Topološki solitoni i čestice (II)

Barioni kao solitonske konfiguracije mezonskih polja u nekim suvremenim teorijama jakih interakcija

Dubravko Klabučar, Zagreb

Ovo je drugi dio članka o vezi topoloških solitona i čestica. Za njegovo razumijevanje potrebno je podsjetiti se na prvi dio članka. U njemu smo upoznali osnovne pojmove o topološkim solitonima na primjeru solitona u Sine-Gordonovom sistemu, i to uz dragocjenu pomoć mehaničkog modela Sine-Gordonovog sistema, koji je koliko ilustrativan toliko i lagan za izradu. Osobito je važan pojam topološkog indeksa zorno dat kao "broj namotaja Sine-Gordonovog polja", ali i sam općeniti pojam polja. Dakle, zahvaljujući kako apstraktnim konceptima koje smo tamo uveli, tako i zornom uvidu koji smo stekli kroz igru s tim jednostavnim mehaničkim modelom, konačno možemo za barem jedan dio fizike elementarnih čestica naznačiti njegovu povezanost s topološkim solitonima. Ima i drugih područja povezanih s njima, kao na primjer teorija magnetskih monopola ili instantonska fizika, ali njih u ovakvom popularnom članku ne možemo dotaknuti. Područje fizike elementarnih čestica čijom ćemo se vezom s topološkim solitonima pozabaviti sada, zove se hadronska fizika. Ona proučava čestice koje (uz ostale interakcije) posjeduju i takozvano **jako međudjelovanje**, a te se čestice nazivaju **hadroni** (grčki: *hadros = jak*). Hadroni se općenito dijele na **barione** i **mezone**. U barione spadaju na primjer protoni i neutroni, ali i mnoštvo čestica egzotičnih imena kao Sigma, Ksi, Lambda, Omega$^-$, Delta ... Najpoznatiji mezoni su pioni (triplet $\pi^{\pm}, \pi^0$), kaoni (K^+, K^0 i njihove antičestice), triplet ro-mezona ($\varrho^{\pm}, \varrho^0$), i mnogi drugi. Na ovom mjestu ne možemo govoriti mnogo o njihovim osobinama, nego ćemo samo istaći da po tome kako nastaju i nestaju, mezoni pokazuju mnoge sličnosti s običnim valovima, a barioni s topološkim solitonima: mezone možemo stvoriti već samim "pumpanjem" adekvatne količine energije u hadronski sistem tako da ga dovoljno pobudimo, pa će on zračiti mezone vrlo slično kao i fotone, kvante elektromagnetskog polja. Isto tako, oni mogu lako i nestati, ili točnije, apsorbirati se negdje kao i elektromagnetsko polje. Naravno, u fizici elementarnih čestica imamo posla s kvantnom mehanikom i kvantnom teorijom polja, ali ako želimo analogiju iz klasične fizike, stvaranje mezona možemo usporediti sa stvaranjem običnih klasičnih valova kao kad zatalasamo neki medij jednostavnim njegovim pokretanjem – recimo bacanjem kamena u vodu, a nestajanje im u principu nije previše različito od nestanka običnih klasičnih valova čija se energija na kraju rasipa i apsorbira u okolinu. Nasuprot tome, barioni ne mogu samo tako niti nastati niti nestati. Oni se mogu doduše u raznim procesima pretvarati jedni u druge, ali **ukupni** *barionski broj B* uvijek ostaje sačuvan. Doduše, s vremenom se Sigma, Ksi, Lambda ili neki drugi barion zbog tzv. slabih interakcija čak i moraju pretvarati u najlakše barione – naime obične protone ili neutrone – međutim, to su opet barioni, pa se ukupan broj bariona time ne mijenja.

