, aldaar 4-5.

176 Ibid., 7.

177 Hans Freudenthal, ‘Allocution du premier Congrès International de l’Enseignement Mathématique Lyon 24-31 août 1969’, *Educational Studies in Mathematics* 2 (1969) 135-138, aldaar 136.

178 Hans Freudenthal in het interview: ‘Wiskunde in andere wetenschappen’, in: *De Vakidoot. Maand-*

Het lag hem meer om bij het zoeken naar wiskundeonderwijs zo dicht mogelijk bij de dagelijkse werkelijkheid te blijven. Bovendien zag hij een gevaar van zekere gemakzucht en afdwalen in het uitwijken naar sprookjeswerelden:

Maak je het jezelf niet bijzonder makkelijk met die sprookjeswerelden? Zou je niet, als je die niet had, naar veel reëlere werelden zoeken om de kinderen aan te bieden dat ze daarin werken? [...] Beïnvloed je de stof niet al te zeer misschien te ongunstig door nu alles in zo'n wereldje te stoppen? ¹⁷⁹

Volgens Freudenthal was wiskunde die met sterke banden aan de werkelijkheid gerelateerd was het soort dat het best bekliefde:

I espouse the philosophy of teaching mathematics related to reality. Mathematics is important for many people because it admits of multifarious applications. I do not trust teachers of other disciplines to be able to tie bonds of mathematics with reality which have been cut by the mathematics teacher. Moreover, I do not believe that mathematics, not tied to lived reality with strong bonds, can have a lasting influence in most individuals. [...] People usually forget what is not related to the world in which they live. For most people mathematics cannot be an aim in itself; if they have learned it in an unrelated way, they will never be able to use it. ¹⁸⁰

Freudenthal wilde dat de op school geleerde wiskunde iets was wat de leerling zich actief eigen gemaakt had: wiskunde die de leerlingen daardoor konden hanteren, manipuleren en toepassen in relevante situaties.

Een andere eis aan de te onderwijzen wiskunde die geregeld in zijn artikelen naar voren kwam, was die van 'oprechtheid'. De te onderwijzen wiskunde moest echte, 'eerlijke' wiskunde zijn. Pedagogische idealen die in deze tijd opgeld deden, kwamen zo ook in het wiskundeonderwijs tot uiting.

In de 'kritische' of 'emancipatorische pedagogiek' (een in de jaren zestig en zeventig uit Duitsland opkomende pedagogische stroming) was de kritiek op de gevestigde maatschappij en de onrechtvaardigheid van de ongelijkheid binnen die maatschappij een belangrijk gegeven. ¹⁸¹ Het centraal stellen van het kind ('vom Kinde aus') in de reformpedagogiek en de individuele ontplooiing van het kind bleven be-

blad van de Subfaculteiten Wiskunde en Natuur- en Sterrekunde 9 (1977) 14-20, aldaar 16; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1849. "Paulus de Boskabouter", een creatie van Jean Dulieu (pseudoniem van Jan van Oort) was in 1946 begonnen als strip en werd dagelijks uitgezonden als hoorspel op de radio. Vanaf 1967 was "Paulus de Boskabouter" als poppenserie op de Nederlandse televisie te zien. Overigens noemde Freudenthal het desbetreffende lespakketje 'Sproeteldam' als *wiskundig* stuk "uitstekend".

179 Freudenthal op de conferentie in Noordwijkerhout, 1975; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 412.

180 Hans Freudenthal, 'Geometry between the devil and the deep sea', *Educational Studies in Mathematics* 3 (1971) 413-435, aldaar 420.

181 Belangrijke representanten van deze stroming waren K. Mollenhauer en W. Klafki; W.A.J. Meijer, *Stromingen in de pedagogiek* (Baarn 1996), 55 e.v.

langrijk, maar tegelijkertijd had de kritische pedagogiek emancipatie en het verbeteren van de maatschappij ten doel. Opvoeden kon niet los worden gezien van de maatschappij waarin dat plaats vond, en kritiek op die maatschappij moest in de opvoeding tot uiting komen. In het onderwijs was dit bijvoorbeeld terug te vinden in de ontwikkeling van leerplannen met voor de leerling relevante leerstof. Met het instellen van maatschappelijk relevante leerplannen zouden kinderen uit de arbeidersklasse beter van het onderwijs profiteren en bracht het onderwijssysteem niet langer slechts aan de bovenlagen van de maatschappij voordeel.

Dergelijke algemeen pedagogische idealen waren ‘vertaald’ terug te vinden in het wiskundeonderwijs. Het ‘opvoeden tot kritische individuen’ en ‘eerlijkheid’ werden ook in het wiskundeonderwijs een maatstaf bij de bepaling van de leerstof. Zo mochten er naast de eis van maatschappelijke relevantie ook geen concessies worden gedaan aan de wiskundige correctheid van die leerstof: die moest als wiskunde blijven kloppen en op elk moment verantwoord kunnen worden aan de leerling.

Voor Freudenthal was ‘wiskundige eerlijkheid’ een belangrijke eis. Overal waar hij overtredingen tegen deze eis constateerde, klom hij in de pen. Zo beschuldigde hij in een serie artikelen in *Euclides* de Nomenclatuurcommissie ervan in haar voorstellen ‘schoolwiskunde’ in plaats van echte wiskunde te willen cultiveren.¹⁸² Vooral waar groepentheorie en verzamelingen in het onderwijs gebruikt werden, werd volgens Freudenthal vaak met de wiskundige eerlijkheid gesjoemeld. Een ernstige zaak:

We have to be careful and honest if we want to adapt some piece of high mathematics to a lower level. Simplifying is a good thing but wrong elementarisations are a danger, and so is imitating superficial features while destroying the great ideas of some mathematical theory. If children are taught groups they are entitled to learn genuine group theory rather than a childish version. In the past, mathematics has seriously suffered under the falsifying tendencies in adaptations of mathematical subject matter to school level. Let us be more cautious in the future. Honesty is a cardinal virtue in education. Nothing is lost if some subject matter cannot be taught prematurely and much is gained if it can in an honest way.¹⁸³

De tegenstelling was niet die van ‘didactisch versus wetenschappelijk’, zo betoogde Freudenthal. Goede leerstof koos je met het oog op de doelmatigheid voor het gebruik van die wiskunde in het leven.¹⁸⁴ En dan niet iets aanleren, waarvan slechts een handvol leerlingen later zou inzien dat het beter kan of – erger – fout was:

Er zijn volwassenen, die menen tegen kleuters in een brabbeltaaltje te moeten praten; als de kleuter dit overneemt, kunnen ze immers zeggen: zie je, hij kan niet beter. Ge-

182 Freudenthal, ‘Kanttekeningen bij de nomenclatuur’, *Euclides* 47 (1971), 139-140, Freudenthal, ‘Nog eens nomenclatuur’, *Euclides* 47 (1972), 181-192, Freudenthal, ‘Nomenclatuur en geen einde’, *Euclides* 49 (1973) 53-58.

183 Freudenthal, ‘What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education’, in: G.A. Howson, ed., *Developments in mathematical education: the proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education* (Cambridge 1973) 101-114, aldaar 114.

184 Freudenthal, ‘Nog eens nomenclatuur’, *Euclides* 47 (1972) 181-192, aldaar 181.

lukkig leren kleuters het af. In Wiskunde II zullen we ze het afleren – aldus volgens Vredenduin. En de anderen? Moeten ze maar blijven brabbelen? ¹⁸⁵

De verantwoordelijkheid voor het leren van denkzindelijkheid en nuttige wiskunde lag bij de wiskundigen zelf volgens Freudenthal. Hoe breed hij die verantwoordelijkheid zag, bleek uit zijn artikel ‘De niveaus in het leerproces en de heterogene leergroep, met het oog op de middenschool’. Hierin besprak hij zijn wiskunde-ervaringen met door het rekenonderwijs ‘getraumatiseerde’ LBO-leerlingen:

Als wiskundigen zijn we verplicht aan het herstel van hun gehavende persoonlijkheid mee te werken. Alleen door middel van de wiskunde – en dan goede – kunnen ze genezen worden van het trauma, dat hun door slechte wiskunde is toegebracht – als het ware een homeopathische kuur. ¹⁸⁶

Door deze leerlingen opnieuw in goede wiskunde in te leiden, en wel op het nulde niveau, was het volgens Freudenthal mogelijk de gedane schade te herstellen. En die goede wiskunde was “een wiskunde [...] waar men – afgezien van het meest elementaire – niet hoeft te rekenen, een met de realiteit geliëerde [sic], de kinderen nabije en maatschappelijk relevante wiskunde”, zoals die voor het LBO werd gemaakt door het IOWO. ¹⁸⁷ Freudenthal vond dergelijke wiskunde “onmisbare kennis en kunde voor iedereen, als krantenlezer, vader of moeder, burger, consument en producent, en ook als kunstgenieter en -schepper kun je ervan profiteren”. ¹⁸⁸

In hetzelfde artikel kwam een voor Freudenthal ander belangrijk aspect van ‘democratisch’ wiskundeonderwijs naar voren: zijn belangstelling voor de mogelijkheden van het leren in een heterogene leergroep. De in deze periode erg in de belangstelling staande middenschool maakte dit tot een actueel onderwerp. De kern van het middenschool-idee was het opzetten van een geïntegreerd voortgezet onderwijs bestaande uit een middenschool, gevolgd door een bovenschool. In onder andere Duitsland en Engeland was dit idee in de jaren zestig al uitgewerkt tot respectievelijk de ‘Gesamtschule’ en de ‘comprehensive school’. ¹⁸⁹ In Nederland startte in 1973 vanuit de regering opgezette experimenten in deze richting, waartoe de Innovatiecommissie Middenschool (ICM) werd ingesteld. ¹⁹⁰ Het belangrijkste motief voor de instelling van de middenschool was het uitstellen van beroeps- en studiekeuze en het daarmee aanbieden van gelijke kansen voor iedereen.

