Facultad de Ciencias

EL TEOREMA DE RIEMANN-HURWITZ

The Riemann-Hurwitz Theorem

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Pablo Andrés Arnaiz
Director: Luis Felipe Tabera Alonso

Junio 2019

Índice general

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Luis Felipe su dedicación, implicación e inestimable ayuda en este trabajo. También me gustaría dar las gracias a muchos de mis profesores a lo largo de estos intensos cinco años, pero en especial a Cristina Pérez, quien me inculcó su pasión por las matemáticas y me mostró su excelencia tanto dentro como fuera del aula. Agradecer a Mohamed Saïdi, profesor de la universidad de Exeter, que me introdujera en el campo de la geometría algebraica, motivo por el cual escogí este como el tema de mi trabajo de fin de grado.

Gracias a mi familia y a Olga por conocerme y saber lo que necesito mejor que yo, por ofrecerme todas las ventajas y facilidades que han estado en su mano para que yo pudiera estar hoy aquí. A Tom, por haber aportado la luz que este oscuro año necesitaba y haber aguantado las constantes quejas de un estudiante de último curso de física y matemáticas.

Por último y muy especialmente, a todos y cada uno de mis once compañeros del doble grado, quienes han constituido mi segunda familia durante estos cinco años. El éxito de uno es el de todos, y precisamente, la sana competitividad y el compañerismo han sido las razones por las cuales los doce seguimos todavía subidos en el mismo tren.

Dedicado a Tom

Resumen

En este trabajo se estudia el teorema o fórmula de Riemann-Hurwitz desde dos puntos de vista. Por un lado se define la noción de género de una curva algebraica en el plano proyectivo a partir de la desigualdad de Riemann, que relaciona el grado de cualquier divisor D del cuerpo de funciones racionales de la curva con la dimensión de su espacio $L(D)$ correspondiente. El teorema de Riemann-Hurwitz relaciona los géneros de dos curvas proyectivas planas no singulares entre las que existe un morfismo, a través de sus índices de ramificación y su grado. Paralelamente, se estudian las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann y, haciendo uso de la definición topológica de género, se ha demostrado el teorema de Riemann-Hurwitz utilizando los conceptos de grado e índice de ramificación de la aplicación holomorfa entre dos superficies de Riemann compactas. Finalmente se comprueba que las curvas algebraicas no singulares en el plano proyectivo complejo son superficies de Riemann y las nociones de género algebraico y topológico coinciden.

Palabras clave: Riemann-Hurwitz, género, curvas algebraicas, divisores, superficie de Riemann, recubrimiento ramificado.

Abstract

In this dissertation Riemann-Hurwitz theorem is studied from two different points of view. On the one hand, the genus of an algebraic projective plane curve is defined in terms of Riemann's inequality, which connects the degree of any divisor over the field of rational functions of the curve with the dimension of its linear space $L(D)$. Riemann-Hurwitz theorem relates the genus of two non singular plane projective curves through the degree and ramification index of the morphism bewteen both of them. On the other hand, we study the concept of ramification over holomorphic functions between Riemann surfaces, which enables the proof of the Riemann-Hurwitz theorem using the topological definition of genus. Finally, it is proved that algebraic complex projective non singular plane curves are Riemann surfaces. Furthermore, both the algebraic and topological definitions of genus are equivalent.

Key words: Riemann-Hurwitz, genus, algebraic curves, divisors, Riemann surface, ramified covering.

Capítulo 1

Introducción

A mediados del siglo XIX Bernhard Riemann comenzó a desarrollar la idea de las hoy conocidas como superficies de Riemann con el objetivo de construir de manera más sólida la teoría de las funciones analíticas de variable compleja. En su artículo *Theorie der Abel'schen Functionen* [Riem57], Riemann muestra una fórmula para calcular el género de una superficie S en términos de los puntos de ramificación y el grado de la aplicación holomorfa que define entre S y la esfera de Riemann. Este resultado fue completado por Hurwitz a finales del siglo XIX, quien extendió la fórmula a cualquier aplicación holomorfa entre dos superficies de Riemann.

El desarrollo del álgebra conmutativa a principios del siglo XX permitió expresar muchos de los conceptos ya estudiados por los geómetras en términos de estructuras algebraicas. Es así como nace la disciplina de la geometría algebraica. En particular, el teorema de Riemann-Hurwitz se reformula en términos de curvas algebraicas en el plano proyectivo, sus cuerpos de funciones racionales y el morfismo de variedades proyectivas existente entre dos curvas. A mediados del siglo XX surge el concepto de esquema, que generaliza al de variedad y con el que se escribe el lenguaje de la geometría algebraica actual.

En este trabajo se ha estudiado el teorema de Riemann-Hurwitz desde el punto de vista de la teoría de divisores en curvas algebraicas en el plano proyectivo empleando el lenguaje de variedades en lugar del de esquemas. El primer capítulo se centra en el estudio del álgebra local y los anillos de valoración discreta que permitirán expresar las propiedades de las curvas algebraicas. En el segundo capítulo se profundiza en el concepto de curva algebraica tanto en el plano afín como en el proyectivo, y se abordan los sistemas lineales de curvas y la intersección de curvas proyectivas planas, acabando con el teorema de Bézout. En el tercero se introduce la noción de divisor con el fin de demostrar la desigualdad de Riemann y definir el género algebraico de una curva proyectiva. El estudio de los divisores canónicos se culmina con la demostración del teorema de Riemann-Hurwitz. Finalmente, en el capítulo cuarto se enfoca el teorema desde el punto de vista de sus orígenes, las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann vistas como aplicaciones de recubrimiento ramificadas. La última sección del documento tiene como objetivo demostrar la equivalencia entre los dos puntos de vista.

La principal fuente bibliográfica en la interpretación algebraica es [Ful08], aunque se completó con algunos resultados de [Hart77]. Para la visión topológica se empleó un número más extenso de fuentes, aunque esencialmente se sigue la estructura de [Mir95]. Se han completado los detalles de las demostraciones que aparecen en las anteriores referencias.

Algunos de los resultados que aparecen como teoremas o lemas en este documento se plantean como ejercicios en las fuentes bibliográficas mencionadas y su demostración ha constituido parte del trabajo que he desarrollado.

El estudio del teorema que lleva el nombre de este trabajo me ha permitido culminar el grado en matemáticas aplicando muchos de los conocimientos adquiridos durante mi paso por la universidad. Los primeros capítulos hacen uso del álgebra local y conmutativa, la geometría algebraica y la proyectiva. El último capítulo incluye temas de topología general y algebraica, geometría diferencial y variable compleja.

Capítulo 2

Preliminares Algebraicos

A lo largo de esta sección y las siguientes $\mathbb{K}$ es un cuerpo de característica cero y algebraicamente cerrado, salvo que se especifique lo contrario. Denotamos por $\mathbb{K}[\bar{x}]$ al anillo de polinomios en las variables $x_1, ..., x_n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, $\mathbb{A}^n$ y $\mathbb{P}^n$ a los espacios afín y proyectivo n-dimensionales sobre $\mathbb{K}$, y $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ a los elementos de $\mathbb{K}^n$.

2.1. Conjuntos algebraicos y variedades afines

Definición 2.1. *Sea $S \subset \mathbb{K}[\bar{x}]$. Se denomina* ***conjunto algebraico afín*** *al conjunto de ceros comunes a todos los polinomios de S,*

$$V(S) = \{\bar{a} : f(\bar{a}) = 0, \forall f \in S\}.$$

Cuando $S = \{f\}$ se dice que $V(S)$ es una ***hipersuperficie*** *y la denotaremos por $V(f)$.*

Proposición 2.2. *Algunas propiedades de los conjuntos algebraicos afines:*

1. *Para cualquier $S \subset \mathbb{K}[\bar{x}]$ existe un ideal $I \subset \mathbb{K}[\bar{x}]$ de forma que $V(S) = V(I)$.*

2. *Todo conjunto algebraico afín es intersección de un número finito de hipersuperficies.*

Demostración.

1. Sea I el ideal generado por S,

$$I = \{g \in \mathbb{K}[\bar{x}] : g = \sum_{i=1}^{m} r_i f_i : r_i \in \mathbb{K}[\bar{x}], f_i \in S, m \in \mathbb{N}\}.$$

Como $S \subset I$, entonces todo cero común a polinomios de I será cero común a polinomios de S, consecuentemente $V(I) \subset V(S)$. Sea $\bar{a} \in V(S)$ y $g = \sum_{i=1}^{m} r_i f_i \in I$, por tanto $f(\bar{a}) = 0$ para todo $f \in S$, luego $g(\bar{a}) = (\sum_{i=1}^{m} r_i f_i)(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{m} r_i(\bar{a}) f_i(\bar{a}) = 0$. Como $\bar{a}$ es cero de todo polinomio de $V(I)$, entonces $\bar{a} \in V(I)$.

2. Sea H un conjunto algebraico afín e I un ideal de $\mathbb{K}[\bar{x}]$ tal que $H = V(I)$. Como $\mathbb{K}[\bar{x}]$ es un anillo noetheriano, entonces $I = (f_1, ..., f_s)$ es finitamente generado y $H = V(I) = V(f_1) \cap ... \cap V(f_s)$ es la intersección de hipersuperficies.

□

Observación 2.3. *El ideal propuesto en la proposición 2.2 no es único.*

Nótese que $V(x) = V(x^2) = \{0\}$, donde $(x), (x^2) \subset \mathbb{K}[x]$ son ideales distintos y generadores del mismo conjunto algebraico afín.

Definición 2.4. *Sea $X \subset \mathbb{K}^n$. Se denomina **ideal asociado** a X al conjunto de polinomios que se anulan en todo punto de X,*

$$I(X) = \{f \in \mathbb{K}[\bar{x}] : f(\bar{a}) = 0, \forall \bar{a} \in X\}.$$

Veamos que $I(X)$ es efectivamente un ideal. Sean $f, g \in I(X)$, entonces $(f - g)(\bar{a}) = f(\bar{a}) - g(\bar{a}) = 0$, luego $f - g \in I(X)$. Sea $r \in \mathbb{K}[\bar{x}] \Rightarrow (rf)(\bar{a}) = r(\bar{a})f(\bar{a}) = 0$.

Algunas propiedades importantes de los conjuntos algebraicos afines y de los ideales asociados a subconjuntos de $\mathbb{K}^n$ son:

- La intersección cualquiera de conjuntos algebraicos es algebraica.
- La unión finita de conjuntos algebraicos es algebraica.
- $\emptyset, \mathbb{K}^n$ son algebraicos.
- Si $I \subset J \subset \mathbb{K}[\bar{x}]$, entonces $V(J) \subset V(I)$. Si $X \subset Y \subset \mathbb{K}^n$, entonces $I(Y) \subset I(X)$.
- Si $J \subset \mathbb{K}[\bar{x}]$, entonces $J \subset I(V(J))$. Si $X \subset \mathbb{K}^n$, entonces $X \subset V(I(X))$, y se da la igualdad si X es algebraico.

Observación 2.5. *Las propiedades de los conjuntos algebraicos verifican las de una topología en términos de cerrados. Esta topología cuyos abiertos son los complementarios de los conjuntos algebraicos se denomina **topología Zariski**.*

Proposición 2.6. *La topología Zariski es menos fina que la usual de $\mathbb{K}^n$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $f \in \mathbb{K}[\bar{x}]$, entonces visto como la función polinómica $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ es continua y por tanto $V(f) = f^{-1}(\{0\})$ es cerrado en la topología usual. Sea U abierto de la topología Zariski en $\mathbb{K}^n$, por lo tanto $U = \mathbb{K}^n \backslash V(f_1, ..., f_n) = \bigcup_{i=1}^n \mathbb{K}^n \backslash V(f_i)$ con $f_i \in \mathbb{K}[\bar{x}]$, que es la unión finita de abiertos de la topología usual porque $V(f_i)$ es cerrado, por tanto U es abierto en esta topología. $\square$

Definición 2.7. *Un conjunto algebraico afín $X \subset \mathbb{K}^n$ se dice **reducible** si $X = X_1 \cup X_2$, con X_1, X_2 conjuntos algebraicos no vacíos y distintos de X. Se dice **irreducible** en caso contrario. Los conjuntos algebraicos afines irreducibles se denominan **variedades afines**.*

Proposición 2.8. *Un conjunto algebraico afín X es irreducible si y sólo si $I(X)$ es primo.*

Demostración. Supongamos que $I(X)$ no es primo. Sean $f_1, f_2 \in \mathbb{K}[\bar{x}] \backslash I(X)$ con $f_1 f_2 \in I(X)$. Entonces $X = (X \cap V(f_1)) \cup (X \cap V(f_2))$, ambos conjuntos algebraicos afines distintos del vacío y X. Por tanto, X es reducible.

Recíprocamente, supongamos que $X = X_1 \cup X_2$, con X_1, X_2 conjuntos algebraicos afines no vacíos y distintos de X. Como las contenciones $X_i \subset X$ son estrictas, entonces también lo son las relativas a sus ideales asociados y $I(X_i) \supsetneq I(X)$. Por consiguiente, existen $f_1 \in I(X_1) \backslash I(X)$, $f_2 \in I(X_2) \backslash I(X)$ con $f_1 f_2 \in I(X)$, luego $I(X)$ no es primo. $\square$

Proposición 2.9. *Sean $f, f' \in \mathbb{K}[x, y]$ sin factores en común. Entonces $V(f, f')$ es un conjunto finito de puntos.*

Demostración. Sean $f, f' \in \mathbb{K}[x,y]$ polinomios sin factores en común. Si f y f' son de grado cero en y, entonces por no tener factores comunes y ser polinomios en x, $V(f,f') = \emptyset$. De manera similar se verifica el resultado si f y f' son de grado cero en x. En el resto de los casos vamos a probar que en el ideal (f,f') existen polinomios no nulos en $\mathbb{K}[x]$ y $\mathbb{K}[y]$. Supongamos que f y f' son de grado positivo en y y escribamos $f = c_1(x)f_1(x,y)$, $f' = c_2(x)f_2(x,y)$ de modo que f_1 y f_2 sean primitivos. Sea $\mathbb{K}(x)$ el cuerpo de cocientes de $\mathbb{K}[x]$. Como f_1 y f_2 son primitivos en $\mathbb{K}[x][y]$, entonces todo factor irreducible de f_1 y f_2 en $\mathbb{K}[x][y]$ será también irreducible en $K(x)[y]$ por el lema de Gauss. Como $\mathbb{K}(x)[y]$ es un dominio de ideales principales y f_1 y f_2 no tienen factores irreducibles en común en $\mathbb{K}(x)[y]$, entonces su máximo común divisor es la unidad y por la identidad de Bézout, existirán $g, g' \in \mathbb{K}(x)[y]$ tales que $f_1g + f_2g' = 1$. Por ser $\mathbb{K}(x)$ el cuerpo de cocientes de $\mathbb{K}[x]$, existirá $h \in \mathbb{K}[x]$ no nulo tal que $hg = s$ y $hg' = s'$ con $s, s' \in \mathbb{K}[x]$, y por consiguiente $c_2fs + c_1f's' = hc_1c_2$, donde $h, c_1, c_2 \in \mathbb{K}[x]$ y $s, s' \in \mathbb{K}[x,y]$. Sea $(a,b) \in V(f,f')$, entonces $h(a)c_1(a)c_2(a) = c_2(a)f(a,b)s(a,b) + c_1(a)f'(a,b)s'(a,b) = 0$. Como hc_1c_2 es un polinomio univariado y $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, hc_1c_2 tiene un número finito de raíces, luego sólo existe un número finito de posibles valores para la primera componente de (a,b). Repitiendo el argumento pero analizando los polinomios en $\mathbb{K}[y][x]$ se deduce que sólo hay un número finito de posibles valores para la segunda componente de (a,b), con lo que la cantidad de elementos en $V(f,f')$ es finita. □

Corolario 2.10. *Sea $f \in \mathbb{K}[x,y]$ un polinomio irreducible de modo que $V(f)$ tenga cardinal infinito, entonces $I(V(f)) = (f)$ y $V(f)$ es variedad afín.*

Demostración. Si $g \in I(V(f))$, entonces $V(f,g)$ tiene cardinal infinito y por la proposición anterior, como f es irreducible, entonces f divide a g, es decir $g \in (f)$. Si $h \in (f)$, entonces todo cero de f es cero de h, luego $h \in I(V(f))$, por lo que $I(V(f)) = (f)$. Como f es irreducible y $\mathbb{K}[x,y]$ es DFU, entonces $I(V(F))$ es primo, luego $V(f)$ es irreducible. □

Ejemplo 2.11. *Probar que $X = V(y^2 - x^3 - ax - b)$ es variedad afín para todo $a, b \in \mathbb{K}$.*

Como el cuerpo $\mathbb{K}$ es de característica 0, entonces X tiene cardinal infinito, con lo que basta probar que el polinomio $f(x,y) = y^2 - x^3 - ax - b$ es irreducible en $\mathbb{K}[x,y]$. Visto como polinomio en $\mathbb{K}[x][y]$, de ser reducible, el lema de Gauss garantiza una descomposición de la forma $f(x,y) = (y - h(x))(y - g(x)) = y^2 - (h(x) + g(x))y + h(x)g(x)$, luego $h(x) = -g(x)$. Sin embargo, es imposible que $x^3 + ax + b = -h(x)g(x) = h^2(x)$ porque el término a la derecha tiene grado par y el de la izquierda impar.

2.2. Anillos locales y de valoración discreta

En esta sección $V \subset \mathbb{A}^n$ es una variedad afín.

Definición 2.12. *Se denomina **anillo de coordenadas** de V al cociente $\Gamma(V) = \mathbb{K}[\bar{x}]/I(V)$, que se trata de un dominio de integridad, dado que $I(V)$ es primo. El cuerpo de cocientes de $\Gamma(V)$ recibe el nombre de **cuerpo de funciones racionales** $\mathbb{K}(V)$*

$$\mathbb{K}(V) = \left\{ \varphi = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} : \bar{a}, \bar{b} \in \Gamma(V), \bar{b} \neq 0 \right\}.$$

*Los elementos de $\mathbb{K}(V)$ se denominan **funciones racionales**. Se dice que $\varphi \in \mathbb{K}[\bar{x}]$ está definida en $P \in V$ si admite una representación $\varphi = \bar{a}/\bar{b}$ con $\bar{b}(P) \neq 0$. Los puntos en los que φ no está definida se llaman **Polos**.*

Nótese que la representación de una función racional como cociente de elementos de $\Gamma(V)$ no es única, en general. Consideremos dos representaciones $\varphi = \bar{a}/\bar{b} = \bar{a}'/\bar{b}'$, luego $\bar{a}'\bar{b} = \bar{a}\bar{b}' \Rightarrow a'b - ab' \in I(V) \Rightarrow a'(P)b(P) - a(P)b'(P) = 0$. Con esto se prueba que el valor de una función racional en los puntos donde está definida no depende de la representación.

Proposición 2.13. *El conjunto de polos de una función racional es algebraico.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathbb{K}(V)$ y $\varphi = \bar{a}/\bar{b}$ una representación de φ. El conjunto $V(b)$ contiene a todos los ceros del representante de $\bar{b}$. Como un polo es cero del denominador de cualquier representación, entonces todo polo pertenece al conjunto

$$\bigcap_{\varphi=\bar{a}/\bar{b}} V(b).$$

Recíprocamente, todo elemento del conjunto anterior es cero común de todos los representantes de los posibles denominadores de φ, por lo tanto un polo. El conjunto anterior es el conjunto de polos y la intersección de conjuntos algebraicos, luego algebraico. $\square$

Ejemplo 2.14. *Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$ y $V = V(z - xy)$. Probar que V es variedad afín y que la función racional $\varphi = \bar{z}/\bar{x}$ no tiene polos en V.*

El conjunto V es una superficie que se puede ver como una silla de montar y se trata de una variedad afín dado que que el polinomio $f(x, y, z) = z - xy \in \mathbb{R}[x, y, z]$ es de grado uno visto en $\mathbb{R}[x, y][z]$, luego en caso de ser reducible se descompondría de la forma $f(x, y, z) = (z - g(x, y))h(x, y)$, con g y h polinomios no constantes en $\mathbb{R}[x, y]$. Esta descomposición es clara, e impone que $h(x, y) = 1$, por lo tanto, $f(x, y, z)$ es irreducible y V variedad afín. Como $\bar{z} - \bar{x}\bar{y} = 0$, entonces $\varphi = \bar{x}\bar{y}/\bar{x} = \bar{y}$ y no tiene ningún polo en V.

Definición 2.15. *Sea $P \in V$. Se denomina **anillo local de V en P** al conjunto*

$$\mathcal{O}_P(V) = \{\varphi \in \mathbb{K}(V) : \varphi \text{ está definida en } P\}.$$

Observación 2.16. *$\mathcal{O}_P(V)$ es un subanillo de $\mathbb{K}(V)$ que contiene a $\Gamma(V)$.*

Sean $\varphi, \varphi' \in \mathcal{O}_P(V)$, entonces existen representaciones $\varphi = \bar{a}/\bar{b}, \varphi' = \bar{a}'/\bar{b}'$, tales que $\bar{b}(P), \bar{b}'(P)$ no nulos, luego $(\varphi - \varphi')(P) = (\bar{a}(P)\bar{b}'(P) - \bar{a}'(P)\bar{b}(P))/(\bar{b}(P)\bar{b}'(P))$ está definida y $\varphi - \varphi' \in \mathcal{O}_P(V)$. Además, $(\varphi\varphi')(P) = \bar{a}(P)\bar{a}'(P)/(\bar{b}(P)\bar{b}'(P))$ está definida, luego $\varphi\varphi' \in \mathcal{O}_P(V)$. Claramente, si $\bar{a} \in \Gamma(V), \bar{a} = \bar{a}/1 \in \mathbb{K}(V)$ con $1(P) \neq 0 \Rightarrow \bar{a} \in \mathcal{O}_P(V)$.

Proposición 2.17. *$\mathcal{O}_P(V)$ es un dominio de integridad noetheriano.*

Demostración. Como $\mathbb{K}(V)$ es el cuerpo de cocientes de $\Gamma(V)$, que es dominio de integridad, entonces $\mathbb{K}(V)$ y cualquier subanillo son dominios, en particular $\mathcal{O}_P(V)$.

Sea I un ideal de $\mathcal{O}_P(V)$, como $\Gamma(V)$ es una $\mathbb{K}-$álgebra finitamente generada, entonces $I \cap \Gamma(V)$ es un ideal finitamente generado de $\Gamma(V)$ y existen $\bar{f}_1, ..., \bar{f}_s \in \Gamma(V)$ generadores de $I \cap \Gamma(V)$. Si $\varphi \in \mathcal{O}_P(V)$, entonces $\varphi = \bar{a}/\bar{b}$ con $\bar{a}, \bar{b} \in \Gamma(V)$ y $\bar{b}(P) \neq 0$, de modo que $\bar{b}\varphi \in I \cap \Gamma(V)$. Consecuentemente, existen $\bar{g}_1, .., \bar{g}_s \in \Gamma(V)$ tales que $\bar{b}\varphi = \bar{g}_1\bar{f}_1 + ... + \bar{g}_s\bar{f}_s$, luego $\varphi = \frac{\bar{g}_1}{\bar{b}}\bar{f}_1 + ... + \frac{\bar{g}_s}{\bar{b}}\bar{f}_s$, de lo que se deduce que $I = (\bar{f}_1, ..., \bar{f}_s)$ y $\mathcal{O}_P(V)$ es noetheriano. $\square$

Proposición 2.18. *Sea R un anillo y R^* su conjunto de unidades. Son equivalentes:*

1. *$R - R^*$ es un ideal.*

2. *R posee un único ideal maximal que contiene a todo ideal propio de R.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$: Si $R - R^*$ es ideal, entonces debe ser maximal, porque cualquier otro ideal que lo contenga deberá incluir alguna unidad, por tanto es R. Todo ideal distinto de R no tiene unidades, por lo que está contenido en $R - R^*$.

$2 \Rightarrow 1$: Sea $\mathfrak{m}$ el ideal maximal que contiene a cualquier ideal propio de R. Como para todo $x \in R - R^*, (x)$ es un ideal propio, dado que no es unidad, entonces $(x) \subset \mathfrak{m}$, por tanto $R - R^* \subset \mathfrak{m}$. Por otro lado, como $\mathfrak{m}$ no puede tener unidades $\mathfrak{m} \subset R - R^*$ y se da la igualdad $\mathfrak{m} = R - R^*$.

□

Definición 2.19. *Un anillo que cumpla cualquiera de las dos condiciones anteriores se dice que es un* ***anillo local.***

Ejemplo 2.20. *Probar que $\mathcal{O}_P(V)$ es, como cabría esperar, un anillo local.*

Veamos que el conjunto de unidades de $\mathcal{O}_P(V)$ son las funciones que no se anulan en P y que el conjunto de funciones que sí se anulan en P forman un ideal.

Sea $\varphi = \bar{a}/\bar{b} \in \mathcal{O}_P(V)$ que no se anule en P, luego $\bar{a}(P), \bar{b}(P) \neq 0$. Podemos considerar $\tau = \bar{b}/\bar{a} \in \mathcal{O}_P(V)$, y además $\varphi\tau = 1$, luego φ es unidad. Recíprocamente, si φ es unidad, existe $\varphi^{-1} = \bar{a}'/\bar{b}' \in \mathcal{O}_P(V)$, luego $\bar{a}\bar{a}'/\bar{b}\bar{b}' = 1$ por lo que $\bar{a}(P) \neq 0$.

Sean $\phi = \bar{f}/\bar{g}, \phi' = \bar{f}'/\bar{g}' \in \mathcal{O}_P(V)$ que se anulen en P, luego $\bar{f}(P) = 0$ y $\bar{f}'(P) = 0 \Rightarrow (\phi - \phi')(P) = (\bar{f}(P)\bar{g}'(P) - \bar{f}'(P)\bar{g}(P))/(\bar{g}(P)\bar{g}'(P)) = 0$. Si $\gamma = \bar{h}/\bar{r} \in \mathcal{O}_P(V)$, entonces claramente $(\gamma\phi)(P) = \bar{f}(P)\bar{h}(P)/(\bar{g}(P)\bar{r}(P)) = 0$, y el conjunto de funciones que se anulan en P forman un ideal (el ideal maximal).

