

**Facultad
de
Ciencias**

Cohomología de De Rham en variedades diferenciables

De Rham Cohomology on differentiable manifolds

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Daniel Miguel Treviño

Director: Nuria Corral Pérez

Junio - 2019

AGRADECIMIENTOS

Gracias a mis padres Loli y Jose por su amor y apoyo incondicionales. Gracias a mi hermana Ana por ser una hermana maravillosa y por sufrirme. Gracias a mi abuela Jose, me acuerdo todos los días de ti y te quiero mucho. Gracias a mi abuelo Félix por hacerme sonreír y por valorarme. Gracias a mi tía Emma por inculcarme la pasión por la lectura. Gracias a Luis Mari, Sara, Janet, Eliseo, José Ramón, Libia, Pilar, Mariele, Jesús, Geni, María, Cristina, Alfonso, Luis Mari, Susana, Juli, Julita, Alazne, Germán. Gracias al resto que no menciono. Me siento muy afortunado. Gracias a mis amigos y amigas. Gracias a Aitor, a Jorge, e Eloy y a Ariadna por hablarme y por escucharme. Gracias a Lucía, a Beatriz, a Raúl y a Víctor por valorarme y apreciarme. Gracias a mis compañeros de matemáticas, en especial a los Pitagorines, por compartir estos cuatro años conmigo. Gracias a la gente de El Cortijo. Gracias a la Resistencia de La Cafetera por ayudarme a comprender el mundo y a respirar en estos tiempos tan convulsos. Para mí, la carrera ha sido a veces una especie de trámite burocrático que ha terminado ocupando gran parte de mi tiempo. No estoy ni muy nervioso, ni muy emocionado por terminarla. Sin embargo, el hecho de que os sintáis contentos por ello sí que me emociona y me hace sentirme feliz.

Gracias a mis profesoras de matemáticas Dami, Lourdes, Marisol, Fátima y Pilar. Me habéis inculcado tanto gusto por ellas como disciplina y trabajo duro. Gracias a mi profesor de filosofía Luis, por quien hoy entiendo e intento ejercer la importancia de la reflexión. Porque “un científico que no reflexiona es como un mono con una pistola”. Gracias a mi profesor de física y química Rafa, por enseñarme (con el tiempo, porque en esta cabeza dura las cosas entran despacio) a ser paciente, comprensivo y considerado. Gracias a mi directora Nuria por darme la oportunidad de hacer este trabajo y por su esfuerzo y tino a la hora de dirigirlo.

Para mí, estudiar de la manera que lo he hecho no hubiese sido posible sin un sistema educativo público y relativamente asequible. Agradezco a las personas que trabajan, han luchado y luchan por ello.

Siempre he sido demasiado viejo para mi edad. Y una cosa que solemos hacer los viejos es pensar en qué harán los jóvenes en el futuro y qué podemos hacer nosotros para echarles una mano. Así que quiero dedicar este trabajo a mi hermana, a mis primas Janet y Ariadna, a mis primos Pablo y Diego y a todos los niños de El Cortijo, que es lo que voy a ser yo siempre.

Resumen

En este trabajo estudiamos la cohomología de De Rham en variedades diferenciables. Primero damos la noción de variedad diferenciable junto con algunos conceptos relacionados, estudiamos un poco álgebra exterior y definimos las formas diferenciales. Todo esto con el objetivo de definir los grupos de cohomología de De Rham, que nos hablan sobre cuándo una forma es cerrada pero no es exacta. A continuación, utilizaremos estas construcciones para estudiar algunas de sus propiedades, como la Invarianza Homotópica, hacer una aproximación a la integración sobre variedades, utilizando integrales de línea, y ver algunos ejemplos utilizando la Sucesión de Mayer-Vietoris.

Palabras clave: variedades diferenciables, tensores, formas diferenciales, cohomología de De Rham

Abstract

In this paper we study the De Rham cohomology over differentiable manifolds. First we give the notion of differentiable manifold and other related concepts, we study a little of exterior algebra and we define the differential forms. We do this all pursuing the definition of the De Rham cohomology groups, which tell us whenever a form is closed but not exact. After that, we use these constructions to study some of their properties, such as the homotopic invariance, to make an approximation to integration over manifolds, using line integrals, and to see some examples using the Mayer-Vietoris Sequence.

Key words: differentiable manifolds, tensors, differential forms, De Rham Cohomology

Índice general

1. Introducción	1
2. Variedades Diferenciables	3
2.1. Particiones de la unidad	5
2.2. El espacio tangente	5
3. Tensores covariantes	9
4. Formas diferenciales	19
4.1. Diferencial de una función	20
4.2. Producto exterior de formas	21
4.3. La derivada exterior	22
4.4. El pullback	24
5. Cohomología de De Rham	27
5.1. Integrales de línea	32
5.2. Invarianza Homotópica	36
5.3. Sucesión de Mayer-Vietoris	42
6. Conclusión	49
Bibliografía	49

Capítulo 1

Introducción

A lo largo del siglo pasado, la búsqueda de invariantes topológicos y de herramientas de trabajo a caballo entre el álgebra y la topología han motivado el estudio de la cohomología y de la homología. Por otro lado, también en los últimos cien años, la topología diferencial ha sido uno de los campos de estudio más reclamados de las matemáticas. Además del interés matemático, tiene aplicaciones en la Teoría de la Relatividad General (ver por ejemplo [9]) que explican su avance. Uno de los exponentes en el desarrollo de la topología diferencial fue Georges De Rham (para información biográfica ver [10]).

Nacido entre las montañas de Suiza (de ahí que no sorprenda que también dedicase tiempo a la escalada), Georges De Rham se dedicó en su vida académica al estudio de la topología diferencial. En el año 1931 publicó el resultado más remarcable: el Teorema de De Rham (ver [7], Capítulo 18), que explora las relaciones entre la cohomología singular y la cohomología de De Rham. En este trabajo nos dedicaremos al estudio de la segunda. A continuación vamos a seguir la introducción de [2] y [13] para presentar los objetivos del trabajo.

Uno de los invariantes topológicos que primero se aprenden es el grupo fundamental o primer grupo de homotopía. Dado un espacio topológico X y un punto x_0 en el mismo, $\Pi_1(X, x_0)$ es el conjunto de clases de lazos homótopos (que pueden transformarse unos en otros con continuidad) con base en x_0 . Utilizando esta herramienta podemos distinguir ciertos espacios topológicos, detectando agujeros que impiden deformar unos caminos en otros. Un ejemplo básico es el espacio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Si consideramos un punto cualquiera, un lazo que rodee al origen y otro que no, no vamos a encontrar ninguna manera de deformar uno en el otro sin romper alguno de los dos.

A raíz de esta idea surgen los grupos de homotopía de orden superior, que nos permitirán explorar diferencias entre espacios topológicos según si determinadas aplicaciones sean o no homótopas. Sin embargo, el cálculo de dichos grupos no es fácil. Por lo tanto, conviene buscar alternativas. Un enfoque diferente lo ofrece la cohomología de De Rham.

Para facilitar la explicación, situémonos sobre un abierto U de \mathbb{R}^n . Si consideramos las funciones reales definidas sobre U , tenemos que cada componente conexa está caracterizada por que las funciones localmente constantes (esto es, que en un entorno de cada punto son constantes), son constantes en toda la componente. Por lo tanto, podemos llamar $H_{dR}^0(U)$ al espacio vectorial de las funciones localmente constantes, y el número de componentes conexas vendrá dado por su dimensión. ¿Cómo vamos a encontrar estas funciones? Pues en el caso de la cohomología de De Rham utilizaremos la diferencial de una función. Si

$$df = \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i,$$

entonces las funciones serán localmente constantes cuando la diferencial sea nula. El siguiente paso es escalar en la dimensión, definiendo algo similar para formas de grado mayor. Todo esto lo haremos como indicamos a continuación.

En el primer capítulo hemos hecho una pequeña introducción a las variedades diferenciables. Hemos definido los conceptos con los que trabajaremos en las siguientes secciones: las propias variedades, el espacio tangente, las particiones de la unidad, etc.

Puesto que los necesitaremos para definir las formas diferenciales, el segundo capítulo lo hemos dedicado al estudio de los tensores covariantes sobre un espacio vectorial cualquiera. Damos los elementos de las bases con los que trabajaremos localmente e introducimos el concepto de fibrado cotangente.