Door het ‘gelijke kansen voor iedereen, ongeacht milieu en achtergrond’-principe sprak het idee van de middenschool Freudenthal wel aan. De invulling ervan was echter juist het tegenovergestelde van wat hem met heteroog onderwijs voor ogen stond:

¹⁸⁵ Ibid., 192.

¹⁸⁶ Freudenthal, ‘De niveaus in het leerproces en de heterogene leergroep, met het oog op de middenschool’, *Gesamtschule Conferentie* (1973) 88-99, aldaar 89-90.

¹⁸⁷ Ibid., 90.

¹⁸⁸ Ibid.

¹⁸⁹ M.A.J.M. Matthijsen, *De elite en de mythe. Een sociologische analyse van de strijd om onderwijsverandering* (Deventer 1982) 163.

¹⁹⁰ Ibid. 164.

Er moet gedifferentieerd worden. Akkoord! Maar “differentiëren”, zoals bedoeld in de discussies omtrent *Gesamtschule* en Middenschool – is een eufemisme. Je zegt “differentiatie” en je bedoelt “separatie”. [...] Men begint ermee het hoofd te breken over differentiatie, terwijl de integratie nog niet eens aan de orde is geweest, laat staan doordacht is, en zwelgt in het ontwerpen van geraffineerde systemen van differentiatie: hoe men de kinderen verschillende leerstof zal toedienen terwijl men de schijn van één programma ophoudt.¹⁹¹

Waar lag de kracht van werken in heterogene leergroepen dan wel volgens hem?

Wat men na zou moeten streven en trachten te realiseren, is een systeem, waarbij de leerlingen op verschillende niveaus – elk op het zijne – met elkaar aan hetzelfde onderwerp werken en leren werken. Dit is het principe van heterogene leer- en werkgroepen, waar de leden van lager niveau zich op het hogere niveau van hun medeleden kunnen oriënteren en die op hoger niveau inhoudelijk en sociaal kunnen profiteren van hun kijk op het lagere. Het is niet zo’n vreemd idee, die heterogene leer- en werkgroep; op veel plaatsen in de maatschappij is het gerealiseerd. Het kost alleen moeite leerinhouden zakelijk en leerprocessen sociaal opnieuw te doordenken, om tot deze onderwijsvernieuwing te geraken. Wil men zich deze moeite niet getroosten, dan loopt de operatie ‘Middenschool’ de kans een papieren plan met papieren gevolgen te blijven.¹⁹²

Juist de wiskunde, door de verschillende niveaus in het leerproces, leende zich volgens Freudenthal goed voor een dergelijke aanpak. Binnen een groep zouden leerlingen op verschillende niveaus met dezelfde stof bezig kunnen zijn en van elkaars verschillen kunnen profiteren in hun eigen leerproces. Op deze manier zouden leerlingen zeker de eerste twee jaren op de middenschool hetzelfde wiskundeprogramma moeten kunnen volgen:

De samenwerking moet de leerlingen op alle niveaus de toegang naar een hoger niveau openen, die van het lagere, omdat ze zich op die op het hogere kunnen oriënteren, die van het hogere, omdat de blik naar het lagere niveau hun nieuwe inzichten verschaft.¹⁹³

Dat de invulling van het concept ‘heterogene leergroep’ nog in de kinderschoenen stond en de eventuele mogelijkheden nog erg onzeker waren, beseft Freudenthal ook wel. Toch was het voor hem zeker de moeite waard dit verder te onderzoeken, juist waar het het wiskundeonderwijs betrof.¹⁹⁴ En daarmee kwam Freudenthal

191 Freudenthal, ‘De Middenschool’, *Rekenschap* 20 (1973) 157-165, aldaar 164.

192 Ibid., 165.

193 Freudenthal, ‘De niveaus in het leerproces en de heterogene leergroep, met het oog op de middenschool’, *Gesamtschule Conferentie* (1973) 88-99, aldaar 93. Dat hier zeker mogelijkheden lagen in de praktijk ontleende Freudenthal onder andere aan experimenten van de Russische wiskundige Davydov.

194 Ook in het Jenaplanonderwijs – waarbinnen mevrouw Freudenthal actief was – speelde de heterogene leergroep een belangrijke rol. In zijn boek *Weeding and sowing* gaat Freudenthal op dit concept en de moeilijkheden die een dergelijke aanpak voor de onderwijsontwikkelaar geeft verder in; Freudenthal, *Weeding and sowing* 60-64; S.J.C. Freudenthal-Lutter, *Naar de school van morgen* (Alphen aan de Rijn 1971) 81.

weer terug bij datgene, waar het allemaal mee en om begonnen was: het doen van observaties – en dan met name die van zijn kleinzoon. Freudenthal en Bastiaan als de “extreem heterogene leergroep”:

Ik kom terug op een van die leergroepen. Ik bedoel die extreem heterogene van grootvader en kleinzoon. U herinnert het zich wel? Neen, niet lachen! Het was echt een leergroep. Heeft de kleinzoon iets geleerd? Ja, doordat hij iemand had om tegen te praten. En de grootvader? Heeft hij iets geleerd? Iets, neen, heel wat. Zoveel, dat hij het gepast vond om u er hier van te vertellen. Dit ter geruststelling van hen die vrezen, dat heterogene leergroepen de leerprocessen naar onderen moeten nivelleren.¹⁹⁵

9.6 **Enfant terrible**

9.6.1 Onkruid wieden

Begin jaren zeventig had Freudenthal in en door het werk op het IOWO een manier gevonden om op een positief productieve manier bezig te zijn met wiskundeonderwijs. Het meemaken van het zich daar afspelende proces van onderwijsontwikkeling was voor hem uiterst vruchtbaar en hiervan zijn de directe resultaten terug te vinden in al zijn voordrachten, artikelen en boeken uit die tijd en later. Het nam echter niet weg, dat hij ook nog steeds als criticus op velerlei gebied van zich liet horen.¹⁹⁶ Voor velen in de kringen van wiskundeonderwijs had hij dan ook de reputatie van een gevreesd professor met aanzien. Wiskundededidacticus en lerarenopleider Van Dormolen herinnerde zich:

Nu was Freudenthal in die tijd niet iemand waarbij je veilig ging vragen wat hij precies bedoelde. We waren eigenlijk een beetje bang voor hem en begrepen niet, dat diens scherpe kritieken helemaal niet betekenden dat hij je dom vond. Jaren later leerde ik dat hij het juist in iemand waardeerde als die met hem in debat wilde gaan, maar als jong leraar begon je daar niet aan.¹⁹⁷

Ook internationaal was duidelijk dat met Freudenthal niet te spotten viel. Bishop schreef hierover:

195 Freudenthal, ‘De niveaus in het leerproces en de heterogene leergroep, met het oog op de middenschool’, *Gesamtschule Conferentie* (1973) 88-99, aldaar 98.

196 Nog veel nadrukkelijker dan in zijn boek *Mathematics as an educational task* was Freudenthal kritisch in zijn *Weeding and sowing. A preface to a science of mathematical education* van 1972 – een boek dat Freudenthals werkwijze en houding misschien wel het beste typeerde, niet in de laatste plaats door de titel. In dit boek ‘wiedde’ hij systematisch de stand van zaken schoon op het gebied van wetenschap, onderwijs, onderwijs als wetenschap en de wetenschap van wiskundeonderwijs; Freudenthal, *Weeding and sowing*.

197 J. van Dormolen, ‘Freudenthal *currief*. Hoe didactiek een deel van wiskunde kan worden’, *Nieuwe Wiskrant* 10 (3) (1991), 19.

He was a tough critic and someone who did not shirk his responsibilities in helping a knowledge field to develop. He undoubtedly believed that those of us who are genuinely concerned with the development of knowledge are not as critical of ideas, methods and practices as we ought to be. His first inspiration to me therefore was as a critic.¹⁹⁸

Freudenthal was zich van dit imago wel bewust en koesterde het:

Een enfant terrible – zowel nationaal als internationaal – waar ze blijkbaar toch niet omheen konden, zoals straks zal blijken. Of hoopten ze dat ik al rijzende mijn wilde haren zou kwijt raken? ¹⁹⁹

Die kritische houding en de ongezouten manier waarop hij vaak zijn kritiek uitte, kwamen echter niet uit de lucht vallen. Voor Freudenthal waren dergelijke acties bittere noodzaak. Wanneer hij vond dat iets wetenschappelijk ongefundeerd, een kwestie van verkeerd toepassen van statistiek of domweg grote kolder was, kon hij het niet laten te reageren. Bovendien bleef hij altijd benadrukken dat het niet het juiste moment was om op lauweren te rusten: er was nog een lange weg te gaan als het ging om wiskundeonderwijs. En bij die weg hoorde ook steeds alert te blijven op wantoestanden.