Barionski broj je sačuvan kao i topološki indeks Sine-Gordonovih solitona. Ako želimo usporediti barione s nekim klasičnim objektom, najsličniji su im topološki solitoni. Kad u nekom procesu u fizici elementarnih čestica stvorimo novi, dodatni barion, to je uvijek popraćeno stvaranjem antibariona koji ima individualni barionski broj $B = -1$. I obratno, ako barion ($B = +1$) nestane, to se događa samo putem anihilacije (poništavanja) s nekim antibarionom ($B = -1$). To je posve analogno sa stvaranjem odnosno poništavanjem topoloških solitona i antisolitona, tako da je neto topološki indeks nepromijenjen. Ovdje ponovo molim čitatelja da se poigra sa svojim jednostavnim mehaničkim modelom Sine-Gordonovog polja koji može za čas napraviti prema uputama iz prvog dijela članka. Prevrćući rukom štipaljke na užetu možete stvarati i opet poništavati parove "zavijutaka" i "anti-zavijutaka", ali nikako ne možete promijeniti njihov neto broj (broj jednih minus broj drugih) koji ste fiksirali rubnim uvjetima na krajevima užeta.

Sličnosti bariona s klasičnim topološkim solitonima dakle postoje – ali da li se u hadronskim teorijama topološki solitoni uopće javljaju? Prije svega moramo naglasiti da ni barioni ni mezoni nizu elementarne čestice u pravom smislu te riječi, jer imaju podstrukturu: zapravo se sastoje od fundamentalnijih konstituenata (sastojaka), kvarkova i gluona, kojima (barem zasad) nije otkrivena podstruktura i koji bi zato mogli biti uistinu elementarne čestice. Međutim, interakcije kvarkova i gluona diktira fundamentalna teorija nazvana kvantna termodinamika (skraćeno QCD), i te interakcije su takve da kvarkove i gluone nikad ne možemo izolirati kao slobodne čestice. Direktno uvijek imamo posla s njihovim vezanim stanjima, a to su upravo barioni (tri kvarka vezana interakcijama koje prenose gluoni) i mezoni (kvark i antikvark vezani interakcijama koje prenose gluoni). U mnogim situacijama kvark-gluonska podstruktura hadrona uopće ne dolazi do izražaja, pa u tim slučajevima mezone i barione možemo efektivno tretirati kao elementarne čestice čijim ponašanjem upravljaju neke efektivne teorije u kojima se pojavljuju samo mezoni i/ili barioni. (To možemo usporediti sa situacijom u, npr., atomskoj ili molekularnoj fizici, gdje nam je u odličnoj aproksimaciji uglavnom nebitno to da se jezgra zapravo sastoji od protona i neutrona, a da nije točkasti elementarni objekt).

Jedna uspješna efektivna teorija najlakših mezona, piona, je tzv. nelinearni σ-model. O njemu su napisane cijele knjige, ali nas zanima samo eventualno postojanje topoloških solitona. Iz razloga koje smo uočili kod Sine-Gordonove teorije, razmatranje statičkih konfiguracija dovoljno je da se ustanovi postoje li oni ili ne, pa ćemo se ograničiti na vremenski neovisan slučaj. Nadalje, energetski funkcional E ćemo zapisati pomoću polja $U(\vec{x})$ koje ovisi o pionskom polju na sličan način kao polje $v(x) = e^{i\phi(x)}$ o Sine-Gordonovom polju $\phi(x)$. Međutim, postoje tri piona: pozitivni $\pi^+(\vec{x})$, negativni $\pi^-(\vec{x})$, te neutralni $\pi^0(\vec{x})$, pa $U(\vec{x})$ mora zavisiti o tri parametra. Polje $U(\vec{x})$ je 2×2 matrica iz grupe SU(2):

$$U(\vec{x}) = e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}(\vec{x})} = \exp\left[i\sum_{a=1}^{3}\tau_a\pi_a(\vec{x})\right], \qquad (1)$$

baš kao što je $v(x)$ element grupe U(1). Skalarni produkt $\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}$ koji se ovdje pojavljuje je standardan, iako vektori koji u njega ulaze to nisu. Komponente vektora $\vec{\tau}$ su poznate 2×2 Paulijeve matrice τ_1, τ_2 i τ_3:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ako se Paulijevim matricama kao četvrta pridruži jedinična 2×2 matrica $\mathbf{1}$, onda bilo koju drugu 2×2-matricu možemo napisati kao zbroj četiri nezavisne matrice, ako je u tom zbroju svaka od njih pomnožena odgovarajućim parametrom.