En el tercer capítulo utilizamos todo lo expuesto anteriormente para definir las formas diferenciales. Por un lado definiremos la diferencial de una función y hablaremos del producto exterior de formas. Por otro lado, construiremos las dos aplicaciones fundamentales con las que trabajaremos en el último capítulo: el pullback y la derivada exterior.

Esta última nos dará pie a la definición de formas cerradas y exactas. Utilizando estos conjuntos de formas definiremos los grupos de Cohomología de De Rham en el último capítulo. Después nos centraremos en tres aspectos. Por un lado hablaremos de integrales de formas, que nos servirá para dar una caracterización de las 1-formas exactas (correspondiente al Teorema de Stokes para ese tipo de formas). Por otro lado, demostraremos la invarianza homotópica de los grupos de cohomología de De Rham. Por último, veremos la sucesión de Mayer-Vietoris. Todo ello nos va a servir para demostrar algunas propiedades y dar algunos ejemplos.

Capítulo 2

Variedades Diferenciables

Para empezar, comenzamos con la definición de variedad diferenciable. Como hemos dicho antes, introduciremos conceptos que nos servirán más adelante. Seguimos fundamentalmente [7].

Definición 2.1. Sea M un espacio topológico.

Se dice que M es **Hausdorff** si dados dos puntos cualesquiera p y q de M , existen dos abiertos U y V tales que $p \in U$, $q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Se dice que M cumple el **II axioma de numerabilidad** si la topología de M posee una base numerable.

Se dice que M es **localmente euclídeo de dimensión n** si cada punto $p \in M$ tiene un entorno abierto que es homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Un espacio topológico que cumple las tres propiedades precedentes se denomina **variedad topológica**.

Definición 2.2. Sea M un espacio topológico.

Una **carta** es un par (U, x) donde U es un subconjunto abierto de M , denominado dominio de la carta, y $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo de U en un abierto de \mathbb{R}^n .

Un **atlas** es un conjunto de cartas cuyos dominios cubren todo el espacio. Un atlas se dice \mathcal{C}^∞ si cumple que, dadas dos cartas (U, x) , (V, y) cualesquiera tales que $U \cap V \neq \emptyset$, se tiene que la composición $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ es un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^∞ . Un atlas \mathcal{C}^∞ se denomina atlas **maximal** si no está estrictamente contenido en ningún otro atlas.

Si tenemos una carta (U, x) y un punto $p \in M$, entonces $x(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ son las coordenadas de p en dicha carta, y x^1, \dots, x^n se denominan funciones coordenadas.

Definición 2.3. Una **variedad diferenciable** es una variedad topológica con un atlas maximal.

Nota. Para dotar de estructura de variedad diferenciable a un espacio topológico M basta con dar un atlas, ya que cada atlas está contenido en un único atlas maximal ([3], Proposición 2.2.1).

Nota. También es posible definir una variedad diferenciable a partir de un conjunto sin estructura previa, para luego definir la topología utilizando las cartas (ver [3], pags 18-19). Nosotros hemos elegido esta definición porque la referencia fundamental que hemos tomado ([7]) lo hace así. Además vamos a trabajar con particiones diferenciables de la unidad, cuya existencia está ligada a que la variedad sea Hausdorff y cumpla el II A.N.

Ejemplo 2.4. Podemos dotar de estructura de variedad diferenciable al espacio euclídeo \mathbb{R}^n utilizando el atlas $\{\mathbb{R}^n, Id\}$, a las esferas \mathbb{S}^n utilizando la proyección estereográfica, o a la parábola $y = x^2$ utilizando la propia función que la define.

No tiene estructura de variedad diferenciable el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Si nos fijamos en el vértice, no tiene ningún entorno abierto homeomorfo a algún abierto de \mathbb{R}^2 : al retirar dicho punto se pierde la conexión.

Sin embargo, existen otros espacios que son variedades diferenciables salvo una “frontera”. Es lo que se llaman variedades diferenciables con borde, concepto que introducimos a continuación.

Sea $\mathbb{H}^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_n \geq 0\}$. Llamamos $\text{Int}\mathbb{H}^n$ y $\partial\mathbb{H}^n$ a su interior y a su frontera respectivamente.

Definición 2.5. Llamamos **variedad topológica con borde** a un espacio topológico M que es Hausdorff, cumple el II Axioma de Numerabilidad y en el que cada punto tiene un entorno homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n o de \mathbb{H}^n (con la topología de subespacio de \mathbb{R}^n).

De manera similar a las variedades sin borde, una **carta** es un homeomorfismo x de un abierto de M en un abierto de \mathbb{R}^n (**carta de interior**) o de \mathbb{H}^n (**carta de frontera**). Los conceptos “atlas”, “atlas C^∞ ” y “atlas maximal” se definen de la misma manera.

Definición 2.6. Una **variedad diferenciable con borde** es una variedad topológica con borde con un atlas maximal.

Un punto de M se dice que es **interior** si pertenece al dominio de alguna carta de interior, y se dice **de frontera** si su imagen por alguna carta de frontera está en $\partial\mathbb{H}^n$. El conjunto de puntos de interior de M se denomina **interior** ($\text{Int}(M)$) y el conjunto de puntos de frontera se denomina **frontera o borde** (∂M).

Estas definiciones nos serán útiles de cara a los resultados de integración sobre curvas que veremos en el Capítulo 5. A lo largo del trabajo, cuando hablemos de variedad diferenciable, nos referiremos a variedades sin borde salvo que se indique lo contrario.

A continuación vamos a definir funciones y aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciables. De ahora en adelante, utilizaremos la palabra diferenciable como sinónimo de diferenciable C^∞ .

Definición 2.7. Sean M una variedad diferenciable y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es una **función diferenciable en** $p \in M$ si para toda carta $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuyo dominio contenga a p se tiene que $f \circ x^{-1}$ es diferenciable en $x(p)$. Se dice que f es una **función diferenciable** si lo es en todo punto $p \in M$.

Definición 2.8. Sean M y N dos variedades diferenciables y $f : M \rightarrow N$ una aplicación. Se dice que f es una **aplicación diferenciable en** $p \in M$ si para toda carta $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuyo dominio contenga a p y para toda carta $y : V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuyo dominio contenga a $f(p)$ se tiene que $y \circ f \circ x^{-1}$ es diferenciable en $x(p)$. Se dice que f es una **aplicación diferenciable** si lo es en todo punto $p \in M$, y que es un **difeomorfismo** si es una aplicación diferenciable, biyectiva y de inversa diferenciable.

Un tipo de aplicación que utilizaremos con frecuencia es la **curva**. Una curva es una aplicación $\alpha : (a, b) \rightarrow M$, donde M es una variedad diferenciable y (a, b) es un intervalo abierto en \mathbb{R} cualquiera. Por ejemplo, podríamos considerar la esfera unidad $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ y el ecuador $\alpha : (0, 1) \rightarrow \mathbb{S}^2$, $\alpha(t) = (\text{sen}(2\pi t), \text{cos}(2\pi t), 0)$.

Nota. Al definir la curva nos hemos referido a la aplicación y no al conjunto de puntos que es imagen de dicha aplicación. En ocasiones utilizaremos el término **parametrización** para referirnos a la aplicación. Cuando dos aplicaciones nos den como imagen el mismo conjunto, diremos que son dos parametrizaciones distintas de la misma curva. Por otro lado, también podríamos haber hecho la misma definición con un intervalo cerrado. Esto será necesario en el Capítulo 5, cuando hablemos de integrales sobre curvas.

2.1. Particiones de la unidad

La manera en la que hemos definido las variedades diferenciables nos proporciona ciertas propiedades interesantes. Una de ellas es la existencia de particiones diferenciables de la unidad. Como vamos a utilizarlas más adelante, daremos una definición y enunciaremos un resultado sobre su existencia. La prueba puede consultarse por ejemplo en [7], páginas 43 y 44.