Proposición 2.21. *Sea R un dominio de integridad que no sea cuerpo. Son equivalentes:*

1. *R es local, noetheriano y su ideal maximal $\mathfrak{m}$ es principal.*

2. *Existe un elemento irreducible $t \in R$ de forma que si $a \in R$ no nulo, entonces $a = ut^n$, donde u es unidad de R y n entero no negativo; esta expresión es única.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$: $\mathfrak{m}$ es principal y primo, veamos que se puede expresar como $\mathfrak{m} = (t)$ con $t \in R$ irreducible. Si $t = sr$ con $s, r \in R$, entonces podemos suponer que $s \in \mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m} = (s)$, luego t y s son asociados y t es irreducible. Sea $0 \neq a \in R$. Si a es unidad, $a = at^0$ y hemos acabado. Si a no es unidad, entonces $a \in \mathfrak{m}$ y podemos expresar $a = a_1t$, con $a_1 \in R$. Si a_1 es unidad hemos acabado, y si no lo es $a_1 \in \mathfrak{m}$, luego $a_1 = a_2t$. Continuamos este procedimiento, que en el caso de resultar finito, se llega a la expresión $a = a_nt^n$ con a_n unidad y queda demostrado. Si, por el contrario, el proceso es infinito, se obtiene la siguiente cadena de ideales:

$$(a) \subset (a_1) \subset (a_2) \subset ... \subset (a_n) \subset ...$$

Como R es noetheriano, esta cadena se estabiliza, de forma que $(a_s) = (a_{s+1})$ a partir de un cierto s. Por lo tanto, $a_{s+1} = a_sv$ con v unidad de R y $a_s = a_{s+1}t$, con lo que $vt = 1$ y t es unidad, absurdo. Por consiguiente, el proceso anterior es finito y en algún momento $a_n = a_{n+1}t$ con a_{n+1} unidad, de modo que $a = bt^n$. Veamos la unicidad de la expresión: sea $ut^n = vt^m$, con $m \geq n$, entonces $ut^{m-n} = v \Longrightarrow ut^{m-n} \notin \mathfrak{m}$ y $m = n, u = v$.

$2 \Rightarrow 1$: Como todo elemento no nulo de R o bien es unidad o se puede escribir como un elemento de $(t^n) \subset (t)$, para un cierto $n > 0$, entonces $\mathfrak{m} = (t)$ es el único ideal maximal, además del conjunto de no unidades, luego R es local. Por otro lado, sea $I \subset R$ un ideal propio, entonces $I \supset (t^n)$, para un cierto n. Tomemos el menor n que cumpla el contenido anterior, luego $t^n \in I$. Sea $x = ut^m \in I$, entonces debe ser $m \geq n$, y entonces $x = ut^{m-n}t^n \in I$, luego $I = (t^n)$ y todo ideal de R es principal, lo que prueba que R es un DIP y por tanto noetheriano. □

Observación 2.22. *De la implicación* $2 \Rightarrow 1$ *se deduce una propiedad aún más fuerte:* R *es un DIP y sus ideales son de la forma* (t^n) *para un determinado natural* n.

Definición 2.23. *Un anillo que cumpla cualquiera de las dos condiciones anteriores se llama* ***anillo de valoración discreta*** *AVD y cada elemento* t*, generador de* $\mathfrak{m}$*, se denomina* ***parámetro de uniformización****.*

Observación 2.24. *Dos parámetros de uniformización de un AVD son asociados.*

Si t_1, t_2 son parámetros de uniformización, entonces $\mathfrak{m} = (t_1) = (t_2)$ y $t_1 = vt_2$, $ut_1 = t_2$ con u y v unidades.

Los AVD no sólo permiten expresar como potencia de un parámetro y de forma única cualquier elemento del anillo, sino también cualquier elemento de su cuerpo de cocientes, donde los exponentes son enteros en lugar de naturales. Sea R un AVD, L su cuerpo de cocientes y $x \in L$, entonces $x = a/b$ con $a = ut^n, b = vt^m \implies x = uv^{-1}t^{n-m}$ y $n - m \in \mathbb{Z}$, uv^{-1} unidad. Este número no depende del representante de la fracción. Si $x = \frac{ut^n}{vt^m} = \frac{pt^s}{qt^r}$, entonces $uqt^{n+r} = vpt^{m+s}$ y por la unicidad de la representación $n + r = m + s \implies n - m = s - r$. Además, como el exponente de cada elemento de un AVD es independiente del parámetro de uniformización, dado que dos parámetros de uniformización son asociados, entonces se puede definir la siguiente aplicación de orden:

$$\begin{array}{rccc} ord: & L & \longrightarrow & \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ & x \neq 0 & \longmapsto & n \\ & 0 & \longmapsto & \infty \end{array}$$

Proposición 2.25. *Sea* L *el cuerpo de cocientes de un AVD y* $x, x' \in L$*. Propiedades de la aplicación de orden:*

1. $ord(xx') = ord(x) + ord(x'), \forall x \in L$.
2. $ord(x + x') \geq min\{ord(x), ord(x')\}$. *Si* $ord(x) \neq ord(x')$ *se da la igualdad.*
3. *Sean* $x_1, ..., x_n \in L$*. Si existe* i *tal que* $ord(x_i) < ord(x_j)$ *para todo* $j \neq i$*, entonces* $x_1 + ... + x_n \neq 0$.

Demostración.

1. $x = ut^n, x' = vt^m \Rightarrow ord(xx') = ord(uvt^{n+m}) = n + m = ord(x) + ord(x')$.
2. Sean $x = ut^n, x' = vt^m$ con $n \leq m \Rightarrow x + x' = t^n(u + vt^{m-n}) \in (t^n) \Rightarrow ord(x + x') \geq n = min\{ord(x), ord(x')\}$. Si $n < m$ supongamos que $n < ord(x + x') = k$, entonces $wt^k = x + x' = ut^n + vt^m \Rightarrow u = wt^{k-n} - vt^{m-n} \in (t)$. Absurdo, porque u es unidad, luego no puede ser elemento del ideal maximal. Por lo tanto, $ord(x + x') = n = min\{ord(x), ord(x')\}$.
3. Por el apartado anterior $ord(x_1 + ... + x_{i-1} + x_{i+1} + ... + x_n) \geq ord(x_j) > ord(x_i)$, por lo que $ord(x_1 + ... + x_n) = min\{ord(x_1 + ... + x_{i-1} + x_{i+1} + ... + x_n), ord(x_i)\} < \infty$ luego $x_1 + ... + x_n \neq 0$. □

En los capítulos sucesivos se trabajará en el anillo local $\mathcal{O}_P(V)$, cuyo cuerpo de cocientes es el conjunto de funciones racionales $\mathbb{K}(V)$. Cuando este anillo sea de valoración discreta la aplicación de orden se escribirá ord_P, que es no negativo para todo elemento de $\mathcal{O}_P(V)$. De este modo, las funciones racionales con polos en P tendrán valores de ord_P negativos. Esto nos lleva a definir el **orden de un cero** $P \in V$ de una función racional $\varphi \in \mathbb{K}(V)$, como $ord_P(\varphi)$ y el **orden de un polo** $P \in V$ como $-ord_P(\varphi)$, ambos números no negativos. De esta definición y de las características de la aplicación ord_P se deduce que $ord_P(\bar{a}/\bar{b}) = ord_P(\bar{a}) - ord_P(\bar{b})$ y basta con estudiar por separado el numerador y el denominador de una función racional.

Ejemplo 2.26. *Sea $V = V(y^3 - xy + x) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$. Probar que V es una variedad afín, y que $\mathcal{O}_P(V)$ con $P = (0,0)$ es un AVD. Calcular $ord_P(\bar{x})$.*

Como $f(x,y) = y^3 - xy + x \in \mathbb{C}[x,y]$ es un polinomio de contenido y grado uno respecto de x, por el lema de Gauss en caso de ser reducible factorizaría en $f(x,y) = (x - g(y))h(y)$, donde $g(y), h(y)$ son polinomios en y.

$$x(1-y) + y^3 = (x - g(y))h(y) = xh(y) - g(y)h(y) \Rightarrow h(y) = 1 - y.$$

Como $y = -g(y)h(y)$ y $h(y) = 1 - y$ no divide a y^3, entonces $f(x,y)$ es irreducible y V es variedad afín. Veamos que $\mathcal{O}_P(V)$ es un AVD. Como las unidades de $\mathcal{O}_P(V)$ son las fracciones que no se anulan en P, entonces el ideal maximal de $\mathcal{O}_P(V)$ es $\mathfrak{m} = (\bar{x}, \bar{y})$. Como $\bar{y}^3 - \bar{x}\bar{y} + \bar{x} = 0$, entonces $\bar{y}^3 = \bar{x}(\bar{y} - 1)$. Nótese que $(\bar{y} - 1)$ no se anula en $P = (0,0)$, luego es unidad, con lo que $\bar{x} = (\bar{y} - 1)^{-1}\bar{y}^3$ y $\bar{x} \in (y) \Rightarrow \mathfrak{m} = (y)$ y $\mathcal{O}_P(V)$ es AVD. Se ha visto, además, que $\bar{y}$ es un parámetro de uniformización, lo que supone que $ord_{(0,0)}(\bar{x}) = 3$.

Proposición 2.27. *Sea $\mathcal{O}_P(V)$ un anillo local que sea AVD con ideal maximal $\mathfrak{m}$ y parámetro de uniformización t. Sea $\mathbb{K}(V)$ el cuerpo de cocientes de $\mathcal{O}_P(V)$, entonces:*

1. *Para todo $z \in \mathcal{O}_P(V)$, existe un único $\lambda \in \mathbb{K}$, tal que $z - \lambda \in \mathfrak{m}$.*
2. *Si $z \in \mathcal{O}_P(V)$, entonces para cada entero $n > 0$ existen $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ y $z_n \in \mathcal{O}_P(V)$, tales que $z = \lambda_0 + \lambda_1 t + ... + \lambda_n t^n + z_n t^{n+1}$.*

Demostración. 1. Sea $z \in \mathcal{O}_P(V)$ y $\bar{z}$ su clase en $\mathcal{O}_P(V)/\mathfrak{m}$ que es isomorfo a $\mathbb{K}$, luego existe un único $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\bar{\lambda} = \bar{z}$, con $\bar{\lambda}$ la clase de λ en $\mathcal{O}_P(V)/\mathfrak{m}$. Por tanto $z - \lambda \in \mathfrak{m}$.

2. Inducción sobre n. Para $n = 0$, por el apartado 1, existe un único $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tal que $z - \lambda_0 \in \mathfrak{m}$, luego $z - \lambda_0 = z_0 t$ con $z_0 \in \mathcal{O}_P(V)$ (nótese que z_0 no tiene por qué ser unidad, lo será sólo cuando el orden de $z - \lambda_0$ sea uno). Para $n = s$, por hipótesis de inducción, existen $\lambda_0, ..., \lambda_s \in \mathbb{K}$ y $z_s \in \mathcal{O}_P(V)$ tales que $z = \lambda_0 + \lambda_1 t + ... + \lambda_s t^s + z_s t^{s+1}$. Como $z_s \in \mathcal{O}_P(V)$, por el apartado 1 existe un único $\lambda_{s+1} \in \mathbb{K}$ tal que $z_s - \lambda_{s+1} \in \mathfrak{m}$, luego $z_s - \lambda_{s+1} = z_{s+1}t$ para un cierto $z_{s+1} \in \mathcal{O}_P(V)$, por tanto $z = \lambda_0 + \lambda_1 t + ... + \lambda_s t^s + \lambda_{s+1}t^{s+1} + z_{s+1}t^{s+2}$ y hemos acabado.

□

El resultado anterior, cuyo segundo apartado podría refinarse diciendo que $\lambda_0, ..., \lambda_n$ y z_n son únicos, será de gran utilidad en el capítulo 4 para probar algunas propiedades de las derivadas de las funciones racionales en una curva algebraica.

Capítulo 3

Curvas Algebraicas Planas

3.1. Curvas planas afines

En toda esta sección se trabajará con subespacios de $\mathbb{A}^2$ y polinomios en $\mathbb{K}[x,y]$.

Definición 3.1. *Sea $f \in \mathbb{K}[x,y]$ no constante. El conjunto algebraico $\mathcal{C} = V(f)$ se denomina **curva algebraica plana afín**. Se llama **grado de la curva** al grado del polinomio f que la define. Si $f = \prod_{i=1}^{n} f_i^{e_i}$ es su descomposición en irreducibles de $\mathbb{K}[x,y]$, entonces cada curva $V(f_i)$ es una **componente irreducible** de $\mathcal{C}$ de **multiplicidad** e_i. Se dice que $\mathcal{C}$ es **irreducible** si lo es f, en cuyo caso $\mathcal{C}$ será variedad afín.*

Nótese que dos polinomios definen la misma curva, teniendo en cuenta las multiplicidades, si $f = cg$, donde $c \in \mathbb{K}$. Por lo tanto, el polinomio que define una curva queda completamente determinado por ésta, salvo por el producto por constantes.

Proposición 3.2. *Dos curvas algebraicas afines $\mathcal{C} = V(f)$, $\mathcal{C}' = V(f')$ sin componentes irreducibles en común intersecan en un número finito de puntos.*

Demostración. Es consecuencia directa de la proposición 2.9. □

Definición 3.3. *Un punto P de una curva $\mathcal{C} = V(f)$ se dice **singular** o **múltiple** si*

$$f_x(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P) = 0 \ \text{ y } \ f_y(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0.$$

*En caso contrario se dice que P es **simple** o **regular**. Una curva cuyos puntos son todos simples se llama **curva regular** y si posee alguno múltiple se dice **curva singular.***

Proposición 3.4. *El número de puntos singulares de una curva algebraica plana afín e irreducible es finito.*

Demostración. Sea $P \in \mathcal{C} = V(f)$ curva algebraica plana afín e irreducible. Como P es múltiple si $f_x(P) = f_y(P) = 0$, entonces $P \in V(f, f_x, f_y)$. Al asumir que f es no constante se deduce que f_x o f_y tienen grado una unidad menor que f. Sin pérdida de generalidad supongamos que f_x tiene grado menor que f. Por hipótesis f es irreducible, con lo que f y f_x no tienen factores en común y $V(f, f_x, f_y) \subset V(f, f_x)$ son finitos. □

Observación 3.5. *En realidad con exigir que la curva no tenga componentes múltiples basta para que el número de puntos singulares sea finito. Si se toma una curva con componentes múltiples podría haber un número infinito de puntos singulares.*

Sean $f = (x-y)^2$ y $\mathcal{C} = V(f)$, $f_x = 2(x-y)$, $f_y = -2(x-y)$. Nótese que $V(f, f_x, f_y) = V(x-y)$ es el infinito conjunto de puntos singulares que constituye la recta $y = x$.

Definición 3.6. *Un polinomio $f \in \mathbb{K}[\bar{x}]$ se dice **homogéneo** de grado i si todos sus monomios tienen grado i.*

Esta definición permite la descomposición de $f \in \mathbb{K}[\bar{x}]$ de grado d en **componentes homogéneas**: $f = f_m + f_{m+1} + ... + f_d$, donde f_i son polinomios homogéneos de grado i.

Definición 3.7. *Sea $\mathcal{C} = V(f)$ una curva algebraica plana afín de grado d, que contiene al origen, y $f = f_m + f_{m+1} + ... + f_d$ la descomposición en componentes homogéneas de f. Se define la **multiplicidad de $\mathcal{C}$ en el origen** como el grado más pequeño de las componentes homogéneas de f y se denota por $\mathbf{m_{(0,0)}(f)}$. Si la curva no contiene al origen se dice que la multiplicidad es nula.*

El siguiente resultado acerca de los polinomios homogéneos nos permitirá definir las rectas tangentes a una curva.

Proposición 3.8. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces todo polinomio homogéneo $f \in \mathbb{K}[x, y]$ se puede factorizar en factores lineales.*

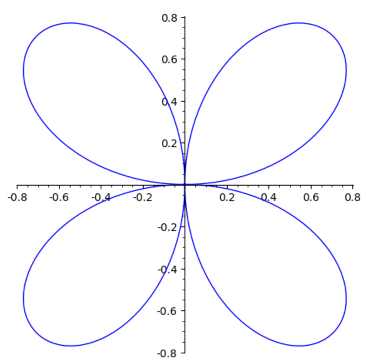
Demostración. Escribamos $f(x, y) = y^r g(x, y)$, donde y no divide a $g(x, y)$. Se puede ver $g \in \mathbb{K}[y][x]$, como polinomio en x con coeficientes en $\mathbb{K}[y]$, y al ser $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado $g(x, 1) = \epsilon \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)$, donde n es el grado de g. Se sigue que $f(x, y) = \epsilon y^r \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i y)$. □

Definición 3.9. *Sea $\mathcal{C} = V(f)$ una curva algebraica plana afín con descomposición en componentes homogéneas $f = f_m + f_{m+1} + ... + f_d$. Se definen las **direcciones tangentes a $\mathcal{C}$ en el origen** como los conjuntos algebraicos definidos por los factores lineales del polinomio homogéneo de menor grado. En otras palabras: si m es el menor grado de las componentes homogéneas de f*

$$f_m = \prod_{i=1}^{s}(a_i x + b_i y)^{r_i}, s \leq m, r_i \geq 1, a, b \in \mathbb{K},$$

*donde $V(a_i x + b_i y)$ es una recta tangente a $\mathcal{C}$ en el origen y r_i es su **multiplicidad**.*

Ejemplo 3.10. *Sean $f = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Determinar la multiplicidad en origen y las direcciones tangentes del trébol de cuatro hojas dado por $V(f)$.*



Las componentes homogéneas de f son f_4 y f_6, donde $f_4 = -4x^2y^2$ y $f_6 = (x^2+y^2)^3$. Por tanto, la multiplicidad del origen es $m_{(0,0)}(f) = 4$. Como la componente homogénea de menor grado es f_4, que ya está descompuesta en factores lineales, las rectas tangentes son $V(x)$ y $V(y)$, ambas dobles. La imagen de la izquierda muestra la parte real de la curva y se observa que la definición de direcciones tangentes coincide con la noción habitual de tangencia.

Ahora trataremos de extender la definición de multiplicidad y dirección tangente a una curva algebraica afín $\mathcal{C} = V(f)$ a puntos de la misma distintos del origen. El modo de proceder consiste en hacer una traslación del punto $P = (a, b)$ que se quiera estudiar al origen y aplicar los resultados anteriores. Es decir, consideramos el polinomio trasladado f^T y su descomposición en componentes homogéneas

$$f^T = f(x + a, y + b) = f^T_m + f^T_{m+1} + ... + f^T_d.$$

Se puede definir la multiplicidad de $\mathcal{C}$ en P como $m_P(f) = m_{(0,0)}(f^T)$. Si las rectas tangentes a $V(f^T)$ en el origen son $V(L^T_i)$ con $L^T_i = a_i x + b_i y$, entonces se definen las rectas tangentes a $\mathcal{C}$ en $P = (a, b)$ como $V(L_i)$ siendo $L_i = a_i(x - a) + b_i(y - b)$.

Proposición 3.11. *Sea $\mathcal{C} = V(f)$ una curva algebraica plana afín y $P \in \mathcal{C}$, entonces P es simple si y sólo si $m_P(f) = 1$.*

Demostración. Supongamos que $P = (a, b)$ es simple, por lo que $f_x(P) \neq 0$ o $f_y(P) \neq 0$. Un simple cálculo muestra que si $f^T(x, y) = f(x+a, y+b)$ entonces $f^T_x(0, 0) = f_x(P) \neq 0$ o $f^T_y(0, 0) = f_y(P) \neq 0$. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $f^T_x(0, 0) = f_x(P) \neq 0$. Como $(0, 0) \in V(f^T)$, entonces f^T tiene término independiente nulo y $m_{(0,0)}(f^T) > 0$. Supongamos por reducción al absurdo que $m_{(0,0)}(f^T) \geq 2$, entonces sus componentes homogéneas $f^T = f^T_m + ... + f^t_d$ verifican que $m \geq 2$, por tanto las componentes homogéneas de f^T_x tendrán grado positivo y $f^T_x(0, 0) = 0$, absurdo. Por consiguiente, $0 < m_{(0,0)}(f^T) < 2$ y $m_{(0,0)}(f^T) = m_P(f) = 1$.

Recíprocamente supongamos que $m_P(f) = m_{(0,0)}(f^T) = 1$, entonces $f^T = \alpha x + \beta y + f^T_2 + ...f^T_d$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ no nulas simultáneamente. Sin pérdida de generalidad, consideremos $\alpha \neq 0$, entonces f^T_x tiene término independiente no nulo, por lo que $f^T_x(0, 0) = f_x(P) \neq 0$ y P es simple. □

Observación 3.12. *Cuando un punto $P = (a, b) \in \mathcal{C}$ es simple, la recta tangente a la curva es única y viene dada por la ecuación $f_x(P)(x - a) + f_y(P)(y - b) = 0$.*

Asumamos que $\mathcal{C} = V(f)$ es una curva algebraica plana afín e irreducible, $P \in \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C}$ es una variedad algebraica sobre la que tenemos definido un anillo local $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$. El siguiente resultado ofrece una condición necesaria y suficiente para determinar cuando $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ es un anillo de valoración discreta. De este modo se establece el álgebra local como herramienta fundamental en el estudio de las curvas algebraicas.

Teorema 3.13. *Sea $P \in \mathcal{C}$ curva algebraica plana afín irreducible. Entonces P es un punto simple si, y sólo si $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ es anillo de valoración discreta. En tal caso, la imagen en $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ de cualquier recta que pase por P que no sea tangente a $\mathcal{C}$ en P es parámetro de uniformización.*

La demostración de este teorema requiere de unos resultados previos de índole algebraica y geométrica que pueden resultar un poco técnicos (ver sección 3.2 [Ful08]). Enunciaré los resultados necesarios para su demostración por su importancia.

- Dados $P, P' \in \mathbb{K}^2$, L_1, L_2 dos rectas que pasan por P y L'_1, L'_2 rectas que pasan por P', entonces existe un cambio de coordenadas que transforma P en P' y L_i en L'_i.
- Un cambio de coordenadas afín que trasforma $P \in \mathbb{K}$ en $P' \in \mathbb{K}$ y las variedades V en V' induce un isomorfismo entre los anillos locales $\mathcal{O}_P(V) \cong \mathcal{O}_{P'}(V')$.

- Sea P un punto de una curva irreducible $\mathcal{C}$ y $\mathfrak{m}_P$ el ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$. Entonces P es simple si, y sólo si $dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2) = 1$.

En relación al último resultado cabe mencionar que $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ se trata de un $\mathbb{K}-$espacio vectorial, de modo que tiene sentido hablar de dimensión.

Ejemplo 3.14. *Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $\mathcal{C} = V(y^3 - xy + x)$ la curva algebraica plana afín e irreducible del ejemplo 2.26. Probar que para todo $P \in \mathcal{C}$, $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ es un AVD y para $P = (8,2)$ determinar la recta tangente a $\mathcal{C}$ en P y un parámetro de uniformización.*

Sean $f = y^3 - xy + x$, $f_x = 1 - y$, $f_y = 3y^2 - x$. Como $V(f_x, f_y) = \{(3,1)\} \not\subset V(f) \Longrightarrow V(f, f_x, f_y) = \emptyset$ entonces todos los puntos son simples, por lo que para todo $P \in \mathcal{C}$, $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ es un AVD en virtud del teorema 3.13. Veamos cuál es la recta tangente a $\mathcal{C}$ en P: $f^T(x,y) = f(x+8, y+2) = 4y - x + 6y^2 - xy + y^3$, luego la recta tangente en P es $V(4(y-2) - (x-8)) = V(4y - x)$. Por lo tanto, como $V(y)$ no es tangente a $\mathcal{C}$ en P entonces por el teorema 3.13, $\mathfrak{m}_P = (\bar{y})$. Esto se podría ver directamente porque en $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$, $\bar{x} = \bar{y}^3/(\bar{y} - 1) = u\bar{y}^3$, donde u es una unidad.

3.2. Curvas planas proyectivas

El plano proyectivo puede describirse de muchos modos. En esta sección y las sucesivas usaremos las coordenadas homogéneas para denotar cada punto del plano proyectivo y nos valdremos de su estructura de variedad diferenciable de dimensión 2 para trabajar en el espacio $\mathbb{A}^2$ por medio de las cartas correspondientes.

Definición 3.15. *Sean $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{A}^3$. Se define la siguiente relación de equivalencia $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ tal que $x_i = \lambda y_i$. El espacio cociente correspondiente se denomina* ***plano proyectivo*** *$\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^3 \backslash \{(0,0,0)\}/ \sim$ y a los representantes de cada clase de equivalencia $P = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^2$* ***coordenadas homogéneas*** *de P. Se pueden definir tres cartas $\chi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{A}^2$ cuyos dominios son $U_i = \{[x_1, x_2, x_3] : x_i \neq 0\} = \{[x_1, x_2, x_3] : x_i = 1\}$, y vienen dadas por la proyección canónica en $\mathbb{A}^2$ al eliminar la coordenada x_i.*

Es claro que χ_i es una biyección y, por lo tanto, $\mathbb{P}^2$ es la unión de tres copias de $\mathbb{A}^2$. En otras ocasiones conviene expresar el plano proyectivo como la unión de un único plano afín y la recta proyectiva, que se denominará recta del infinito (o hiperplano del infinito cuando se trabaja en dimensiones superiores).

Definición 3.16. *Sea U_i un dominio de carta de $\mathbb{P}^2$, entonces se define la* ***recta del infinito*** *como $H_\infty = \mathbb{P}^2 - U_i = \{[x_1, x_2, x_3] : x_i = 0\}$.*

La idea es utilizar los mismos resultados del caso afín para el estudio de las curvas proyectivas, trabajando con tres variables en lugar de dos y con polinomios homogéneos.

Definición 3.17. *Sean $f \in \mathbb{K}[x,y,z]$ homogéneo y $P = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^2$. Se dice que P es un cero de f si $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ para cualesquiera coordenadas homogéneas de P.*

Nótese que si un polinomio $f \in \mathbb{K}[x,y,z]$ de grado d es homogéneo, entonces

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^d f(x_1, x_2, x_3).$$

Por lo tanto, los ceros proyectivos de f no dependen de sus coordenadas homogéneas. Esto nos permite definir, de modo similar al caso afín, los **conjuntos algebraicos proyectivos**, que los denotaremos por $V_{\mathbb{P}^2}(S)$, donde $S \subset \mathbb{K}[x,y,z]$ está compuesto por polinomios homogéneos.

Paralelamente al caso afín, donde existe una relación entre ideales de $\mathbb{K}[\bar{x}]$ y conjuntos algebraicos afines, en el proyectivo la relación viene dada entre conjuntos algebraicos proyectivos e ideales homogéneos. Un **ideal homogéneo** de $\mathbb{K}[\bar{x}]$ verifica que para todo polinomio contenido en él, cada una de sus componentes homogéneas es un elemento del ideal, o equivalentemente, está generado por un conjunto finito de polinomios homogéneos. Los conceptos de irreducibilidad y variedad son idénticos al caso afín.

Del mismo modo se puede construir el equivalente al anillo de coordenadas de una variedad proyectiva $V_{\mathbb{P}^2}$ que se denomina **anillo de coordenadas homogéneas**, $\Gamma_h(V_{\mathbb{P}^2}) = \mathbb{K}[x,y,z]/I_{\mathbb{P}^2}(V_{\mathbb{P}^2})$, donde $I_{\mathbb{P}^2}(V_{\mathbb{P}^2})$ es el ideal homogéneo primo correspondiente. Sin embargo, el cuerpo de cocientes de $\Gamma_h(V_{\mathbb{P}^2})$ ya no puede denominarse cuerpo de funciones racionales porque si tomamos dos representaciones en coordenadas homogéneas del mismo punto $P = [x_1, x_2, x_3] = [x'_1, x'_2, x'_3]$

$$\frac{\bar{a}(x'_1, x'_2, x'_3)}{\bar{b}(x'_1, x'_2, x'_3)} = \frac{\lambda^d \bar{a}(x_1, x_2, x_3)}{\lambda^t \bar{b}(x_1, x_2, x_3)},$$

donde $\bar{a}, \bar{b} \in \Gamma_h(V_{\mathbb{P}^2})$ y a, b son polinomios homogéneos de grados d y t respectivamente. Este cociente estará bien definido como función si $d = t$.