Komponente vektora $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ su koordinatno ovisni parametri koji određuju SU(2)-polje $U(\vec{x})$ u (1), pa ih možemo smatrati nekakvim generaliziranim "koordinatama" u SU(2) grupnom prostoru, koji se u žargonu često naziva i "unutrašnji" ili "interni" prostor. Kao što je i naznačeno, ti parametri su ovisni o koordinatama $\vec{x}$ običnog koordinatnog prostora. S nabijenim i neutralnim fizikalnim pionskim poljima ti su parametri povezani ovako:

$$\pi_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pi^+ + \pi^-\right), \qquad \pi_2 \equiv \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\pi^+ - \pi^-\right), \qquad \pi_3 \equiv \pi^0. \tag{3}$$

U daljnjem sadržaju članka bit će nam važna činjenica da je prostor naših SU(2)-matrica $U(\vec{x})$ trodimenzionalna hipersfera, koju označavamo sa S_3. Napravimo stoga malu digresiju da bismo to pokazali onima koji se žele malo pozabaviti računom s Paulijevim matricama i koji, što je još važnije, znaju razviti u red eksponencijalnu, sinusnu i kosinusnu funkciju. Ako iskoristimo sljedeći identitet za Paulijeve matrice (2),

$$\tau_a \tau_b = \mathbf{1}\delta_{ab} + i \sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc}\tau_c, \tag{4}$$

gdje $\delta_{ab} = 1$ ako $a = b$, ali $\delta_{ab} = 0$ ako $a \neq b$, te gdje

$$\varepsilon_{abc} = \begin{cases} 1 & \text{ako je permutacija } abc \text{ parna;} \\ -1 & \text{ako je permutacija } abc \text{ neparna;} \\ 0 & \text{ako su bar dva indeksa jednaka;} \end{cases} \tag{5}$$

lako pokažemo razvojem eksponencijale u (1) da $U(\vec{x})$ možemo pisati i kao

$$U(\vec{x}) = \mathbf{1}\cos(|\vec{\pi}|) + i\sum_{a=1}^{3} \tau_a \hat{\pi}_a \sin(|\vec{\pi}|) \equiv \mathbf{1}\phi_0(\vec{x}) + i\sum_{a=1}^{3}\tau_a\phi_a(\vec{x}). \tag{6}$$

Ovdje je $\hat{\pi} = \vec{\pi}/|\vec{\pi}|$. Lako vidimo da vrijedi

$$\varphi_0^2 + \sum_{a=1}^{3}\phi_a^2 = 1$$

(kao što i mora za SU(2) matricu $U(\vec{x})$, gdje postoji uvjet $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbf{1}$). Dakle, definirajući u (6) četvorku parametara $(\phi_0, \vec{\phi}) \equiv (\cos(|\vec{\pi}|), \hat{\pi}\sin(|\vec{\pi}|))$, vidimo da SU(2) matricu $U(\vec{x})$ možemo raspisati preko četiri parametra, ali koji zadovoljavaju jedan uvjet. Taj uvjet (7) je upravo jednadžba trodimenzionalne jedinične hipersfere. Zato je "interni prostor" našeg SU(2) polja $U(\vec{x})$ upavo trodimenzionalna hipersfera S_3.

Pokazavši ovu važnu činjenicu, vratimo se glavnoj liniji izlaganja.

Funkcional energije pionskog polja u nelinearnom σ-modelu je za statički slučaj dan sa

$$E_\sigma[U] = \int d^3x \frac{f_\pi^2}{4} \mathrm{Tr} \left(\sum_{i=1}^{3} \partial_i U^\dagger \partial_i U \right). \tag{8}$$

Ovdje nas posebno zanima varijanta σ-modela u čijem je članu $E_\sigma[U]$ dodan i takozvani kvartični član $E_4[U]$:

$$E_4[U] = \int d^3x \frac{\varepsilon^2}{4} \mathrm{Tr} \sum_{i,j=1}^{3} \left[(U^\dagger \partial_i U)(U^\dagger \partial_j U) - (U^\dagger \partial_j U)(U^\dagger \partial_i U) \right]^2. \tag{9}$$