Definición 2.9. Si M es un espacio topológico cualquiera y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces el soporte de f es el conjunto

$$\text{supp}(f) = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}.$$

Definición 2.10. Sea M un espacio topológico. Sea $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recubrimiento de abiertos de M . Una **partición de la unidad subordinada a \mathcal{X}** es una familia $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de funciones continuas $\phi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ cumpliendo las siguientes propiedades:

- $0 \leq \phi_\alpha(x) \leq 1$ para cualquier $\alpha \in A$ y para todo $x \in X$.
- $\text{supp}(\phi_\alpha) \subset X_\alpha$ para todo $\alpha \in A$.
- La familia de soportes $\{\text{supp}\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es localmente finita, esto es, cada punto tiene un entorno que interseca a un número finito de soportes.
- $\sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Si M es una variedad diferenciable, una partición de la unidad se dice diferenciable si cada una de las funciones que la componen es diferenciable.

Proposición 2.11. Sean M una variedad diferenciable y $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recubrimiento de abiertos de M . Entonces existe una partición diferenciable de la unidad subordinada a \mathcal{X} .

2.2. El espacio tangente

Ahora nuestro objetivo es extender la noción ya conocida del plano tangente a una superficie en un punto, de forma que encaje bien con las variedades, las funciones y las aplicaciones anteriormente definidas. Definiremos los vectores tangentes en cada punto como operadores sobre el conjunto de funciones definidas en la variedad. Estos operadores no van a ser otra cosa que la derivada de la función en el punto y en la dirección del vector.

Notación. Utilizaremos el convenio de sumación de Einstein. Siempre que tengamos la misma letra como índice y como subíndice en la misma expresión, estará sumando. Además, introducimos la delta de Kronecker, definida de la siguiente manera:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Por otro lado, si U es un abierto en una variedad, denotaremos por $\mathfrak{F}(U)$ al conjunto de funciones diferenciables de U en \mathbb{R}

Definición 2.12. Sean M una variedad diferenciable, p un punto de M y (U, x) una carta con $p \in U$. Un **vector tangente** en el punto p es una aplicación lineal $v : \mathfrak{F}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple:

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f).$$

Sea $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ una curva con $t_0 \in (a, b)$ tal que $p = \alpha(t_0)$ y $\alpha'(t_0) \neq 0$. Podemos entonces definir un vector tangente a la curva α en el punto p como la aplicación lineal

$$v_{\alpha(t_0)} : \mathfrak{F}(U) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \rightsquigarrow \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(t_0)$$

El conjunto de vectores tangentes sobre un punto es un espacio vectorial, que llamaremos **espacio tangente** y que denotaremos por $T_p M$. Vamos a probar que es un espacio vectorial de dimensión n , y que una base son las derivadas parciales que definimos a continuación.

Definición 2.13. Sean M una variedad diferenciable, $p \in M$ y (U, x) una carta en un entorno de p con funciones coordenadas x^1, \dots, x^n . Se llama **derivada parcial** respecto de x^i al vector tangente $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p : \mathfrak{F}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f) = \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial t_i}(x(p))$$

donde t_1, \dots, t_n representan las coordenadas en \mathbb{R}^n .

En ocasiones obviaremos la notación del punto sobre el que estemos trabajando, teniendo siempre en mente que el espacio tangente y los vectores contenidos en él están definidos sobre cada punto de la variedad.

Proposición 2.14. *En las condiciones anteriores, el conjunto de las derivadas parciales $\{\frac{\partial}{\partial x^i} : i = 1, \dots, n\}$ forman una base del espacio tangente en cada punto.*

Demostración. Veamos primero que son linealmente independientes. Sean λ_i con $i = 1, \dots, n$ y tales que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$. Consideramos para cada j desde 1 hasta n la función coordenada x^j . Entonces,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \lambda_j = 0.$$

Por lo tanto todos los coeficientes son nulos. Sea v un vector de T_pM y sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una curva, con $\alpha(t_0) = p$ tal que v es su vector tangente en p . Tenemos que $x(p) = x(\alpha(t_0)) = (x^1(\alpha(t_0)), \dots, x^n(\alpha(t_0)))$ y podemos llamar $\alpha^i = x^i \circ \alpha$. Sea $f \in \mathfrak{F}(U)$. Entonces, aplicando la regla de la cadena para funciones reales

$$\begin{aligned} v(f) &= \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(t_0) = \frac{d}{dt}((f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \alpha))(t_0) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial t_i}(x(p)) \frac{d\alpha^i}{dt}(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x(p)) \frac{d\alpha^i}{dt}(t_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $v = \sum_{i=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt}(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i}$. \square

Si tenemos una aplicación diferenciable entre dos variedades, esta induce una aplicación lineal entre los espacios tangentes, que definiremos a continuación.

Definición 2.15. Sean M y N dos variedades diferenciables y sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Se define la **aplicación tangente** en el punto p como

$$\begin{aligned} F_{*p} : T_pM &\longrightarrow T_{F(p)}N \\ v &\rightsquigarrow F_{*p}(v) \end{aligned}$$

de forma que si $f \in \mathfrak{F}(N)$, entonces $F_{*p}(v)(f) = v(f \circ F)$.

Evidentemente, la aplicación tangente es lineal: si tenemos dos vectores cualesquiera u y v en T_pM , entonces

$$\begin{aligned} F_{*p}(\lambda u + \mu v)(f) &= (\lambda u + \mu v)(f \circ F) = \\ &= \lambda u(f \circ F) + \mu v(f \circ F) = \lambda F_{*p}(u) + \mu F_{*p}(v)(f) \end{aligned}$$

donde λ y μ son números reales cualesquiera.

De la misma manera que con los vectores, prescindiremos de la notación referente al punto mientras no haya dudas.

Finalmente definiremos los campos vectoriales, que no consisten más que en poner un vector tangente en cada punto de manera que si derivamos una función respecto del campo nos quede otra función diferenciable.

Definición 2.16. Sean M una variedad diferenciable y $\mathfrak{F}(M)$ el conjunto de funciones diferenciables de M en \mathbb{R} . Un **campo vectorial** es una aplicación

$$X : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$$

tal que:

- es \mathbb{R} -lineal: $X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g)$, para cualesquiera f, g en $\mathfrak{F}(M)$ y para cualesquiera α, β en \mathbb{R}
- verifica $X(fg) = X(f)g + fX(g)$

El conjunto de campos vectoriales sobre una variedad se denota $\mathfrak{X}(M)$.

Capítulo 3

Tensoros covariantes

Las formas diferenciales se definen a partir de aplicaciones lineales cuyo dominio se encuentra en el producto cartesiano de copias del espacio tangente a una variedad. Dichas aplicaciones se llaman tensoros covariantes, y estaremos interesados en aquellos que sean alternados. Primero desarrollaremos cierta teoría sobre estas aplicaciones en general, y después pasaremos al caso que nos ocupa.

Para empezar, consideremos el caso $k = 1$: el espacio dual de un espacio vectorial. De ahora en adelante V denotará un espacio vectorial real de dimensión finita.

Definición 3.1. El conjunto de aplicaciones lineales $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina espacio dual y se denota V^* .

Proposición 3.2. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de V , entonces el conjunto $\{e^1, \dots, e^n\}$ formado por los elementos

$$e^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

es una base de V^* . Se dice que $\{e^1, \dots, e^n\}$ es la base dual de $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Demostración. Por un lado, $\{e^i : i = 1, \dots, n\}$ son linealmente independientes: si tenemos $\sum_{i=1}^n \lambda_i e^i = 0$, entonces en particular $\sum_{i=1}^n \lambda_i e^i(e_j) = \lambda_j = 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, y entonces todos los coeficientes tienen que ser nulos. Por otro lado, hay que ver que generan todo el espacio. Notemos que para cada $T \in V^*$, podemos considerar $T' : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T' = T(e_j)e^j$ (usando el convenio de sumación de Einstein). Entonces, si $v \in V$, $v = v^i e_i$, y por ser T lineal:

$$T(v) = T(v^i e_i) = T(e_i)v^i$$

y por otro lado:

$$T'(v) = T(e_j)e^j(v^i e_i) = T(e_j)v^i \delta_i^j = T(e_j)v^j.$$

Así que T y T' son la misma aplicación. □

Como habíamos dicho antes, estamos interesados en aplicaciones lineales definidas sobre k copias de un espacio vectorial. Las llamaremos k -tensoros covariantes.

Definición 3.3. Un k -tensor covariante sobre V es una aplicación $T : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que es lineal en cada una de sus componentes. Denotamos el conjunto de k -tensoros covariantes sobre V por $T^k(V)$.