Definición 3.18. *Sea $V_{\mathbb{P}^2}$ una variedad proyectiva y $\Gamma_h(V_{\mathbb{P}^2})$ su anillo de coordenadas homogéneas. Se define el* ***cuerpo de funciones racionales*** *como*

$$\mathbb{K}(V_{\mathbb{P}^2}) = \left\{\varphi = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} : \bar{a}, \bar{b} \in \Gamma_h(V_{\mathbb{P}^2}) \text{ homogéneos del mismo grado}, \bar{b} \neq 0\right\}.$$

Se dice que $\varphi \in \mathbb{K}(V_{\mathbb{P}^2})$ está definida en $P \in V_{\mathbb{P}^2}$, si $\bar{b}(P) \neq 0$. El conjunto de funciones racionales que están definidas en P, $\mathcal{O}_P(V_{\mathbb{P}^2})$, constituye un anillo local cuyo ideal maximal está formado por el conjunto de funciones racionales que se anulan en P.

Definición 3.19. *Sea $f \in \mathbb{K}[x,y,z]$ homogéneo y no constante. El conjunto algebraico proyectivo $\mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f)$ se denomina* ***curva algebraica plana proyectiva****, que se dice* ***irreducible*** *si el polinomio homogéneo f lo es. Se define el* ***grado*** *de $\mathcal{C}$ como el de f.*

Observación 3.20. *Del mismo modo que dos polinomios en $\mathbb{K}[x,y]$ definen la misma curva afín si se diferencian en el producto por una constante, lo hacen dos polinomios homogéneos en $\mathbb{K}[x,y,z]$ cuando definen una misma curva proyectiva. Por este motivo algunos autores definen el concepto de curva algebraica como una clase de equivalencia de polinomios relacionados si y solo si se diferencian en el producto por una constante.*

Definición 3.21. *Dado $f \in \mathbb{K}[\bar{x}]$ homogéneo se denomina la* ***deshomogeneización*** *de f respecto de la variable x_i al polinomio $f_* \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n]$, dado por $f_*(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n)$. Mientras no se indique lo contrario se deshomogeneizará respecto de la última variable. De forma paralela, si $g \in K[x_1, ..., x_{n-1}]$ con componentes homogéneas $g = g_m + g_{m+1} + ... + g_d$, la* ***homogeneización*** *de g será el polinomio homogéneo $g^*(x_1, ..., x_n) = x_n^{d-m} g_m + x^{d-m-1} g_{m+1} ... + g_d$.*

Proposición 3.22. *Sea $f \in \mathbb{K}[x,y]$, entonces $(f^*)_* = f$. Además, si $g \in \mathbb{K}[x,y,z]$ homogéneo existe un natural r tal que $z^r (g_*)^* = g$, por tanto si g es irreducible g_* irreducible.*

Demostración. $f = f_m + f_{m+1} + ... + f_d \Rightarrow f^* = z^{d-m} f_m + z^{d-m-1} f_{m-1} + ... + f_d \Rightarrow (f^*)_* = f^*(x, y, 1) = f_m + f_{m+1} + ... + f_d = f$. Sea $g \in \mathbb{K}[x, y, z]$ homogéneo, si z no divide a g, entonces g_* tiene el mismo grado que g y $(g_*)^* = g$ (luego $r = 0$). Si z divide a g, entonces $deg(g_*) < deg(g)$ y tomando $r = deg(g) - deg(g_*)$ obtenemos que $z^r(g_*)^* = g$. Si g es irreducible, z no divide a g y $(g_*)^* = g$, entonces g_* será a la fuerza irreducible, porque de no serlo, al homogeneizar las componentes irreducibles de g_* se factorizaría g. □

Definición 3.23. *Sea $\mathcal{C} = V(f)$ una curva algebraica afín plana. Se define la **clausura proyectiva** de $\mathcal{C}$ como la curva algebraica proyectiva plana $\mathcal{C}' = V_{\mathbb{P}^2}(f^*)$.*

Proposición 3.24. *Sea $\mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f)$ una curva algebraica plana proyectiva irreducible. Si $P = [a, b, 1] \in \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ y $\mathcal{O}_{(a,b)}(V(f_*))$ son isomorfos.*

Demostración. Basta tomar el isomorfismo de anillos ψ con inverso ψ^{-1}

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathcal{O}_P(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(a,b)}(V(f_*)) \\ & \frac{\bar{a}}{\bar{b}} & \longmapsto & \frac{\bar{a}_*}{\bar{b}_*} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \psi^{-1}: & \mathcal{O}_{(a,b)}(V(f_*)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_P(\mathcal{C}) \\ & \frac{\bar{a}}{\bar{b}} & \longmapsto & \frac{\bar{a}^*}{\bar{b}^*}. \end{array}$$

□

Observación 3.25. *Este isomorfismo, que nos permitirá extender las nociones de multiplicidad y direcciones tangentes a las curvas proyectivas, se escribe equivalentemente para los puntos en U_1 ó U_2 deshomogeneizando respecto de la variable correspondiente.*

Definición 3.26. *Sea $\mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f)$ una curva algebraica proyectiva plana y $P = [a, b, 1]$ (equivalentemente en U_1 y U_2). Se define la **multiplicidad** de $\mathcal{C}$ en P como $m_P(f) = m_{(a,b)}(f_*)$ y las **direcciones tangentes** a $\mathcal{C}$ como la clausura proyectiva de las tangentes a $V(f_*)$. Si $P \in \mathcal{C}$ es simple y $\mathcal{C}$ irreducible, entonces $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ es un AVD y definimos el orden de $g \in \mathbb{K}[x, y, z]$ polinomio homogéneo como $ord_P(g) = ord_{(a,b)}(\bar{g}_*)$ en $\mathcal{O}_{(a,b)}(f_*)$. El orden de un función racional de $\mathbb{K}(\mathcal{C})$ es la diferencia de los órdenes de los polinomios homogéneos que la representan.*

Lema 3.27. ***(Teorema de Euler)*** *Si $f \in \mathbb{K}[x, y, z]$ homogéneo de grado m, entonces*

$$mf = xf_x + yf_y + zf_z.$$

Demostración. Como f es homogéneo $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^m f(x, y, z)$, derivando respecto de λ a ambos lados de la ecuación

$$\frac{\partial f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)}{\partial \lambda x}\frac{d\lambda x}{d\lambda} + \frac{\partial f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)}{\partial \lambda y}\frac{d\lambda y}{d\lambda} + \frac{\partial f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)}{\partial \lambda z}\frac{d\lambda z}{d\lambda} =$$

$$= \frac{\partial f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)}{\partial \lambda x}x + \frac{\partial f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)}{\partial \lambda y}y + \frac{\partial f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)}{\partial \lambda z}z = m\lambda^{m-1} f(x, y, z).$$

Si se toma $\lambda = 1$ se prueba el resultado. □

Proposición 3.28. *Un punto $P \in \mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f)$ curva proyectiva irreducible es singular si, y sólo si $P \in V_{\mathbb{P}^2}(f_x, f_y, f_z)$.*

Demostración. $P = [a, b, 1] \in \mathcal{C} \cap U_3$ es singular si y sólo si $(a, b) \in V(f_*, (f_*)_x, (f_*)_y)$, luego $f_x(P) = f_y(P) = f(P) = 0$ y por el teorema de Euler $zf_z(P) = 0$ con $z = 1 \iff P \in V_{\mathbb{P}^2}(f_x, f_y, f_z)$. Para el resto de cartas afines la prueba es similar. □

Proposición 3.29. *Sea $\mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f)$ una curva proyectiva irreducible de grado m, entonces f_x, f_y ó $f_z \neq 0$ y $\mathcal{C}$ tiene un número finito de puntos singulares.*

Demostración. Por el teorema de Euler $mf = xf_x+yf_y+zf_z$, y como $f \neq 0$ entonces f_x, f_y ó $f_z \neq 0$. Si $P = [a, b, c] \in U_3 \cap \mathcal{C}$, entonces P es singular si $(a, b) \in V(f_*, (f_*)_x, (f_*)_y)$. Como f es irreducible, también lo será f_*, luego f_*, $(f_*)_x$ y $(f_*)_y$ no tienen componentes en común y por la proposición 3.2 el número de puntos singulares en U_3 es finito. Análogamente se prueba para los otros dos dominios de cartas. □

Proposición 3.30. *Dos curvas algebraicas proyectivas planas sin componentes en común $\mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f)$ y $\mathcal{C}' = V_{\mathbb{P}^2}(f')$ tienen intersección finita.*

Demostración. Como $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ no tienen componentes en común podemos suponer que z no divide a f. Por ser f homogéneo de grado d, $f(x, y, 0) = x^d f(1, y/x, 0) = y^d f(x/y, 1, 0)$, luego los puntos de intersección en la recta del infinito están contenidos en el conjunto finito de las soluciones en $\mathbb{K}$, algebraicamente cerrado, de los polinomios univariados $f(1, y/x, 0)$ y $f(x/y, 1, 0)$. El resto de puntos de la intersección pertenecen a U_3, y por tanto al conjunto finito $V(f_*, f'_*)$ (proposición 3.2). □

Proposición 3.31. *El número de ceros y polos en $\mathcal{C}$ de $0 \neq \varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$ es finito.*

Demostración. Sean $\mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f)$ y $\varphi = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$ con $a, b \in \mathbb{K}[x, y, z]$ homogéneos del mismo grado. Como $\varphi \neq 0$, entonces f no divide a a, luego $\mathcal{C}$ y $V_{\mathbb{P}^2}(a)$ no tienen componentes en común y su intersección, que contiene al conjunto de ceros de φ en $\mathcal{C}$, es finita. El número de polos se determina de igual forma pero intersecando $\mathcal{C}$ con $V_{\mathbb{P}^2}(b)$. □

Proposición 3.32. *Sea $\mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f)$ una curva plana proyectiva no singular y $P_1, ..., P_n \in \mathcal{C}$, entonces para cualesquiera $m_1, ..., m_n \in \mathbb{Z}$, existe $\varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$ tal que $ord_{P_i}(\varphi) = m_i$.*

Demostración. Sea L_i una recta que pasa por un único P_i y que no sea tangente a $\mathcal{C}$ en P_i, por tanto $\bar{L}_i$ es un parámetro de uniformización de $\mathcal{O}_{P_i}(\mathcal{C})$ por el teorema 3.13. Sea L_0 una recta que no pase por ningún P_i y $\varphi = \prod L_i^{m_i} L_0^{-\sum m_i}$. Para cada i, $L_0^{-\sum m_i} / \prod_{j \neq i} L_j^{m_j}$ es unidad en $\mathcal{O}_{P_i}(\mathcal{C})$ porque no se anula en P_i, entonces $ord_{P_i}(\varphi) = m_i$. □

3.3. Sistemas lineales de curvas

Definición 3.33. *Un conjunto $V \subset \mathbb{P}^n$ se denomina **subvariedad lineal** de $\mathbb{P}^n$ si $V = V_{\mathbb{P}^n}(f_1, ..., f_m)$, donde cada $f_i \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_{n+1}]$ es un polinomio homogéneo de grado 1.*

Lema 3.34. *El número de monomios de grado d en $\mathbb{K}[x, y, z]$ es $N = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$.*

Demostración. Los monomios de grado d tienen la forma $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ con $\alpha + \beta + \gamma = d$, por lo que buscaremos el número N de ternas de números naturales (α, β, γ) cuya suma de componentes es d. Fijando γ, que puede valer entre 0 y d, basta con contar los posibles α porque $\beta = d-\gamma-\alpha$, y éstos son $d-\gamma+1$, luego $N = 1+2+...+(d+1) = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$. □

Si $m_1, ..., m_N$ es una ordenación del conjunto de monomios de grado d en $\mathbb{K}[x, y, z]$, entonces toda curva algebraica proyectiva plana de grado d dada por el polinomio homogéneo f viene puede expresarse mediante la tupla $(a_1, ..., a_N) \in \mathbb{K}^N$, de modo que $f = \sum_{i=1}^N a_i m_i$ exceptuando la salvedad de que $(a_1, ..., a_N)$ y $(\lambda a_1, ..., \lambda a_N)$ determinan la misma curva para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Dicho de otro modo, toda curva proyectiva plana de grado d se puede ver como un punto de $\mathbb{P}^{N-1} = \mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$, y a todo punto de $\mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ le corresponde una única curva algebraica proyectiva y plana. Por ejemplo, una cónica, de grado 2 dada por el polinomio $f = a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2$, se corresponde con el punto $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6] \in \mathbb{P}^5$. De este modo, el conjunto de curvas algebraicas proyectivas planas de grado d constituye un $\mathbb{K}-$espacio vectorial de dimensión $\frac{d(d+3)}{2}$ [Sen00].

Definición 3.35. *Un **sistema lineal de curvas** de grado d y dimensión r es una subvariedad lineal de dimensión r en $\mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$.*

Lema 3.36. *Sea $P \in \mathbb{P}^2$, entonces las curvas de grado d que contienen a P forman un hiperplano en $\mathbb{P}^{N-1}$ con $N - 1 = \frac{d(d+3)}{2}$.*

Demostración. Sea $P = [x, y, z] \in \mathbb{P}^2$, las curvas de grado d que pasen por P vienen dadas por polinomios de la forma $f = \sum_{i=1}^{N-1} a_i m_i$ tales que $f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N} a_i m_i(x, y, z) = 0$. Al entenderse cada monomio como una coordenada de $\mathbb{P}^{N-1}$, entonces puede verse la ecuación anterior como $\sum_{i=1}^{N-1} a_i x_i = 0$ con algunos coeficientes a_i no nulos, entonces el conjunto de soluciones de la ecuación anterior constituye un hiperplano de $\mathbb{P}^{N-1}$. □

Lema 3.37. *La intersección de n hiperplanos en $\mathbb{P}^n$ es no vacía. En particular, existe una curva proyectiva plana de grado d que pasa por cualquier conjunto de $\frac{d(d+3)}{2}$ puntos de $\mathbb{P}^2$.*

Demostración. Sean $H_1, ..., H_n$ hiperplanos de $\mathbb{P}^n$, que vienen dados por los ceros de los polinomios $h_j = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} x_i \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_{n+1}]$ con $j = 1, .., n$ y no todos los a_{ij} nulos. Como el sistema lineal homogéneo dado por el conjunto de n ecuaciones con $n + 1$ incógnitas $\{\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} x_i = 0\}_{j=1}^{n}$ siempre tiene soluciones no nulas, entonces existe $[b_1, ..., b_{n+1}] \in \bigcap_{i=0}^{n} H_i$. Como las curvas que pasan por un punto de $\mathbb{P}^2$ forman un hiperplano de $\mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$, entonces la intersección de $\frac{d(d+3)}{2}$ hiperplanos será no vacía y existe una curva que pasa por cualquier conjunto de $\frac{d(d+3)}{2}$ puntos de $\mathbb{P}^2$. □

Proposición 3.38. *Sean $P \in \mathbb{P}^2$, d entero positivo y r entero no negativo tal que $r \leq d$. El conjunto $V_d(rP) = \{V_{\mathbb{P}^2}(f)$ curva algebraica proyectiva plana de grado $d : m_P(f) \geq r\}$ constituye una subvariedad lineal de $\mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ de dimensión $\frac{d(d+3)}{2} - \frac{r(r+1)}{2} > 0$.*

Demostración. Después de un cambio de coordenadas podemos asumir que $P = [0, 0, 1]$. Escribamos $f = \sum_{i=0}^{d} f_i(x, y) z^{d-i}$, donde los f_i son polinomios homogéneos de grado i en x e y, además $f_* = \sum_{i=0}^{d} f_i$. Sabemos que $m_P(f) \geq r \Leftrightarrow m_{(0,0)}(f_*) \geq r \Leftrightarrow f_0 = f_1 = ... = f_{r-1} = 0$ y el número de posibles monomios $a_{\alpha,\beta,\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma \in \mathbb{K}[x, y, z]$ de grado d tales que $a_{\alpha,\beta,\gamma} = 0$ para $\alpha + \beta < r$ es $1 + 2 + ... + r = \frac{r(r+1)}{2}$. Reordenando las coordenadas en $\mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$, de modo que los coeficientes $a_{\alpha,\beta,\gamma} = 0$ con $\alpha + \beta < r$ se encuentren al final, entonces f se puede escribir como la suma de los primeros $\frac{d(d+3)}{2} - \frac{r(r+1)}{2}$ monomios con algunos coeficientes no nulos, luego cada curva $V_{\mathbb{P}^2}(f) \in V_d(rP)$ se puede interpretar como un punto de $\mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2} - \frac{r(r+1)}{2}}$ y la dimensión de $V_d(rP)$ en $\mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ queda probada. □

Definición 3.39. *Sean $P_1, ..., P_n \in \mathbb{P}^2$ y $r_1, ..., r_n$ enteros no negativos. Se define el conjunto $V_d(r_1P_1, ..., r_nP_n)$ como el sistema lineal de curvas de grado d con multiplicidad en P_i mayor o igual que r_i, $i = 1, ..., n$.*

Teorema 3.40. *$V_d(r_1P_1,...,r_nP_n)$ constituye una subvariedad lineal de $\mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ de dimensión $D \geq \frac{d(d+3)}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(r_i+1)}{2}$ y se da la igualdad si $d \geq (\sum_{i=1}^{n} r_i) - 1$.*

Demostración. Sin más que aplicar el lema 3.38 y el hecho de que la intersección de espacios lineales es lineal y su dimensión se puede acotar inferiormente por la suma de las dimensiones menos la suma de codimensiones, entonces $V_d(r_1P_1,...,r_nP_n)$ es una subvariedad lineal y $dim_{\mathbb{K}}(V_d(r_1P_1,...,r_nP_n)) \geq \frac{d(d+3)}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(r_i+1)}{2}$.

Para probar la segunda afirmación procederemos por inducción en $m = (\sum_{i=1}^{n} r_i) - 1$. Podemos asumir que $m, d > 1$ porque si ambos fueran uno, sólo podríamos tener $V_1(P_1, P_2)$ de dimensión $\frac{4}{2} - 2 = 0$ ó $V_1(P_1)$ de dimensión $D = \frac{4}{2} - 1 = 1$, es decir, la única recta que pasa por P_1 y P_2 se interpreta como un punto de $\mathbb{P}^3$, y el conjunto de rectas que pasan por P_1 en el segundo caso, como una recta en $\mathbb{P}^3$. Distingamos ahora dos casos:

1. Cada $r_i = 1$: Sea $V_i = V_d(P_1,...,P_i)$, basta con probar que $V_i \neq V_{i-1}$, en cuyo caso la dimensión de V_i será la suma de las dimensiones de cada $V_d(P_j)$. Sean $V_{\mathbb{P}^2}(l_\alpha)$ rectas que pasen por P_α pero no por P_β con $\alpha \neq \beta$ y $V_{\mathbb{P}^2}(l_0)$ una que no pase por ningún P_α, entonces $V_{\mathbb{P}^2}(f) \in V_{i-1}$ con $f = l_1 \cdot ... \cdot l_{i-1} \cdot l_0^{d-i+1}$, pero $V_{\mathbb{P}^2}(f) \notin V_i$.

2. Algún $r_i > 1$: Podemos asumir que $r_1 > 1$ y mediante un cambio de coordenadas adecuado $P_1 = [0, 0, 1]$. Sea $V_0 = V_d((r_1 - 1)P_1, r_2P_2, ..., r_nP_n)$ y $V_{\mathbb{P}^2}(f) \in V_0$. Podemos escribir, por tanto, $f_* = \sum_{i=0}^{r_1-1} a_i x^i y^{r_1-1-i} + f_1(x, y)$ con $f_1(x, y)$ de grado mayor que $r_1 - 1$. Sea $V_i = \{V_{\mathbb{P}^2}(f) \in V_0 : a_j = 0 \text{ para } j < i\}$, y la siguiente cadena de contenidos es clara $V_0 \supset V_1 \supset ... \supset V_r = V_d(r_1P_1, r_2P_2, ..., r_nP_n)$. Si probamos que $V_i \neq V_{i+1}$ para todo $i = 0, 1, ..., r - 1$ entonces queda probado el resultado, porque si encadenamos todos los conjuntos de este tipo formados por los puntos con multiplicidad mayor que uno se llegaría a una situación similar al caso 1, luego habrá que restar al valor de la dimensión de $V_d(P_1, ..., P_n)$ el número de estos conjuntos que es precisamente $\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(r_i+1)}{2}$.

   Sean $W_0 = V_{d-1}((r_1-2)P_1, r_2P_2, ..., r_nP_n)$, $V_{\mathbb{P}^2}(f) \in W_0$ y $f_* = \sum_{i=0}^{r_1-2} a_i x^i y^{r_1-2-i} + f_1(x, y)$ con $f_1(x, y)$ de grado mayor que $r_1 - 2$. Sea $W_i = \{V_{\mathbb{P}^2}(f) \in W_0 : a_j = 0 \text{ para } j < i\}$. Por hipótesis de inducción asumimos que $W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq ... \supsetneq W_{r-1} = V_{d-1}((r_1 - 1)P_1, r_2P_2, ..., r_nP_n)$. Sea $V_{\mathbb{P}^2}(f_i) \in W_i$ con $(f_i)_* = \sum_{k=i}^{r_1-2} a_k x^k y^{r_1-2-k} + f_1(x, y)$ y $a_i \neq 0$, entonces $V_{\mathbb{P}^2}(f_i) \in W_i \backslash W_{i+1}$. Además, $V_{\mathbb{P}^2}(yf_i) \in V_i \backslash V_{i+1}$ y $V_{\mathbb{P}^2}(xf_{r_1-2}) \in V_{r_1-1} \backslash V_{r_1}$, luego $V_i \neq V_{i+1}$ para $i = 0, ..., r_1 - 1$.

□

3.4. Intersección de curvas proyectivas

Hemos visto hasta ahora que la intersección de curvas planas tanto afines como proyectivas sin componentes en común es finita. En el caso proyectivo esta intersección no sólo es finita, sino que es igual al producto de los grados de ambas curvas si se cuenta cada punto de intersección de “forma adecuada”.

Definición 3.41. *Sean $\mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f), \mathcal{C}' = V_{\mathbb{P}^2}(g)$ dos curvas algebraicas proyectivas planas y $P = [a, b, 1] \in \mathbb{P}^2$. Se define la **multiplicidad de intersección** de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ en P como*

$$I_P(f \cap g) = dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathcal{O}_{(a,b)}(\mathbb{A}^2)}{(f_*, g_*)\mathcal{O}_{(a,b)}(\mathbb{A}^2)} \right).$$

Esta definición se extiende a cualquier punto $P \in \mathbb{P}^2$ sin más que deshomogeneizando respecto de la variable adecuada. Una descripción equivalente de la multiplicidad de intersección de curvas en un punto puede darse en términos de la resultante de f y g. Ambas definiciones cumplen una serie de propiedades, cuya demostración puede verse en el teorema 3 de la sección 3.3 de [Ful08].

1. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ no tienen componentes comunes que contengan a P, entonces $I_P(f \cap g)$ es un entero no negativo, y es nulo si y sólo si $P \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ tienen componentes en común que contienen a P, entonces $I_P(f \cap g) = \infty$.

2. $I_P(f \cap g) \geq m_P(f)m_P(g)$, verificándose la igualdad si y sólo si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ no tienen tangentes comunes en P.

3. Si $P \in \mathcal{C}$ es simple, entonces $I_P(f \cap g) = ord_P(\bar{g})$ en $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$.

Teorema 3.42. *(Teorema de Bézout) Si $\mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f), \mathcal{C}' = V_{\mathbb{P}^2}(g)$ son dos curvas proyectivas planas de grados m y n sin componentes en común, entonces*

$$\sum_{P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'} I_P(f \cap g) = m \cdot n.$$

Demostración. El contenido de la demostración se cubre en la asignatura Geometría Proyectiva y Algebraica. En la sección 5.3 de [Ful08] se elabora una prueba a partir de la definición de multiplicidad de intersección en términos de anillos locales y en [Puen00] se utilizan resultantes. □

Ejemplo 3.43. *Sean $f = y^2z - x(x-2z)(x+z)$ y $g = y^2 + x^2 - 2xz$ dos polinomios irreducibles y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, encontrar los puntos de intersección de $\mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f), \mathcal{C}' = V_{\mathbb{P}^2}(g)$ y sus multiplicidades.*

$f_* = y^2 - x(x-2)(x+1)$ y $g_* = y^2 + x^2 - 2x$, $V(f_*, g_*) = \{(0,0), (2,0), (-2, i\sqrt{8}), (-2, -i\sqrt{8})\}$, por lo que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \cap U_3 = V(f_*, g_*) = \{P_1 = [0,0,1], P_2 = [2,0,1], P_3 = [-2, i\sqrt{8}, 1], P_4 = [-2, -i\sqrt{8}, 1]\}$. Para determinar $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \cap H_\infty$, hay que resolver el sistema $\{f(x,y,0) = 0, g(x,y,0) = 0\}$ cuya única solución es el $(0,0,0) \notin \mathbb{P}^2$, luego $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \cap H_\infty = \emptyset$. Por lo tanto existen cuatro puntos de intersección, veamos sus multiplicidades.

$I_{P_1}(f \cap g) > m_{P_1}(f)m_{P_1}(g) = m_{(0,0)}(f_*) \cdot m_{(0,0)}(g_*) = 1$ porque $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ tienen a $V_{\mathbb{P}^2}(x)$ como tangente común en P_1 (propiedad 2). Mediante el cambio de coordenadas $f_*^T = f_*(x+2, y) = y^2 - x^3 - 5x^2 - 6x$ y $g_*^T(x+2, y) = y^2 + x^2 + 2x$ se puede deducir que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ tienen a $V_{\mathbb{P}^2}(x)$ como tangente común en P_2, por lo que $I_{P_2}(f \cap g) > m_{P_2}(f)m_{P_2}(g) = m_{(0,0)}(f_*) \cdot m_{(0,0)}(g_*) = 1$. Como $I_{P_1}(f \cap g) + I_{P_2}(f \cap g) + I_{P_3}(f \cap g) + I_{P_4}(f \cap g) = 2 \cdot 3 = 6$, $I_{P_1}(f \cap g), I_{P_2}(f \cap g) \geq 2$ y $I_{P_3}(f \cap g), I_{P_4}(f \cap g) \geq 1$ (propiedad 1), entonces forzosamente $I_{P_1}(f \cap g) = I_{P_2}(f \cap g) = 2$ y $I_{P_3}(f \cap g) = I_{P_4}(f \cap g) = 1$.

Capítulo 4

Género de Curvas Algebraicas

En todo este capítulo $\mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f)$ es una curva proyectiva irreducible no singular, salvo que se indique lo contrario, y $\mathbb{K}(\mathcal{C})$ su cuerpo de funciones racionales. Además, en algunas ocasiones se abusará de la notación identificando al polinomio homogéneo f y a $\mathcal{C}$ con el mismo símbolo, F.