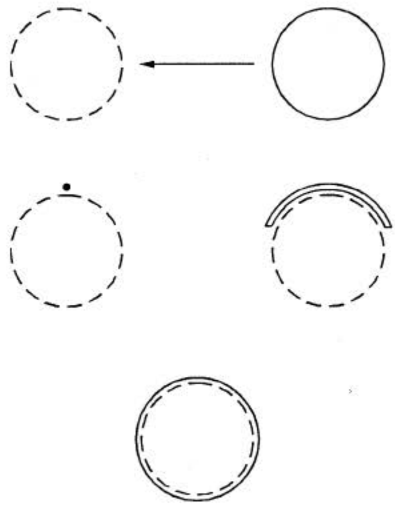
Ta varijanta σ-modela naziva se Skyrmeov model, i njegov funkcional energije je

$$E_{\mathrm{Sky}}[U] = E_\sigma[U] + E_4[U]. \tag{10}$$

Razmatranje energetskog funkcionala skalarnog polja u jednoj prostornoj (i moguće jednoj vremenskoj) dimenziji dovelo nas je do topoloških solitona. Vrlo slično razmatranje energetskog funkcionala u Skyrmeovoj varijanti σ-modela, uz pažljivo uvažavanje razlika, dovest će nas do solitona u trodimenzionalnom prostoru koje ćemo moći interpretirati kao barione.

Inače, u gornjim formulama simbol Tr znači "trag" matrice, dakle sumu njenih dijagonalnih elemenata. Ali, takvi detalji nam za naše razmatranje sad nisu bitni (kao ni značenje "pionske konstante raspada" f_π u E_σ ili konstante ε u E_4). Ono što je bitno uočiti kod energetskih funkcionala (8–10) je ovisnost integranda o derivacijama. Očito, da $E_{\mathrm{Sky}}[U]$ ne bi divergirala, rješenje $U(\vec{x})$ mora u beskonačnosti težiti prema konstanti, tj. prema nekoj vakuumskoj konfiguraciji. To može biti bilo koja konstantna SU(2) matrica, pa moguće vakuumske konfiguracije čine **kontinuiran skup** čiji su elementi povezani SU(2) transformacijama. To je dakle vrlo različito u odnosu na jednu dimenziju, kad smo dobili topološke solitone uz uvjet da postoje diskretna vakuumska stanja. (Npr. kod Sine-Gordonovog sistema, diskretni vakuumi su bili povezani translacijama za 2π puta cijeli broj.) U tadašnjem slučaju su različiti topološki sektori bili klasificirani pomoću razlika rubnih uvjeta u dvije različite točke u prostornoj beskonačnosti, $x = \pm\infty$. Ali sada, kod Skyrmeove teorije u tri prostorne dimenzije, sve vakuumske konfiguracije možemo povezati **kontinuiranim** SU(2) rotacijama, pa su dakle one sve ekvivalentne u topološkom smislu. Međutim, očito moramo u svakoj točki $\vec{x}$ u beskonačnosti odabrati **jednu određenu vrijednost** za $U(|\vec{x}| \to \infty)$, jer inače u beskonačnosti dobivamo neiščezavajuće derivacije, pa bi $E_{\mathrm{Sky}}[U]$ divergirao. Dakle, moramo spontano narušiti vakuumsku simetriju. Konvencionalni izbor za fizički vakuum je jedinična 2×2 matrica $U(|\vec{x}| \to \infty) = \mathbf{1}$, jer to odgovara nultom pionskom polju $\pi_a = 0$, $\forall a$.