Natuurlijk was deze kritische houding verre van nieuw voor Freudenthal. Zijn credo ‘iedere positieve actie begint met critiek’ uit 1944 bleef hij altijd trouw. Maar met het nieuwe leerplan van 1968, de invloed van New Math en alle nieuwe ideeën en opkomende initiatieven in het onderwijs in het algemeen was hij als criticus actiever dan ooit.

Opvallend was hoe spaarzaam Freudenthal was met het in positieve context noemen van andermans werk.²⁰⁰ Expliciet in zijn uitlatingen over andermans werk was hij vooral wanneer hij wilde uitleggen hoe het niet moest. In het voorwoord van *Mathematics as an educational task* legde hij uit waarom hij in dit kader geen voetnoten wilde gebruiken:

On the other hand I avoided all citations with respect to textbooks, designs and lessons wherever it was feasible. I believe I had a compelling reason to do so for this material was frequently subjected to criticism, which in fact was often negative. The material could be sharply divided into serious work and trash. Citations in footnotes would have meant tarring everything with the same brush. This I would hate to do. At the same time, it would have been too much an honour for trash to be quoted along

198 A. Bishop, ‘Freudenthal *cursief*. HF-an inspiration in the search for truth’, *Nieuwe Wiskrant* 10 (1991) 13.

199 Hans Freudenthal over zichzelf in: Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 347.

200 Belangrijke uitzonderingen vormden het werk van Tatiana Ehrenfest, Van Dantzig, het echtpaar Van Hiele en de Russische onderzoeker V.V. Davydov. In het voorwoord van *Mathematics as an educational task* noemde hij bovendien nog Castelnuovo, Krygovska, Servais en Revuz in een rijtje van internationale vrienden van wie hij veel geleerd had. In de loop van de jaren zeventig werd Freudenthal voor zijn doen aanzienlijk scheutiger met zijn lof, vooral waar het het werk van veel wiskundeonderwijsontwikkelaars van het IOWO betrof; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1589.

with serious literature. Therefore, I have made explicit quotations only in a few quite specific cases.²⁰¹

Oppervlakkig bezien leek het hem in zijn kritiek soms om onbenullige details te gaan, maar altijd zat daar een meer algemeen gefundeerde kritiek achter.

Zo was een van Freudenthals stokpaardjes een correct (wiskundig) taalgebruik.²⁰² In zijn artikel ‘Verzamelingen in het onderwijs’ hekelde hij het ongelukkige gebruik van de associatie van de wiskundige verzameling met het verzamelen als hobby, en alle taalkundige problemen die dat met zich meebracht. Want wat is een postzegelverzameling in die zin: een verzameling stukjes papier? Of “een soort van zulke stukjes papier die onderling op elkaar gelijken in die zin dat ze dezelfde postale functie kunnen of konden vervullen”? “Detailkritiek” noemde Freudenthal het zelf, “die de grote lijnen van de methode niet aantast”.²⁰³

Is dit nu muggezifterij? Het is evenzeer muggezifterij als het verschil tussen ‘liggen’ en ‘leggen’, tussen ‘word’ en ‘wordt’. Het antwoord op uiteenzettingen als de bovenstaande luidt vaak: ‘Je kunt met kinderen niet alles zo exact doen’. $3+2$ is voor elke leeftijd hetzelfde, een drogredenering is voor elke leeftijd een drogredenering. Als je met verzamelingen van postzegels of van letters op een bepaalde leeftijd niet redelijk kunt werken, omdat ze te veel kritisch besef vereisen, laat ze dan weg, je verliest er niets aan.²⁰⁴

Door op de details te letten en ook – en juist! – de kleine fouten te noemen, hoop- te Freudenthal ergere te voorkomen:

[...] laat het dan wiskunde blijven: verzamelingen en relaties, waar ze voor deugen en niet om er sommetjes mee te maken. We hebben een van de echte wiskunde gescheiden schoolwiskunde gehad en we gaan met reuzestappen weer naar zo iets toe. Toen ik in de buitenlandse literatuur zag wat voor fouten kunnen worden gemaakt, heb ik er in lezingen en cursussen op gewezen. Ik hoop dat er een preventieve werking van uit gaat.²⁰⁵

Die preventieve werking, daar ging het hem om in zijn kritiek. Door onkruid direct bij opkomst te wieden, kon je verspreiding ervan voorkomen. Vooral wanneer het ging om misbruik van moderne wiskunde in het onderwijs was dit hard nodig. Het grote gevaar van wat hij als ‘bedrog’ betitelde was volgens hem dat het serieuze pogingen tot verbeteringen van het wiskundeonderwijs in de weg zou staan:

²⁰¹ Freudenthal, *Mathematics as an educational task* vi.

²⁰² Zijn discussie in *Euclides* met Vredenduin als voorzitter van de nomenclatuurcommissie was daar een goed voorbeeld van; Freudenthal, ‘Kanttekeningen bij de nomenclatuur’, *Euclides* 47 (1971) 139-140, Freudenthal, ‘Nog eens nomenclatuur’, *Euclides* 47 (1972) 181-192, Freudenthal, ‘Nomenclatuur en geen einde’, *Euclides* 49 (1973) 53-58.

²⁰³ Freudenthal, ‘Verzamelingen in het onderwijs’, *Euclides* 45 (1970) 321-326, aldaar 321. Het betrof kritiek op: Krooshof, Jacobs, e.a., *Moderne wiskunde deel 1* (Groningen 1968).

²⁰⁴ Freudenthal, ‘Verzamelingen in het onderwijs’, *Euclides* 45 (1970) 321-326, aldaar 325-326.

²⁰⁵ *Ibid.*, 326.

All this is the consequence of a modernism that insists on sets no matter what.[...] I have no fear that it will last (it is undoubtedly a transitory phenomenon), but it tends to discredit modern mathematics and consequently delay its true development in instruction. To sustain serious efforts, it is essential to criticize the idle production of manuals, films, and other methods of mathematics instruction.²⁰⁶

9.6.2 Trommelen op lege vaten

Naast de kritiek op de millimeter, zoals die op het wiskundig taalgebruik, had Freudenthal ook vaak kritiek op een tak van wetenschap in zijn geheel. In het bijzonder de onderwijskunde moest zijn kritiek vaak verduren. Het ging dan vooral om vanuit de (algemene) onderwijskunde foutief naar het vakonderwijs vertaalde zaken, maar geregeld ook om onderwijskunde in het algemeen. Zoals in zijn artikel ‘De middenschool’, waarin hij het over het Nederlandse schoolsysteem had:

[...] met de splitsing van het AVO naar MAVO, HAVO, VWO erbij is het Nederlandse voorgezette onderwijs zeker het meest opgesplitste in de hele wereld. Deze opsplitsing – een kluif om te watertanden voor onderwijskundigen, die van systemen en systematische leven – is bestendig en verfijnd door de Mammoet-wet, in een tijd dat in heel Europa de algemene trend de andere kant op wees.²⁰⁷

Typerend voor de onderwijskunde was volgens Freudenthal het werken vanuit een abstracte schematiek, om die pas op het eind te vullen met vakonderwijs. Hij was hier pertinent op tegen: onderwijsinhoud en onderwijsvormen kunnen niet van elkaar gescheiden worden. Om tot zinnig onderwijs te komen, had het geen zin dit onderwijs zuiver abstract en theoretisch te benaderen. In een ander artikel over de middenschool verwoordde hij het als volgt:²⁰⁸

Men kan vanuit het algemene deduceren wanneer men al eens een keer naar het algemene toe geïnduceerd heeft, van het onderwijs in ’t algemeen naar het vak, als men de weg van het vak naar ’t algemeen al eens heeft afgelegd. Zo zou men ook dergelijke conferenties moeten opzetten: met de vakken beginnen, om vanuit de concrete ervaringen het algemene te begrijpen en naar waarde te schatten – als men onderwijstheoretische argumenten ten bate van de middenschool zoekt, kan men ze alleen vanuit de vakken vinden.²⁰⁹

206 Freudenthal, ‘Recent tendencies in the teaching of mathematics’, in: W.E. Lamon, ed., *Learning and the nature of mathematics* (1972) 11-18, aldaar 14. Vertaling van: Freudenthal, ‘Les tendances nouvelles de l’enseignement mathématique’, *Revue de l’Enseignement Supérieur* 46-47 (1969) 23-29.

207 Freudenthal, ‘De Middenschool’, *Rekenschap* 20 (1973) 157-165, aldaar 159.

208 Ook in de lerarenopleiding zou Freudenthal onderwijskunde het liefst in de vakcomponent geïntegreerd onderwezen zien worden; Freudenthal, ‘Denkbeelden over universitaire lerarenopleiding’, voordracht op de seminar van de ‘Vereniging Universitaire Leraren Opleiding Nederland’, 1976; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 609.

209 Freudenthal, ‘De niveaus in het leerproces en de heterogene leergroep, met het oog op de middenschool’, *Gesamtschule Conferentie* (1973) 88-99, aldaar 91.