4.1. Divisores

Definición 4.1. *Un* ***divisor*** *de $\mathcal{C}$ es una suma formal*

$$D = \sum_{P\in\mathcal{C}} n_P P,$$

donde $n_p \in \mathbb{Z}$ y $n_P = 0$ salvo para un número finito. Se define el ***grado*** *de D como $gr(D) = \sum_{P\in\mathcal{C}} n_P$. Se dice que D es un* ***divisor efectivo*** *si $n_P \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{C}$ y se denota por $D \succ 0$.*

Observación 4.2. *El grado de un divisor es aditivo, es decir, $gr(D+D') = gr(D)+gr(D')$. Se escribirá $D \succ D'$ si $D - D' \succ 0$. Es claro que $D \succ D$. Si $D \succ D'$ y $D' \succ D$, entonces $n_P \geq n'_P$ y $n'_P \geq n_P$ para todo P, por lo que $D = D'$. Por último, si $D \succ D'$ y $D' \succ D''$, entonces $n_P \geq n'_P \geq n''_P$ para todo P, luego $D \succ D''$ y $\succ$ es una relación de orden parcial.*

Definición 4.3. *Sea $\mathcal{G}$ una curva plana que no contenga a $\mathcal{C}$. Se define el* ***divisor*** *de $\mathcal{G}$ como*

$$div(\mathcal{G}) = \sum_{P\in\mathcal{C}} ord_P(\mathcal{G})P,$$

que tiene grado $gr(div(\mathcal{G})) = \sum_{P\in\mathcal{C}} ord_P(\mathcal{G}) = deg(\mathcal{G})deg(\mathcal{C})$

Esta última igualdad se verifica por el Teorema de Bézout.

Definición 4.4. *Sea $\varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$ no nulo. Se llama* ***divisor*** *de φ a*

$$div(\varphi) = \sum_{P\in\mathcal{C}} ord_P(\varphi)P,$$

que puede descomponerse en su ***divisor de ceros*** *y su* ***divisor de polos***

$$(\varphi)_0 = \sum_{\substack{P\in\mathcal{C}\\ ord_P(\varphi)>0}} ord_P(\varphi)P \qquad (\varphi)_\infty = \sum_{\substack{P\in\mathcal{C}\\ ord_P(\varphi)<0}} -ord_P(\varphi)P.$$

Los objetos anteriores están bien definidos dado que tanto el número de ceros como de polos de una función racional es finito. Además, de las propiedades de la función de orden se deduce que $div(\varphi\varphi') = div(\varphi) + div(\varphi')$ y $div(\varphi^{-1}) = -div(\varphi)$.

Proposición 4.5. *Para todo $\varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$, $div(\varphi)$ es un divisor de grado cero, es más el divisor es idénticamente cero si, y sólo si $\varphi \in \mathbb{K}$.*

Demostración. Escribamos $\varphi = \bar{F}/\bar{G}$, con $F, G \in \mathbb{K}[x, y, z]$ homogéneos del mismo grado. Entonces

$$gr(div(\varphi)) = gr(div(F)) - gr(div(G)) = deg(F)deg(\mathcal{C}) - deg(G)deg(\mathcal{C}) = 0.$$

Supongamos ahora que φ es constante, por lo que no tiene ni ceros ni polos, luego $div(\varphi) \equiv 0$. Recíprocamente, si $div(\varphi) \equiv 0$ entonces φ no tiene ni ceros ni polos. Suponiendo por reducción al absurdo que φ no es constante, entonces tomando cualquier $P \in \mathcal{C}$ la función racional $\varphi - \varphi(P)$ es no nula, tiene un cero y ningún polo. Esto contradice que $gr(div(\varphi - \varphi(P))) = 0$, luego φ es constante. □

Observación 4.6. *La primera parte de la proposición anterior afirma que una función racional tiene el mismo número de ceros que de polos si se cuentan adecuadamente con sus multiplicidades.*

Corolario 4.7. *Sean $\varphi, \varphi' \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$ no nulos, entonces $div(\varphi) = div(\varphi')$ si, y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\varphi' = \lambda\varphi$.*

Demostración. Supongamos que $div(\varphi) = div(\varphi') \Rightarrow div(\varphi') - div(\varphi) = div(\varphi'\varphi^{-1}) \equiv 0$ y por la proposición anterior $\varphi'\varphi^{-1} = \lambda \in \mathbb{K}$, luego $\varphi' = \lambda\varphi$. Si $\varphi' = \lambda\varphi$, entonces $div(\varphi'\varphi^{-1}) = div(\varphi') - div(\varphi) = div(\lambda) \equiv 0$ y los divisores son iguales. □

Definición 4.8. *Dos divisores D, D' son **linealmente equivalentes** si existe una función racional $\varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$ tal que $D = D' + div(\varphi)$, en tal caso escribiremos $D \equiv D'$.*

Proposición 4.9. *1. La relación ser linealmente equivalentes es de equivalencia.*

2. Si $D \equiv D'$, entonces $gr(D) = gr(D')$.

Demostración.
1. Reflexiva: basta tomar $\varphi = 1$, para ver que $D = D + div(1)$. Simétrica: si existe $\varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$ tal que $D = D' + div(\varphi)$, entonces $D' = D - div(\varphi) = D + div(\varphi^{-1})$. Transitiva: si existen φ y φ' tales que $D = D' + div(\varphi)$ y $D' = D'' + div(\varphi')$, entonces $D = D'' + div(\varphi) + div(\varphi') = D'' + div(\varphi\varphi')$.

2. Como el grado es aditivo, $gr(D) = gr(D') + gr(div(\varphi)) = gr(D')$ (proposición 4.5). □

4.2. El espacio vectorial L(D)

Sea $D = \sum_{P \in \mathcal{C}} n_P P$ un divisor de $\mathcal{C}$. D selecciona un número finito de puntos y les asigna enteros. Se pretende determinar cuándo existe una función racional cuyos polos y ceros sigan ciertas restricciones impuestas por D. De esta noción surge el concepto de los espacios vectoriales $L(D)$.

Definición 4.10. *Se denomina* ***espacio*** $\mathbf{L(D)}$ *al conjunto*

$$L(D) = \{\varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C}) : ord_P(\varphi) \geq -n_P, \forall P \in \mathcal{C}\} = \{\varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C}) : div(\varphi) + D \succ 0 \text{ ó } \varphi = 0\}.$$

Si $n_P > 0$ entonces φ puede tener un polo en P de orden, a lo sumo, n_P. Si $n_P < 0$, φ tendrá un cero de multiplicidad al menos n_P. Si $n_P = 0$, φ no puede tener un polo en P.

Proposición 4.11. *El conjunto $L(D)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Llamamos $l(D)$ a su dimensión.*

Demostración. Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\varphi \in L(D)$. $div(\lambda\varphi)+D = div(\lambda)+div(\varphi)+D = div(\varphi)+D \succ 0$, luego $\lambda\varphi \in L(D)$. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in L(D) \Rightarrow ord_P(\varphi_1), ord_P(\varphi_2) \geq -n_P$ para todo $P \in \mathcal{C}$. Como por la proposición 2.25 $ord_P(\varphi_1 + \varphi_2) \geq min\{ord_P(\varphi_1), ord_P(\varphi_2)\} \geq -n_P$ para todo $P \in \mathcal{C}$, entonces $\varphi_1 + \varphi_2 \in L(D)$. □

Proposición 4.12. *Si $D \prec D'$, entonces $L(D) \subset L(D')$ y $dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{L(D')}{L(D)}\right) \leq gr(D' - D)$.*

Demostración. Sea $D = \sum n_P P$ y $D \prec D'$, entonces existen $P_1, ..., P_r$ tales que $D' = D + P_1 + ... + P_r$. Si $0 \neq \varphi \in L(D)$, $ord_P(\varphi) \geq -n_P, \forall P \in \mathcal{C}$ y en particular $ord_{P_1}(\varphi) \geq -n_{P_1} - 1$, luego $\varphi \in L(D+P_1)$ y $L(D) \subset L(D+P_1)$. Del mismo modo se puede comprobar la siguiente cadena de contenidos $L(D) \subset L(D+P_1) \subset ... \subset L(D+...+P_1+P_{r-1}) \subset L(D')$. La segunda parte de la afirmación se probará por inducción en $r = gr(D - D')$.

Caso r=1: Sea t el parámetro de uniformización del ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}_{P_1}(\mathcal{C})$, n_{P_1} el coeficiente de P_1 en D y f la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} f: & L(D+P_1) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \varphi & \longmapsto & (t^{n_{P_1}+1}\varphi)(P_1) \end{array}$$

Como $\varphi \in L(D + P_1)$, entonces $ord_{P_1}(\varphi) \geq -n_{P_1} - 1$ y $ord_{P_1}(\varphi) + n_{P_1} + 1 \geq 0$, luego f está bien definida. Veamos que $ker(f) = L(D)$. Sea $\varphi \in ker(f)$, $(t^{n_{P_1}+1}\varphi)(P_1) = 0 \Rightarrow t^{n_{P_1}+1}\varphi \in \mathfrak{m} = (t)$, de lo que se deduce que $\varphi = ut^s$, con u unidad de $\mathcal{O}_{P_1}(\mathcal{C})$ y $s \geq -n_{P_1} \Longrightarrow ord_{P_1}(\varphi) \geq -n_{P_1}$ y $\varphi \in L(D)$. El otro contenido es claro: sea $\varphi \in L(D) \Longrightarrow ord_{P_1}(t^{n_{P_1}+1}\varphi) > 0 \Longrightarrow t^{n_{P_1}+1}\varphi \in \mathfrak{m}$ y $(t^{n_{P_1}+1}\varphi)(P_1) = 0$. Por el Primer Teorema de Isomorfía, $L(D+P_1)/L(D) \simeq Im(f) \subset \mathbb{K} \Longrightarrow dim_{\mathbb{K}} L(D+P_1)/L(D) \leq 1 = gr(D+P_1-D)$.

Supongamos, por hipótesis de inducción que $dim_{\mathbb{K}} L(D+P_1+..., P_{r-1})/L(D) \leq r-1 = gr(D + P_1 + ... + P_{r-1} - D)$. Por el Tercer Teorema de Isomorfía

$$\frac{L(D + P_1 + ... + P_r)/L(D)}{L(D + P_1 + ... + P_{r-1})/L(D)} \simeq \frac{L(D + P_1 + ... + P_r)}{L(D + P_1 + ... + P_{r-1})}.$$

El miembro de la derecha es similar al caso ya probado $r = 1$, luego tiene dimensión finita y menor o igual que 1. Por lo tanto los dos espacios vectoriales cocientados tienen dimensión finita y como la dimensión del cociente de espacios vectoriales de dimensión finita es la diferencia de dimensiones

$$dim_{\mathbb{K}} L(D + P_1 + ..., P_r)/L(D) \leq 1 + dim_{\mathbb{K}} L(D + P_1 + ..., P_{r-1})/L(D) = r.$$

□

Corolario 4.13. *Si $gr(D) < 0$, entonces $L(D) = 0$ y si $gr(D) \geq 0$, entonces $l(D) \leq gr(D) + 1$. En particular $L(0) = \mathbb{K}$. Por consiguiente, $l(D)$ es finita.*

Demostración. Sea $0 \neq \varphi \in L(D)$, entonces $div(\varphi) + D \succ 0 \Longrightarrow gr(div(\varphi)) + gr(D) = gr(D) \geq 0$, porque el grado de un divisor de una función racional es nulo. Esto entra en contradicción con que $gr(D) < 0$, luego si $gr(D) < 0$ entonces $L(D) = 0$.

Supongamos ahora que $gr(D) = n \geq 0$, entonces tomando $P \in \mathcal{C}$ y $D' = D - (n+1)P$ con $gr(D') = -1$ se llega a que $L(D') = 0$, por la primera parte, y por la proposición 4.12 $dim_{\mathbb{K}}(L(D)/L(D')) \leq gr(D - D') = n + 1$, por lo que $l(D) \leq n + 1$. Como $\mathbb{K} \subset L(0)$, entonces $l(0) = 1$ y $L(0) = \mathbb{K}$. Como el grado de todo divisor es finito, $l(D)$ será finita. □

Corolario 4.14. *Si $D' \succ D$, entonces $gr(D') - l(D') \geq gr(D) - l(D)$.*

Demostración. Por la proposición 4.12 tenemos que $dim_{\mathbb{K}}(L(D')/L(D)) \leq gr(D' - D)$. Como $L(D)$ y $L(D')$ tienen dimensión finita, entonces la dimensión del cociente es la diferencia de dimensiones, que junto con la aditividad del grado se concluye el resultado $gr(D') - l(D') \geq gr(D) - l(D)$. □

Proposición 4.15. *Si $D \equiv D'$ entonces $l(D) = l(D')$.*

Demostración. Sea $D' = D + div(\varphi)$ para $0 \neq \varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$ y construyamos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f: & L(D) & \longrightarrow & L(D') \\ & \psi & \longmapsto & \psi\varphi. \end{array}$$

f está bien definida: si $0 \neq \psi \in L(D)$ entonces $D' + div(\psi\varphi) = D' + div(\psi) + div(\varphi) = D + div(\psi) \succ 0$, luego $\psi\varphi \in L(D')$. f es claramente una aplicación lineal con inversa $f^{-1}(\psi) = \psi\varphi^{-1}$. Por lo tanto, $L(D)$ y $L(D')$ son isomorfos como espacios vectoriales y $l(D) = l(D')$. □

Los siguientes resultados van encaminados a demostrar el teorema de Riemann, que nos permitirá definir la noción de género.

Lema 4.16. *Sean R un dominio de integridad, F su cuerpo de cocientes y L una extensión algebraica finita de F. Para todo $\alpha \in F$ existe $c \in R\backslash\{0\}$ de modo que $c\alpha$ es entero algebraico sobre R, es decir, existe un polinomio mónico en $R[x]$ con $c\alpha$ como raíz.*

Demostración. Sea $[L : F] = n$ y $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \in F[x]$ un polinomio que verifique $f(\alpha) = 0$ (existe porque el polinomio mínimo de α tiene grado menor o igual que n). Como $a_i = b_i/c_i$ con $b_i, c_i \in R$ podemos expresar todos los coeficientes con un denominador común, es decir, $a_i = d_i/c$ con $d_i, c \in R$, entonces $c^n\alpha^n + c^{n-1}d_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + c^{n-1}d_0 = 0$ y $c\alpha$ es raíz de $g(x) = x^n + d_{n-1}x^{n+1} + cd_{n-2}x^{n-1} + ... + c^{n-1}d_0 \in R[x]$. □

Definición 4.17. *Sean $S \subset \mathcal{C}$ y $D = \sum_{P\in\mathcal{C}} n_P P$ un divisor de $\mathcal{C}$. Se define $gr^S(D) = \sum_{P\in S} n_P$ y $L^S(D) = \{\varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C}) : ord_P(\varphi) \geq -n_P, \forall P \in S\}$.*

Lema 4.18. *Si $D \prec D'$, entonces $L^S(D) \subset L^S(D')$ para todo $S \subset \mathcal{C}$, donde ambos conjuntos son subespacios vectoriales de $L(D)$ y $L(D')$, respectivamente. Cuando S es finito $dim_{\mathbb{K}} L^S(D')/L^S(D) = gr^S(D' - D)$.*

Demostración. Se procede de forma idéntica a las proposiciones 4.11, 4.12. Basta, entonces, probar el resultado cuando $D' = D + P$ y el resto se procede por inducción de forma similar a lo ya demostrado. Sea f la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} f: & L^S(D+P) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \varphi & \longmapsto & (t^{n_P+1}\varphi)(P), \end{array}$$

veamos que es sobreyectiva, para lo cual basta con encontrar un elemento de la imagen no nulo. Como $ker(f) = L^S(D)$, basta con buscar $\varphi \in L^S(D+P)\backslash L^S(D)$ de forma que $ord_P(\varphi) = -n_P - 1$ y $ord_Q(\varphi) \geq -n_Q$ para todo $Q \in S$. Como S es finito, la proposición 3.32, nos garantiza la existencia de φ. Por consiguiente, $L^S(D+P)/L^S(D) \simeq \mathbb{K}$ por el Primer Teorema de Isomorfía y $dim_{\mathbb{K}} L^S(D+P)/L^S(D) = 1$. □

Lema 4.19. *Si $\varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$ es una función racional no constante, la extensión $\mathbb{K}(\mathcal{C})$ sobre $\mathbb{K}(\varphi)$ es finita.*

Demostración. Sean $\mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f)$ y $\mathcal{C}_* = V_{\mathbb{P}^2}(f_*)$. La prueba se efectuará para el caso afín, es decir, $\mathbb{K}(\mathcal{C}_*)$ y $\varphi_* = \frac{\bar{h}_*}{\bar{g}_*}$. Su extensión al plano proyectivo es evidente por el isomorfismo que existe entre los cuerpos de funciones racionales.

Veamos que $\mathbb{K}(\varphi_*, \bar{x}, \bar{y})$ es algebraica sobre $\mathbb{K}(\varphi_*, \bar{x})$. Como el polinomio $f_*(\bar{x}, y) \in \mathbb{K}(\bar{x})[y]$ se anula en $\bar{y}$, entonces $\bar{y}$ es algebraico sobre $\mathbb{K}(\bar{x})$ y la extensión $\mathbb{K}(\varphi_*, \bar{x}, \bar{y})$ es algebraica sobre $\mathbb{K}(\varphi_*, \bar{x})$. De hecho se prueba que $\mathbb{K}(\bar{x}, \bar{y})$ es algebraica sobre $\mathbb{K}(\bar{x})$.

Veamos que $\mathbb{K}(\varphi_*, \bar{x})$ es algebraica sobre $\mathbb{K}(\varphi_*)$. Como φ_* no constante, entonces φ_* debe ser trascendente sobre $\mathbb{K}$ porque en caso contrario existiría un polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ que se anula en φ_*, luego $\varphi_* \in \mathbb{K}$ por ser una raíz de p y $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado, absurdo. Como $\mathbb{K}(\mathcal{C}_*)$ es algebraica sobre $\mathbb{K}(\bar{x})$, en particular φ_* será algebraico sobre $\mathbb{K}(\bar{x})$, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_{n-1}(\bar{x}), ..., a_0(\bar{x}) \in \mathbb{K}(\bar{x})$ tales que $\varphi_*^n + a_{n-1}(\bar{x})\varphi_*^{n-1} + ... + a_0(\bar{x}) = 0$. Nótese que no todos los $a_i(\bar{x})$ pueden ser constantes porque φ_* es trascendente sobre $\mathbb{K}$. Si eliminamos denominadores de la ecuación anterior y denotamos por $b_i(x)$ a los coeficientes en $\mathbb{K}[\bar{x}]$ que resultan, entonces el polinomio $q(x) = b_n(x)\varphi_*^n + b_{n-1}(x)\varphi_*^{n-1} + ... + b_0(x) \in \mathbb{K}(\varphi_*)[x]$ se anula en $\bar{x}$, luego $\bar{x}$ es algebraico sobre $\mathbb{K}(\varphi_*)$.

Por ser $\mathbb{K}(\varphi_* \bar{x}, \bar{y}) = \mathbb{K}(f_*)$ algebraica sobre $\mathbb{K}(\bar{x}, \varphi_*)$ y $\mathbb{K}(\varphi_*, \bar{x})$ algebraica sobre $\mathbb{K}(\varphi_*)$, entonces los grados de los polinomios mínimos de $\bar{y}$ sobre $\mathbb{K}(\bar{x}, \varphi_*)$, y de $\bar{x}$ sobre $\mathbb{K}(\varphi_*)$ determinan $[\mathbb{K}(\varphi_*, \bar{x}, \bar{y}) : \mathbb{K}(\varphi_*, \bar{x})]$ y $[\mathbb{K}(\varphi_*, \bar{x}) : \mathbb{K}(\varphi_*)]$, respectivamente. Como $[\mathbb{K}(f_*) : \mathbb{K}(\varphi_*)] = [\mathbb{K}(\varphi_*, \bar{x}, \bar{y}) : \mathbb{K}(\varphi_*, \bar{x})][\mathbb{K}(\varphi_*, \bar{x}) : \mathbb{K}(\varphi_*)]$ y ambos factores son finitos, la extensión $\mathbb{K}(f_*)$ sobre $\mathbb{K}(\varphi_*)$ es finita.

□

Proposición 4.20. *Sea $\varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$ una función racional no constante, $D = (\varphi)_0$ su divisor de ceros y $n = [\mathbb{K}(\mathcal{C}) : \mathbb{K}(\varphi)]$.*

1. *Existe una constante τ tal que $l(r(\varphi)_0) \geq rn - \tau$ para todo $r \in \mathbb{Z}$.*
2. *$(\varphi)_0$ es un divisor efectivo de grado n.*

Demostración. 1. Sean $D = \sum r_p P$, $m = gr(D)$ y $S = \{P \in \mathcal{C} : r_P > 0\}$. Como $\mathbb{K}[\varphi^{-1}]$ es un dominio cuyo cuerpo de cocientes es $\mathbb{K}(\varphi)$ y $n = [\mathbb{K}(\mathcal{C}) : \mathbb{K}(\varphi)]$, entonces por el lema 4.16 se puede tomar una base de $\mathbb{K}(\mathcal{C})$ sobre $\mathbb{K}(\varphi)$ de enteros algebraicos sobre $\mathbb{K}[\varphi^{-1}]$, dada por $\alpha_1, ..., \alpha_n$, de modo que cada α_i satisface la ecuación

$$\alpha_i^{n_i} + d_{i1}\alpha_i^{n_i-1} + d_{i2}\alpha_i^{n_i-2} ... + d_{in_i} = 0, \tag{4.1}$$

con $d_{ij} \in \mathbb{K}[\varphi^{-1}]$ y $n_i \in \mathbb{N}$. Recordemos que S está formado por el conjunto de ceros de φ, por lo que si $P \notin S$, entonces $ord_P(\varphi) \leq 0$ y $ord_P(\varphi^{-1}) \geq 0$, lo que implica que $ord_P(d_{ij}) \geq 0$. Si suponemos $ord_P(\alpha_i) < 0$ entonces $ord_P(\alpha_i^{n_i}) < ord_P(d_{ij}\alpha_i^{n_i-j})$ para todo j y esto entra en contradicción con el tercer apartado de la proposición 2.25 y la ecuación 4.1, por consiguiente $ord_P(\alpha_i) \geq 0$ para todo $P \notin S$. Por tanto, si

$ord_P(\alpha_i) < 0$, entonces $P \in S$. De este modo, si tomamos $t \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande (basta tomar $t > -ord_P(\alpha_i)/r_P$ para todo $P \in S$), entonces $div(\alpha_i)+tD \succ 0$, lo que implica que $\alpha_i \in L(tD)$. Sean $r, j \in \mathbb{Z}$ y $j < r$, como $div(\varphi) = D - (\varphi)_\infty$, entonces $div(\alpha_i\varphi^{-j}) + (t+r)D = div(\alpha_i) + tD + (r-j)D + j(\varphi)_\infty \succ 0$ para todo $r, j \in \mathbb{Z}$ con $j < r$.

Como los α_i son linealmente independientes sobre $\mathbb{K}(\varphi)$ y $1, \varphi^{-1}, ..., \varphi^{-r}$ lo son sobre $\mathbb{K}$ entonces el conjunto

$$\{\alpha_i\varphi^{-j} : i = 1, ..., n; j = 0, ..., r\}$$

está formado por $n(r+1)$ elementos linealmente independientes sobre $\mathbb{K}$, luego $l((r+t)D) \geq n(r+1)$. Se deduce del corolario 4.14 que

$$l((r+t)D) - (r+t)m \leq l(rD) - rm \Rightarrow n(r+1) \leq l((r+t)D) \leq l(rD) + tm$$

Llamando $\tau = tm - n$, entonces $l(rD) \geq rn - \tau$ para todo $r \in \mathbb{Z}$.

2. Por el apartado anterior y el corolario 4.13 tenemos que $rn - \tau \leq l(rD) \leq rm + 1$, de donde se deduce que si $r > 0$, entonces $n \leq m + (1+\tau)/r$. Como esta desigualdad se verifica para todo $r \in \mathbb{Z}$, si tomamos r suficientemente grande, entonces $n \leq m$.

   Para ver la otra desigualdad, dado que S es finito, el lema 4.18 garantiza que $dim_{\mathbb{K}}(L^S(0)/L^S(-D)) = gr(D) = m$, por lo que existen $\beta_1, ..., \beta_m \in L^S(0)$ tales que $\bar{\beta}_1, ..., \bar{\beta}_n$ son base de $L^S(0)/L^S(-D)$ sobre $\mathbb{K}$. Veamos que $\beta_1, ..., \beta_m$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{K}(\varphi)$. Si suponemos que no lo son, existen $b_1, ..., b_n \in \mathbb{K}(\varphi)$ tales que $\sum b_i\beta_i = 0$, que reduciendo denominadores, se puede reescribir como $d_1, ..., d_n \in \mathbb{K}[\varphi]$ de modo que $\sum d_i\beta_i = 0$. Además, se puede asumir que $d_i = \lambda_i + \varphi h_i$ con $\lambda_i \neq 0$ para algún i, dado que en caso de no ser así, podría sacarse factor común a la potencia correspondiente de φ y se sigue cumpliendo la hipótesis. De este modo $\sum \lambda_i\beta_i = -\varphi\sum h_i\beta_i \in L^S(-D)$, dado que $ord_P(-\varphi\sum h_i\beta_i) \geq ord_P(-\varphi)$ para todo $P \in S$. Como $\sum \lambda_i\beta_i \in L^S(-D)$, entonces $\sum \lambda_i\bar{\beta}_i = 0$, lo cual entra en contradicción con que $\bar{\beta}_1, ..., \bar{\beta}_n$ sea base de $L^S(0)/L^S(-D)$. Por lo tanto, $\beta_1, ..., \beta_m$ son m elementos de $\mathbb{K}(\mathcal{C})$ linealmente independientes sobre $\mathbb{K}(\varphi)$, luego $m \leq n$.

□

Observación 4.21. *La constante $\tau = tm - n = n(t-1)$ es independiente de r y depende exclusivamente del cuerpo de funciones racionales.*

Teorema 4.22. ***(Teorema de Riemann)*** *Existe un entero g tal que, para todo divisor D de $\mathcal{C}$, $l(D) \geq gr(D) + 1 - g$. La menor de esas constante se denomina **género de la curva**.*

Demostración. Sean D un divisor de $\mathcal{C}$ y $s(D) = gr(D) + 1 - l(D)$.

1. Si $D = 0$, $l(D) = 1$ y $s(D) = 0$, luego basta tomar $g \geq 0$.

2. Si $D \equiv D'$, entonces $gr(D) = gr(D')$ y $l(D) = l(D')$, luego $s(D) = s(D')$.

3. Si $D' \succ D$, entonces por el corolario 4.14 $s(D') \geq s(D)$.

4. Sean $\varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C})\backslash\mathbb{K}$, $Z = (\varphi)_0$ y τ el menor entero que verifica la proposición 4.20, entonces $s(rZ) \leq \tau + 1$ para todo $r \in \mathbb{Z}$.