Neovisno o tom konkretnom izboru, činjenica da polje $U(\vec{x})$ koje živi na trodimenzionalnom koordinatnom prostoru $\mathbf{R}^3$, ima istu vrijednost za sve točke $\vec{x}$ u prostornoj beskonačnosti, predstavlja ključ za topološku klasifikaciju u tri prostorne dimenzije. Naime, to znači da su sve točke u beskonačnosti fizikalnog prostora ekvivalentne što se tiče preslikavanja $U(\vec{x})$. Za njega to kao da je jedna jedina točka. To je primjer nečega što zovemo **kompaktifikacija**: znači uzeli smo sve točke u beskonačnosti trodimenzionalnog koordinatnog prostora $\mathbf{R}^3$ i skupili ih u jednu točku, napravivši time trodimenzionalnu **hipersferu** $S_3^{(\mathrm{koor})}$. Kažemo da je $\mathbf{R}^3$ **kompaktificiran** u hipersferu S_3. Naravno zornije kompaktifikaciju možemo predočiti u nižim dimenzijama: ako sve točke u beskonačnosti dvodimenzionalne ravnine $\mathbf{R}^2$ preslikavamo u jednu točku, ta ravnina se kompaktificira u S_2, dakle u običnu (tj. dvodimenzionalnu) sferu. Kad se jednodimenzionalni brojevni pravac $\mathbf{R}$ kompaktificira u jednodimenzionalnu sferu S_1, naime kružnicu, dobijemo primjer koji možemo jednostavno nacrtati na listu papira, pa ćemo to i iskoristiti na slici 1 za vizualizaciju onog što se događa u ovdje odgovarajućoj situaciji u tri dimenzije – jer, u principu radi se o istoj stvari, ali koju u tri dimenzije ne možemo jednostavno predočiti.



Sl. 1.

Ovdje je relevantni "interni prostor", tj. prostor grupe SU(2) matrica među koje spada naše polje $U(\vec{x})$, je također hipersfera koju nazivamo $S_3^{(\mathrm{int})}$. Konfiguracija $U(\vec{x})$ je preslikavanje iz kompaktificiranog koordinatnog prostora $S_3^{(\mathrm{koor})}$ u grupni prostor $S_3^{(\mathrm{int})}$. Sad se pozivamo na slavni teorem iz topologije, po kojemu:

i) Sva nesingularna preslikavanja m-dimenzionalne sfere S_m na neku drugu sferu S_m iste dimenzije, možemo podijeliti u beskonačno, ali prebrojivo mnogo takozvanih homotopskih sektora ili klasa (grčki: *homoios = isti*). Te klase, koje sadržavaju preslikavanje istih topoloških karakteristika, možemo obilježiti elementima iz skupa cijelih brojeva $\mathbf{Z}$ koje onda nazivamo homotopskim indeksima.

ii) Preslikavanja iz neke homotopske klase mogu se kontinuirano deformirati samo u druga preslikavanja iz iste homotopske klase, tj. u preslikavanja karakterizirana istim homotopskim indeksom. Taj indeks je topološki sačuvan.

Prema tome, taj teorem jamči postojanje topoloških solitona u nelinearnom σ-modelu, i posebno u nama interesantnoj njegovoj varijanti – Skyrmeovom modelu. Važno je primijetiti da homotopska klasifikacija koja iz njega proizlazi, vrijedi općenito za bilo koju konfigiraciju polja $U(\vec{x})$ za koju energetski funkcional (8) ima konačnu vrijednost. Ekvivalentno vrijedi za polja $\vec{\pi}(\vec{x})$ i energetske funkcionale (8--10) u Skyrmeovom modelu. Nije nužno da ta konfiguracija bude solitonsko *rješenje* odgovarajućih jednadžbi tih polja koje inače proizlaze iz uvjeta minimizacije tih energetskih funkcionala. Međutim, jasno je da su *rješenja* konačne energije jedan poseban podskup svih mogućih ***konfiguracija*** konačne energije, pa ta klasifikacija, kao i postojanje topološkog indeksa, nužno vrijedi i za njih.

Teorem smo samo prepričali bez dokaza ali ćemo ga, prije nego što nastavimo prema solitonima Skyrmeovog modela, učiniti intuitivno plauzibilnim (prihvatljivim) razmatrajući preslikavanje $S_1 \longrightarrow S_1$, kao na slici 1(a). Neka je prva od tih jediničnih kružnica dana s kutom α, a druga s β. Preslikavanja su dana kontinuiranim funkcijama $\beta_i(\alpha)$. Pogledajmo, na primjer jednostavnu funkciju

$$\beta_0(\alpha) = 0, \qquad \forall\alpha, \tag{11}$$

koja je prikazana na slici 1 (b), i koja je očito primjer jednostavnog preslikavanja jer se cijela prva kružnica preslikava u jednu jedinu točku druge kružnice, te funkciju