Proposición 3.4. Sean T un k -tensor covariante y S un l -tensor covariante sobre V . Sean v_1, v_2, \dots, v_{k+l} vectores de V . La aplicación $T \otimes S : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T \otimes S(v_1, v_2, \dots, v_{k+l}) = T(v_1, \dots, v_k)S(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$ es un $(k+l)$ -tensor covariante. Denominaremos a la operación \otimes **producto tensorial**.

Demostración. La linealidad de $T \otimes S$ se deduce de la linealidad de las dos aplicaciones iniciales, y la imagen sigue siendo un número real. Por otro lado, el número de argumentos es $k+l$, por lo que obtenemos un $(k+l)$ -tensor covariante. \square

Notación. Si T es un k -tensor covariante, $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de V y $\{e^1, \dots, e^n\}$ es su base dual, denotaremos:

$$T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = T_{i_1 \dots i_k}.$$

Proposición 3.5. Si T es un k -tensor covariante y $\{e^1, \dots, e^n\}$ es la base dual de $\{e_1, \dots, e_n\}$, entonces, usando el convenio de sumación de Einstein:

$$T = T_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}.$$

Por lo tanto, $\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$ es una base de $T^k(V)$.

Demostración. Como $\{e_1, \dots, e_n\}$ es base de V y ambas aplicaciones son lineales, basta ver que la igualdad se cumple para los elementos de la forma $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ con $1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n$. Pero esto es claro, ya que

$$T(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = T_{j_1 \dots j_k}$$

mientras que

$$T_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = T_{i_1 \dots i_k} \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k} = T_{j_1 \dots j_k}$$

porque, utilizando la definición del producto tensorial, todos los sumandos se anulan salvo cuando los índices coinciden. \square

Dado que las formas diferenciales van estar formadas por tensores covariantes alternados, tenemos que desarrollar teoría sobre ellos y demostrar algunas propiedades que nos serán útiles.

Definición 3.6. Sean V un espacio vectorial y $T : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un k -tensor covariante sobre V . Se dice que T es **alternado** si para cualesquiera $v_1, \dots, v_k \in V$ cumple que

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

Un k -tensor covariante alternado se llama **k -covector**. Denotaremos al subespacio de k -covectores de $T^k(V)$ por $\Lambda^k(V)$.

Nota. Para trabajar con covectores vamos a utilizar permutaciones. Denotaremos por S_k al grupo simétrico con k elementos. Una **transposición** es una permutación que intercambia dos elementos y deja el resto fijos. Sabemos que si $\sigma \in S_k$, entonces podemos descomponer σ en un producto de transposiciones, y que además, aunque la descomposición no sea única, la paridad del número de transposiciones de todas las descomposiciones de una permutación es la misma.

Una permutación es **par** o **impar** según lo sea el número de transposiciones de cualquiera de sus descomposiciones. Se define entonces el **índice** de una permutación:

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ es par} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ es impar.} \end{cases}$$

Si T es un k -covector y $\sigma \in S_k$, denotaremos por ${}^\sigma T$ la reordenación por σ de los vectores en los que se aplica T .

Ejemplo 3.7. El ejemplo más conocido de tensor covariante alternado es el determinante $\det: V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\det(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n v_i^{\sigma(i)}$, donde $v_i = (v_i^1, \dots, v_i^n)$ en alguna base de V .

A continuación vemos diferentes caracterizaciones equivalentes a ser un tensor alternado.

Proposición 3.8. Sea $T: V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un k -tensor covariante. Son equivalentes:

a) T es alternado.

b) Para cualesquiera v_1, \dots, v_k vectores y cualquier permutación $\sigma \in S_k$,

$${}^\sigma T(v_1, \dots, v_k) = T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma)T(v_1, \dots, v_k).$$

c) $T(v_1, \dots, w, \dots, w, \dots, v_k) = 0$.

d) Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ son linealmente dependientes, entonces $T(v_1, \dots, v_k) = 0$.

e) Con respecto a cualquier base, las componentes $T_{i_1 \dots i_k}$ cambian de signo cuando dos de los índices son intercambiados.

Demostración. Veremos que cada afirmación implica la siguiente:

a) \Rightarrow b) Se deduce de que $\text{sgn}(\sigma)$ se obtiene al escribir σ como producto de transposiciones. Como T es alternado, por cada transposición cambia de signo.

b) \Rightarrow c) Si consideramos σ la transposición que intercambia los dos índices que coinciden, como $\text{sgn}(\sigma) = -1$, tenemos que:

$$T(v_1, \dots, w, \dots, w, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, w, \dots, w, \dots, v_k)$$

por lo que $T(v_1, \dots, w, \dots, w, \dots, v_k) = 0$.

c) \Rightarrow d) Si v_1, \dots, v_k son linealmente dependientes, entonces podemos poner algún $v_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i v_i$. Sustituyendo y utilizando la linealidad de T :

$$\begin{aligned} T(v_1, \dots, v_n) &= T(v_1, \dots, v_{j-1}, \sum_{i \neq j} \lambda_i v_i, v_{j+1}, \dots, v_k) = \\ &= \sum_{i \neq j} \lambda_i T(v_1, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n) \end{aligned}$$

y la última suma vale cero por hipótesis.

d) \Rightarrow e) Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Entonces, dándose la primera igualdad por hipótesis:

$$\begin{aligned} 0 &= T(e_{i_1}, \dots, e_{i_l} + e_{i_m}, \dots, e_{i_l} + e_{i_m}, \dots, e_{i_k}) = \\ &= T(e_{i_1}, \dots, e_{i_l}, \dots, e_{i_l}, \dots, e_{i_k}) + T(e_{i_1}, \dots, e_{i_l}, \dots, e_{i_m}, \dots, e_{i_k}) + \\ &+ T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}, \dots, e_{i_l}, \dots, e_{i_k}) + T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}, \dots, e_{i_m}, \dots, e_{i_k}) = \\ &= T(e_{i_1}, \dots, e_{i_l}, \dots, e_{i_m}, \dots, e_{i_k}) + T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}, \dots, e_{i_l}, \dots, e_{i_k}) = \\ &= T_{i_1 \dots i_l \dots i_m \dots i_k} + T_{i_1 \dots i_m \dots i_l \dots i_k} \end{aligned}$$

Y se deduce inmediatamente que uno es el opuesto del otro.

e) \Rightarrow a) Por la linealidad de T , la imagen de cualesquiera k vectores viene determinada por la de los vectores de la base. Por lo tanto al intercambiar dos argumentos cambiará el signo, y T es alternado. □

Nuestro siguiente paso va a ser construir una base para $\Lambda^k(V)$ utilizando los covectores que definimos anteriormente como la base de V^* .

Notación. Sea k un entero positivo. Una k -upla ordenada $I = (i_1, \dots, i_k)$ de enteros positivos se denomina **multi-índice de longitud k** . Si $\sigma \in S_k$, denotaremos

$$I_\sigma = (i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)})$$

Además, extendemos la definición de la delta de Kronecker para multi-índices: si I y J son dos multi-índices de longitud k , entonces definimos

$$\delta_J^I = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sigma) & \text{si ni I ni J tienen índices repetidos y} \\ & J = I_\sigma \text{ para algún } \sigma \in S_k \\ 0 & \text{si I o J tienen algún índice repetido} \\ & \text{o J no es una permutación de I.} \end{cases}$$

Definición 3.9. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de V , $\{e^1, \dots, e^n\}$ es su base dual e $I = (i_1, \dots, i_k)$ es un multi-índice de longitud k con $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, entonces para $v_1, \dots, v_k \in V$, $v_i = v_i^j e_j$ definimos $e^I : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$e^I(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} e^{i_1}(v_1) & \dots & e^{i_1}(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i_k}(v_1) & \dots & e^{i_k}(v_k) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1^{i_1} & \dots & v_k^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{i_k} & \dots & v_k^{i_k} \end{pmatrix}.$$

Tal y como hemos visto antes, el determinante es un tensor covariante alternado, por lo que los elementos que acabamos de definir también lo son. De hecho, van a conformar una base de $\Lambda^k(V)$. Para probarlo, primero vamos a demostrar el siguiente Lema.