   Sea $g = \tau + 1$, si probamos que para todo divisor D, existen un divisor $D' \equiv D$ y un entero $r \geq 0$ tal que $rZ \succ D'$, entonces por 2. y 3., $g \geq s(rZ) \geq s(D)$ y quedaría probado el teorema.

   Sean $Z = \sum n_P P$, $D = \sum m_P P$ y $T = \{P \in \mathcal{C} : m_P > 0$ y $ord_P(\varphi^{-1}) \geq 0\}$. Sea

$$\psi = \prod_{P \in T} (\varphi^{-1} - \varphi^{-1}(P))^{m_P}.$$

   Nótese que $P \in T$ es un cero de ψ de orden al menos m_P, por lo que $m_P - ord_P(\psi) \leq 0$ si es que $ord_P(\varphi^{-1}) \geq 0$. Como Z es efectivo $n_P \geq 0$, entonces es claro que $m_P - ord_P(\psi) \leq rn_P$ para todo r entero positivo. Por el contrario, si $ord_P(\varphi^{-1}) < 0$, entonces $n_P > 0$ y para un $r \in \mathbb{Z}$ lo suficientemente grande se verificará que $m_P - ord_P(\psi) \leq rn_P$. En cualquier caso $m_P - ord_P(\psi) \leq rn_P$ para un cierto r. Basta tomar $D' = D - div(\psi) \equiv D$, puesto que de lo anterior se deduce que $rZ \succ D'$.

□

Corolario 4.23. *Si $l(D_0) = gr(D_0) + 1 - g$ y $D \equiv D' \succ D_0$, entonces $l(D) = gr(D) - 1 + g$.*

Demostración. Siguiendo con la notación anterior, $s(D) = s(D') \geq s(D_0)$, por tanto $gr(D) + 1 - l(D) \geq gr(D_0) + 1 - l(D_0) = g$. El teorema de Riemann garantiza la desigualdad opuesta. □

Corolario 4.24. *Existe un natural N de modo que para todo divisor D de grado mayor que N, $l(D) = gr(D) + 1 - g$.*

Demostración. El corolario anterior y la definición de género nos garantizan la existencia de un divisor D_0 para el cual se cumple la igualdad del teorema de Riemann. Sea $N = gr(D_0) + g$, entonces si D es un divisor con grado mayor que N, $gr(D - D_0) + 1 - g \geq N - gr(D_0) + 1 - g = 1$. El teorema de Riemann garantiza que $l(D - D_0) \geq gr(D - D_0) + 1 - g = 1 > 0$, de forma que existe $\varphi \in L(D - D_0)$ no nulo, es decir, $D - D_0 + div(\varphi) \succ 0 \Longrightarrow D \equiv D + div(\varphi) \succ D_0$ y $s(D) = s(D_0) = g$. □

Nótese que la hipótesis que se mencionó al principio de que $\mathcal{C}$ fuera no singular es necesaria para poder garantizar que el anillo local en cada punto sea un AVD y, por lo tanto, tenga sentido hablar de la función de orden. Si $\mathcal{C}$ tuviera puntos singulares, se construiría su modelo no singular [Ful08, sec.7.5], que resumidamente se trata de una curva proyectiva no necesariamente plana, irreducible y no singular birracionalmente equivalente a $\mathcal{C}$. Dos variedades algebraicas V y V' (afines o proyectivas) son birracionalmente equivalentes si existe una aplicación racional, φ, que sea isomorfismo birracional, es decir, una tupla de funciones racionales de $\mathbb{K}(V)$ de modo que para todo punto de V donde estén definidas dichas funciones la tupla de las imágenes sea un punto de V', y además exista la aplicación inversa, ψ, con las mismas condiciones anteriores y de forma que $\varphi(V)$ y $\psi(V')$ sean densos en la topología Zariski de V' y V, respectivamente. En este modelo no singular los puntos sin direcciones tangentes múltiples, es decir, los **puntos singulares ordinarios** y cuya multiplicidad es m se transforman en m puntos simples. La teoría de divisores y la noción de género que se ha desarrollado depende exclusivamente del cuerpo de funciones racionales de la curva, que resulta invariante (existe un isomorfismo) bajo transformaciones birracionales. Por tanto, se define el género de una curva singular como el de su modelo no singular.

El siguiente resultado permitirá calcular el género de cualquier curva, siempre y cuando sólo tenga puntos singulares ordinarios. Las transformaciones de Cremona nos permiten construir una curva plana proyectiva con puntos singulares ordinarios birracionalmente equivalente a cualquier curva dada.

Teorema 4.25. *Sea $\mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f)$ una curva proyectiva plana que solo posea puntos múltiples ordinarios de grado d. Sea $r_P = m_P(f)$ para todo $P \in \mathcal{C}$, entonces el género de la curva viene dado por la expresión*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{P\in\mathcal{C}} \frac{r_P(r_P-1)}{2}.$$

Demostración. Podemos asumir que la recta Z corta a $\mathcal{C}$ en d puntos distintos $Q_1, ..., Q_d$ todos ellos simples. Como existe únicamente un número finito de rectas que, pasando por un punto, sean tangentes a $\mathcal{C}$ o la corten en los finitos puntos múltiples, entonces con el debido cambio de variable que transforme la recta Z en cualquiera de las infinitas rectas que no cumplan las condiciones anteriores, el teorema de Bézout nos garantiza su corte con exactamente d puntos de $\mathcal{C}$.

Sea $E = \sum_{R\in\chi}(r_R - 1)R$, con χ el modelo no singular de $\mathcal{C}$ y r_R la multiplicidad de $\psi(R)$ en $\mathcal{C}$, donde ψ es el isomorfismo birracional entre χ y $\mathcal{C}$. Este divisor es efectivo y $gr(E) = \sum_{P\in\mathcal{C}} r_P(r_P-1)$ porque por cada punto ordinario de multiplicidad r_P en $\mathcal{C}$ existen r_P puntos simples en χ. Sean $m \geq d$ y $E_m = m\sum_{i=1}^{d} Q_i - E$ de grado $gr(E_m) = md - \sum_{P\in\mathcal{C}} r_P(r_P-1)$. Sean $P_1, ..., P_n$ los n puntos múltiples de $\mathcal{C}$ (proposición 3.29), consideremos ahora el sistema lineal de curvas $V_m = V_m((r_1-1)P_1, ..., (r_d-1)P_n)$, que tiene dimensión $dim_{\mathbb{K}}(V_m) \geq \frac{m(m+3)}{2} - \sum_{P\in\mathcal{C}} \frac{r_P(r_P-1)}{2}$ y la igualdad se cumple si m es lo suficientemente grande, por el teorema 3.40 (podemos extender la suma a todo $P \in \mathcal{C}$ porque los puntos no singulares no contribuyen a la misma).

Sea $\alpha : V_m \longrightarrow L(E_m)$ definido por $\alpha(G) = G/\bar{z}^m$ (G designa tanto a la curva como a la clase del polinomio homogéneo). α se ha construido de forma que las multiplicidades de los puntos singulares de $\mathcal{C}$ (valor mínimo de $r_P - 1$) y las de los puntos simples de $\mathcal{C}$, incluyendo los Q_i, son las adecuadas para que $\alpha(G) = G/\bar{z}^m \in L(E_m)$. Claramente α constituye una aplicación lineal que verifica $\alpha(G) = 0$ si y sólo si f divide a G. Veamos que α es sobreyectiva. Sea $\varphi = \frac{\bar{h}}{\bar{g}} \in L(E_m)$, con h, g polinomios homogéneos del mismo grado, entonces $div(\bar{h}\bar{z}^m) \succ div(\bar{g}) + E$. Descompongamos $hz^m = sg + s'f$ con s, s' polinomios homogéneos (consultar [Ful08, sec. 8.3] para los detalles), entonces $\frac{\bar{h}}{\bar{g}} = \frac{\bar{s}}{\bar{z}^m}$ en $\mathbb{K}(f) = \mathbb{K}(\mathcal{C})$ y $\alpha(S) = \varphi$ (nótese que $div(\bar{s}) = div(\bar{h}\bar{z}^m) - div(\bar{g}) \succ E \Longrightarrow \bar{s} \in L(E_m)$.

Sea W_{m-d} el espacio vectorial de curvas proyectivas planas de grado $m - d$ como se definió en la sección 2.3, y $\beta : W_{m-d} \longrightarrow V_m$ la aplicación lineal dada por $\beta(H) = HF$, que verifica $m_{P_i}(FH) \geq r_{P_i} > r_{P_i} - 1 \Longrightarrow HF \in V_m$ y β está bien definida y es inyectiva.

Lo anterior prueba que la siguiente cadena de aplicaciones lineales constituye una sucesión exacta de espacios vectoriales.

$$0 \longrightarrow W_{m-d} \xrightarrow{\beta} V_m \xrightarrow{\alpha} L(E_m) \longrightarrow 0$$

Por ser una sucesión exacta $dim_{\mathbb{K}}(V_m) = dim_{\mathbb{K}}(W_{m-d}) + l(E_m)$ y por consiguiente

$$l(E_m) = \frac{m(m+3)}{2} - \sum_{P\in\mathcal{C}} \frac{r_P(r_P-1)}{2} - \frac{(m-d)(m-d+3)}{2} =$$

$$= \frac{m^2+3m-m^2+2md-d^2-3m+3d}{2} - \sum_{P\in\mathcal{C}} r_P(r_P-1) + \sum_{P\in\mathcal{C}} \frac{r_P(r_P-1)}{2} =$$

$$= md - \sum_{P\in\mathcal{C}} r_P(r_P-1) - \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1 + \sum_{P\in\mathcal{C}} \frac{r_P(r_P-1)}{2} =$$

$$= gr(E_m) - \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1 + \sum_{P\in\mathcal{C}} \frac{r_P(r_P-1)}{2}.$$

Tomando m lo suficientemente grande, el corolario 4.24 garantiza el resultado. □

Observación 4.26. *En la demostración anterior se ha tomado $m > d$ para que W_{m-d} estuviera bien definido. Sin embargo, el divisor E_m está bien definido para cualquier m, de hecho destacamos E_{d-3}, que como veremos se tratará de un divisor canónico.*

Corolario 4.27. *Siguiendo la notación del teorema anterior $gr(E_{d-3}) = 2g - 2$.*

Demostración.

$$gr(E_{d-3}) = (d-3)d - \sum_{P\in\mathcal{C}} r_P(r_P-1) = (d-1)(d-2) - 2 + 2\left(g - \frac{(d-1)(d-2)}{2}\right) = 2g-2,$$

donde la penúltima igualdad se verifica por el teorema 4.25. □

Ejemplo 4.28. *La cúbica $F = ZY^2 - X^3 - aXZ^2 - bZ^3$ con $a, b \in \mathbb{R}$ es no singular si y sólo si $4a^3 + 27b^2 \neq 0$, por lo tanto, su género será 1. Las cúbicas no singulares de esta forma se denominan* ***curvas elípticas****.*

Deshomogeneizando respecto de Z obtenemos el polinomio $f = y^2 - x^3 - ax - b$, que tendrá puntos múltiples cuando $f_y = 2y = 0$ y $f_x = -3x^2 - a = 0$, es decir, cuando el polinomio $x^3 + ax + b$ tenga raíces múltiples. Como su discriminante $4a^3 + 27b^2$ se anula si y solo si existen raíces múltiples, entonces una condición necesaria y suficiente para que los puntos de $U_3 \cap \mathcal{C}$ sean simples es que $4a^3 + 27b^2 \neq 0$. En la recta del infinito únicamente existe el punto $P = [0, 1, 0]$ que es regular porque $F_Z(P) \neq 0$. Además, si F es no singular, la fórmula del género nos garantiza que $g = 1$.

Ejemplo 4.29. *Con SAGE se han determinado los espacios $L(D)$ correspondientes a los divisores puntuales $D = P$ y $D' = 4P$ con $P = [0, 0, 1]$ para $\mathcal{C} = Y$ y F la cúbica anterior.*

Una base para $L(D)$ en $\mathbb{K}(\mathcal{C})$ es $\left\{1, \frac{\bar{Z}}{\bar{X}}\right\}$ y otra para $L(D')$ sería $\left\{1, \frac{\bar{Z}}{\bar{X}}, \frac{\bar{Z}^2}{\bar{X}^2}, \frac{\bar{Z}^3}{\bar{X}^3}, \frac{\bar{Z}^4}{\bar{X}^4}\right\}$, lo que significa que las únicas funciones racionales con polos de orden a lo sumo 4 son las combinaciones $\mathbb{K}-$lineales de las anteriores. Además, por el teorema de Riemann, $l(D) = 2 \geq 2 - g$ y $l(D') = 5 \geq 5 - g$, luego g podría tomar cualquier valor no negativo. Unas bases de los mismos espacios pero en $\mathbb{K}(F)$ son $\{1\}$ y $\left\{1, \frac{\bar{Z}}{\bar{X}}, \frac{\bar{Y}\bar{Z}}{\bar{X}^2}, \frac{\bar{Z}^2}{\bar{X}^2}\right\}$, de lo que se deduce que no hay funciones racionales en $\mathbb{K}(F)$ con P como polo simple y por el teorema de Riemann $l(D) = 1 \geq 2 - g$, luego $g > 0$.

4.3. Divisores canónicos

En esta sección, salvo que se diga lo contrario, R será un dominio de integridad que contiene a $\mathbb{K}$ y F su cuerpo de cocientes.

Definición 4.30. *Sea M un $R-$módulo. Una* ***derivación*** *en M sobre $\mathbb{K}$ es una aplicación $\mathbb{K}-$lineal $D : R \longrightarrow M$ que verifique la regla de Leibniz, es decir para todo $x, y \in R$*

$$D(xy) = xD(y) + yD(x),$$

Sea $f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ y $(a_1, ..., a_n) \in R^n$, se deduce de la definición anterior que

$$D(f(a_1, ..., a_n)) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a_1, ..., a_n)D(a_i).$$

Esto constituye una generalización de la regla de la cadena para polinomios de n variables.

Lema 4.31. *Si R es un dominio y M un espacio vectorial sobre F, entonces toda derivación $D : R \longrightarrow M$ sobre $\mathbb{K}$ se puede extender de forma única a una derivación $\tilde{D} : F \longrightarrow M$ sobre $\mathbb{K}$.*

Demostración. Sea $z = x/y \in F$ con $0 \neq y, x \in R$. Como $x = yz$, entonces $D(x) = y\tilde{D}(z) + zD(y)$, con lo cual $\tilde{D}(z) = y^{-1}(D(x) - zD(y))$ y la unicidad de $\tilde{D}$ quedaría probada. Veamos que $\tilde{D}(z) = y^{-1}(D(x) - zD(y))$ es, en efecto, una derivación. Sean $z_1 = x_1/y_1, z_2 = x_2/y_2 \in F$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$,

$$\tilde{D}(a_1z_1+a_2z_2) = \tilde{D}\left(\frac{a_1x_1y_2 + a_2x_2y_1}{y_1y_2}\right) = \frac{D(a_1x_1y_2 + a_2x_2y_1) - (a_1z_1 + a_2z_2)D(y_1y_2)}{y_1y_2} =$$

$$= \frac{a_1y_2D(x_1) + a_1x_1D(y_2) + a_2y_1D(x_2) + a_2x_2D(y_1) - (a_1z_1 + a_2z_2)(y_2D(y_1) + y_1D(y_2))}{y_1y_2}$$

$$= a_1\frac{D(x_1) - z_1D(y_1)}{y_1} + a_2\frac{D(x_2) - z_2D(y_2)}{y_2} = a_1\tilde{D}(z_1) + a_2\tilde{D}(z_2).$$

Por lo tanto $\tilde{D}$ es $\mathbb{K}-$lineal. Veamos que verifica la regla de Leibniz.

$$\tilde{D}(z_1z_2) = \frac{D(x_1x_2) - z_1z_2D(y_1y_2)}{y_1y_2} = \frac{x_2D(x_1) - z_1z_2y_2D(y_1) + x_1D(x_2) - z_1z_2y_2D(y_1)}{y_1y_2} =$$

$$= x_2\frac{D(x_1) - z_1D(y_1)}{y_1y_2} + x_1\frac{D(x_2) - z_2D(y_2)}{y_1y_2} = z_2\tilde{D}(z_1) + z_1\tilde{D}(z_2).$$

□

Definición 4.32. *Sea $[x]$ un símbolo con $x \in R$. Se define L como el $R-$módulo libre generado por el conjunto $\{[x] : x \in R\}$ y a N como el submódulo de L generado por:*

1. $\{[x + y] - [x] - [y] : x, y \in R\}$
2. $\{[\lambda x] - \lambda[x] : \lambda \in \mathbb{K}, x \in R\}$

3. $\{[xy] - y[x] - x[y] : x, y \in R\}$.

Sean $\Omega_{\mathbb{K}} = L/N$*,* dx *la clase de* $[x]$ *en* L/N *y* $d : R \longrightarrow \Omega_{\mathbb{K}}$ *la aplicación dada por* $d(x) = dx$*.* $\Omega_{\mathbb{K}}$ *constituye un módulo que se denomina* ***módulo de las diferenciales*** *de* R *sobre* $\mathbb{K}$*, cuyos elementos se llaman* ***diferenciales*** *y* d *es una derivación sobre* $\mathbb{K}$*.*

Lema 4.33. *Para todo* $R-$*módulo* M *y toda derivación* $D : R \longrightarrow M$ *sobre* $\mathbb{K}$ *, existe un único homomorfismo de* $R-$*módulos* $f : \Omega_{\mathbb{K}} \longrightarrow M$ *tal que* $f(dx) = D(x)$ *para todo* $x \in R$*.*

Demostración. Sea $\tilde{f} : L \to M$ dado por $\tilde{f}(\sum a_i[x_i]) = \sum a_i D(x_i)$, que constituye un homomorfismo de $R-$módulos cuyo núcleo contiene a N. Por tanto, $\tilde{f}$ induce el homomorfismo $f : \Omega_{\mathbb{K}} \longrightarrow M$ que buscamos, dado que $f(dx) = \tilde{f}([x]) = D(x)$ para todo $x \in R$. La unicidad viene garantizada al determinarse la imagen de dx. □

En el caso de que $f \in R = \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$

$$d(f(x_1, ..., x_n)) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_1, ..., x_n) d(x_i),$$

entonces $\Omega_{\mathbb{K}}$ está generado como $R-$módulo por $dx_1, ..., dx_n$.
De forma análoga al lema 4.31 si F es el cuerpo de cocientes de un dominio R y $z = x/y \in F$ con $x, y \in R$, entonces $dz = y^{-1}dx - y^{-1}zdy$. En particular, si $F = \mathbb{K}(x_1, ..., x_n)$, $\Omega_{\mathbb{K}}$ es un espacio vectorial sobre F de dimensión finita generado por $dx_1, ..., dx_n$ como $R-$módulo.

Proposición 4.34. *Sea* $f \in \mathbb{K}[x, y]$ *no constante e irreducible,* $R = \Gamma(V(f))$ *su anillo de coordenadas y* $F = \mathbb{K}(V(f))$ *su cuerpo de funciones racionales. Entonces* $\Omega_{\mathbb{K}}$ *es un espacio vectorial de dimensión 1 sobre* $\mathbb{K}$ *y* dx *es base para cualquier* $x \in F \backslash \mathbb{K}$*.*

Demostración. Por ser f no constante, asumamos sin pérdida de generalidad que $f_y \neq 0$. Por ser f irreducible, f_y no divide a f. Como $0 = \bar{f} \in F$, entonces $0 = d(\bar{f}) = \bar{f}_x dx + \bar{f}_y dy \Rightarrow dy = udx$, con $u = -\bar{f}_x/\bar{f}_y$. Como dx, dy generan $\Omega_{\mathbb{K}}$ y se ha expresado dy en función de dx, entonces dx genera $\Omega_{\mathbb{K}}$, por tanto, $dim_{\mathbb{K}}\Omega_{\mathbb{K}} \leq 1$. Para ver la igualdad bastará con probar que $\Omega_{\mathbb{K}}$ no es nulo, es decir, por los lemas 4.31 y 4.33, será suficiente con encontrar una derivación $D : R \longrightarrow M$ no idénticamente nula para algún espacio vectorial M sobre F. Tomando $M = F$ y $\bar{g}$ la imagen en R de $g \in \mathbb{K}[x, y]$, entonces $D(\bar{g}) = \bar{g}_x - u\bar{g}_y$ es una derivación porque las parciales son lineales y verifican la regla de Leibniz. Si tomamos $g = x$, entonces $D(\bar{g}) = 1$, luego D es no nula y dx es base de $\Omega_{\mathbb{K}}$. □

Observación 4.35. *De esta proposición se deduce que para toda curva afín plana e irreducible* $V(f)$ *y para todos* $\varphi, x \in \mathbb{K}(V(f))$ *con* $x \notin \mathbb{K}$*, existe un único* $v \in \mathbb{K}(V(f))$ *tal que* $d\varphi = vdx$*. Es común escribir* $v = \frac{d\varphi}{dx}$ *y denominarlo* ***derivada*** *de* φ *con respecto de* x*.*

Proposición 4.36. *Sea* $V = V(f)$ *una curva afín plana irreducible y* $P \in V$ *no singular. Si* t *es un parámetro de uniformización de* $\mathcal{O}_P(V)$ *y* $\varphi \in \mathcal{O}_P(V)$*, entonces* $\frac{d\varphi}{dt} \in \mathcal{O}_P(V)$*.*

Demostración. Sean $\bar{x}, \bar{y} \in \Gamma(V)$ las imágenes de x e y. Denotemos por $\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}(V)$. Sea N un entero lo suficientemente grande para que $ord_P(\bar{x}') \geq -N$ y $ord_P(\bar{y}') \geq -N$. Sea $\bar{g} \in \Gamma(V)$, entonces $\bar{g}' = \bar{g}_x\bar{x}' + \bar{g}_y\bar{y}'$, por lo que $ord_P(\bar{g}') \geq -N$ para todo $\bar{g} \in \Gamma(V)$. Sea $\varphi \in \mathcal{O}_P(V)$, entonces $\varphi = \frac{\bar{g}}{\bar{h}}$ con $\bar{g}, \bar{h} \in \Gamma(V)$ y $\bar{h}(P) \neq 0$. Como $\varphi' = \bar{h}^{-2}(\bar{h}\bar{g}' - \bar{g}\bar{h}')$, se deduce que $ord_P(\varphi) = -2ord_P(\bar{h}) + ord_P(\bar{h}\bar{g}' - \bar{g}\bar{h}') \geq$

$min\{ord_P(\bar{h}\bar{g}'), ord_P(\bar{g}\bar{h}')\} = min\{ord_P(\bar{h}) + ord_P(\bar{g}'), ord_P(\bar{g}) + ord_P(\bar{h}')\} \geq -N$.
Como $\mathbb{K} \subset \mathcal{O}_P(V)$ y $\mathcal{O}_P(V)/\mathfrak{m} \cong \mathbb{K}$, la proposición 2.27 nos garantiza la existencia de $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{N-1} \in \mathbb{K}$ y $\beta \in \mathcal{O}_P(f)$, tales que $\varphi = \lambda_0 + \lambda_1 t + ... + \lambda_{N-1}t^{N-1} + \beta t^N$, por lo que $\varphi' = \lambda_1 + 2\lambda_2 t + ... + (N-1)\lambda_{N-1}t^{N-2} + \beta' t^N + N\beta t^{N-1}$. Como $ord_P(\beta') \geq -N$, entonces $\varphi' \in \mathcal{O}_P(V)$. □

Observación 4.37. *Si tomamos $\mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f)$ una curva proyectiva plana no singular e irreducible (como se considerará de ahora en adelante), todos los resultados anteriores se pueden aplicar, trabajando en todo caso con el polinomio deshomogeneizado.*

Definición 4.38. *Sean $\omega \in \Omega_{\mathbb{K}}$ un diferencial de $\mathcal{C}$, $P \in \mathcal{C}$ un punto de la curva y t un parámetro de uniformización de $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$. Como $\omega = \varphi dt$ con $\varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$ (proposición 4.34) definimos el **orden** de ω como $ord_P(\omega) = ord_P(\varphi)$.*

Veamos que la definición anterior no depende del parámetro de uniformización. Sean t y r dos parámetros de uniformización de $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ de modo que $\omega = \varphi dt = \tau dr$, entonces $\frac{\varphi}{\tau} = \frac{dr}{dt} \in \mathcal{O}_P(\mathcal{C})$. Como $r = ut$ con u unidad, $\frac{dr}{dt} = u + t\frac{du}{dt}$, que evaluado en P, $\frac{dr}{dt}(P) = u(P) + t(P)\frac{du}{dt}(P) = u(P) \neq 0$, luego es unidad y $ord_P\left(\frac{\varphi}{\tau}\right) = 0 \Rightarrow ord_P(\varphi) = ord_P(\tau)$.

Definición 4.39. *Sea $\omega \in \Omega_{\mathbb{K}}$ un diferencial no nulo. Se define el divisor de ω como $div(\omega) = \sum_{P\in\mathcal{C}} ord_P(\omega)P$. $W = div(\omega)$ se denomina el **divisor canónico**.*

Como el orden de ω en un punto P viene determinado por el orden de una determinada función racional, que únicamente será no nulo si P es un cero o un polo, entonces existe un número finito de sumandos y el divisor anterior está bien definido. Además, los divisores canónicos son todos equivalentes, veámoslo. Sean ω, ω' dos diferenciales no nulas, como $\Omega_{\mathbb{K}}$ tiene dimensión uno, $\omega' = \varphi\omega$, para un cierto $\varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$. Sean $P \in \mathcal{C}$, t un parámetro de uniformización de $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$, $\omega = \varphi_1 dt$ y $\omega' = \varphi_2 dt$. Como $ord_P(\omega) = ord_P(\varphi_1)$ y $ord_P(\varphi\omega') = ord_P(\varphi) + ord_P(\varphi_2)$, entonces $div(\omega) = div(\varphi) + div(\omega') \Longrightarrow div(\omega') \equiv div(\omega)$ y los divisores canónicos tienen todos el mismo grado.

Ejemplo 4.40. *Si consideramos la recta $L = aX + bY + cZ$ con $a, b, c \neq 0$, determínese el grado del divisor de $\omega = dx$ donde $x = \frac{X}{Z}$. En este ejemplo y los siguientes $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

Deshomogeneizando respecto de Z, se obtiene $ax + by + c = 0$ con $y = \frac{Y}{Z}$. Por lo tanto, el único cero de la función racional x es el punto $P = \left[0, -\frac{c}{b}, 1\right]$. Como tanto x como y son parámetros de uniformización en el anillo local en P, para determinar el orden de dx en P sólo hay que tener en cuenta que $dx = 1dx$, por lo tanto $ord_P(dx) = 0$. Deshomogeneizando respecto de X, obtenemos $a + bu + cv$ con $u = \frac{Y}{X}$ y $v = \frac{Z}{X}$, luego el punto $Q = \left[1, -\frac{a}{b}, 0\right]$ es un polo de x. Del mismo modo u, v son parámetros de uniformización en el anillo local de Q. Como $\frac{X}{Z} = v^{-1}$ entonces $dx = dv^{-1} = -v^{-2}dv$ y $ord_Q(dx) = -2$. Como no existen más ceros o polos en x vista como función racional de $\mathbb{K}(L)$, entonces $div(\omega) = -2Q$ y $gr(div(\omega)) = -2$. Nótese que el divisor de x es $div(x) = P - Q \neq div(dx)$.