$$\beta_0'(\alpha) = \begin{cases} t\alpha, & \text{ako } 0 \leq \alpha < \pi; \\ t(2\pi - \alpha), & \text{ako } \pi \leq \alpha < 2\pi; \end{cases} \tag{12}$$

gdje je t neki realni parametar između 0 i 1. Preslikavanje $\beta_0'(\alpha)$ je skicirano na slici 1 (c). To očito nije jednostavno preslikavanje. Međutim, također je očito da neprekidnim smanjivanjem parametra t u nulu, preslikavanje $\beta_0'(\alpha)$ može biti neprekidno deformirano u jednostavno preslikavanje $\beta_0'(\alpha)$, pa ta dva preslikavanja spadaju u istu homotopsku klasu. Za razliku od toga, preslikavanje

$$\beta_1(\alpha) = \alpha, \qquad \forall\alpha, \tag{13}$$

ne može biti kontinuirano deformirano u $\beta_0(\alpha)$ i $\beta_0'(\alpha)$. To je intuitivno jasno iz slike 1 (d), koja se očigledno ne može deformirati u (b) ili (c) bez presijecanja kružnice β u jednoj točki. Razlog je u tome što je prva kružnica namotana jednom oko druge, dok kod prvog preslikavanja efektivno nije namotana nijednom. Zato $\beta_0(\beta_0')$ i β_1 imaju drugačiji **indeks namotaja**, tj. **homotopski indeks** odnosno **topološki broj**, i pripadaju različitim homotopskim klasama. Taj indeks je očito $q = 0$ za preslikavanja $\beta_0(\alpha)$ iz (6) i $\beta_0'(\alpha)$ iz (7), te $q = 1$ za preslikavanje $\beta_1(\alpha)$ iz (8). Kao najjednostavniji primjer preslikavanja koji pripada klasi s općenitim homotopskim indeksom $q = n \in \mathbf{Z}$, možemo uzeti

$$\beta_n(\alpha) = n\alpha, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \tag{14}$$

Topološki ili homotopski indeks ili broj namotaja očito možemo dati kao

$$q = \frac{1}{A_1}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{A_1}\int_{\beta(0)}^{\beta(2\pi)} \mathrm{d}\beta \equiv \frac{1}{A_1}\int \mathrm{d}S_1^{(\mathrm{int})}, \tag{15}$$

gdje A_1 označava "površinu" S_1 jedinične "sfere u jednoj dimenziji", dakle naprosto opseg jedinične kružnice: $A_1 = 2\pi$. Posljednji integral, integral po površini sfere $S_1^{(\mathrm{int})}$ na koju β vrši preslikavanje, po definiciji se očito mora izvršiti toliko puta koliko $\beta(\alpha)$ prebriše $S_1^{(\mathrm{int})}$ dok α prebriše $S_1^{(\mathrm{koor})}$ jedanput.

Ponovo naglašavamo da ovo iznošenje posebnih primjera naravno ne sačinjava dokaz gore spomenutog fundamentalnog teorema i formule (15). Kao što smo već istakli gore, na ovom nivou ga ne možemo dati, ali ovi jednostavni konkretni primjeri dobro ilustriraju njegovu primjenu na preslikavanje $S_1^{(\mathrm{koor})} \longrightarrow S_1^{(\mathrm{int})}$, dakle s kružnice na kružnicu. Iako je teže vizualizirati, analogno se događa i u višim dimenzijama: cijeli broj koji klasificira homotopske klase preslikavanja $S_2 \longrightarrow S_2$, dakle sa sfere na sferu, je opet generalizirani broj namotaja, dakle broj koji kaže koliko je puta jedna sfera bila omotana oko druge,

$$q = \frac{1}{A_2}\int \mathrm{d}S_2^{(\mathrm{int})}, \qquad A_2 = \text{površina jedinične sfere} = 4\pi. \tag{16}$$