Een dergelijk betrekken van vakdeskundigheid bij onderwijskundig onderzoek was erg zeldzaam. Volgens Freudenthal was hiervoor vanuit de onderwijskunde een “soms tot hysterie opgevoerde afkeer”.²¹⁰ Bovendien was er binnen het onderwijskundige systeem sprake van “een wijde mantel der liefde en een gigantische doofpot voor al wat er in de onderwijskundige productie scheef gaat”.²¹¹

Ook tussen de psychologie als wetenschap en het leren van wiskunde was er volgens Freudenthal een enorme kloof. In het voorwoord van *Mathematics as an educational task* vroeg hij zich vertwijfeld af hoe en door wie dit opgevuld kon worden:

When in an excellent modern book [R.M. Gagné, *The conditions of learning* (Londen 1965)] I tried to find out what I should understand under learning and how I should subdivide it, I felt myself very far from what I had experienced myself and with others as *mathematical* learning. A feeling of loneliness seized me: is mathematics really so different? I wish that someone who profoundly understands both mathematics and psychology would show us the bridge.²¹²

Van zijn kant was het dus geen kwestie van niet willen, maar een kwestie van niet zien hoe het nu, met de huidige kennis, ingevuld zou moeten worden. Totdat daar een zinnige oplossing voor was, bleef Freudenthal strijden tegen elke holle theorie, vooral wanneer die gevaarlijk drastische consequenties zou kunnen hebben voor het onderwijs.

Een mooi voorbeeld hiervan was Freudenthals kritiek op een internationaal vergelijkend onderzoek naar de leerprestaties van schoolkinderen in moedertaal en natuurwetenschappen.²¹³ Aan dit onderzoek was weinig goed in Freudenthals visie. Zo was er op verschillende manieren gemeten met twee maten en waren er leerling-situaties uit verschillende landen vergeleken die volkomen onvergelijkbaar waren. De uitkomsten – waaronder de conclusie die stelde dat Nederlandse kinderen ver achter bleven bij hun leeftijdsgenoten in de natuurwetenschappen – waren dan ook volkomen onbetrouwbaar, hoewel Freudenthal het niet na kon laten te benadrukken dat er zeker meer aan natuurwetenschappen op onze scholen gedaan zou moeten worden.²¹⁴

²¹⁰ Freudenthal in een recensie in 1975 over het boek van G. Boomsma, *Handboek voor het moderne rekenonderwijs in de basisschool*; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 602.

²¹¹ Ibid.

²¹² Freudenthal, *Mathematics as an educational task* vi.

²¹³ Dit onderzoek was internationaal georganiseerd door de International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA); Freudenthal, ‘Mammoetonderzoek wekt wantrouwen’, *Universiteitsblad U Utrecht* (14 juni 1974). Freudenthal besprak dit onderzoek ook in: Freudenthal, ‘Een internationaal vergelijkend onderzoek over wiskundige prestaties’, *Pedagogisch Studiën* 52 (1975) 43-55; Freudenthal, ‘Pupils’ achievement internationally compared – the IEA’, *Educational Studies in Mathematics* 6 (1975) 127-186; Freudenthal, ‘Schülerleistungen im internationalen Vergleich’, *Zeitschrift für Pädagogik* 21 (1975) 890-910; Freudenthal, ‘Leerlingenprestaties in de natuurwetenschappen internationaal vergeleken’, *Faraday* 45 (1975) 58-63; Freudenthal, ‘De wereld van de toetsen’, *Rekenschap* 23 (1976) 60-72.

²¹⁴ Freudenthal, ‘Mammoetonderzoek wekt wantrouwen’, *Universiteitsblad U (Utrecht 14 juni 1974)*.

Hoe komt het dat dit soort mammoet-onderzoek – ondanks de steeds weer blijkende levensgrote gebreken – door blijft gaan? Eén van de redenen is het ontzag voor grote getallen, computers, databanken; een andere dat het gemakkelijker is om miljoenen dan om duizenden voor onderzoek los te krijgen. Het opvoedkundig bezwaar van dit soort onderzoek is het aankweken van zorgeloosheid bij de onderzoeker die geheel op de grote getallen gaat vertrouwen, en de uitnodiging aan het publiek tot het zonder kritiek aanvaarden van met deskundig gebaar geponeerde cijfers.²¹⁵

Freudenthal vond het zeer kwalijk dat op geen enkele wijze moeite was gedaan, informatie over het hoe en waarom van de invulling van het onderwijs in de natuurwetenschappen in te winnen en te verwerken in de opzet van het onderzoek. Wat er uiteindelijk wel gebeurde, was het bekende werken met lege ‘onderwijsvaten’ – met alle gevolgen voor het vakonderwijs van dien:

Ik beklemtoon het nog eens: ik trek de bekwaamheid van de Nederlandse projectleiding niet in twijfel. Het onderzoek is bepaald niet slechter dan wat anders en elders op dit gebied wordt gepresteerd. Wat fout is, is het idee van dit soort onderwijskunde dat de Duitsers ‘inhaltneutral’ noemen – het werken in holle vormen, die dan maar met vakinhouden moeten worden gevuld. Dit systeem veroordeelt op zichzelf bekwame onderzoekers tot werk waarvoor ze niet opgeleid en niet berekend zijn. Met schouderophalen aan de vakkundige kant komen we niet verder. Dit oordeel moest een keer – en dan gedocumenteerd – uitgesproken worden.²¹⁶

Een uitgelezen en door Freudenthal vaak aangehaald voorbeeld van zo’n holle vorm was de taxonomie van Bloom zoals beschreven in *Taxonomy of educational objectives. The classification of educational goals* (1956).²¹⁷ Dit in de jaren zeventig vooral in de Verenigde Staten populaire werk werd in de onderwijswereld als hulpmiddel in de leerplanontwikkeling gebruikt. Blooms taxonomie was ontwikkeld om leerdoelen te categoriseren en hiërarchisch te rangschikken als hulpmiddel bij het bepalen en waarderen van examenresultaten, met name voor de geesteswetenschappen. De toepassing ervan was in Freudenthals woorden “een voor wiskunde en natuurkunde totaal ongeschikt en alleen de lachspieren activerend modeverschijnsel”.²¹⁸

In zijn boek *Weeding and sowing* zette Freudenthal uitgebreid uiteen waarom een dergelijke classificatie niet werkte: alleen al het feit dat aspecten als ‘observeren’ en ‘experimenteren’ ontbraken, maakte de taxonomie waardeloos voor de natuurwetenschappen.²¹⁹ Bovendien werd een belangrijk aspect over het hoofd gezien: de

215 Ibid.

216 Ibid.

217 Ook Langeveld bekritiseerde Blooms werk; M.J. Langeveld, ‘Over de voorbereiding van het gebruik van exacte methoden in bewerking en interpretatie van psychologische onderzoekingen’, *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afdeling Letterkunde* 30 (Amsterdam 1967) 187-204.

218 Freudenthal, ‘Mammoetonderzoek wekt wantrouwen’, *Universiteitsblad U Utrecht* (14 juni 1974).

219 Freudenthal, *Weeding and sowing*. Eerder besprak Freudenthal het werk van Bloom in: ‘Lernzielfindung im Mathematikunterricht’, *Zeitschrift für Pädagogik* 20 (1974) 719-738.

vaardigheid om testen te kunnen maken ontbrak in de schema's. Dit was een taboe om te noemen, maar volgens Freudenthal niet uit te vlakken in de waardering van dergelijke systemen. Het ergste was nog dat met dergelijke systemen uitgegaan werd van de op zichzelf staande wiskundige vraagstukken, zonder deze een plaats in het leerproces toe te kennen. En daar lag voor Freudenthal juist de essentie: uitgaan van de leerprocessen, en dus van de leerstof. In zijn voordracht 'Taxonomieën – waarvoor?' liet hij op niet mis te verstane wijze weten hoe weinig hij zag in de taxonomie van Bloom en de onderwijskunde die erop leunde:

'Taxonomy' is een van die modes, waaraan iedereen in de onderwijskunde verplicht wordt aan [sic] mee te doen. 'Taxonomy' is maar een symptoom. Het euvel is gebrek aan wetenschappelijk houvast. In de natuurwetenschappen is het ook begonnen met indelen, bij voorkeur volgens heilige getallen. Dit stadium is in de onderwijskunde nog niet overwonnen.²²⁰

Ook in het onderzoek van de IEA was de taxonomie van Bloom misbruikt om de test bij gebrek aan inhoudelijke maatstaven te kunnen valideren. Freudenthal legde uit:

The purpose of Bloom's categories in this context was the following: tests require a validation ritual; if, as in the present case (among numerous others) no yardsticks for validation of the contents of the instruments are available, one can use as an object of validation the distribution over Bloom's categories, which in fact as a formal criterion is more attractive to psychometrists than subject matter and educational context, and is more intelligible too. [...] The attempts at validation had entirely failed, but since they had taken place, the instrument was pronounced valid. If rituals are indispensable, would it not be time to replace the Bloom categories ritual by another where for instance committee and experts unite in a silent prayer? ²²¹

In een brief aan de minister van Onderwijs en Wetenschappen over het IEA-onderzoek liet Freudenthal weten dat dergelijk malafide onderzoek bepaald niet uniek was. Ook in zijn ervaringen met de Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs (svo) had hij al meermalen dergelijke wanpraktijken opgemerkt.²²² Dat hij hier niet altijd ruchtbaarheid aan gaf, deed hij uit opportunistische overwegingen:

Ik ken tussen de tien en twintig projecten van svo van iets naderbij – er is er geen een onder, waarop niet ernstige aanmerkingen zijn te maken – aanmerkingen t.a.v. inhoud of t.a.v. de behandeling door svo. Dit zou een heel toevallig ongunstige steekproef kunnen zijn, maar daar geloof ik niet in. Ik heb tot nu toe over mijn ervaringen in het onderwijskundige wereldje in bredere kring gezwegen. Ik deed dit uit opportunisme. Ik wilde door misstanden in de bestaande structuur aan te vallen niet mijn instituut,

220 Freudenthal in een presentatie op het symposium 'Toepasbaarheid van taxonomieën' 1976, getiteld: 'Taxonomieën – waarvoor?'; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 610.