Ejemplo 4.41. *Consideremos la parábola $\mathcal{C} = YZ - X^2$, determínese el grado del divisor de $\omega = dy$ donde $y = \frac{Y}{Z}$.*

La función racional $y \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$ tiene un cero en el punto $P = [0, 0, 1]$ y un polo en el $Q = [0, 1, 0]$, por lo que basta estudiar el orden de ω en estos dos puntos para determinar $div(\omega)$, dado que $ord_R(y) = 0$ en todos los demás puntos. Estudiemos P en U_3 y Q en U_2. Deshomogeneizando respecto de Z tenemos que $y - x^2 = 0$, donde $x = \frac{X}{Z}$ es parámetro de uniformización. Como $dy - 2xdx = 0$, entonces $dy = 2xdx$ luego $ord_P(\omega) = 1$. Deshomogeneizando respecto de Y tenemos que $z - \tilde{x}^2 = 0$, donde ahora $\tilde{x} = \frac{X}{Y}$ y $z = \frac{Z}{Y} = y^{-1}$. Como $\tilde{x}$ es parámetro de uniformización y $\tilde{x}^2 = z = y^{-1}$, entonces $dz = -y^{-2}dy = 2\tilde{x}d\tilde{x} \Longrightarrow dy = -2\tilde{x}y^2d\tilde{x}$, luego $ord_Q(\omega) = ord_Q(-2\tilde{x}y^2) = ord_Q(-2\tilde{x}z^{-2}) = ord_Q(-2\tilde{x}^{-3}) = -3$, por lo que $div(\omega) = P - 3Q$ y $gr(div(\omega)) = -2$.

Ejemplo 4.42. *Consideremos la cúbica no singular $\mathcal{C} = ZY^2 - X^3 + XZ^2$, determinar el grado del divisor de $\omega = dx$ con $x = \frac{X}{Z}$.*

Deshomogeneizando respecto de Z obtenemos $y^2 - x^3 + x = 0$ donde $y = \frac{Y}{Z}$, luego sólo existen tres ceros de x en U_3 como función racional, $P_1 = [0,0,1]$, $P_2 = [1,0,1]$ y $P_3 = [-1,0,1]$. Además, como $y^2 = x(x^2-1) = xa$ donde $a = x^2 - 1$ es unidad en $\mathcal{O}_{P_1}(\mathcal{C})$, entonces y es parámetro de uniformización. Como $2ydy - 3x^2dx + dx = 0 \Longrightarrow dx = 2ybdy$ con $b = \frac{1}{3x^2-1}$ unidad, entonces $ord_{P_1}(\omega) = 1$. Con la traslación $x = u + 1$ $y^2 = u(u+1)(u+2) = u^3+3u^2+2u = u(u^2+3u+2)$ podemos estudiar el orden en P_2 donde y es de nuevo parámetro de uniformización. Como $2ydy = (3u^2 + 6u + 2)du = cdu$ con $c = 3u^2+6u+2$ unidad, entonces $ord_{P_2}(dx) = ord_{P_2}(d(x+1)) = ord_{P_2}(du) = 1$. De forma similar $ord_{P_3}(\omega) = 1$. Deshomogeneizando respecto de Y tenemos $z - \tilde{x}^3 + \tilde{x}z^2 = 0$, donde $\tilde{x} = \frac{X}{Y}$, $z = \frac{Z}{Y}$ y $Q = [0,1,0]$ es el único polo de x. Como $z = e\tilde{x}^3$ con $e = \frac{1}{1+\tilde{x}z}$ unidad en $\mathcal{O}_Q(\mathcal{C})$, $\tilde{x}$ es parámetro de uniformización. Además, $dz - 3\tilde{x}^2d\tilde{x} + 2z\tilde{x}dz + z^2d\tilde{x} = 0$ $dz = \frac{3\tilde{x}^2-z^2}{1+2\tilde{x}z}d\tilde{x}$, por tanto $dz = f(3\tilde{x}^2 - e^2\tilde{x}^6)d\tilde{x} = g\tilde{x}^2d\tilde{x}$ con $f = \frac{1}{1+2\tilde{x}z}$ y $g = f(3-\tilde{x}^4)$ unidades. Como $x = \frac{X}{Z} = \frac{X}{Y}\frac{Y}{Z} = \tilde{x}z^{-1}$, entonces $dx = z^{-1}d\tilde{x} - z^{-2}\tilde{x}dz = e^{-1}\tilde{x}^{-3}d\tilde{x} - e^{-2}\tilde{x}^{-6}\tilde{x}g\tilde{x}^2d\tilde{x} = (e^{-1} - e^{-2}g)\tilde{x}^{-3}d\tilde{x}$. Dado que $e^{-1} - e^{-2}g = 1 + \tilde{x}z - (1+\tilde{x}z)^2 \cdot \frac{\tilde{x}^2(3-\tilde{x}^4)}{1+2\tilde{x}z}$ en $\tilde{x} = 0$, $z = 0$ no se anula, entonces es unidad en $\mathcal{O}_Q(\mathcal{C})$ y $ord_Q(\omega) = -3$. Por consiguiente, $div(\omega) = P_1 + P_2 + P_3 - 3Q$ y $gr(div(\omega)) = 0$.

Observación 4.43. *Los ejemplos anteriores muestran que para las rectas y un caso de cónica, ambas curvas de género nulo, todos los divisores canónicos tienen grado -2 y en el caso de una curva elíptica, de género uno, el grado del divisor es cero. El objetivo ahora es relacionar el género de la curva con el grado de sus divisores canónicos.*

Teorema 4.44. *Sea $\mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f)$ de grado $d \geq 3$ que solo posea puntos múltiples ordinarios y sea $E = \sum_{R\in\chi}(r_R - 1)R$, donde χ es el modelo no singular de $\mathcal{C}$ y r_P la multiplicidad de $\psi(R)$ en $\mathcal{C}$, siendo ψ el isomorfismo birracional entre χ y $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{G}$ otra curva proyectiva plana de grado $d-3$ que no contenga a $\mathcal{C}$. Entonces $div(\mathcal{G}) - E$ es un divisor canónico.*

Demostración. Del mismo modo que en la demostración del teorema 4,25, podemos asumir que la recta Z corta a $\mathcal{C}$ en d puntos distintos y simples $Q_1, ..., Q_d$. Podemos suponer también, mediante el cambio de variable adecuado, que $[1,0,0] \notin \mathcal{C}$ y que ninguna dirección tangente a $\mathcal{C}$ en un punto múltiple pase por el $[1,0,0]$. Sean $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ dos curvas proyectivas planas de grado $d-3$ que no contengan a $\mathcal{C}$, como $div(\mathcal{G}_1) - E = div(\mathcal{G}_2) - E + div\left(\frac{\mathcal{G}_1}{\mathcal{G}_2}\right)$ y $\frac{\mathcal{G}_1}{\mathcal{G}_2}$ se puede ver como una función racional en $\mathbb{K}(\mathcal{C})$ por ser el cociente de dos polinomios homogéneos de grado $d-3$, entonces $div(\mathcal{G}_1) - E \equiv div(\mathcal{G}_2) - E$. Como todas las curvas planas con estas características tienen divisores linealmente equivalentes, basta probar que $E_{d-3} = div(Z^{d-3}) - E = (d-3)\sum_{i=1}^{d} Q_i - E$ es canónico. Sean $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$ y $\omega = d\left(\frac{X}{Z}\right)$, entonces basta con probar que $div(\omega) = E_{d-3} + div\left(\frac{f_Y}{Z^{d-1}}\right)$, o equivalentemente,

$$div(\omega) - div(f_Y) = -2\sum_{i=1}^{d} Q_i - E, \tag{4.2}$$

dado que $\frac{f_Y}{Z^{d-1}} \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$.

Como $(f_*)_x dx + (f_*)_y dy = 0$, entonces $dx = -\frac{(f_*)_y}{(f_*)_x} dy = -\frac{f_Y}{f_X} dy$ y por tanto $ord_R(dx) - ord_R(f_Y) = ord_R(dy) - ord_R(f_X)$ para todo $R \in \chi$. Sea $R \in \chi$ tal que $\psi(R) = Q_i$ es uno de los d puntos del infinito, como $Q_i \neq [1,0,0]$ entonces podemos deshomogeneizar respecto de la primera variable y $f_* = \lambda_1 \left(\frac{Y}{X} - a\right) + \lambda_2 \frac{Z}{X} + f_2\left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right)$ con f_2 de grado mayor que uno y $a, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, por lo que $\frac{Z}{X}$ es parámetro de uniformización e $\frac{Y}{X}$ unidad. Por consiguiente $\frac{Z/X}{Y/X} = \frac{Z}{Y} = y^{-1}$ es parámetro de uniformización, luego dy^{-1} es base de $\Omega_{\mathbb{K}}$. Como $dy^{-1} = -\frac{1}{y^2} dy$, entonces $ord_R(dy) = -2$. Por ser $f_X(Q_i) \neq 0$ entonces $ord_R(f_X) = 0$ y a ambos lados de la igualdad 4.2 el orden en R es -2.

Sea $R \in \chi$ tal que $P = \psi(R)$ no sea un punto del infinito. Podemos suponer por una traslación que $\psi(R) = [0,0,1]$. Si Y no es tangente en $\psi(R)$, entonces y es parámetro de uniformización y $ord_R(y) = 0$. Como $m_P(f) = r_R$ e y es parámetro de uniformización, entonces debe ser que $ord_R(f_X) = r_R - 1$, por tanto a ambos lados de la ecuación 4.2 el orden en R es $r_R - 1$. Si Y no es tangente a $\mathcal{C}$ en P, entonces por hipótesis P no es múltiple, además $f_Y(P) \neq 0$ y $x = \frac{X}{Z}$ es parámetro de uniformización, luego a ambos lados de la igualdad 4.2 se tiene orden en R nulo.

□

Corolario 4.45. *El grado de un divisor canónico W es $2g - 2$.*

Demostración. Como todos los divisores canónicos son linealmente equivalentes, entonces todos tienen el mismo grado. El resultado se sigue del corolario 4.27 y el hecho de que E_{d-3} sea canónico. Si el grado de la curva es 1, ya se tiene probado en el ejemplo 4.40 que existe un divisor canónico de grado $2g - 2 = -2$ porque las rectas tienen género cero. Para tratar el único caso restante, el de las cónicas, basta con saber que toda cónica es birracionalmente equivalente a una recta, de hecho en [Gaet79] se prueba que todas las curvas de género cero son birracionalmente equivalentes y por tanto existe un isomorfismo entre los cuerpos de funciones racionales. □

Observación 4.46. *No es necesario mucho más esfuerzo para demostrar el teorema de Riemann-Roch, que se omite en este trabajo por encontrarse fuera los objetivos. Este teorema afirma que para todo divisor D y todo divisor canónico W de $\mathbb{K}(\mathcal{C})$,*

$$l(D) = gr(D) + 1 - g + l(W - D).$$

Una consecuencia del teorema es que el género de la curva coincide con $l(W)$.

4.4. Teorema de Riemann Hurwitz

En toda esta sección X e Y serán curvas proyectivas planas, irreducibles y no singulares. Si U es un abierto de Y, se denota por $\mathcal{O}_U(Y)$ al conjunto de funciones racionales de Y definidas en U.

Definición 4.47. *Una aplicación $F : X \longrightarrow Y$ se dice **morfismo** de curvas si verifica:*

1. *F es continua en las topologías Zariski de X e Y.*

2. *Para todo abierto $U \subset Y$, si $\varphi \in \mathcal{O}_U(Y)$, entonces $\varphi \circ F \in \mathcal{O}_{F^{-1}(U)}(X)$.*

Observación 4.48. *Todo morfismo $F : X \longrightarrow Y$ induce un homomorfismo entre los cuerpos de funciones racionales $\tilde{F} : \mathbb{K}(Y) \longrightarrow \mathbb{K}(X)$ dado por $\tilde{F} = \varphi \circ F$. Si $P \in X$ y $Q = F(P)$, este homomorfismo relaciona $\mathcal{O}_Q(Y)$ con $\mathcal{O}_P(X)$.*

Proposición 4.49. *Si $F : X \longrightarrow Y$ es un morfismo no constante, entonces F es sobreyectivo. Además, el homomorfismo inducido entre $\mathbb{K}(Y)$ y $\mathbb{K}(X)$ es inyectivo.*

Demostración. La prueba de este resultado requiere de la introducción del concepto de variedad completa, propiedad que cumplen todas las curvas proyectivas irreducibles. En [Hart77, cap.II prop.6.8] se prueba que la imagen de una curva proyectiva irreducible por un morfismo de curvas es una subvariedad completa y cerrada. Por ser Y irreducible entonces las subvariedades cerradas son un único punto o el total. Como F es no constante entonces $F(X) = Y$. Veamos la inyectividad de $\tilde{F}$. Supongamos que $\varphi \in \mathbb{K}(Y)$ no es constante, por lo que tiene un cero $P \in Y$, como F sobreyectiva, existe $Q \in X$ tal que $F(Q) = P$, luego $\tilde{F}(\varphi)(Q) = 0$, y $\tilde{F}(\varphi)$ no es constante. Es decir, se ha probado que si $\tilde{F}(\varphi)$ es constante, φ también lo es. Sean φ_1, φ_2 dos funciones racionales distintas de $\mathbb{K}(Y)$, si $\tilde{F}(\varphi_1)$ y $\tilde{F}(\varphi_2)$ tienen distintos ceros o polos, o los mismos pero con distinta multiplicidad, entonces es claro que $\tilde{F}(\varphi_1) \neq \tilde{F}(\varphi_2)$. Si tienen los mismos ceros y polos, y con idénticas multiplicidades, entonces $\tilde{F}(\varphi_1) = \lambda \tilde{F}(\varphi_2)$ con $\lambda \in \mathbb{K}$, luego $\frac{\tilde{F}(\varphi_1)}{\tilde{F}(\varphi_2)} = \tilde{F}\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right) = \lambda \Rightarrow \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \mu \in \mathbb{K}$. Como $\tilde{F}$ deja fijas las constantes y $\mu \neq 1$ porque $\varphi_1 \neq \varphi_2$, entonces $\lambda \neq 1$ y $\tilde{F}(\varphi_1) \neq \tilde{F}(\varphi_2)$.

□

Observación 4.50. *La inyección entre los cuerpos de funciones racionales cuando existe un morfismo no constante, que además es la identidad en $\mathbb{K}$, se identifica con la inclusión de $\mathbb{K}(Y)$ en $\mathbb{K}(X)$. Por ello, de ahora en adelante se abusará de notación considerando $\tilde{F}(\mathbb{K}(Y)) = \mathbb{K}(X)$.*

Lema 4.51. *La extensión $\mathbb{K}(X)$ sobre $\mathbb{K}(Y)$ es finita. El grado de dicha extensión se denomina* ***grado del morfismo****.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathbb{K}(Y) \subset \mathbb{K}(X)$ una función racional no constante. Hemos visto que tanto $\mathbb{K}(Y)$ como $\mathbb{K}(X)$ son extensiones algebraicas y finitas sobre $\mathbb{K}(\varphi)$. Al darse la cadena de inclusiones $\mathbb{K}(\varphi) \subset \mathbb{K}(Y) \subset \mathbb{K}(X)$, entonces $\mathbb{K}(X)$ es algebraica sobre $\mathbb{K}(Y)$ y finita. □

Definición 4.52. *Sea $F : X \longrightarrow Y$ un morfismo no constante, $P \in X$ y t un parámetro de uniformización de $\mathcal{O}_{F(P)}(Y)$, visto como elemento en $\mathcal{O}_P(X)$ a través de la inyección entre los cuerpos de funciones. Se denomina el* ***índice de ramificación*** *de F en P a*

$$e_P(F) = ord_P(t).$$

Si $e_P(F) > 1$ se dice que P es un ***punto de ramificación*** *y $F(P)$ un* ***punto rama****.*

Lema 4.53. *Sean $P \in X$ y t un parámetro de uniformización de $\mathcal{O}_{F(P)}(Y)$, entonces dt es diferencial de $\mathbb{K}(X)$ y $ord_P(dt) = e_P(F) - 1$.*

Demostración. Sea r un parámetro de uniformización de $\mathcal{O}_P(X)$, entonces $t = ur^{e_P(F)}$ con u unidad, luego $dt = ue_P(F)r^{e_P(F)-1}dr$ y se obtiene el resultado. □

Para probar el teorema de Riemann-Hurwitz es necesario probar que el grado del divisor $\sum_{P\in F^{-1}(Q)} e_P(F)P$ coincide con el grado de la extensión $\mathbb{K}(X)$ sobre $\mathbb{K}(Y)$. En [Ful08, prob. 8.36] este resultado se deja como ejercicio para el lector y en [Hart77, prop 6.9] se da una prueba que desarrollaré con los detalles necesarios, incluyendo herramientas propias del álgebra conmutativa [Coh93, sec. 4.4].

Lema 4.54. *Sea A un DIP, F su cuerpo de cocientes y L una extensión separable de grado n sobre F. Sea B la clausura entera[1] de A en L, entonces B es un $A-$módulo libre de rango n.*

Demostración. Como L es separable, por el teorema del elemento primitivo y el lema 4.16, existe $\alpha \in F$ entero algebraico sobre A tal que $L = F(\alpha)$. Sea f el polinomio mínimo de α, de modo que $f \in A[x]$ por ser α entero algebraico sobre A. Sea D el discriminante de f, entonces $D \in A$. Veamos que la clausura entera de A es un submódulo del $A-$módulo libre generado por $\{1/D, \alpha/D, ..., \alpha^{n-1}/D\}$, lo cual es equivalente a probar que si $r \in L$ es un entero algebraico sobre A, entonces $Dr \in A[\alpha]$.

Sea r entero algebraico sobre A, entonces $r = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\alpha^i$, con $a_i \in F$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ los conjugados de α en la clausura normal de L sobre F, y sea $r_j = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\alpha_j^i$. En términos matriciales

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & ... & \alpha_1^{n-1} \\ & & ... & \\ 1 & \alpha_n & ... & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

Multiplicando a ambos lados por la matriz adjunta de la primera, $Adj(M)$

$$MAdj(M) \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = Adj(M) \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Como $MAdj(M)$ coincide con el determinante de la matriz de Vandermonde, es decir, el producto de todos los $\alpha_i - \alpha_j$ con $i \neq j$, entonces $MAdj(M)$ es entero algebraico sobre A y como los α_j^i son enteros algebraicos sobre A, entonces $Adj(M)$ es una matriz de elementos enteros algebraicos sobre A. Como $D = (MAdj(M))^2$, al multiplicar por $MAdj(M)$

$$D \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = M(Adj(M))^2 \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix},$$

entonces Da_i es entero algebraico sobre A, por lo que $Da_i \in B \cap F = A$, dado que los DIP son íntegramente cerrados en su cuerpo de cocientes, y $Dr \in A[\alpha]$. Ya hemos visto que B es un submódulo del $A-$módulo libre $\langle 1/D, \alpha/D, ..., \alpha^{n-1}/D\rangle$. Como A es DIP, entonces B es un $A-$módulo libre, falta ver que tiene rango n.

Como $\{1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}\}$ son independientes sobre A, entonces el rango de B es al menos n. Si $r_1, ..., r_{n+1} \in B$ son linealmente dependientes sobre F, entonces $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i r_i = 0$ con $\lambda_i \in F$, que al multiplicar por los denominadores de λ_i obtenemos $\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i r_i = 0$ con $\mu_i \in A$ y son linealmente dependientes sobre A, por lo que el rango de B es n. □

[1]La clausura entera de un subanillo S en un anillo R es el conjunto de todos los elementos en R que son enteros algebraicos sobre S. Se dice que S es íntegramente cerrado sobre R si coincide con su clausura entera sobre R.

Lema 4.55. *Sean $F : X \longrightarrow Y$ un morfismo no constante de grado n y $Q \in Y$. El divisor*

$$\sum_{P \in F^{-1}(Q)} e_P(F)P$$

es efectivo de grado n.

Demostración. Como $\mathbb{K}$ es de característica cero, entonces $\mathbb{K}(X)$ es una extensión separable de $\mathbb{K}(Y)$. Sea $Q \in Y$, $A = \mathcal{O}_Q(Y)$ y t un parámetro de uniformización de A. Como t es una función racional de $\mathbb{K}(X)\backslash\mathbb{K}$, entonces tiene una cantidad finita de ceros, incluyendo a los elementos de la fibra de Q, por tanto $F^{-1}(Q) = \{P_1, ..., P_r\}$ es finita. Consecuentemente, existe una cantidad finita de anillos de valoración $\mathcal{O}_{P_1}(X), ..., \mathcal{O}_{P_r}(X)$, tales que $\mathcal{O}_{P_i}(X) \cap \mathbb{K}(Y) = A$. Podemos escoger parámetros de uniformización s_i para cada $\mathcal{O}_{P_i}(X)$ de modo que sean unidad en $\mathcal{O}_{P_j}(X)$ para todo $j \neq i$, dado que basta tomar una recta que pase por P_i y no por los demás P_j que no sea tangente a la curva X. Sea B la clausura entera de A en $\mathbb{K}(X)$, entonces $B = \bigcap_{i=1}^r \mathcal{O}_{P_i}(X)$.

Sea $m_i = (s_i) \cap B$, que constituye un ideal distinto de cero porque para k lo suficientemente grande $t^k s_i$ tendrá orden positivo en todos los $\mathcal{O}_{P_i}$, luego $t^k s_i \in B$. Además m_i es maximal porque $\mathbb{K} \subset \frac{B}{m_i} \subset \frac{\mathcal{O}_{P_i}}{(s_i)} = \mathbb{K}$. Si m es un ideal maximal de B y B_m su localización[2] veamos que $B_m = \mathcal{O}_{P_i}(X)$ para algún P_i, en cuyo caso $m = m_i$. Es claro que $B_m \subset \mathcal{O}_{P_i}(X)$ porque B es la intersección de todos los $\mathcal{O}_{P_i}(X)$ y B_m su localización. Para ver la igualdad, sea $\alpha \in \mathcal{O}_{P_i}(X)$ como para $k_1, ..., k_r$ naturales lo suficientemente grandes entonces $ord_{P_j}(\alpha s_1^{k_1} \cdot ... \cdot s_r^{k_r}) > 0$ para todo j, por lo tanto $\alpha s_1^{k_1} \cdot ... \cdot s_r^{k_r} \in B \subset B_m$. Como los s_j son unidades fuera de su anillo local, entonces $\alpha \in B_m$. Por tanto los maximales de B son los m_i y $\mathcal{O}_{P_i}(X)$ sus localizaciones.

Veamos que $tB = \bigcap_{i=1}^r (t\mathcal{O}_{P_i}(X) \cap B)$ para garantizar que $\frac{B}{tB} = \frac{B}{\bigcap_{i=1}^r (t\mathcal{O}_{P_i}(X) \cap B)}$. Si $b \in B$, entonces $tb \in t\mathcal{O}_{P_i}(X) \cap B$ para todo i. Por otro lado si $b \in \bigcap_{i=1}^r (t\mathcal{O}_{P_i}(X) \cap B)$ entonces para cada i existen $a_i, u_i \in B$ con $u_i \notin m_i$ de modo que $b = \frac{ta_i}{u_i}$. Por ser B dominio, entonces $bu_i = ta_i \in tB$. Como $(u_1, ..., u_r) = (1)$ por no estar contenido en ningún maximal, entonces existen $c_i \in B$ tales que $\sum_{i=1}^r c_i u_1 = 1$, lo que implica que $b = 1 \cdot b = \sum_{i=1}^r c_i u_1 b = \sum_{i=1}^r c_i a_i t \in tB$.

Si vemos que los ideales $I_i = (t\mathcal{O}_{P_i}(X) \cap B)$ son comaximales el teorema chino de los restos aseguraría

$$\frac{B}{tB} = \frac{B}{\bigcap_{i=1}^r I_i} = \prod_{i=1}^r \frac{B}{I_i}.$$

Es evidente que $I_i \subset m_i$, si probamos que $I_i \not\subset m_j$ para todo $j \neq i$, entonces I_i y I_j serán comaximales. Sea $t = u_j s_j^{e_{P_j}(F)} \in \mathcal{O}_{P_j}(X)$, entonces $ord_{P_j}(u_j) = 0$ pero $ord_{P_k}(u_j) = ord_{P_k}(t) > 0$ para todo $k \neq j$, además $u_j \in B$. Por consiguiente, $u_j \notin m_j$ pero $u_j = t/s_j^{e_{P_j}(F)} \in I_i$, lo que prueba que los I_i son comaximales.