Lema 3.10. *Sea e^I tal y como ha sido definido con antelación. Se tiene que:*

- a) Si I tiene algún índice repetido, entonces $e^I = 0$.
- b) Si $J = I_\sigma$, entonces $e^I = \operatorname{sgn}(\sigma)e^J$.

c) Si $J = (j_1, \dots, j_k)$ es un multi-índice cualquiera de longitud k , entonces

$$e^I(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \delta_J^I.$$

Demostración. a) Si I tiene algún índice repetido, entonces el determinante de la definición tiene dos filas iguales, así que vale 0.

b) Si J se obtiene al permutar I por σ , entonces obtendremos el determinante para e^J permutando filas del determinante de e^I . Si tenemos en cuenta la descomposición en transposiciones de σ , el signo del determinante cambiará tantas veces como transposiciones, por lo que $e^I = \text{sgn}(\sigma)e^J$.

c) Tenemos varios casos:

- Si I tiene algún índice repetido, entonces $e^I(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0 = \delta_J^I$ por a).
- Si J tiene algún índice repetido, entonces estamos aplicando e^I , que es alternado, en una k -upla con algún miembro repetido. Como hemos mostrado en la Proposición 3.8, esto vale 0, que es precisamente lo que vale δ_J^I en este caso.
- Si ninguno tiene índices repetidos pero J no es una permutación de I , entonces habrá un índice i_l en I que no aparecerá en J . Entonces, la fila i_l -ésima del determinante de la definición será $(e^{i_l}(e_{j_1}), \dots, e^{i_l}(e_{j_k}))$ y todos los elementos de la fila valen 0 porque los índices nunca coinciden. En este caso, δ_J^I también vale 0.
- Si $I = J$, entonces el determinante de la definición es el de la matriz identidad, que vale 1, y que es lo mismo que $\text{sgn}(id) = \delta_J^I$, siendo id la permutación identidad. Por lo tanto, si $J = I_\sigma$, entonces por b)

$$e^I(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \text{sgn}(\sigma)e^J(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \text{sgn}(\sigma) = \delta_J^I.$$

□

Proposición 3.11. Sea V un espacio vectorial de dimensión n . Si $\{e^i : i = 1, \dots, n\}$ es una base de V^* , entonces para cada entero positivo $k \leq n$, la colección de k -tensores alternados

$$\mathcal{E} = \{e^I : I \text{ es un multi-índice creciente de longitud } k\}$$

es una base para $\Lambda^k(V)$.

Notación. Denotaremos

$$\sum_I' = \sum_{\{I: 0 < i_1 < \dots < i_k \leq n\}}$$

Demostración. Notemos primero que si $k > n$, entonces cualquier familia de k vectores es dependiente, así que $\Lambda^k(V)$ es el espacio trivial. Para $k \leq n$, sea $\{e_i : i = 1, \dots, n\}$ la base de V de la que $\{e^i : i = 1, \dots, n\}$ es dual. Veamos primero que \mathcal{E} genera $\Lambda^k(V)$. Sea T un k -tensor alternado cualquiera. Podemos poner

$$T_I = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Sea J un multi-índice cualquiera. Entonces, utilizando el Lema 3.10 previo:

$$\sum'_I T_I e^I(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \sum'_I T_I \delta_J^I.$$

De este último sumatorio se anulan todos los términos menos el correspondiente a aquel multi-índice I tal que $J = I_\sigma$ para algún $\sigma \in S_k$. En ese caso, $\delta_J^I = \text{sgn}(\sigma)$ y queda:

$$\sum'_I T_I \delta_J^I = \text{sgn}(\sigma) T_I = T_J.$$

Falta ver que \mathcal{E} es una familia linealmente independiente. Supongamos que, para algunos coeficientes T_I , se tiene que

$$\sum'_I T_I e^I = 0.$$

Sea J un multi-índice cualquiera. Entonces, aplicando lo mismo que en el razonamiento anterior,

$$\sum'_I T_I e^I(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = T_J = 0$$

y entonces todos los T_I valen 0. □

A continuación vamos a definir un producto, llamado producto exterior, que nos servirá para obtener tensores alternados y operar con ellos. Para ello primero veremos como obtener un tensor alternado a partir de uno cualquiera, y después utilizaremos el producto de tensores definido anteriormente.

Proposición 3.12. *Sea T un k -tensor covariante. Entonces*

$$\text{Alt}T = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) (\sigma T)$$

es alternado. Además, T es alternado si y sólo si $T = \text{Alt}T$.

Demostración.

- Sean v_1, \dots, v_k vectores de V , y sea $\tau \in S_k$. Queremos ver que ${}^\tau \text{Alt}T = \text{sgn}(\tau) \text{Alt}T$ para cualquier τ en S_k . Desarrollando, tenemos que:

$$\begin{aligned} {}^\tau \text{Alt}(T) &= {}^\tau \left(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) (\sigma T) \right) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) ({}^{\tau\sigma} T) \\ &= \text{sgn}(\tau) \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) ({}^{\tau\sigma} T) = \text{sgn}(\tau) \frac{1}{k!} \sum_{\eta \in S_k} \text{sgn}(\eta) (\eta T) \\ &= \text{sgn}(\tau) \text{Alt}T \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que, como σ recorre todo S_k , también lo hace $\tau\sigma = \eta$, y que $\text{sgn}(\eta) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau)$.

- Claramente, si $T = AltT$, entonces T es alternado por lo que acabamos de probar. Por otro lado, si T es alternado, entonces:

$$\begin{aligned} AltT &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma)(\sigma T) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma)sgn(\sigma)(T) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (T) = \frac{k!}{k!} T = T. \end{aligned}$$

□

Podemos ver Alt como un operador lineal $Alt : T^k(V) \longrightarrow \Lambda^k(V)$.

Definición 3.13. Sean T y S tensores alternados de longitud k y l respectivamente. Se define el **producto exterior** de T y S como:

$$T \wedge S = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(T \otimes S)$$

Por lo visto en la Proposición 3.12, el tensor resultante va a ser alternado. Sin embargo, hemos de dar una explicación a los coeficientes del producto. Además, la propiedad que probaremos nos servirá para demostrar ciertas características del producto exterior que nos serán útiles a la hora de trabajar con él.

Lema 3.14. Sean $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V y $\{e^1, \dots, e^n\}$ su base dual. Para $I = (i_1, \dots, i_k)$ y $J = (j_1, \dots, j_l)$ multi-índices cualesquiera, se tiene que

$$e^I \wedge e^J = e^{IJ} \quad (3.1)$$

donde $IJ = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$.

Demostración. Como estamos trabajando con aplicaciones multi-lineales, basta ver que la igualdad es cierta para cualquier conjunto de vectores de la base de V , que denotaremos $\{e_{p_1}, \dots, e_{p_{k+l}}\}$. Distinguiremos cuatro casos:

- **Caso 1:** $P = (p_1, \dots, p_{k+l})$ tiene algún índice repetido. Entonces, ambos lados de la igualdad (3.1) valen 0 por el apartado c) en el Lema 3.10.
- **Caso 2:** P contiene algún índice que no aparece ni en I ni en J . Sabemos por el apartado c) del Lema 3.10 que $e^{IJ}(e_P) = \delta_P^{IJ}$. Para este caso, en el que hay algún índice que no aparece en los dos multi-índices, resulta que se anula. Para el otro extremo de la igualdad, vamos a desarrollar:

$$\begin{aligned} e^I \wedge e^J(e_{p_1}, \dots, e_{p_{k+l}}) &= \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(e^I \otimes e^J)(e_{p_1}, \dots, e_{p_{k+l}}) = \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma) e^I(e_{p_{\sigma(1)}}, \dots, e_{p_{\sigma(k)}}) e^J(e_{p_{\sigma(k+1)}}, \dots, e_{p_{\sigma(k+l)}}). \end{aligned}$$

Obtenemos una suma en la que cada término tiene un producto $e^I \otimes e^J$ aplicado a una permutación de P . Como hay un índice de P que no está ni en I ni en J , entonces siempre se anulará alguno de los dos factores.

- **Caso 3:** $P = IJ$ y P no tiene ningún índice repetido. En este caso, el lado derecho de la igualdad (3.1) vale 1 por el apartado c) del Lema 3.10.