221 Freudenthal, *Weeding and sowing* 143-144.

222 De Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs was de organisatie verantwoordelijk voor de programmering en subsidiëring van onderwijsonderzoek in Nederland. Later is de svo grotendeels opgegaan in NWO en in 1997 uiteindelijk opgeheven.

het rowo, in gevaar brengen. Ik heb wel over de verantwoordelijkheid die ik met dit zwijgen op me laadde, wakker gelegen. Tot mijn verschoning mag ik eraan toevoegen, dat ik mijn bezwaren wel intern kenbaar heb gemaakt – zonder succes.²²³

De kritiek die Freudenthal op het svo-werk had, had bijna altijd betrekking op het niet (genoeg) inwinnen van vakdeskundig advies: het werken met lege vaten. Opmerkelijk was dat Freudenthal – die op het eerste gezicht nooit bang leek een blad voor de mond te nemen – blijkbaar toch voorzichtig was in zijn uitspraken en zeker de consequenties op langere termijn meenam in zijn overweging om kritiek al dan niet te uiten. Jaren later had Freudenthal aan de staatssecretaris van o&w, mevrouw Ginjaar-Maas, in een brief kritiek over crto-onderzoek. Hieruit bleek, hoe voorzichtig hij nog altijd was in het uiten van zijn kritiek op onderwijskundigen:

Ik hoop dat U met deze uiteenzetting iets kunt doen. Men hoeft niet te weten uit welke koker de pijl komt. Voor onderwijskundigen ben ik toch het zwarte schaap en dat komt de zaak niet ten goede.²²⁴

Ondanks het gevoel niet veel te hebben kunnen uithalen in onderwijsland met zijn kritiek, had Freudenthal geen spijt. In *Schrijf dat op, Hans* blikte hij terug:

Ik heb me veel met onderwijs meer in het algemeen bemoeid, maar nooit met onderwijs als leeg vat, door anderen te vullen, zoals sommige psychologen en algemeen onderwijskundigen het opvatten, die in en door het lawaai wanneer je op dat vat trommelt, de meeste zelfbevrediging scheppen en de meeste aandacht trekken. Of veeleer: voor zover ik mij wel met zoiets heb bemoeid, was het om onwetendheid, charlatanerie en boerenbedrog aan de kaak te stellen. [...]

Ik heb ook getrommeld, maar niet op lege vaten, ik heb de trom geroerd om voor mijn ideeën te werven, in het onderwijs en anderszins. Ja dat is het, ik ben een tamboer geweest, ik heb de trom geroerd om mensen wakker te maken. [...]

Nee, ik was geen goed tamboer. Een goede tamboer gaat niet diep in de nacht, maar in de ochtend trommelen – als het tijd is om op te staan. Maar denk niet dat ik er spijt van heb. Een enfant terrible hoort trots op zijn ondeugden te zijn.²²⁵

Trommelen bleef hij, bij kleine zaken, bij grotere zaken, publiekelijk of intern, onvermoeibaar en altijd met de hoop en verwachting, vroeg of laat effect te bereiken. In het laatste van de drie artikelen over de nomenclatuurkwestie beschreef hij het als volgt:

Het is nog niet, het hoofd in de schoot leggen. Zolang er leven is, is er hoop en zolang er fouten worden gemaakt, is er rood potlood.²²⁶

223 Freudenthal aan de minister van o&w over internationaal vergelijkend onderzoek naar schoolprestaties, 28 juni 1974; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1730.

224 Ginjaar-Maas antwoordde hierop: “Ik weet niet of u in onderwijsland een zwart schaap bent – wel weet ik dat u vaak uw vinger precies op de wonde weet te leggen, en ik heb daar veel bewondering voor. Maar dat heb ik u al eens eerder gezegd. Nogmaals dank voor uw brief.” Freudenthal aan Ginjaar-Maas, staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen, 2 januari 1989, antwoord van Ginjaar-Maas, 5 januari 1989; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 33.

225 Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans* 360-363.

226 Freudenthal, ‘Nomenclatuur en geen einde’, *Euclides* 49 (1973) 53-58, aldaar 53.

9.6.3 Freudenthal over Piaget: bewondering en genadeloze kritiek

Als er één onderwerp was waarop Freudenthal schijnbaar eindeloos zijn kritiek uitlet, was dat wel het werk van de Zwitserse psycholoog Piaget. Of iets preciezer: het gebruik van het werk van Piaget bij de ontwikkeling van wiskundeonderwijs. Tijdens zijn literatuurstudie in de oorlogsjaren had Freudenthal nog geen werk van Piaget gelezen, maar wel de inleiding op zijn werk van C. Philippi-Siewertsz van Reesema.²²⁷ In 1957 Freudenthal noemde Piagets werk pas voor het eerst in een artikel:

All will admit that Piaget's research is highly interesting. But it is quite another thing to apply his results to teaching mathematics, firstly because Piaget's mathematical background has been rather weak, but mainly because Piaget's approach hardly reflects the teaching situation of the classroom, but the rather unusual laboratory situation of the psychologist. Mathematical teaching theory can be furthered by mathematical teachers who are able mathematicians and able educators.²²⁸

Een paar jaar later kwam Piaget en passant aan de orde toen Freudenthal schreef over het ontbreken van een techniek voor het zoeken naar protocollen van leerprocessen:

Man könnte mir hier Piaget und seine Schule vorhalten. In der Tat haben sie den Lernprozess untersucht, aber denn in einem Milieu, das uns kaum interessiert: Das Lernen im Laboratorium, nicht in der Klasse. So kommt es, daß Piagets Erfahrungen von Schulmännern nicht bestätigt werden. Es kommt weiter hinzu, daß Piagets Schule von einem verschrobenen Bild der Mathematik ausgeht.²²⁹

Maar pas echt fel en uitgebreid werd Freudenthal in zijn kritiek, toen Piaget en zijn bevindingen vanaf de jaren zeventig gebruikt werden ter verantwoording van de invoering van New Math. De gevolgen die dit voor de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs kon hebben, waren voor Freudenthal ‘onkruid’ in zijn ergste vorm. In *Mathematics as an educational task* voelde hij de noodzaak tot kritiek op Piaget zo sterk, dat hij zelfs een hele appendix aan de bespreking ervan wijdde.²³⁰ Wie was Piaget en wat maakten zijn ideeën in Freudenthals ogen zo gevaarlijk voor de ontwikkelingen binnen het wiskundeonderwijs?

227 En wel het artikel: C. Philippi-Siewertsz van Reesema, ‘Inleiding tot de werken van Prof. dr. Jean Piaget’, *Paedagogische Studien* 10 (1929) 1-52; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 440.

228 Freudenthal, ‘Report on a comparative study of methods of initiation into geometry’, *Euclides* 34 (1957) 289-306, aldaar 306.

229 Freudenthal, ‘Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?’, *Der Mathematikunterricht* (1963) 5-29, 15.

230 Ook uit deze tijd stamde het aantekeningenboekje met aantekeningen die hij maakte naar aanleiding van het lezen van Piagets *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Deze aantekeningen waren korte samenvattingen en bevatten geen commentaar van Freudenthal op het werk; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 445.

Een Zwitserse ontwikkelingspsycholoog

De van oorsprong Zwitserse bioloog Jean Piaget (1896-1980) ontwikkelde zich begin twintigste eeuw tot een ontwikkelingspsycholoog, die vooral in de periode na de Tweede Wereldoorlog school maakte.²³¹ Piaget publiceerde een grote hoeveelheid boeken en artikelen waarin hij op zoek ging naar het tot stand komen van kennis. Hierbij splitste hij de kennis die een kind opbouwde over de wereld om hem heen uit in aspecten als logica, ruimte, tijd, kans en wiskunde. In zijn vroege werk publiceerde hij veel observaties van zijn eigen kinderen. Later legde hij zich toe op meer formeel methodologisch opgezette experimenten met verschillende kinderen in wat bekend zou worden als ‘de school van Piaget’.

Centraal binnen Piagets ideeën stond het gegeven dat er bepaalde ontwikkelingsfasen waren die bij ieder kind universeel in een bepaalde volgorde optraden. De omgeving van het kind leverde het materiaal en de ervaringen waarover het kind ging denken. Deze ervaringen werden actief verwerkt in wat Piaget denkkaders of ‘schème’ noemde – elk met een eigen vaststaande logische structuur.

Voortdurend was er een wisselwerking tussen de ervaringen van het kind en de denkstrategieën die het kind op dat moment hanteerde. Assimilatie (het inpassen van de werkelijkheid in het denkkader) en accommodatie (het aanpassen van denkkaders aan de nieuwe ervaringen en waarnemingen) wisselden elkaar daarbij continu af (adaptatie). De volgorde van de denkstrategieën die een kind tijdens zijn ontwikkeling doorliep, lag volgens Piaget vast volgens een aangeboren logisch patroon. De logica van het denkkader dat een kind op een bepaald moment hanteerde, bepaalde hoe het met de werkelijkheid omging.