Utilicemos $s_i \in \mathcal{O}_{P_i}(X)$ para encontrar un parámetro de uniformización de $\mathcal{O}_{P_i}(X)$ contenido en B; $s_i = \frac{a_i}{v_i}$ con $a_i, v_i \in B$ y $v_i \notin m_i$, por lo que $ord_{P_i}(v_i) = 0$ y $ord_{P_i}(a_i) = ord_{P_i}(s_i) = 1$. Consecuentemente $(t) = \left(a_i^{e_{P_i}(F)}\right)$. Si probamos para cada i el isomorfismo

[2] Se entiende por localización de un ideal primo I en un dominio D al subanillo local del cuerpo de cocientes de D cuyos denominadores no pertenecen a I.

$$\frac{B}{I_i} \simeq \frac{\mathcal{O}_{P_i}(X)}{\left(a_i^{e_{P_i}(F)}\right)} = \frac{\mathcal{O}_{P_i}(X)}{(t)} \Longrightarrow \frac{B}{tB} \simeq \prod_{i=1}^{r} \frac{\mathcal{O}_{P_i}(X)}{\left(a_i^{e_{P_i}(F)}\right)}, \tag{4.3}$$

entonces $dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{B}{tB}\right) = \sum_{i=1}^{r} e_{P_i}(F)$. Como $A = \mathcal{O}_Q(Y)$ es un DIP con cuerpo de fracciones $\mathbb{K}(Y)$, $\mathbb{K}(X)$ es una extensión de $\mathbb{K}(Y)$ de grado n y B es la clausura entera de A, entonces, por el lema anterior, $B \simeq A^n$ como $A-$módulo, y por tanto

$$\frac{B}{tB} \simeq \left(\frac{A}{tA}\right)^n = \mathbb{K}^n \Longrightarrow \sum_{i=1}^{r} e_{P_i}(F) = n.$$

Para terminar la demostración probaremos el primer isomorfismo de la ecuación 4.3. Consideremos el homomorfismo de anillos entre B y $\mathcal{O}_{P_i}(X)/(t)$ dado por la composición de la inclusión i entre B y $\mathcal{O}_{P_i}(X)$ y la proyección canónica π en el cociente.

$$\phi = \pi \circ i : B \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{O}_{P_i}(X) \xrightarrow{\ \pi\ } \frac{\mathcal{O}_{P_i}(X)}{(t)} = \frac{\mathcal{O}_{P_i}(X)}{\left(a_i^{e_{P_i}(F)}\right)}.$$

Por construcción $ker(\phi) = I_i$, veamos que es sobreyectiva para garantizar el resultado por el primer teorema de isomorfía. Por la proposición 2.27, todo elemento de $\mathcal{O}_{P_i}(X)/\left(a_i^{e_{P_i}(F)}\right)$ se puede expresar como $\lambda_0+\lambda_1 a_i+...+\lambda_{e_{P_i}(F)-1}a_i^{e_{P_i}(F)-1}+\left(a_i^{e_{P_i}(F)}\right)$ con $\lambda_0, ..., \lambda_{e_{P_i}(F)-1} \in \mathbb{K}$, basta tomar $\lambda_0+...+\lambda_{e_{P_i}(F)-1}a_i^{e_{P_i}(F)-1} \in B$ cuya imagen por ϕ es el elemento anterior. □

Teorema 4.56. ***(Riemann-Hurwitz)*** *Si $F : X \longrightarrow Y$ es un morfismo no constante de grado n entre curvas proyectivas planas y no singulares de géneros g_X y g_Y, entonces*

$$2g_X - 2 = n(2g_Y - 2) + \sum_{P\in X}(e_P(F) - 1).$$

Demostración. Sea ω un diferencial no nulo de Y, $Q \in Y$ y $F^{-1}(Q) = \{P_1, ..., P_r\}$, que es no vacío por ser F sobreyectiva y finito (visto en el lema anterior). Sea t un parámetro de uniformización de $\mathcal{O}_Q(Y)$ y $m = ord_Q(\omega)$, es decir, en el anillo local $\mathcal{O}_Q(Y)$, $\omega = \varphi dt$ con $\varphi \in \mathbb{K}(Y)$ y $\varphi = ut^m$. El orden de ω en los anillos locales $\mathcal{O}_{P_i}(X)$ resulta $ord_{P_i}(\omega) = ord_{P_i}(\varphi)+ord_{P_i}(dt) = ord_{P_i}(ut^m)+e_{P_i}(F)-1 = m\cdot ord_{P_i}(t)+e_{P_i}(F)-1 = ord_Q(\varphi)e_{P_i}(F)+e_{P_i}(F)-1$. Denotemos por $W = \sum_{Q\in Y} ord_Q(\omega)Q$ y $W' = \sum_{P\in X} ord_P(\omega)P$, entonces

$$W' = \sum_{P\in X} ord_P(\omega)P = \sum_{P\in X} ord_{F(P)}(\varphi)e_P(F)P + \sum_{P\in X}(e_P(F) - 1)P =$$

$$= \sum_{Q\in Y} ord_Q(\varphi) \cdot \left(\sum_{P\in F^{-1}(Q)} e_P(F)P\right) + \sum_{P\in X}(e_P(F) - 1)P.$$

Basta ahora calcular los grados de los divisores a ambos lados de la igualdad, haciendo uso del lema anterior, teniendo en cuenta que W y W' son canónicos y $gr(W) = \sum_{Q\in Y} ord_Q(\varphi) = 2g_Y - 2$

$$2g_X - 2 = n(2g_Y - 2) + \sum_{P\in X}(e_P(F) - 1).$$

□

Capítulo 5

Un Punto de Vista Topológico

5.1. Espacios recubridores

En toda esta sección X y E son dos espacios topológicos. La noción de espacio recubridor viene dada a partir de una aplicación continua y sobreyectiva entre E y X, de forma que dicha aplicación induzca copias en E homeomorfas a abiertos de X.

Definición 5.1. *Una aplicación continua y sobreyectiva $p : E \longrightarrow X$ es una* ***aplicación de recubrimiento*** *si $\forall x \in X$ existe U entorno abierto de x tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$, donde los V_i son abiertos de E disjuntos dos a dos y la restricción de p a V_i, $p : V_i \longrightarrow U$, es homeomorfismo. En este caso se dice que E es un* ***espacio recubridor*** *de X y los abiertos U que satisfacen tales condiciones se llaman* ***abiertos distinguidos****. Cuando X es un abierto distinguido, entonces p es una aplicación de* ***recubrimiento trivial****.*

Cuando p es un recubrimiento trivial, E es la unión disjunta de copias homeomorfas a X.

Lema 5.2. *Sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación de recubrimiento. Para todo $x \in X$ la* ***fibra de x****, $p^{-1}(x)$, es un subespacio discreto de E.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$, queremos ver que $p^{-1}(x_0)$ tiene la topología discreta como subespacio de E. Por ser p de recubrimiento, existe un entorno abierto de x_0, U, con $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$, donde los V_i son abiertos disjuntos de E y $p|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ es homeomorfismo. Sea $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ y V_{i_0} el único de estos abiertos conteniendo a e_0. Como $\{e_0\} = V_{i_0} \cap p^{-1}(x_0)$, entonces $\{e_0\}$ es un abierto de $p^{-1}(x_0)$. Por consiguiente, todo punto es abierto y $p^{-1}(x_0)$ tiene la topología discreta. $\square$

Proposición 5.3. *Si $p : E \longrightarrow X$ es una aplicación de recubrimiento y X es conexo, entonces todas las fibras tienen el mismo cardinal, si es finito, o todas ellas son infinitas.*

Demostración. Definamos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \mu : & X & \longrightarrow & \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ & x & \longmapsto & \#p^{-1}(x), \end{array}$$

donde $\#p^{-1}(x)$, denota el cardinal de la fibra de x. Veamos que μ es continua, teniendo en cuenta que $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tiene la topología discreta. Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, queremos probar que $\mu^{-1}(n)$ es abierto en X. Sea $x_0 \in \mu^{-1}(n)$, por lo que $p^{-1}(x_0)$ tiene n elementos. Sea U abierto distinguido de x_0, veamos que $U \subset \mu^{-1}(n)$. Si $x \in U$, $p^{-1}(x)$ tiene un elemento en cada uno de los abiertos disjuntos $V_i \subset E$ en los que se descompone $p^{-1}(U)$, como existen exactamente n de éstos, porque $\#p^{-1}(x_0) = n$, entonces todas las fibras $p^{-1}(x)$ con $x \in U$ tienen cardinal $n \Rightarrow U \subset \mu^{-1}(n)$ y $\mu^{-1}(n)$ es abierto. Al ser μ continua y X conexo, entonces debe ser constante, porque de no serlo existirían $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ distintos, de modo que $X = \mu^{-1}(n_1) \cup \mu^{-1}((\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \setminus \{n_1\})$ son dos abiertos no vacíos y disjuntos. □

Definición 5.4. *Si $p : E \longrightarrow X$ es una aplicación de recubrimiento y X es conexo, el cardinal de las fibras se denomina* ***número de hojas del recubrimiento****.*

Ejemplo 5.5. *La aplicación $p : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ dada por $p(z) = z^k$, con k entero no negativo es de recubrimiento y tiene k hojas.*

Como p es la restricción de una aplicación continua a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, conjunto abierto, entonces p es continua, además para cada $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $p(\sqrt[k]{r}e^{i\theta/k}) = z$ luego es p sobreyectiva. Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ con $\theta_1 \neq 2n\pi$ y $r_1 > 0$, entonces basta tomar $U_1 = \{re^{i\theta} : 0 < \theta < 2\pi, r > 0\}$ como abierto distinguido porque $p^{-1}(U_1) = \bigcup_{j=1}^{k} V_j^1$ donde $V_j^1 = \{re^{i\theta} : 2\pi(j-1)/k < \theta < 2\pi j/k, r > 0\}$ conjuntos abiertos en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y disjuntos dos a dos en los que la raíz $k-$ésima, $p^{-1}(z) = \sqrt[k]{z}$, está bien definida y es continua. Por consiguiente, tanto $p|_{V_j^1}$ como su inversa con continuas, luego es homeomorfismo. Si $z_2 \in \mathbb{R}$ y $z_2 > 0$, entonces $U_2 = \{re^{i\theta} : -\epsilon < \theta < \epsilon, r > 0\}$ con $0 < \epsilon < 2\pi/k$ es un abierto distinguido para z_2 porque $p^{-1}(U_2) = \bigcup_{j=0}^{k-1} V_j^2$ donde $V_j^2 = \{re^{i\theta} : 2\pi j/k - \epsilon/k < \theta < 2\pi j/k + \epsilon/k, r > 0\}$ abiertos disjuntos dos a dos donde la raíz $k-$ésima está bien definida y $p|_{V_j^2}$ es homeomorfismo.

Nótese que si hubiéramos incluido el origen p ya no sería de recubrimiento si $k \neq 1$, porque $p^{-1}(0) = \{0\}$ solo tendría un elemento, de modo que las fibras ya no tendrían todas el mismo cardinal. Además, p no puede ser una aplicación de recubrimiento trivial porque de tomar $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ como abierto distinguido las ramas de la raíz $k-$ésima, es decir, los abiertos V_j intersecarían en la semirrecta real positiva.

5.2. Superficies de Riemann

Esta sección tiene como propósito introducir las superficies de Riemann y los puntos de ramificación y rama de una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann [Mir95]. Utilizando este lenguaje topológico se enunciará y demostrará el teorema de Riemann-Hurwitz de forma alternativa a la interpretación algebraica.

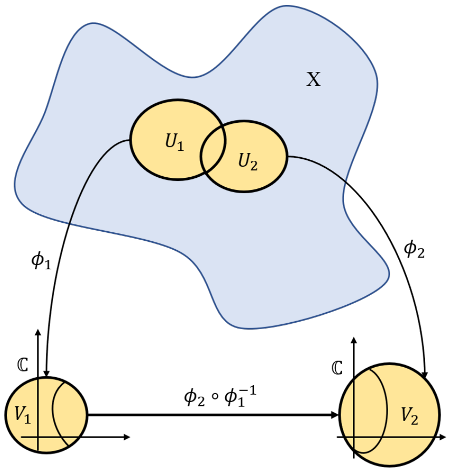
Definición 5.6. *Sea X un espacio topológico.*

1. *Una* ***carta compleja*** *en X es un homeomorfismo $\phi : U \longrightarrow V$, donde U es un abierto de X y V un abierto de $\mathbb{C}$. El abierto U se denomina* ***dominio*** *de carta; se dice que la carta está* ***centrada*** *en $P \in U$ si $\phi(P) = 0$.*

2. *Dos cartas $\phi_1 : U_1 \longrightarrow V_1$, $\phi_2 : U_2 \longrightarrow V_2$ se dicen* ***compatibles*** *si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ o el* ***cambio de cartas*** *es holomorfo, es decir,*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2),$$

holomorfa como función de variable compleja.



3. *Un **atlas complejo** $\mathcal{A}$ es un conjunto de cartas compatibles dos a dos cuyos dominios cubren X. Dos atlas complejos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ se dicen **equivalentes** si $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es atlas complejo. Que dos atlas sean equivalentes constituye una relación de equivalencia.*

4. *Se dice que un atlas complejo es **maximal** si no puede incluirse en ningún otro. Se puede probar que todo atlas complejo está contenido en un único atlas maximal, y que dos atlas son equivalentes si y sólo si están contenidos en el mismo atlas maximal.*

5. *Una **estructura compleja** sobre X es un atlas maximal $\mathcal{A}$ en dicho espacio, es decir, una clase de equivalencia de atlas complejos sobre X.*

Definición 5.7. *Una **superficie de Riemann** es un espacio topológico X Hausdorff, conexo y segundo numerable [1] que está dotado de una estructura compleja.*

Ejemplo 5.8. *La esfera unidad $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie de Riemann compacta que se conoce como esfera de Riemann.*

Consideremos las cartas

$$\phi_1 : \mathbb{S}^2 \backslash \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \phi_2 : \mathbb{S}^2 \backslash \{(0,0,-1)\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\phi_1(x,y,w) = \frac{x}{1-w} + i\frac{y}{1-w} \qquad \phi_2(x,y,w) = \frac{x}{1+w} + i\frac{y}{1+w},$$

con inversas

$$\phi_1^{-1}(z) = \left(\frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\mathrm{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \qquad \phi_2^{-1}(z) = \left(\frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{-2\mathrm{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{1-|z|^2}{|z|^2+1}\right).$$

Claramente, ϕ_1 y ϕ_2 son homeomorfismos en $\mathbb{S}^2$ con la topología heredada de la usual en $\mathbb{R}^3$. Además, el cambio de cartas

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \backslash \{0\}$$

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z},$$

[1] Un espacio topológico se dice que verifica el **segundo axioma de numerabilidad** o **segundo numerable** si la topología admite una base numerable.

es holomorfo. Por lo tanto, $\mathcal{A} = \{\phi_1, \phi_2\}$ es un atlas complejo cuyo atlas maximal define la estructura compleja sobre $\mathbb{S}^2$, que además es Hausdorff, conexa, compacta y segundo numerable (lo es $\mathbb{R}^3$ y el segundo axioma es una propiedad topológica hereditaria), por tanto superficie de Riemann.

Habitualmente en este contexto, la esfera de Riemann se suele denotar como $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, dado que $\mathbb{S}^2$ menos un punto es homeomorfa a $\mathbb{C}$, y el punto restante se hace corresponder con el punto del infinito. Escrita de este modo, es evidente el isomorfismo entre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con la recta proyectiva sobre el cuerpo de los complejos.

5.2.1. Aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann

Definición 5.9. *Sean X e Y dos superficies de Riemann y $P \in X$. La aplicación $F : X \longrightarrow Y$ se dice **holomorfa** en P si existen cartas $\phi : U_1 \longrightarrow V_1$ y $\psi : U_2 \longrightarrow V_2$ con $P \in U_1 \subset X$ y $F(P) \in U_2 \subset Y$ tales que la composición $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : V_1 \longrightarrow V_2$ es holomorfa como función de variable compleja. Si F está definida en un abierto $W \subset X$, diremos que F es holomorfa en W si lo es para todo $P \in W$, en particular diremos que F es holomorfa si lo es para todo $P \in X$.*

Observación 5.10. *La definición anterior no depende de las cartas escogidas.*

Sean $\phi_2 : \tilde{U}_1 \longrightarrow \tilde{V}_1, \psi_2 : \tilde{U}_2 \longrightarrow \tilde{V}_2$ dos nuevas cartas tales que $P \in \tilde{U}_1 \subset X$ y $F(P) \in \tilde{U}_2 \subset Y$. Como $\psi_2 \circ F \circ \phi_2^{-1} = (\psi_2 \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \phi_2^{-1})$ y cada uno de los tres términos agrupados entre paréntesis es una función holomorfa, bien por ser cambio de cartas o bien por la definición anterior, entonces $\psi_2 \circ F \circ \phi_2^{-1}$ es holomorfa.

Observación 5.11. *Una función holomorfa entre superficies de Riemann es continua.*

Basta con tomar una carta de cada superficie y ver que la composición es holomorfa como función de variable compleja, luego continua. Como las cartas son homeomorfismos, entonces la función inicial es continua.

Proposición 5.12. *Sean X e Y superficies de Riemann con X compacta y $F : X \longrightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante. Entonces, Y es compacta y F es sobreyectiva.*

Demostración. Sean ϕ, ψ cartas de X e Y, entonces $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ es holomorfa. Por el teorema de la función abierta, la imagen del dominio de ϕ por la composición anterior es abierto en Y. Como los dominios de cartas de X recubren la superficie, entonces $F(X)$ es abierto. Por otro lado, como F es continua y X compacto, entonces $F(X)$ es compacto, y por ser Y Hausdorff, entonces $F(X)$ es cerrado en Y. Dado que Y conexo y $F(X) \subset Y$ es cerrado y abierto, entonces $F(X) = Y$, luego Y compacto y F sobreyectiva. □

Proposición 5.13. *Sea $F : X \longrightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann. Para cada $y \in Y$ su fibra $F^{-1}(y)$ es un subespacio cerrado y discreto de X, además si X es compacto $F^{-1}(y)$ es finito y no vacío.*

Demostración. Sea ψ una carta centrada en y y para cada punto $x \in F^{-1}(y)$ sea ϕ una carta centrada en x. La función $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ es holomorfa y no constante como función de variable compleja, que tiene al origen como cero. Como los ceros de las funciones analíticas no constantes son puntos aislados (consecuencia del teorema de unicidad de las funciones analíticas), entonces en un entorno de x lo suficientemente pequeño existe una única contraimagen de y, por lo tanto, $F^{-1}(y)$ es un conjunto dotado de la topología discreta, luego cerrado en X. Si X es compacto, como todo cerrado en un compacto es compacto, entonces $F^{-1}(y)$ es compacto y discreto, luego podemos tomar cada punto como recubrimiento abierto y una cantidad finita de ellos recubrirá $F^{-1}(y)$, de lo que se deduce que $F^{-1}(y)$ ha de ser finito. Como la proposición anterior garantiza que F es sobreyectiva si X es compacto, entonces $F^{-1}(y)$ es no vacío. □

El siguiente resultado nos permitirá expresar cualquier aplicación holomorfa entre superficies de Riemann de forma local como sucedía con las curvas algebraicas y los AVD.

Teorema 5.14. ***(Forma local normal)*** *Sea $F : X \longrightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann y $P \in X$. Existe un único entero $m \geq 1$ tal que para cualquier carta de Y $\psi : U_2 \longrightarrow V_2$ centrada en $F(P)$, existe una carta de X, $\phi : U_1 \longrightarrow V_1$ centrada en P tal que $\psi(F(\phi^{-1}(z))) = z^m$.*

Demostración. Sea $\psi : U_2 \longrightarrow V_2$ una carta de Y centrada en $F(P)$ y tomemos cualquier carta $\phi_2 : U \longrightarrow V$ de X centrada en P. La función holomorfa $T(w) = \psi(F(\phi_2^{-1}(w)))$ tiene un desarrollo en serie de Taylor

$$T(w) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^i,$$

con $c_m \neq 0$ y $m \geq 1$ dado que $T(0) = 0$ por estar ψ y ϕ_2 centradas en $F(P)$ y P. Sacando factor común a w^m tenemos que $T(w) = w^m S(w)$, con $S(w)$ una función holomorfa en un entorno del origen y $S(0) \neq 0$. En este caso existe una función holomorfa R en un entorno del cero tal que $R(w)^m = S(w)$, luego $T(w) = (wR(w))^m$. Sea $\eta(w) = wR(w)$ que es holomorfa y verifica $\eta'(0) = R(0) \neq 0$, por lo tanto tiene inversa holomorfa por el teorema de la función inversa. Por consiguiente, la función $\phi = \eta \circ \phi_2$ es una carta centrada en P y definida en un entorno U_1 del mismo. Sea $\eta(w) = wR(w) = z$, entonces

$$\psi(F(\phi^{-1}(z))) = \psi(F(\phi_2^{-1}(\eta^{-1}(z)))) = T(\eta^{-1}(z)) = T(w) = (wR(w))^m = z^m.$$

Veamos la unicidad de m. Supongamos que existen cartas $\tilde{\psi} : \tilde{U}_2 \longrightarrow \tilde{V}_2, \tilde{\phi} : \tilde{U}_1 \longrightarrow \tilde{V}_1$ de modo que $\tilde{\psi}(F(\tilde{\phi}^{-1}(z))) = z^{m'}$, si tomamos $Q \in U_1 \cap \tilde{U}_1$ con $Q \neq P$, entonces se deduce que $m = m'$ porque ambos exponentes coinciden con el cardinal de $F^{-1}(F(Q))$. □

Definición 5.15. *Se denomina* ***índice de ramificación*** *en P, $e_P(F)$, de una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann F al entero m del teorema anterior. El punto P se dice de* ***ramificación*** *si $e_P(F) \geq 2$ y su imagen se llama* ***punto rama****.*

Observación 5.16. *Nótese que $\psi(F(\phi^{-1}))|_{V_1\backslash\{0\}} : V_1\backslash\{0\} \longrightarrow V_2\backslash\{0\}$ es una aplicación de recubrimiento (ejemplo 5.5), luego son los puntos de ramificación los que impiden que F sea de recubrimiento. Estas aplicaciones que son de recubrimiento salvo por un conjunto lo suficientemente pequeño (veremos que el conjunto de puntos de ramificación es finito) se denominan* ***recubrimientos ramificados****.* [2]

Proposición 5.17. *Sea $F : X \longrightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann, $P \in X$ y ϕ, ψ cartas de X e Y cuyos dominios contengan a P y $F(P)$. Sea $h(z) = \psi(F(\phi^{-1}(z)))$ y $z_0 = \phi(P)$, entonces P es punto de ramificación si y sólo si $h'(z_0) = 0$.*

[2] Un recubrimiento ramificado es una aplicación que deja de ser de recubrimiento en un conjunto denso en ninguna parte, es decir, que el interior de su clausura es vacío[Piek96, p.359].

Demostración. Sean $z_0 = \phi(P)$, $w_0 = \psi(F(P)) = h(z_0)$, entonces $\phi - z_0$ y $\psi - w_0$ son cartas centradas en P y $F(P)$. Por definición $e_P(F)$ es el menor exponente estrictamente positivo de la serie de potencias de $h(z) - h(z_0)$ en un entorno de z_0, de lo que se deduce

$$h(z) = h(z_0) + \sum_{i=e_P(F)}^{\infty} c_i(z - z_0)^i \Rightarrow h'(z) = \sum_{i=e_P(F)}^{\infty} ic_i(z - z_0)^{i-1}.$$

Por tanto, si $e_P(F) = 1$ entonces $h'(z_0) = c_1 \neq 0$ y si $e_P(F) > 1$ obtenemos $h'(z_0) = 0$. □

Corolario 5.18. *El conjunto de puntos de ramificación R de una aplicación holomorfa no constante entre dos superficies de Riemann X e Y es cerrado y discreto. Si, además, X es compacto entonces R y el conjunto de puntos rama es finito.*

Demostración. Por la proposición anterior, todo punto de ramificación es cero de una aplicación holomorfa, la derivada de h, y por tanto R es un conjunto cerrado y discreto. Si X es compacto, entonces R debe ser finito (mismo razonamiento que en la proposición 5.13). Como los puntos rama son las imágenes de los de ramificación, entonces deberá existir también un número finito de ellos. □

Observación 5.19. *Si X no es compacto R puede tener infinitos elementos.*

Tomando $X = Y = \mathbb{C}$ y $F(z) = \sin(z)$, como $F'(z) = \cos(z)$, entonces el conjunto $S = \{(2k + 1/2)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ es un subconjunto infinito de puntos de ramificación.

La siguiente proposición nos permitirá definir el grado de una aplicación holomorfa, equivalente al concepto algebraico dado por el grado de la extensión $\mathbb{K}(X)$ sobre $\mathbb{K}(Y)$.

Proposición 5.20. *Sea $F : X \longrightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Para cada $y \in Y$ el número*

$$d_y(F) = \sum_{P \in F^{-1}(y)} e_P(F)$$

no depende de y. Esta constante entera se denomina ***grado*** *de F y se denota por $gr(F)$.*

Demostración. Fuera de los puntos de ramificación tenemos una aplicación de recubrimiento, y además $X \backslash R$, $Y \backslash F(R)$ siguen siendo espacios conexos porque R es finito. Por tanto, $F^{-1}(y)$ tiene cardinal constante m para todo $y \in Y \backslash F(R)$ y $e_P(F) = 1$ $\forall P \in F^{-1}(y)$. Veamos qué ocurre en los puntos de ramificación $R = \{P_1, ..., P_n\}$. Sea $y \in F(R)$, tenemos que probar que $d_y(F)$ es igual al cardinal de la fibra de cualquier punto que no sea rama.

$$d_y(F) = \sum_{i=1}^{n} e_{P_i}(F)$$

Como los puntos de ramificación son aislados podemos encontrar un entorno U_i de cada uno de ellos que no contenga a ningún otro, cuyas imágenes V_i constituyen entornos de y. Localmente $F(P_i)$ se va a poder expresar en V_i como $z^{e_{P_i}(F)}$. Sea $y' \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ con $y' \neq y$, este punto tiene $e_{P_i}(F)$ contraimágenes en cada U_i, cuyo número total, correspondiente con la suma de los $e_{P_i}(F)$, debe ser m, dado que y' no es punto rama. □

5.3. Teorema de Riemann-Hurwitz

En esta sección se recordarán los conceptos de género y característica de Euler de una superficie topológica, entendida como espacio Hausdorff localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Las superficies de Riemann son un caso particular, por ser localmente homeomorfas a $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

Definición 5.21. *Sea S una superficie topológica sin borde.*

1. *Una **triangulación** sobre S es una descomposición de S en conjuntos cerrados y homeomorfos a un triángulo, de modo que la intersección de dos cualesquiera es o bien vacía, un único vértice o una única arista.*

2. *Dada una triangulación sobre S con v vértices, a aristas y c caras, se define la **característica de Euler** de S como la constante $\chi = v - a + c$.*

3. *Por el teorema de clasificación de superficies, toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a la suma conexa de g toros (si S es orientable) o g planos proyectivos (si S es no orientable). Esta constante g se define como el **género** de S.*

Para que la definición anterior tenga sentido hay probar que χ es independiente de la triangulación. La demostración se basa en la construcción de refinamientos, proceso que consiste en añadir vértices en el interior o en la frontera de algún triángulo y aristas que los unan. Se prueba en [Mir95, p.51] que dos triangulaciones admiten un refinamiento común y χ no varía al refinar una triangulación. Las superficies topológicas sin borde, compactas y conexas verifican la relación $\chi = 2 - 2g$, si S es orientable, y $\chi = 2 - g$ si no lo es. Supondremos conocido que toda superficie de Riemann es triangulable [AhlSa74, sec.8].

Lema 5.22. *Las superficies de Riemann son orientables y $\chi = 2 - 2g$.*

Demostración. Sean $\phi_1 : U_1 \longrightarrow V_1, \phi_2 : U_2 \longrightarrow V_2$ dos cartas de X superficie de Riemann con dominios no disjuntos. Para todo $(x, y) \in \phi_1(U_1 \cap U_2)$

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

es holomorfa como función de variable compleja, luego satisface las condiciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. Consecuentemente, el determinante jacobiano de la composición $J(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 > 0$ para todo punto de $\phi_1(U_1 \cap U_2)$. Nótese que no puede ser cero, porque de serlo $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ tendría que ser constante luego no sería homeomorfismo y ϕ_1, ϕ_2 lo son. Se sigue que X es orientable[3] y, por tanto, $\chi = 2 - 2g$. □

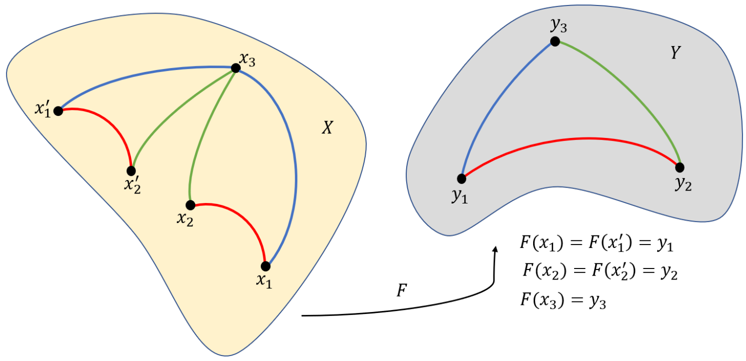
Teorema 5.23. ***(Riemann-Hurwitz)*** *Sean X e Y superficies de Riemann compactas de géneros g_X, g_Y y $F : X \longrightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante. Entonces*

$$2g_X - 2 = gr(F)(2g_Y - 2) + \sum_{P \in X} (e_P(F) - 1).$$

Demostración. Como X es compacta, el número de puntos de ramificación de F es finito, luego la suma anterior tiene un número finito de términos no nulos.