En el lado izquierdo, otra vez utilizando el apartado c) del Lema 3.10, los únicos términos que no se anulan son los correspondientes a aquellas permutaciones que mueven por separado los k primeros y los l últimos índices, ya que para el resto hay algún índice diferente en el argumento. Por lo tanto, se anulan todos los términos para los que eso no se cumple, y para el resto podemos poner $\sigma = \tau\eta$ con $\tau \in S_k$ y $\sigma \in S_l$ (identificando S_k y S_l como el conjunto de permutaciones en S_{k+l} que mueven los primeros k y los últimos l índices respectivamente). Entonces:

$$\begin{aligned}
& e^I \wedge e^J(e_{p_1}, \dots, e_{p_{k+l}}) = \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\substack{\tau \in S_k \\ \eta \in S_l}} \text{sgn}(\tau)\text{sgn}(\eta) e^I(e_{p_{\tau(1)}}, \dots, e_{p_{\tau(k)}}) e^J(e_{p_{k+\eta(1)}}, \dots, e_{p_{k+\eta(l)}}) = \\
&= \left(\frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} \text{sgn}(\tau) e^I(e_{p_{\tau(1)}}, \dots, e_{p_{\tau(k)}}) \right) \left(\frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in S_l} I(\eta) e^J(e_{p_{k+\eta(1)}}, \dots, e_{p_{k+\eta(l)}}) \right) \\
&= \text{Alte}^I(e_{p_1}, \dots, e_{p_k}) \text{Alte}^J(e_{p_{k+1}}, \dots, e_{p_{k+l}}) = \\
&= e^I(e_{p_1}, \dots, e_{p_k}) e^J(e_{p_{k+1}}, \dots, e_{p_{k+l}}) = 1.
\end{aligned}$$

- **Caso 4:** P es una permutación de IJ y no tiene índices repetidos. Sea σ la permutación que lleva P en IJ . Entonces, aplicando σ en ambos lados de la igualdad que queremos probar y por lo visto en el caso anterior, ambos lados valen $\text{sgn}(\sigma)$, por lo que coinciden.

Notemos que no hace falta distinguir casos según I ó J tengan índices repetidos porque están todos incluidos en los dos primeros. \square

A continuación, demostramos una serie de características del producto exterior que nos serán útiles.

Proposición 3.15. Sean T y T' k -covectores, S l -covector y R covector, todos ellos sobre V . Entonces el producto exterior cumple:

- a) Es bilineal: si $a, a' \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(aT + a'T') \wedge S &= a(T \wedge S) + a'(T' \wedge S) \\
S \wedge (aT + a'T') &= a(S \wedge T) + a'(S \wedge T')
\end{aligned}$$

- b) Es asociativo:

$$(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R)$$

- c) Es anticonmutativo: si T es un k -covector y S un l -covector, entonces:

$$T \wedge S = (-1)^{kl} S \wedge T$$

d) Si (e^1, \dots, e^n) una base de V^* e $I = (i_1, \dots, i_k)$ es cualquier multi-índice, entonces:

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = e^I$$

Demostración.

a) Como el producto tensorial es bilineal y el operador Alt es lineal, entonces:

$$\begin{aligned} (aT + a'T') \wedge S &= \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt((aT + a'T') \otimes S) = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(aT \otimes S + a'T' \otimes S) = \\ &= a \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(T \otimes S) + a' Alt(T' \otimes S) = a(T \wedge S) + a'(T' \wedge S) \end{aligned}$$

De forma similar se prueba la otra igualdad.

b) Utilizando el Lema 3.14, si I, J y K son multi-índices cualesquiera se tiene que:

$$(e^I \wedge e^J) \wedge e^K = e^{IJ} \wedge e^K = e^{IJK} = e^I \wedge e^{JK} = e^I \wedge (e^J \wedge e^K)$$

con lo que la asociatividad queda probada para covectores básicos. Y como acabamos de probar la bilinealidad, entonces se deduce para covectores cualesquiera.

c) Si consideramos e^I y e^J covectores básicos, entonces ya sabemos que

$$e^I \wedge e^J = e^{IJ} = \text{sgn}(\sigma) e^{JI} = \text{sgn}(\sigma) e^J \wedge e^I$$

donde σ es la permutación que lleva IJ en JI . Ahora, como dicha permutación consiste en mover cada uno de los índices de J , que son l, k lugares hacia la izquierda, entonces podemos descomponerla en un producto de kl transposiciones. Así que $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{kl}$ y obtenemos lo que queríamos probar. Una vez lo tenemos para covectores básicos, el caso general se deduce de la bilinealidad.

d) Se deduce inmediatamente del Lema 3.14.

□

Capítulo 4

Formas diferenciales

Si hacemos un alto en el camino, hemos construido por un lado un espacio vectorial sobre cada punto de la variedad, mientras que por otro hemos estado hablando sobre operadores sobre espacios vectoriales en general. Parece lógico que el siguiente paso sea utilizar los segundos sobre el primero.

Notación. Si M es una variedad diferenciable de dimensión n y T_pM es el espacio tangente sobre un punto p en M , entonces el espacio dual T_pM^* coincide con $T^1(T_pM)$ (ver Definición 3.3). Si (U, x) es una carta con $p \in U$ y x^1, \dots, x^n las funciones coordenadas, entonces denotaremos $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ a la base de $T^1(T_pM)$ sobre esa carta, definida por

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_j^i$$

La notación tiene que ver con la diferencial, una forma diferencial que definiremos más adelante.

De la misma manera que en el caso general, podemos considerar $T^k(T_pM)$ y $\Lambda^k(T_pM)$, y entonces en cada carta los conjuntos

$$\{dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$$

y

$$\{dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} : 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n, I = (i_1, \dots, i_k)\}$$

serán respectivas bases de cada uno de ellos.

En consecuencia, $T^k(T_pM)$ y $\Lambda^k(T_pM)$ son espacios vectoriales de dimensión n^k y $\binom{n}{k}$ y pueden ser vistos como variedades diferenciables utilizando como cartas las aplicaciones que asocien cada uno de los vectores de sus bases con los de la base de \mathbb{R}^{n^k} y $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$.

Por lo tanto, ya podemos trabajar con tensores covariantes sobre el espacio tangente. Ahora bien, el espacio tangente está construido sobre cada punto de la variedad. Introduciremos el concepto de fibrado para definir objetos sobre toda la variedad.

Definición 4.1. Sea M una variedad diferenciable, y sea $T^k(T_pM)$ el conjunto de k -tensores covariantes sobre el espacio tangente a un punto p en M . Se llama **fibrado k -cotangente** y se denota $T^k(M)$ a la unión

$$T^k(M) = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T^k(T_pM)$$

De la misma manera, podemos considerar $\Lambda^k(T_p M)$ el conjunto de k -tensores covariantes alternados sobre $T_p M$, y considerar el subconjunto de $T^k(M)$ integrado por éstos, que denotaremos $\Lambda^k(M)$:

$$\Lambda^k(M) = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \Lambda^k(T_p M)$$

Definición 4.2. Sea M una variedad diferenciable. Sea E un fibrado ($T^k(M)$ ó $\Lambda^k(M)$) sobre M . Una **sección** de E es una aplicación $\sigma : M \rightarrow E$ tal que, si π es la proyección $\pi : E \rightarrow M$, entonces $\pi \circ \sigma = Id_M$. Se llama **sopORTE** de la sección a la adherencia del conjunto $\{p \in M : \sigma(p) \neq 0\}$

En otras palabras, una sección asocia a cada punto de la variedad un tensor definido sobre el espacio tangente en dicho punto. Una forma diferencial es hacer esto con los tensores covariantes alternados.

Definición 4.3. Sea M una variedad diferenciable. Una **k -forma diferencial** es una sección diferenciable de $\Lambda^k(M)$. El entero k es el **grado** de la forma.

Podemos expresar las formas diferenciales en coordenadas locales: si ω es una forma diferencial sobre M , y (x, U) es una carta, entonces en el dominio de la carta podemos escribir

$$w = \sum_I \omega_I dx^I$$

donde las funciones ω_I son diferenciables en U .

Ejemplo 4.4. Son ejemplos de formas diferenciales $\omega = xdy$ sobre el plano \mathbb{R}^2 o $\eta = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Puesto que en cada punto las formas diferenciales se aplican sobre vectores, globalmente se aplican sobre campos. Por ejemplo, podemos considerar el campo $X = (x^2 + y) \frac{\partial}{\partial x}$, y tenemos que:

$$\omega(X) = xdx((x^2 + y) \frac{\partial}{\partial x}) = x(x^2 + y)$$

Esto es, en cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la forma aplicada al campo toma ese valor.