Piaget was als ontwikkelingspsycholoog te plaatsen in de hoek van het constructivisme. Met deze term komt tot uitdrukking hoe hij de nadruk legde op het heruitvinden van ideeën en logische gedachtevormen van het kind, in plaats van het voorgeschoteld krijgen van afgeronde ideeën. Het kind moest zich volgens Piaget nieuwe ideeën in zijn ontwikkeling actief eigen maken. Dit algemenere aspect van Piagets ontwikkelingstheorie paste op zich wel in Freudenthals straatje. Maar in Piagets theorie kwam daar vervolgens bij dat er sprake was van een vaststaande logica, die bij elk kind in dat stadium van ontwikkeling bepalend was. Dit aspect kwam tot uitdrukking in de wat bredere karakterisering van Piagets theorieën in de term genetische epistemologie. Freudenthal zei over Piagets visie op de ontwikkeling van de mens in een vraaggesprek met Vredenduin:

²³¹ Bij de samenstelling van deze paragrafen is gebruik gemaakt van de volgende werken: A.L. Baldwin, *Theories of child development* (New York 1967); H.E. Gruber and J.J. Vonèche, ed., *The essential Piaget. An interpretive reference and guide* (1977 London); R. Kohnstamm, *Kleine ontwikkelingspsychologie I. Het jonge kind* (Houten 1993); Mary Sime, *Zoals een kind het ziet. Wegwijzer in de theorieën van Piaget* (Purmerend 1976) met inleiding en nawoord van Van Hiele; L. Smith, J. Dockrell en P. Tomlinson, ed., *Piaget, Vygotsky and beyond. Future issues for developmental psychology and education* (London 1997); Rita Vuyk, *Overview and critique of Piaget's genetic epistemology 1965-1980* (Londen 1981).

De hele binding van verschillende verschijnselen aan een leeftijdsperiode, dat schijnt me nu weer onjuist. [...] Het is een psychologisch onderzoek en hij [Piaget] denkt dat bepaalde door hem logisch geconstrueerde ontwikkelingen daar in zitten. Er zit natuurlijk ook een ontwikkeling in, maar dat je die logisch kunt construeren, dat geloof ik niet. [...] Hij heeft een bepaald epistemologisch beeld van hoe kennis is opgebouwd, gestructureerd is en dienovereenkomstig stelt hij zich de ontwikkeling voor. [...] Uit de mathematische structuur heeft hij een epistemologie afgeleid, die zeker niet ontwikkelingstheoretisch is.²³²

In Piagets werk was veel te vinden over specifiek wiskundige aspecten in de ontwikkeling van het kind.²³³ Dat maakte zijn bevindingen extra aantrekkelijk voor gebruik in wiskundendidactiek en -onderwijs. Zo had Van Hiele zich tijdens zijn promotieonderzoek al in Piagets werk verdiept en zich erdoor laten inspireren bij de ontwikkeling van zijn niveaustheorie. Later zou hij onder andere een studie over Piagets psychologie in relatie met het wiskundeonderwijs publiceren in de serie *Acta Paedagogica Ultrajectina* van het Paedagogisch Instituut van de Universiteit Utrecht. In deze serie verschenen meer studies over het werk van Piaget, zoals die van onder andere A.H. Syswerda (*De ruimtevoorstelling bij het kind volgens J. Piaget en B. Inhelder*) en Bunt (*The development of the ideas of number and quantity according to Piaget*).²³⁴

Van Hieles grootste kritiek op het werk van Piaget was dat deze bij de beschrijving van niveausprongen uitging van een vastliggend genetisch proces van rijping in een bepaalde periode. Van Hiele vond door didactische observaties dat deze sprongen niet in het genetische proces, maar als discontinuïteiten in het leerproces plaatsvonden. Ook wees hij op de onjuistheid om op grond van Piagets bevindingen – zoals de logische structuren die hij in de cognitieve ontwikkeling van het kind ontwaarde – het wiskundeonderwijs te ontwikkelen volgens de structuur van de wiskundige logica.

Binnen de algemene didactiek en pedagogiek was er naast grote bewondering eveneens een bepaalde kritische houding ten aanzien van Piagets theorieën.²³⁵ Dit bleek ook uit het voorwoord van Langeveld bij de studie van Van Hiele, waar hij

232 Vraaggesprek door Piet Vredenduin over ‘mensbeeld’, 9 januari 1984; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1850.

233 Vier van zijn vroegere werken die met wiskundige aspecten te maken hadden, waren *La g n se du nombre chez l'enfant*, *La géométrie spontan e de l'enfant*, *La représentation de l'espace chez l'enfant* en *La génèse des structures logiques élémentaires*; J. Piaget et Alina Szeminska, *La génèse du nombre chez l'enfant* (Neuchâtel 1941), J. Piaget, B rbel Inhelder et Alina Szeminska, *La géométrie spontanée de l'enfant* (Parijs 1948), J. Piaget et B rbel Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant* (Parijs 1948) en J. Piaget et B rbel Inhelder, *La génèse des structures logiques  l mentaires* (Neuchâtel 1959).

234 P.M. van Hiele, *Development and learning process. A study of some aspects of Piaget's psychology in relation with the didactics of mathematics* (Groningen 1959); A.H. Syswerda, *De ruimtevoorstelling bij het kind volgens J. Piaget en B. Inhelder. Synthese en kritiek* (Groningen 1955); L.N.H. Bunt, *The development of the ideas of number and quantity according to Piaget* (Groningen 1951).

235 Zo was er vanuit de psychologie het commentaar dat Piaget in zijn interpretatie van de cognitieve ontwikkeling van het kind te ver ging met zijn wiskundig abstracte theorieën; A.L. Baldwin, *Theory of child development* (New York 1967) 299-300.

sprak over de publicaties die er afgelopen jaren over Piagets werk binnen het instituut waren verschenen:

It will appear from these publications that we are critical of several of Piaget's theories, methods and conclusions in many respects. This, however, does not interfere with our deep respect for this scientific worker who devoted the greater part of his life to genetic psychology.²³⁶

Met de opkomst van New Math eind jaren vijftig werd Piagets theorie door de voorstanders van New Math omarmd als een impliciete psychologische goedkeuring voor de beslissing om de logische structuur als uitgangspunt in het wiskundeonderwijs te nemen. In België bijvoorbeeld was veel belangstelling voor Piagets werk, mede door zijn lidmaatschap van de CIEAEM waarin Papy ook actief was.²³⁷ In *Schrijf dat op*, Hans omschreef Freudenthal het als “de zegen van een psycholoog, een epistemologisch psycholoog die het erop hield dat de wiskunde zich bij het individu volgens epistemische lijnen ontwikkelde, dat wel”.²³⁸ Dit was voor Freudenthal dé aanleiding, tot kritische actie over te gaan.

Over ondeugdelijke proeven en pseudowiskunde

Freudenthals preoccupatie met Piaget en zijn werk ging zo ver, dat hij hier tot in zijn laatste boek uit 1991 op terugkwam en zijn kritiek verder uiteenzette.²³⁹ Hij nam het in *Revisiting mathematics education* Piaget niet kwalijk met zijn theorieën onbewust te hebben bijgedragen aan de impact van New Math. Net als twintig jaar eerder in *Mathematics as an educational task* legde hij de verantwoordelijkheid bij de wiskundigen zelf. Hij nam het de wiskundigen ten zeerste kwalijk, dat zij de kritiek op Piagets werk (en dan met name van wat Freudenthal noemde het ‘pseudowiskundige’ deel) nooit luid genoeg geuit hadden:

A mathematician should be able to indicate in Piagets problems what is adequate and what is distorted, and with a bit of common sense he could be the person best placed to uncover the numerous errors in Piagets experiments and interpretations.²⁴⁰

Deze verantwoordelijkheid als wiskundige nam Freudenthal zelf met een uitgebreide appendix in *Mathematics as an educational task* getiteld: ‘Piaget and the Piaget School’s investigations on the development of mathematical notions’.²⁴¹ In zijn voorwoord schreef hij erover:

To be honest I should say that I feel there is no need to embellish low-key education using high-brow psychology, in particular if the cited literature is far removed from

236 M.J. Langeveld in ‘Preface’ van: P.M. van Hiele, *Development and learning process. A study of some aspects of Piaget’s psychology in relation with the didactics of mathematics* (Groningen 1959) iv.

237 Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Deel III* 99.

238 Freudenthal, *Schrijf dat op*, Hans 349.

239 Freudenthal, *Revisiting mathematics education. China lectures*.

240 Freudenthal, *Mathematics as an educational task* 662.

241 *Ibid.*, 662-677.

educational preoccupations. If others prefer this procedure, then indeed, I feel the need to oppose it. Misusing Piaget’s name has become quite a habit in didactical literature. This led me to discuss in passing, and finally in a more connected form in the Appendix, what Piaget’s investigations could mean for mathematical education.²⁴²

Een meer gedetailleerde beschouwing in deze vorm vond Freudenthal nodig om zijn eigen “somewhat summary criticism” op Piagets werk uit zijn artikelen verder te onderbouwen. Desalniettemin voelde hij zich ook geroepen zijn waardering voor het werk van Piaget uit te spreken:

Before going into this I would like to stress the wealth of ideas in his work, his originality, not to say genius, while not excluding the negative undertones which often reverberates this word.²⁴³

Freudenthals kritiek op Piaget had diverse gronden. Allereerst was er het duidelijk in het oog springende verschil tussen de aanpak van Freudenthal en die van Piaget. Waar Piaget in zijn vroegste werk nog wel verslag deed van observaties van zijn eigen kinderen, baseerde hij zich in zijn latere en meer bekende werk op wat Freudenthal ‘laboratoriumsituaties’ noemde: een kunstmatige opzet van proefopstelling, proefpersoon en een proefleider die vastomlijnde experimenten afwerkte.