[3]Una variedad diferenciable se dice orientable si admite un atlas cuyos jacobianos de los cambios de cartas sean o bien todos positivos o bien negativos [Lee03, p.327]. Esta definición generaliza a la de orientación de una superficie.

Tomemos una triangulación de Y de modo que los puntos rama sean vértices y otra en X tal que los puntos de ramificación sean vértices y las imágenes de las aristas en X por F sean aristas en Y. Se puede garantizar la existencia de estas dos triangulaciones. Sean v, a, c y v', a', c' el número de vértices, aristas y caras en Y y X, respectivamente.



Como no existen puntos de ramificación en el interior de ningún triángulo en X, por cada cara en Y existirán $gr(F)$ caras en X, luego $c' = c{\cdot}gr(F)$. Análogamente $a' = a{\cdot}gr(F)$. Sin embargo, con el número de vértices no sucede lo mismo; si tomamos un vértice Q en Y, el número de vértices en X cuya imagen es Q será el cardinal de $F^{-1}(Q)$.

$$\#F^{-1}(Q) = \sum_{P\in F^{-1}(Q)} 1 = gr(F) + \sum_{P\in F^{-1}(Q)} (1 - e_P(F))$$

De este modo el número de vértices en X será:

$$v' = \sum_{\text{vértices } Q\in Y} \left(gr(F) + \sum_{P\in F^{-1}(Q)} (1 - e_P(F)) \right) =$$
$$= vgr(F) + \sum_{\text{vértices } Q\in Y} \sum_{P\in F^{-1}(Q)} (1 - e_P(F)) = vgr(F) + \sum_{P\in X} (1 - e_P(F)).$$

La última igualdad se deduce de que la contribución al sumatorio de los puntos que no son de ramificación es nula. Por lo tanto, en virtud del lema 5.22,

$$2g_X - 2 = a' - v' - t' = (a - v - t)gr(F) + \sum_{P\in X} (e_P(F) - 1) =$$
$$= (2g_Y - 2)gr(F) + \sum_{P\in X} (e_P(F) - 1).$$

□

Corolario 5.24. *Si X e Y son dos superficies de Riemann compactas y existe una aplicación holomorfa no constante $F : X \longrightarrow Y$, entonces $g_Y \leq g_X$.*

Demostración. Como $gr(F) \geq 1$, entonces $2g_X - 2g_Y \geq \sum_{P\in X}(e_P(F) - 1) \geq 0$ porque $e_P(F) \geq 1$, por tanto $g_X \geq g_Y$. □

Ejemplo 5.25. *Compruébese el teorema de Riemann-Hurwitz con la aplicación holomorfa $F : X = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow Y = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ entre esferas de Riemann dada por $F(z) = \frac{z^3}{1-z^2}$.*

La proposición 5.17 nos garantiza que los puntos de ramificación son los ceros de la derivada y su multiplicidad es una unidad mayor que la multiplicidad de dicho cero, es decir $f'(z) = \frac{3z^2-3z^4+2z^4}{(1-z^2)^2} = z^2\frac{3-z^2}{(1-z^2)^2} = 0 \Longrightarrow z = 0, \pm\sqrt{3}$, el primero de multiplicidad 3 y los siguientes de multiplicidad 2. Como existen exactamente tres puntos $P_1 = 1$, $P_2 = -1$ y $P_3 = \infty \in X$, ninguno de ellos de ramificación, tales que $F(P_i) = \infty \in Y, i = 1, 2, 3$, entonces $gr(F) = 3$. Como $g_X = g_Y = 0$, entonces se verifica el teorema de Riemann-Hurwitz $-2 = 3 \cdot (-2) + (3-1) + (2-1) + (2-1) = -2$.

5.4. Una Visión Conjunta

El objetivo de esta sección es entender la relación entre la interpretación algebraica y la topológica. Veremos que toda curva proyectiva compleja plana no singular es una superficie de Riemann compacta [Shaf94] y que la noción de género que definimos en el capítulo anterior coincide con el topológico. En toda esta sección $\mathcal{C}$ es una curva plana proyectiva compleja. Además, nos olvidaremos de la topología Zariski para considerar la topología heredada de la usual en $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{C}^3$, que es más fina que la primera (prop. 2.6).

Lema 5.26. *Todo conjunto algebraico de $\mathbb{P}^2$ es compacto, Hausdorff y segundo numerable.*

Demostración. Como todo conjunto algebraico es cerrado en la topología Zariski, entonces lo será también en la usual. Por ser $\mathbb{P}^2$ compacto, entonces todo conjunto algebraico es compacto. Como $\mathbb{P}^2$ es Hausdorff y segundo numerable, y éstas son propiedades hereditarias, entonces todo conjunto algebraico es compacto, Hausdorff y segundo numerable. □

Teorema 5.27. ***(Teorema de la función implícita, TFI)*** *Para todo $P \in \mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f)$ no singular existe $V \subset \mathcal{C}$, entorno de P, homeomorfo a una bola $B(0,\epsilon) \subset \mathbb{C}$, con $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.*

Demostración. Asumamos mediante un cambio de coordenadas que $P = [0, 0, 1] \in \mathcal{C}$. Sin pérdida de generalidad podemos considerar que $(f_*)_y(0,0) \neq 0$, donde f_* es el polinomio deshomogeneizado respecto de la tercera variable. Se estudiará la curva afín $V(f_*)$ vista como el conjunto de ceros de $f_*(x_0+ix_1, y_0+iy_1) = u(x_0, x_1, y_0, y_1)+iv(x_0, x_1, y_0, y_1)$ como aplicaciones de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^2$. Como f_* es holomorfa por ser un polinomio, las condiciones de Cauchy-Riemann nos garantizan que $\frac{\partial f_*}{\partial y}(0,0) = u_{y_0}+iv_{y_0} = v_{y_1}-iu_{y_1} \neq (0,0)$, por lo que $u_{y_0} = v_{y_1}$ y $v_{y_0} = -u_{y_1}$. Consecuentemente, el menor formado por las dos últimas columnas de la matriz jacobiana, mostrada a continuación, tiene determinante $u_{y_1}^2 + v_{y_1}^2 > 0$ y, por tanto, el rango de la matriz es máximo.

$$\begin{pmatrix} u_{x_0} & u_{x_1} & u_{y_0} & u_{y_1} \\ v_{x_0} & v_{x_1} & v_{y_0} & v_{y_1} \end{pmatrix}$$

Por el teorema de la función implícita en $\mathbb{R}^n$, existen abiertos $A, B \subset \mathbb{R}^2$ y una función $G : A \longrightarrow B$ con $G(0,0) = (0,0)$ dada por $G = (g, h)$, donde h y g son funciones reales de clase $\mathfrak{C}^1$ tales que $u(x_0, y_0, g(a,b), h(a,b)) = v(x_1, y_1, g(a,b), h(a,b)) = 0$ para todo $(a,b) \in A$. Si definimos $r(a+bi) = g(a,b) + ih(a,b)$, entonces $f_*(x, r(x)) = 0$ en todo punto de un entorno del $(0,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$, es decir, en un entorno de P la curva es el grafo de la aplicación continua G, y por tanto, homeomorfa a un entorno del origen en $\mathbb{R}^2$. Derivando de forma implícita mediante la regla de la cadena

$$\begin{pmatrix} u_{x_0} & u_{x_1} \\ v_{x_0} & v_{x_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{y_0} & u_{y_1} \\ v_{y_0} & v_{y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{x_0} & g_{x_1} \\ h_{x_0} & h_{x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tras despejar la matriz de las g y h y aplicar las condiciones de Cauchy-Riemann en u y v

$$\begin{pmatrix} g_{x_0} & g_{x_1} \\ h_{x_0} & h_{x_1} \end{pmatrix} = \frac{1}{u_{y_0}^2 + u_{y_1}^2} \begin{pmatrix} u_{y_0} & -u_{y_1} \\ u_{y_1} & u_{y_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x_0} & u_{x_1} \\ -u_{x_1} & u_{x_0} \end{pmatrix},$$

de lo que se deduce que $g_{x_0} = h_{x_1}$ y $g_{x_1} = -h_{x_0}$, luego $G = g + ih$ es una función holomorfa por ser $\mathfrak{C}^1$ y verificar las condiciones de Cauchy-Riemann. □

Lema 5.28. *Sea $P \in \mathcal{C}$, existe una función racional $\varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$ cuyo único polo en $\mathcal{C}$ es P.*

Demostración. Consideremos el divisor $D = nP$ con n natural. Para un n lo suficientemente grande el corolario 4.24 a la desigualdad de Riemann asegura que $l(D) > 0$, por lo que existe $\varphi \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$ con un único polo, normalmente de orden grande. □

Proposición 5.29. *Toda curva algebraica proyectiva compleja plana y no singular es un espacio conexo de $\mathbb{P}^2$.*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo que $\mathcal{C} = M_1 \cup M_2$, con M_1, M_2 cerrados no vacíos y disjuntos[4], por tanto compactos. Sea $P \in M_1$, entonces existe una función racional no constante φ, cuyo único polo en $\mathcal{C}$ es el punto P, luego φ no tiene polos en M_2. Como φ es una función holomorfa en M_2, compacto, entonces $|\varphi|$ alcanza su máximo en $Q \in M_2$. Haciendo uso del TFI en Q, φ define una función analítica en un entorno, alcanzando el máximo en un punto interior, luego $\varphi = k \in \mathbb{C}$ es constante en un entorno de Q, entonces $\varphi - k$ es una función racional con infinitos ceros (en el entorno de Q), lo que contradice la proposición 3.31. □

Corolario 5.30. *Toda curva algebraica no singular del plano proyectivo complejo es una superficie de Riemann compacta.*

Demostración. Los resultados anteriores prueban que $\mathcal{C}$ es compacto, conexo, segundo numerable y Hausdorff. El TFI nos garantiza que las cartas afines en cada punto son homeomorfismos en un entorno del mismo. Como la carta y su inversa son funciones analíticas, entonces los cambios de cartas en las intersecciones de los dominios serán también analíticos y $\mathcal{C}$ es una superficie de Riemann. □

El objetivo ahora consiste en demostrar que el género de toda curva algebraica proyectiva compleja no singular coincide con su género topológico vista como superficie de Riemann. Si la curva es una recta, entonces es isomorfa a $\mathbb{P}^1$ o esfera de Riemann, de género nulo. El siguiente resultado utiliza el teorema de Riemann-Hurwitz para probar que el género topológico de toda curva no singular de grado d en el plano proyectivo complejo es $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$, y por tanto, coincide la descripción algebraica [Griff78].

Teorema 5.31. *El género de una curva algebraica proyectiva compleja no singular coincide con su género topológico vista como superficie de Riemann.*

Demostración. La prueba se basará en proyectar la curva $\mathcal{C} = V_{\mathbb{P}^2}(f)$ de grado d sobre $\mathbb{P}^1$, mediante la aplicación holomorfa

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ & [x, y, z] & \longmapsto & [x, y] \end{array}$$

[4]La definición de espacio conexo que se maneja habitualmente como aquel que no puede separarse en la unión disjunta de dos abiertos no vacíos se puede expresar de forma equivalente en términos de cerrados.

Podemos asumir mediante un cambio de coordenadas que el punto $P = [0,0,1] \notin \mathcal{C}$ y que la recta X no es tangente a $\mathcal{C}$. A lo largo de la demostración se trabajará en la carta afín U_1, luego la recta X constituye la recta del infinito. Sea $P \in U_1 \cap \mathcal{C}$, entonces si $\frac{\partial f_*}{\partial z}(P) \neq 0$, el teorema de la función implícita nos garantiza que y se puede tomar como coordenada local en un entorno de P, es decir, z puede escribirse como función de y en un entorno de P, en cuyo caso π no estaría ramificado en dicho punto porque a cada valor de y le corresponde un único valor de z. Si $\frac{\partial f_*}{\partial z}(P) = 0$, como P es no singular, entonces $\frac{\partial f_*}{\partial y}(P) \neq 0$, luego z es coordenada local en P e $y = y(z)$, por lo tanto $f_*(y(z), z) = 0$. Derivando de forma implícita mediante la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{\partial f_*}{\partial z} + \frac{\partial f_*}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

en un entorno de P. Nótese que el índice de ramificación viene dado por el exponente de la expresión de y en función de z, por lo que $\frac{\partial y}{\partial z}$ vale $e_P(\pi) - 1$. Además, este valor coincide con el orden en P de $\frac{\partial f_*}{\partial z}$, o equivalentemente la multiplicidad de intersección en P de $\mathcal{C}$ con la clausura proyectiva de $\frac{\partial f_*}{\partial z} = 0$, vista como curva de grado $d-1$ en $\mathbb{P}^2$. La elección de coordenadas nos permite deducir que todos los puntos de la intersección de estas dos curvas están en U_1, luego los puntos del infinito son todos no ramificados y su imagen es el punto $Q = [0,1] \in \mathbb{P}^1$. Por consiguiente, el teorema de Bézout nos garantiza que

$$\sum_{P \in \mathcal{C}} (e_P(\pi) - 1) = d(d-1).$$

Ahora bien, la fibra del punto del infinito en $\mathbb{P}^1$, $\pi^{-1}(Q)$, tiene exactamente d elementos porque como $[0,0,1] \notin \mathcal{C}$, entonces el polinomio homogéneo que define la curva debe presentar el monomio aZ^d con $a \in \mathbb{C}$ y para cada valor de Y existirán d posibles valores de Z que se proyectan en Q. Por lo tanto, $gr(\pi) = d$. Como $g_{\mathbb{P}^1} = 0$, por Riemann-Hurwitz

$$2(g_{\mathcal{C}} - 1) = -2d + d(d-1) \Longrightarrow g_{\mathcal{C}} = \frac{d(d-3)}{2} + 1 = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

□

Observación 5.32. *La equivalencia entre la fórmula de Riemann-Hurwitz algebraica y topológica se puede extender a los modelos no singulares de cualquier curva proyectiva. Las nociones de índice de ramificación y grado del morfismo o aplicación holomorfa son equivalentes en ambos casos.*

Ejemplo 5.33. *Comprobar el teorema de Riemann-Hurwitz en la proyección π de la curva elíptica $\mathcal{C} = Y^2Z - X^3 + XZ^2$ sobre la recta proyectiva dada por $\pi[x,y,z] = [x,z]$.*

Deshomogeneizando respecto de Z obtenemos la cúbica afín $y^2 = x(x^2-1)$. Se observa que para cada valor de x, excepto en los puntos $P_1 = [0,0,1], P_2 = [1,0,1], P_3 = [-1,0,1]$, existen dos posibles valores de y que se proyectarán en el mismo punto de $\mathbb{P}^1$. Para el punto del infinito $P_4 = [0,1,0]$ es necesario utilizar otra definición de π porque $\pi[0,1,0] = [0,0] \notin \mathbb{P}_1$. Como $[x,z] = [x^3, x^2z] = [y^2z + xz^2, x^2z] = [y^2 + xz, x^2]$, $\pi([x,y,z]) = [y^2 + xz, x^2]$ para todo $[x,y,z] \in \mathcal{C} \backslash \{P_1\}$. Entonces, $\pi(P_4) = [1,0]$, que coincide con el infinito en $\mathbb{P}^1$. Como no hay más puntos de $\mathcal{C}$ cuya proyección sea $[1,0]$, entonces P_4 es de ramificación.

Los puntos de ramificación son P_1, P_2, P_3 y P_4, calculemos sus índices. En $Q_1 = \pi(P_1) = [0,1]$ tomemos $x = \frac{X}{Z}$ como parámetro de uniformización, entonces su imagen en $\mathcal{O}_{P_1}(\mathcal{C})$

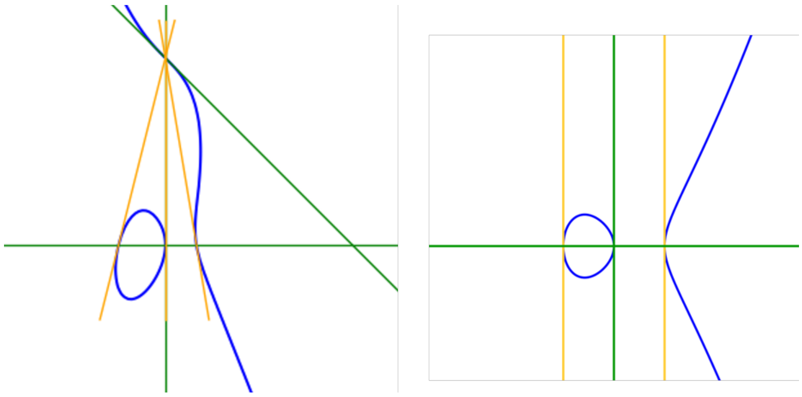
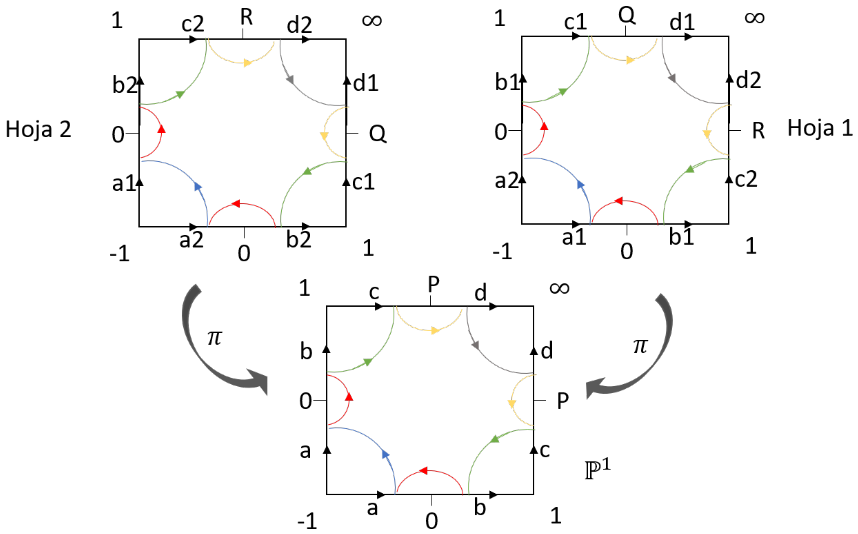


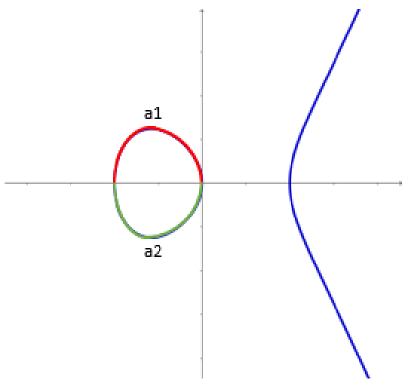
Figura 5.1: Representación de la parte real de $\mathcal{C}$ en el plano proyectivo (izquierda) y en U_3 (derecha). Las rectas tangentes a los puntos P_1, P_2 y P_3 se dibujan en amarillo y los ejes X, Y, Z en verde. La aplicación π se corresponde con la proyección sobre el eje X.

por $\tilde{\pi}$ tiene orden dos porque $y^2 = x(x^2-1) = xu$ con u unidad e $y = \frac{Y}{Z}$ parámetro de uniformización, por lo que $e_{P_1}(\pi) = 2$. Del mismo modo se opera con P_2 y P_3 después de aplicar las traslaciones $w = x - 1$ y $v = x + 1$ respectivamente. En $Q_4 = [1, 0]$ tomemos $a = \frac{Z}{X} = \frac{Z}{Y}\frac{Y}{X}$ como parámetro de uniformización, y veamos su imagen por $\tilde{\pi}$ en $\mathcal{O}_{P_4}(\mathcal{C})$. Deshomogeneizando respecto de Y se obtiene $c - b^3 + bc^2 = 0 \Longrightarrow c(1 + bc) = b^3$, donde $b = \frac{X}{Y}$ es parámetro de uniformización porque $1 + bc$ no se anula en P_4 y $c = \frac{Z}{Y}$ tiene orden 3. Como $a = cb^{-1}$, entonces $e_{P_4}(\pi) = ord_{P_4}(a) = 3 - 1 = 2$. Por consiguiente, tenemos 4 puntos ramificados con índice de ramificación igual a dos. La figura 5.1 muestra que los puntos de ramificación en U_3 coinciden con aquellos que tienen tangente vertical. Tomemos un punto que no sea rama para determinar el grado de π, por ejemplo $Q = [2, 1]$, cuya fibra es $\pi^{-1}(Q) = \{[2, \pm\sqrt{6}, 1]\} \Longrightarrow gr(\pi) = 2$. Como $g_{\mathbb{P}^1} = 0$ y $g_{\mathcal{C}} = 1$, entonces $0 = 2g_{\mathcal{C}} - 2 = gr(\pi)(2g_{\mathbb{P}^1} - 2) + \sum_{P \in \mathcal{C}}(e_P(\pi) - 1) = -4 + 4 = 0$.

Ya conocíamos que una curva elíptica compleja constituye un toro, comprobémoslo utilizando los diagramas de superficies.

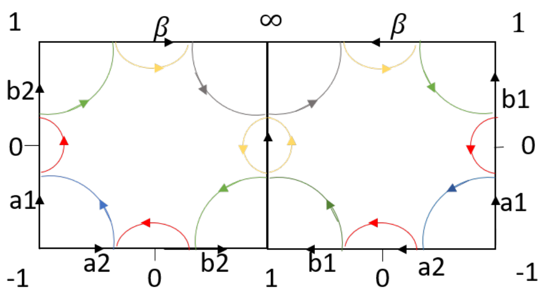


El diagrama inferior representa $\mathbb{P}^1$ y su borde se corresponde con el segmento $[-1, \infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\} \cup \{\infty\}$. Fuera de este segmento la aplicación es un recubrimiento de dos hojas. Como $\mathbb{P}^1 \backslash [-1, \infty]$ es simplemente conexo, tenemos un recubrimiento trivial con dos hojas, representadas en los dos diagramas superiores. En $\mathbb{P}^1$ se representan los puntos rama $-1, 0, 1, \infty$ y el punto auxiliar $P = 2$ como apoyo para la representación. Denotamos por $-1, 0, 1, \infty$ las contraimágenes de los puntos rama en los diagramas superiores y Q, R las del punto P.



En $\mathbb{P}^1$ el segmento $a = (-1, 0)$ tiene dos arcos como contraimágenes. En los diagramas superiores tenemos cuatro segmentos $(-1, 0)$ que se proyectan sobre a y se deben identificar con las parejas $a1$ y $a2$, correspondientes con los arcos $a1$ y $a2$ de la izquierda. Para estudiar la identificación correcta en las aristas del diagrama, se debe tener en cuenta que en un entorno del -1 la función es $s = t^2$, lo que significa para todo camino en dicho entorno que de una vuelta alrededor de -1 en la curva elíptica, su imagen será un camino que da dos vueltas alrededor de -1. En el diagrama de $\mathbb{P}^1$ tenemos el camino azul alrededor de -1, que recorriéndolo dos veces corta tres veces la arista a. Levantamos este camino empezando por el segmento $a1$ de la hoja 1. Al llegar al otro segmento a en la misma hoja, no puede ser $a1$ porque ya habríamos completado la vuelta, luego debe ser $a2$. Para preservar la orientación del camino, $a2$ en la hoja 2 debe corresponderse con la arista horizontal. Finalmente, la arista vertical en la hoja dos debe ser $a1$, lo que completa la vuelta tras haber cortado a las aristas $[a1, a2, a1]$. Se lleva a cabo el mismo procedimiento alrededor de 0 pero comenzando la vuelta en los segmentos a ya identificados, lo que nos permite identificar los b. El camino en la curva cortaría a los segmentos $[a2, b1, a1, b2, a2]$, que se proyecta en un camino que pasa por $[a, b, a, b, a]$, dando dos vueltas alrededor de 0. Procedemos del mismo modo con el 1. Para el punto P hay que tener en cuenta sus dos contraimágenes Q, R, y que una vuelta alrededor de P se corresponde con una vuelta alrededor de Q y otra alrededor de R. Se comprueba que en el infinito también se cumple la condición de ramificación.

Sean $\alpha = c1d1$ y $\beta = c2d2$, si se pegan los diagramas superiores por la arista α se obtiene la secuencia $\beta\beta^{-1}b2^{-1}a1^{-1}a2b2b1^{-1}a2^{-1}a1b1$, que se corresponde con una superficie orientable con 4 vértices, 5 aristas y 1 cara, por tanto un toro.



Bibliografía

[AhlSa74] Ahlfors, L., Sario, L. "Riemann Surfaces". [Princeton University Press, 1974]

[Coh93] Cohen, H. "A Course in Computational Algebraic Number Theory". [Springer-Verlag, 1993].

[Ful08] Fulton, W. "Algebraic Curves."[Addison-Wesley, 2008]

[Gaet79] Gaeta, F. "La Variedad de los Módulos y la Teoría Clásica de Invariantes Proyectivos". Pub. Mat. UAB, n.11 (1979).

[Griff78] Griffiths, P., Harris, J. "Principles of Algebraic Geometry"[John Wiley & Sons, 1978].

[Hart77] Hartshorne, R. "Algebraic Geometry."[Springer 1977].

[Kunz05] Kunz, E. "Introduction to Plane Algebraic Curves"[Birkhäuser, 2005].

[Lee03] Lee, J.M. "Introduction to Smooth Manifolds."[Springer-Verlag, 2003].

[Mir95] Miranda, R. "Algebraic Curves and Riemann Surfaces."[American Mathematical Society,1995].

[Piek96] Piekosz, A. "Basic Definitions and Properties of Topological Branched Coverings". Topological Methods in Nonlinear Analysis Journal of the Juliusz Schauder Center. vol. 8 (1996), pp. 359–370.

[Puen00] Puente, M.J. "Multiplicidad de Intersección y resultantes." Mathematics Subject Classification: 14H50 13P99 (2000).

[Riem57] Riemann, B. "Theorie der Abel'schen Functionen". Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd.54 (1857), pp. 101-155.

[Rom14] Romero, J., Pantaleón, P.R. "La Fórmula de Riemann-Hurwitz." Miscelánea Matemática, 24 (2014), pp. 51-65.

[Sen00] Sendra, R., Winkler, F., Pérez-Díaz, S. "Rational Algebraic Curves"[Springer, 2000].

[Shaf94] Shafarevich, I. R. "Basic Algebraic Geometry". Vol I, II, 2nd Edition. [Springer-Verlag, 1994].