Notación. Denotaremos $\mathcal{A}^k(M)$ al conjunto de k -formas diferenciales sobre una variedad M . Recordemos que para $k > n$, por, todas las k -formas son nulas, así que $\mathcal{A}^k(M)$ es el espacio trivial. Por otro lado, si $k < 0$, entonces por convención también será el espacio trivial. Utilizaremos esta notación más adelante cuando definamos la derivada exterior y los grupos de cohomología de De Rham.

4.1. Diferencial de una función

Una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una 0-forma porque en cada punto es una función lineal que no depende de ningún vector tangente, por lo que es un valor real constante.

La diferencial de una función, que más adelante utilizaremos para definir la derivada exterior, es una 1-forma que se define de la siguiente manera:

Definición 4.5. Sean M una variedad diferenciable y $f \in \mathfrak{F}(M)$. Se define la **diferencial** de f por:

$$df_p(v) = v(f)$$

para $v \in T_pM$.

En coordenadas locales, si (U, x) es una carta y $p \in U$, podremos poner:

$$df = \sum_{i=1}^n \lambda_i dx^i$$

para ciertas funciones diferenciables λ_i . Si consideramos la base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ de T_pM , entonces para cada j entre 1 y n ,

$$df \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \lambda_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

por lo que

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

En particular, si consideramos cada una de las funciones coordenadas de la carta, x^i , y calculamos la diferencial, tenemos que:

$$d(x^i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j = \delta_j^i dx^j = dx^i$$

Por lo tanto, la base dual de las parciales ha resultado ser la formada por las diferenciales de las funciones coordenadas de la carta.

4.2. Producto exterior de formas

Anteriormente hemos definido un producto exterior para k -covectores alternados. En la sección anterior hemos definido las formas diferenciales. Nuestro siguiente paso será definir el producto exterior de formas. Queremos que, de manera similar a los covectores, se obtenga una $(k+l)$ -forma a partir de una k -forma y una l -forma dadas. Por lo tanto, parece lógico que lo hagamos de tal forma que en cada punto de la variedad, el covector resultante al hacer el producto de dos formas sea el producto exterior de sus covectores en cada punto.

Definición 4.6. Sean ω y η una k -forma y una l -forma. Entonces el **producto exterior** $\omega \wedge \eta$ se define punto a punto:

$$(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p$$

4.3. La derivada exterior

La derivada exterior va a ser la aplicación fundamental que utilizaremos en el próximo capítulo. Para definirla, daremos su expresión en coordenadas locales y probaremos que $d \circ d = 0$. Esta propiedad será la que nos dará pie a la definición de los grupos de cohomología de De Rham.

Teorema 4.7. *Para cada variedad diferenciable M existen unas aplicaciones lineales únicas $d : \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}^{k+1}(M)$ definidas para cada entero $k \geq 0$ y que cumplen las siguientes condiciones:*

- a) *Si f es una función real diferenciable, entonces la derivada exterior coincide con la diferencial definida anteriormente, esto es:*

$$df(X) = Xf$$

- b) *Si $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ y $\eta \in \mathcal{A}^l(M)$, entonces*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

donde $X \in \mathfrak{X}(M)$

- c) $d \circ d = 0$

Además, en cada carta coordenada:

$$d\left(\sum_J \omega_J dx^J\right) = \sum_J d\omega_J \wedge dx^J \quad (4.1)$$

Demostración. Primero vamos a probarlo suponiendo que M admite un atlas de una única carta. Sean (x^1, \dots, x^n) coordenadas globales en M . Podemos definir d con la expresión en coordenadas locales dada en la igualdad (4.1). Ahora veamos que cumple las propiedades que queremos:

- a) d es lineal y coincide con la diferencial:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

- b) Primero probaremos que, para cualquier multi-índice I (no necesariamente creciente), $d(f dx^I) = df \wedge dx^I$.

- Si I tiene algún índice repetido, entonces $dx^I = 0$, y por lo tanto ambas partes de la igualdad valen 0.
- Si I no tiene índices repetidos, entonces podemos considerar la permutación σ que reordena I en un multi-índice J creciente. Entonces, aplicando la expresión en a) con un solo sumando, y teniendo en cuenta los métodos de reordenación anteriormente explicados (Lema 3.10), queda:

$$d(f dx^I) = \text{sgn}(\sigma) d(f dx^J) = \text{sgn}(\sigma) df \wedge dx^J = df \wedge dx^I$$

Una vez tenemos esto probado, vamos a probar b). Para ello, como d es lineal, basta considerar $\omega = f dx^I$, $\eta = g dx^J$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d((f dx^I) \wedge (g dx^J)) = d(f g dx^I \wedge dx^J) = (g df + f dg) \wedge dx^I \wedge dx^J = \\ &= (df \wedge dx^I) \wedge (g dx^J) + (-1)^k (f dx^I) \wedge (dg \wedge dx^J) = \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad hemos reordenado los términos y hemos aplicado que $dx^I \wedge dg = (-1)^k dg \wedge dx^I$.

c) Finalmente, para probar c), seguiremos dos pasos:

- Si f es una 0-forma, entonces

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j$$

Ahora, como tenemos todas las posibles combinaciones de $dx^i \wedge dx^j$ y

- si $i = j$, vale 0
- si $j < i$, $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$

podemos reordenar y queda que

$$d(df) = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^j = 0$$

- Si estamos en el caso general, y $\omega = \sum'_J \omega_J dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$ es una k -forma, entonces:

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left(\sum'_J d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}\right) \\ &= \sum'_J (d(d\omega_J) \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} - d\omega_J \wedge d(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k})) = \\ &= \sum'_J (d(d\omega_J) \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} - d\omega_J \wedge d(dx^{j_1}) \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) + \\ &+ d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge d(dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) = \dots = \\ &= \sum'_J \left(d(d\omega_J) \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} + \right. \\ &\left. + \sum'_{i=1}^k (-1)^i d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge d(dx^{j_i}) \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \right) = 0. \end{aligned}$$

Lo que hemos hecho ha sido aplicar b) de manera sucesiva y después aplicar el caso de las 0-formas.

Ahora, para el caso del atlas de una sola carta, sólo queda probar la unicidad. Si existiese otra aplicación lineal $\tilde{d} : \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}^{k+1}(M)$ cumpliendo las propiedades a)-c) entonces, utilizando b) y la linealidad de \tilde{d} , si ω es una k -forma queda que:

$$\tilde{d}\omega = \sum_J' (\tilde{d}\omega_J) \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} - \omega_J \wedge \tilde{d}(dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}).$$

De manera similar al último apartado, podemos desarrollar el segundo término del sumatorio. Por lo tanto, nos quedará una suma de términos cada uno con un factor de la forma $\tilde{d}(dx_i^j)$, pero como $\tilde{d}x_i^j = dx_i^j$ por a), entonces todos esos términos se anulan por c). De manera similar, también por a), $\tilde{d}\omega_J = d\omega_J$, por lo que $\tilde{d}\omega = \sum_J' d\omega_J \wedge dx^J = d\omega$, que es lo que queríamos probar.

Vamos ahora con el caso en el que la variedad esté cubierta por más de una carta. Si consideramos dos cartas, (U, x) y (V, y) tales que la intersección de los dominios es no vacía, hemos probado que en cada uno de ellos existen unos únicos d_U y d_V con las condiciones que hemos establecido. Pero como en la intersección la unicidad también es válida, ambos coinciden, y la derivada exterior está entonces bien definida en todos los puntos de la variedad.

Finalmente, para el caso de la unicidad en toda la variedad, basta tener en cuenta que si existiese otra derivada exterior definida sobre toda la variedad, entonces hemos probado que coincidiría con d en cada uno de los dominios de carta. Por lo tanto, serían el mismo. \square

Notación. Para diferenciar las diferentes derivadas exteriores, denotaremos d_k a la aplicación $d : \mathcal{A}^{k-1}(M) \rightarrow \mathcal{A}^k(M)$ cuando sea necesario.