Sasvim analogno je i za preslikavanje $S_3 \longrightarrow S_3$, dakle s trodimenzionalne hipersfere u drugu trodimenzionalnu hipersferu. To je naravno slučaj koji nam je sad najinteresantniji jer je relevantan za postojanje topoloških solitona u sigma-modelu odnosno Skyrmeovom modelu, gdje polje $U(\vec{x})$ vrši preslikavanje s **kompaktificiranog** koordinatnog prostora $\mathbf{R}^3$, dakle hipersfere $S_3^{(\mathrm{koor})}$, u prostor grupe SU(2), dakle u hipersferu $S_3^{(\mathrm{int})}$. Prema citiranom teoremu, za takvo preslikavanje netrivijalna homotopija jamči postojanje topoloških solitona. Njihove različite, disjunktne homotopske klase karakterizira topološki broj

$$q = \text{broj namotaja} = B = \frac{1}{A_3}\int \mathrm{d}S^{(\mathrm{int})} \tag{17}$$

gdje je $A_3 = 2\pi^2$ površina jedinične trodimenzionalne hipersfere S_3. Dakle, analogno prijašnjim jednostavnijim primjerima, topološki indeks kaže koliko puta SU(2)-matrično polje $U(\vec{x})$ prekrije svoj grupni prostor $S_3^{(\mathrm{int})}$ dok ono ispuni kompaktificirani koordinatni prostor $S_3^{(\mathrm{koor})}$.

Ono što je u ovom slučaju posebno, jest to da je taj topološki indeks upravo barionski broj B. Zapravo, Skyrme je već u svojim radovima oko 1960. godine to utvrdio, ali je to ipak bila manje-više spekulacija, zasnovana naprosto na upadljivim sličnostima između bariona karakteriziranih sačuvanim barionskim brojem i topoloških solitona karakteriziranih također apsolutno sačuvanim topološkim, homotopskim indeksom, dakle na sličnostima na koje smo ukazali na početku ovog članka. Međutim, zbog nedostatka sustavnog dokaza, ta se ideja – da su topološki solitoni mezonskih polja koji se javljaju u σ-modelu zaista barioni – ipak dugo smatrala tek matematičkom rijetkošću i zanimljivom spekulacijom. Točnije, tako je ostalo do početka osamdesetih godina, kada su istaknuti fizičari Balachandran i Witten, polazeći od kvantne kromodinamike kao fundamentalne teorije jakih interakcija, konačno uspjeli dokazati da je Skyrmeova neobična pretpostavka zaista točna. Ovdje se naravno ne možemo doticati te izvanredno teške materije; ono što nam je važno znati je to da je njihov dokaz, oživjevši Skyrmeov model i davši mu solidnu osnovu u kvantnoj kromodinamici, otvorio cijelo novo potpodručje u hadronskoj fizici. Naveliko su se stala proučavati solitonska rješenja različitih verzija σ-modela. Zbog Skyrmeovog pionirskog rada takva su rješenja, kojima je topološki indeks upravo barionski broj, dobila naziv Skyrmioni. Njihova važnost za hadronsku fenomenologiju naglašava i to, da Wittenova analiza implicira da se fundamentalna kvantna kromodinamika (dakle teorija kvarkova i gluona) u limesu vrlo niskih energija, te u zamišljenom limesu velikog broja kvarkovskih vrsta (tzv. "boja"), svodi na neku efektivnu teoriju koja sadrži isključivo mezone. Ta mezonska teorija, odnosno odgovarajuće jednadžbe gibanja za mezonska polja, ostala je doduše nepoznata i vjerojatno je izvanredno komplicirana, ali je Wittenov rezultat implicirao da joj je upravo σ-model najniža aproksimacija. Bariona tu međutim eksplicite uopće nema, uključujući tu i protone i neutrone od kojih se sastoji daleko najveći dio svemira! Da li je to znak da nešto nije u redu bilo s fundamentalnom teorijom jakih međudjelovanja, bilo s analizama Balachandrana, Wittena i suradnika? Srećom ne, jer se prema svemu što smo ovdje iznjeli, barioni očito javljaju kao topološke solitonske konfiguracije mezonskih polja u teorijama koje su efektivni niskoenergetski limes fundamentalne teorije jakih interakcija! I zaista, proučavanje solitonskih rješenja u različitim vezijama σ-modela pokazala su da ti solitoni dobro reproduciraju mase, magnetske momente, i razna druga statička i dinamička svojstva protona, neutrona, ali i mnogih drugih bariona.