Dit vormde natuurlijk een schril contrast met de terloopse observaties en ontspannen wandelingen van Freudenthal met zijn kleinzoon Bastiaan. Maar ook met de onderwijssituaties zoals die zich in een klas voordeden had het volgens Freudenthal weinig van doen. Met zijn experimenten belichaamde Piagets onderzoeken voor Freudenthal de zo door hem verafschuwde bureauwetenschap, die elk contact met de realiteit verloor. De enige keer dat Freudenthal zelf bewust proeven deed was in een reeks voorbedachte en daardoor min of meer opzettelijke natuurkunde-experimenten met Bastiaan, maar hierbij liet hij de jongen zoveel mogelijk zelf doen en aangeven. Hij schreef over deze experimenten – die hij “Bastiaan’s lab” noemde –:

Het is niet het Lab van de ontwikkelingspsycholoog, waar de kinderen – in ’t Engels – *subject*, d.w.z. onderwerp of onderdaan, zijn, of – in ’t Nederlands – proefpersoon. Bastiaan *doet* proeven.²⁴⁴

Freudenthals argwaan tegenover Piagets laboratoriumsituaties stelde op zijn eigen observatie-ervaringen. Eén keer zag hij heel duidelijk hoe in laboratoriumexperimenten verkregen theorie door de terloopse praktijk weerlegd werd. Het ging om het begrip conservatie, een begrip dat kleuters volgens Piaget nog niet konden beheersen. Freudenthal vertelde hoe hij met Bastiaan langs het kanaal liep, waar men aan een verbreding van de kanaalbedding begonnen was. Bastiaan merkte opgewonden op, dat er voor de weggebaggerde aarde water bij zou moeten – iets wat Freudenthal nauwelijks kon geloven:

²⁴² Ibid., v-vi.

²⁴³ Ibid., 662.

²⁴⁴ Freudenthal, ‘Bastiaan’s lab’, *Pedomorfose* 15 (1976) 35-54, aldaar 35.

Het hier gebeurde is zo verbazend, omdat het een teken is van wat Piaget conservatie noemt, ver beneden de leeftijd die volgens de psychologische laboratoriumproeven hiervoor bepaald is – ontdekkingen in het vrije veld contra de dwangbuis van het laboratorium. Meermalen in de volgende maanden geeft hij – met de dezelfde opwindings – blijk van het ontdekken van conservatieverschijnselen, wanneer iets overgegoten wordt van een breed in een smal vat, wanneer bij het onderdompelen van zijn hand het water in een weckglas stijgt. Wanbegrip ten aanzien van conservatie doet zich, volgens mijn ervaringen, bij kinderen alleen in kunstmatige laboratoriumsituaties voor.²⁴⁵

Maar erger en kwalijker dan de kunstmatige opzet van Piagets experimenten vond Freudenthal de fouten die hij bij de uitvoering ervan maakte: niet alleen wiskundige fouten, maar ook taalinterpretatiefouten, waaruit vervolgens niet zelden foute conclusies volgden. Piagets wiskundige dwalingen werden door Freudenthal in zijn appendix geschetst door het vertalen van een hoofdstuk uit Piagets *La représentation de l'espace chez l'enfant* uit 1948. Freudenthal waarschuwde de lezer dat de vertaling niet erg soepel liep, want hij was geen “professional translator who is obliged to translate things he does not understand”, hiermee al het niveau van het stuk aangevende.²⁴⁶ Vervolgens vertaalde hij, met toevoeging van tientallen voetnoten vol uitleg en vraagtekens, de schier onbegrijpelijke bespreking van Piaget van zijn acht “infralogical operations” die de Euclidische ruimte bepaalden zoals hij dat zag. Vervolgens concludeerde Freudenthal:

After our short analysis this extract speaks so loudly for itself that there is no need to add criticism. It is, however, not too far-fetched to ask whether such ideas have influenced Piaget's work in a decisive way. They did influence it, but I doubt whether they were in any way decisive influences.²⁴⁷

Ondanks Piagets herhaaldelijk foutieve gebruik van wiskundige begrippen, zijn wiskundig gammele theorieën en dito experimentopzet vond Freudenthal het kenmerkend toch nodig hier uitgebreid aandacht aan te besteden. Dit deed hij, omdat Piagets bevindingen – ondanks alle fouten – namelijk wél weer wiskundig werden geïnterpreteerd en hun invloed hadden op de wiskundededidactiek en de inhoud van het wiskundeonderwijs, waar ze golden als psychologische legitimatie en onderbouwing voor het nemen van de wiskundige structuur als uitgangspunt.

Nog meer dan de wiskundige fouten, waren de fouten in taalkundige interpretatie van de testuitkomsten voor Freudenthal een doorn in het oog. Voor Freudenthal was het in Piagets testsituaties van essentieel belang dat proefpersonen de vraag taalkundig hadden begrepen, maar nergens in de proefnemingen verzekerde de testleider zich hiervan.²⁴⁸ In zijn appendix beschreef hij een conservatie-experiment uit

245 Freudenthal, ‘Cognitieve ontwikkeling – kinderen geobserveerd’, in: Freudenthal, *Appels en peren* 104. Deze observatie noteerde Freudenthal ook in: Freudenthal, ‘Bastiaan’s lab’, *Pedomorfose* 15 (1976) 35-54, aldaar 35.

246 Freudenthal, *Mathematics as an educational task* 663.

247 *Ibid.*, 669.

248 *Ibid.*, 87-88.

Piagets boek *La g n se des structures logiques  l mentaires*, door Freudenthal met N aangeduid:

N starts with investigating whether and to which degree children understand that pouring fluid from one vessel into another or into a number of vessels does not influence the quantity; the subjects are asked whether this is more or less than that or as much as that. According to the author’s intention the question aims at the quantity rather than at the number of vessels or the height of the level of the fluid. This fact, however, is not included in the information provided to the children; the experimenters’ questions are sometimes even misleading, to which contributes the linguistic circumstance that in French both “is this more?” and “are there more?” can be translated by the same phrase “y en a-t-il plus?”²⁴⁹

Wanneer Piaget tot de conclusie kwam dat een kind van een bepaalde leeftijd een bepaald concept niet beheerste, bewees hij volgens Freudenthal niet meer dan het feit dat het kind de vraag niet had begrepen. Piagets uitkomsten hadden volgens hem dan ook geen betrekking op de cognitieve ontwikkeling, maar op de taalkundige. Vaak was er ook sprake van communicatieproblemen tussen de testleider en de kinderen: een antwoord werd niet begrepen, fout geïnterpreteerd of domweg ten onrechte fout gerekend. Het enige dat dus onderzocht werd, waren volgens Freudenthal de communicatievaardigheden:

There is no real interpretation of mathematics to which Piaget’s research can be related. Though the subjects of his experiments are set mathematical tasks, he almost never tests whether they understood the language in which the task was formulated. It is rather the *linguistic* than the mathematical content or the task which is object of the investigation. In other cases, rather than testing the reaction of the child to a mathematical problem, the leader of the experiment tests how the child manages to disentangle irrelevant complications of the problem, or whether you can cheat the child by misleading suggestions. A still sadder sight is the attempt by the experiment leader to induce the experiment subject, who might hesitate between a right and a wrong answer, to choose the wrong one. Even worse are the manifest blunders of the experiment leader who marks correct answers as wrong.²⁵⁰

Naast de wiskundige fouten, de fouten in de opzet van het onderzoek en de fouten in de interpretatie van de resultaten van het onderzoek had Freudenthal nog meer kritiek op Piagets werk. Hij rekende dat punt echter niet Piaget zelf aan, maar de wiskundigen, die zonder kritische houding bij de invoering van nieuw lesmateriaal met Piagets werk aan de haal gingen, en daarbij zelfs verzuimden, de door Piaget gebruikte wiskunde te controleren.²⁵¹

In een nawoord op het boekje *Zoals een kind het ziet. Wegwijzer in de theorieën van Piaget* schreef Van Hiele een weliswaar mild geformuleerde, maar toch essentiële kritiek op het werk van Piaget, die in grove lijnen overeenkwam met die van

²⁴⁹ Ibid., 671.

²⁵⁰ Ibid., 120.

²⁵¹ Zie ook paragraaf 9.5.3, waarin beschreven wordt hoe een in Freudenthals ogen foutieve invalshoek bij het invoeren van het getalbegrip door Piagets onderzoeksresultaten zou worden gesteund.

Freudenthal.²⁵² Over dit boekje schreef Freudenthal dan ook in een recensie dat hij het “voortreffelijke nawoord [...] niet zou willen missen”.²⁵³ Het zette volgens Freudenthal tot nadenken aan, nadenken

... uiteraard ook over dit boekje, en dan niet door na te praten, maar kritisch. Hij [de lezer] mag dit best riskeren, want van vrijwel alle proeven die hij hier vindt, is de ondeugdelijkheid al erkend, van sommige door Piaget zelf. Maar zelf erachter komen is meer waard.²⁵⁴

Want de essentie van Piagets werk – het inzicht dat de kennis en beleving van een kind essentieel anders is dan die van de (onderwijzende) volwassene – kon ook Freudenthal natuurlijk onderschrijven. In een vraaggesprek met Piet Vredenduin over ‘Mensbeeld’ gaf hij jaren later toe, dat zijn mensbeeld en dat van Piaget op zichzelf waarschijnlijk niet eens zoveel verschilden.²⁵⁵ Het grote verschil zat in de uitgangspunten. Piaget goot de door de mens verkregen kennis in een (semi-wiskundige) structuur en achtte daarmee bewezen dat deze ook zo tot stand kwam. Over deze denkwijze schreef Freudenthal:

Je maakt die kennis van die mens los, dan beschouw je de kennis die klaar gekomen is, en die orden je op de een of andere manier in een lexicon of in een wiskundige zin. Zo zit die kennis in elkaar. Maar zo is hij niet tot stand gekomen. Niet in de geschiedenis, en komt ook bij een individu niet zo tot stand, integendeel, het gaat net omgekeerd. [...] Ik zie juist hoe langzaam het gaat voor je die kennis kunt losmaken van de manier waarop je hem zelf verworven hebt. Dat wil zeggen een deel van de kennis blijft op een onbewuste manier verworven en er is nog heel wat vereist om die kennis daarvan los te maken.²⁵⁶

En die kennis van het onbewuste bewust te maken, dat was de opdracht waar men in het ontwerpen van onderwijs voor stond. De zoektocht naar onderwijs was niet los te zien van de vakinhoud – lokaal, op het niveau van het lerende kind. Zijn afkeer voor de blinde acceptatie van psychologisch onderzoek ten koste van de eigen vakkennis van de wiskundigen bracht Freudenthal weer terug naar de bron: het observeren van het kind. Twee belangrijke activiteiten onderscheidde Freudenthal om tot de ontwikkeling van een theorie over het wiskundeonderwijs te kunnen komen: nauwgezette en voortdurende observatie van het leerproces en de analyse daarvan.²⁵⁷ Beter bij de dagelijkse werkelijkheid beginnen en om je heen kijken, dan klakkeloos hoogdravende theorieën omarmen, zo betoogde hij, want:

252 Sime, *Zoals een kind het ziet. Wegwijzer in de theorieën van Piaget*.

253 Freudenthal in een boekbespreking van: Sime, *Zoals een kind het ziet. Wegwijzer in de theorieën van Piaget*; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1714.

254 Ibid.

255 Vraaggesprek door Piet Vredenduin over ‘mensbeeld’, 9 januari 1984; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 1850.

256 Ibid.

257 Uit: ‘Verslag van het college van Prof.Dr.H. Freudenthal’ op de WISKOBASconferentie te Lochem, 1972; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 408.

Als we weinig van cognitieve ontwikkeling afweten, zou de reden ervan niet kunnen zijn, dat we het tot nu toe te ver, te hoog hebben gezocht, dat we over wat ons onbelangrijk leek, argeloos heen zijn gestapt? ²⁵⁸

9.7 De opdracht voor de toekomst

In 1969 blikte Freudenthal terug op eerdere jaren. Hij omschreef het verschijnen van zijn artikel ‘Instruction of modern mathematics or modern instruction of mathematics?’ van 1963 als “a solitary effort to defend the priority of pedagogy and the art of teaching over programs”.²⁵⁹ “Nonconformist”, zo karakteriseerde hij dit artikel.²⁶⁰ Sindsdien was er veel veranderd: de aandacht voor pedagogiek en didactiek in het wiskundeonderwijs was sterk toegenomen, steeds meer geaccepteerd en nog groeiende, niet in de laatste plaats door de inspanningen van Freudenthal zelf. Deze veranderingen en de toename – ook internationaal – van de activiteiten op het gebied van het wiskundeonderwijs maakten het een woelige, maar daardoor ook inspirerende tijd.

Tegen deze achtergrond zijn de sprongen in Freudenthals eigen leerproces moeilijk uit te lichten. De enorme golf aan bedrijvigheid in binnen- en buitenland maakten dat de impulsen legio waren: van congressen en conferenties tot het observatiewerk van het IOWO kwamen er op allerlei manieren evenveel vruchtbare ideeën van Freudenthal vandaan, als op hem af. Ideeën om zich tegen af te zetten – zoals in zijn kritiek op Piaget – maar ook ideeën om constructief mee verder te bouwen.

En meer dan in welke voorgaande periode ook, valt Freudenthals tomeloze energie en onvermoeibare inzet op. Zijn grote naam en reputatie zette hij in bij de diverse sociale functies die hij vervulde: het opzetten van *Educational Studies in Mathematics* en het organiseren van het eerste internationale congres voor wiskunde-didactiek zijn daar voorbeelden van. Hij sprong onmiddellijk in op bestaande initiatieven en gaf deze vervolgens een ongekende versnelling en extra impuls, zoals in zijn interactie met WISKOBAS en het IOWO.

Hij volgde actuele ontwikkelingen op de voet en nam alles direct in zich op. Razendsnel vonden er in de ontwikkeling van zijn gedachtegoed assimilatie en integratie van andermans ideeën plaats. Eén belangrijk element sprong er daarbij uit: het (her)ontdekken van de observatie als bron bij de ontwikkeling van wiskundeonderwijs.

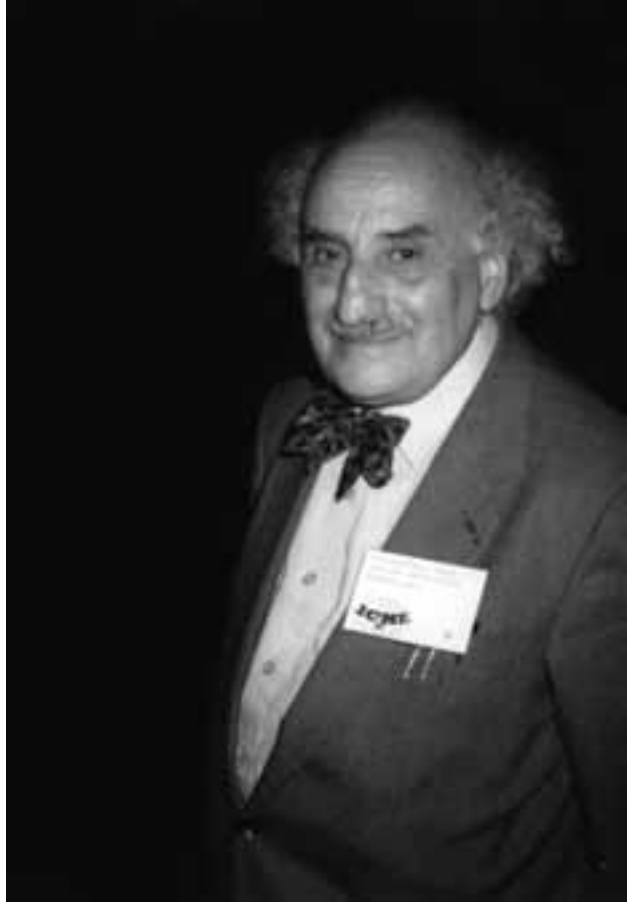
Tegen de achtergrond van het belang van nuttig, eerlijk en zindelijk wiskun-

²⁵⁸ Freudenthal, ‘Cognitieve ontwikkeling – kinderen geobserveerd’, artikel samengesteld uit *Jaarverslag over 1977*, Provinciaals Utrechts Genootschap (1978) 8-18 en Freudenthal, *Weeding and sowing*; Freudenthal, *Appels en peren* 105.

²⁵⁹ Hij doelde op zijn artikel: Freudenthal, ‘Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?’.

²⁶⁰ Freudenthal, ‘Recent tendencies in the teaching of mathematics’, in: W.E. Lamon, ed., *Learning and the nature of mathematics* (1972) 11-18, aldaar 13.

Freudenthal tijdens ICME-1980 in Berkeley (1980).



deonderwijs voor allen, op elk niveau, bleef de observatie als houvast en richtlijn terugkomen. Het zoeken naar paradigma's vloeide daar voor Freudenthal logischerwijs uit voort. Toen hij een kleindochter met veel geduld over de tijdspanne van een paar weken het principe van de verdubbeling van een vierkant liet ontdekken, vroeg het meisje

“How can you teach mathematics in this way to a whole class?” She was right to ask this question. School teachers cannot afford to delay solutions patiently for hours or weeks. They have to develop methods to teach 250.000 children a year mathematics in the same way as a girl is taught by a granddaddy who is a university professor in mathematics.²⁶¹

En daarmee vatte hij de opdracht voor de toekomst samen: methodes ontwikkelen om in de klas wiskunde te laten herontdekken, zoals een grootvader dat met zijn kleinkinderen deed. Deze opdracht was het *IOWO* op het lijf geschreven. Maar niet

²⁶¹ Lezing van Freudenthal in Argentinië, eind 1972; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 571.

alleen binnen het IOWO, ook daarbuiten zou Freudenthal in deze nieuwe traditie nog veel onderwijswerk verrichten.

“Een wiskundige [...] die zich altijd en de laatste jaren vrijwel uitsluitend voor het onderwijs heeft geïnteresseerd” zo omschreef hij zichzelf in 1973.²⁶² De balans in zijn belangstelling en werkzaamheden was nu definitief doorgeslagen naar de kant van het onderwijs: Freudenthal – de ongenaakbare wiskunde-professor, de kindse grootvader, de onvermoeibare criticus – wás wiskundeonderwijs.

²⁶² Freudenthal, ‘De niveaus in het leerproces en de heterogene leergroep, met het oog op de middenschool’, *Gesamtschule Conferentie* (1973) 88-99, aldaar 88.