4.4. El pullback

Si tenemos una aplicación diferenciable entre variedades, ésta induce una aplicación \mathbb{R} -lineal entre los conjuntos de formas de las variedades, que pasamos a definir a continuación.

Definición 4.8. Sean M y N dos variedades diferenciables y sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Entonces para $k \in \mathbb{N}$, F induce una aplicación $F^* : \mathcal{A}^k(N) \rightarrow \mathcal{A}^k(M)$ de forma que en cada punto $p \in M$, si $\omega \in \mathcal{A}^k(N)$

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)}(F_{*p}(v_1), \dots, F_{*p}(v_k))$$

donde F_{*p} es la aplicación tangente en el punto p .

El pullback es una aplicación lineal: si ω y η son dos k -formas sobre N , entonces

$$\begin{aligned} (F^*(\lambda\omega + \mu\eta))_p(v_1, \dots, v_k) &= (\lambda\omega + \mu\eta)_{F(p)}(F_{*p}(v_1), \dots, F_{*p}(v_k)) = \\ &= \lambda\omega_{F(p)}(F_{*p}(v_1), \dots, F_{*p}(v_k)) + \mu\eta_{F(p)}(F_{*p}(v_1), \dots, F_{*p}(v_k)) = \\ &= \lambda(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) + \mu(F^*\eta)_p(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Además cumple que si ω es una l -forma y η es una $(k-l)$ -forma

$$F^*(\omega \wedge \eta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\eta) \tag{4.2}$$

Efectivamente, en cada punto p de N tenemos

$$\begin{aligned} F_p^*(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_k) &= (\omega \wedge \eta)_{F(p)}(F_{*p}(v_1), \dots, F_{*p}(v_k)) = \\ &= \omega_{F(p)}(F_{*p}(v_1), \dots, F_{*p}(v_l)) \wedge \eta_{F(p)}(F_{*p}(v_{l+1}), \dots, F_{*p}(v_k)) = \\ &= F_p^*(\omega) \wedge F_p^*(\eta)(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

Por último, probemos que, en cualquier carta coordenada (U, x) de N , se tiene que

$$F^*(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = (f \circ F)d(x^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F) \quad (4.3)$$

Si evaluamos en una k -upla (v_1, \dots, v_k) de vectores del espacio tangente en un punto p , entonces

$$\begin{aligned} F^*(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})_p(v_1, \dots, v_k) &= (f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})_{F(p)}(F_{*p}(v_1), \dots, F_{*p}(v_k)) = \\ &= f(F(p))dx^{i_1}(F_{*p}(v_1)) \cdots dx^{i_k}(F_{*p}(v_k)) = \\ &= (f \circ F)(p)F_{*p}(v_1)(x^{i_1}) \cdots F_{*p}(v_k)(x^{i_k}) = \\ &= (f \circ F)(p)v_1(x^{i_1} \circ F) \cdots v_k(x^{i_k} \circ F) = \\ &= (f \circ F)(p)d(x^{i_1} \circ F)_p(v_1) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F)_p(v_k) = \\ &= (f \circ F)(p)d(x^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F)(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

La propiedad fundamental y natural de esta aplicación es que conmuta con la derivada exterior.

Proposición 4.9. *Si $F : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable entonces, para cada k , $F^* : \mathcal{A}^k(N) \rightarrow \mathcal{A}^k(M)$ conmuta con d_{k+1} . Esto es, si ω es una k -forma sobre N , se tiene que*

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega). \quad (4.4)$$

Demostración. Como d está bien definida sobre cada una de las cartas, podemos tomar una carta (U, x) y basta probar (4.4) de manera local, y como tanto F^* como d son lineales basta probarlo para una k -forma $f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, puesto que una k -forma cualquiera se podrá poner como suma de las anteriores.

Para probarlo, vamos a desarrollar cada uno de los lados de la igualdad en (4.4) por separado. En el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} F^*(d(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})) &= F^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \\ &= d(f \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F) \end{aligned}$$

mientras que en el lado derecho, utilizando la ecuación (4.3)

$$\begin{aligned} d(F^*(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})) &= d((f \circ F)d(x^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F)) = \\ &= d(f \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F) \end{aligned}$$

y ambos lados coinciden. □

Capítulo 5

Cohomología de De Rham

En el capítulo anterior hemos definido para cada $k \geq 0$ la derivada exterior $d_k : \mathcal{A}^{k-1}(M) \rightarrow \mathcal{A}^k(M)$. Ahora vamos a utilizarlas para definir las formas diferenciales cerradas y exactas. Mostraremos que estos dos grupos de k -formas son en realidad subespacios lineales, y que las formas exactas siempre son cerradas. Por lo tanto, podremos considerar el espacio vectorial cociente. Así obtendremos los grupos de cohomología de De Rham.

Definición 5.1. Sea M una variedad diferenciable y sea ω un k -forma diferenciable sobre M .

- Se dice que ω es **cerrada** si $d_{k+1}\omega=0$.
- Se dice que ω es **exacta** si existe $\eta \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$ tal que $\omega = d_k\eta$.

Como por el Teorema 4.7 se tiene que $d_{k+1} \circ d_k = 0$, toda k -forma exacta es cerrada. Sin embargo, a veces hay formas cerradas que no son exactas. Esta es la clave de los grupos de cohomología de De Rham que definiremos más adelante.

Ejemplo 5.2. Sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ podemos definir

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

Tenemos que ω es cerrada:

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy = \\ &= \frac{(-x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx + \frac{(-x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

Sin embargo, más adelante veremos que no es exacta.

Como la derivada exterior es lineal, el núcleo y la imagen son subespacios lineales. Eso nos permite hacer la siguiente definición:

Definición 5.3. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Definimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^k(M) &= \text{Ker} \left[d_{k+1} : \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}^{k+1}(M) \right] \\ \mathcal{B}^k(M) &= \text{Im} \left[d_k : \mathcal{A}^{k-1}(M) \rightarrow \mathcal{A}^k(M) \right] \end{aligned}$$

Que coinciden con los conjuntos de formas cerradas y exactas.

Notación. Recordemos la notación que hemos introducido en el Capítulo 4: si $k < 0$ o $k > n$, entonces $\mathcal{A}^k(M)$ es el espacio vectorial trivial.

Como toda forma exacta es cerrada, entonces $\mathcal{B}^k(M) \subset \mathcal{Z}^k(M)$. Esto unido al hecho de que la derivada exterior sea lineal nos permite definir una relación de equivalencia: dos k -formas son equivalentes si su diferencia es una k -forma exacta:

$$\omega \sim \eta \iff \omega - \eta \in \mathcal{B}^k(M) \quad (5.1)$$

Por lo tanto, podemos hacer la siguiente definición:

Definición 5.4. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Se define el k -ésimo grupo de cohomología de De Rham como el cociente

$$H_{dR}^k(M) = \frac{\mathcal{Z}^k(M)}{\mathcal{B}^k(M)}$$

Notación. Cuando sea necesario denotaremos $[\omega]$ a la clase de ω en H_{dR}^k .

Proposición 5.5. Sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. El pullback $F^* : \mathcal{A}^k(N) \rightarrow \mathcal{A}^k(M)$ lleva formas cerradas en cerradas y formas exactas en exactas. Por lo tanto, induce una aplicación lineal, entre $H_{dR}^k(N)$ y $H_{dR}^k(M)$ que denotaremos F^\sharp , y que cumple:

a) si $G : N \rightarrow P$ es otra aplicación diferenciable, entonces:

$$(G \circ F)^\sharp = (F^\sharp \circ G^\sharp) : H_{dR}^k(P) \rightarrow H_{dR}^k(M).$$

b) Id^\sharp es la identidad en $H_{dR}^k(M)$.

Demostración. Para ver que está bien definido, vamos a utilizar la conmutatividad entre el pullback y la derivada exterior demostrada en la Proposición 4.9.

- Si ω es cerrada, entonces $d(F^*\omega) = F^*(d\omega) = 0$, así que $F^*\omega$ es cerrada.
- Si ω es exacta, entonces $\omega = d\eta$ con $\eta \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$. Por lo tanto, $F^*\omega = F^*d\eta = d(F^*(\eta))$, y entonces $F^*\omega$ es exacta.

Por lo tanto podemos definir

$$\begin{aligned} F^\sharp : H_{dR}^k(N) &\rightarrow H_{dR}^k(M) \\ [\omega] &\rightsquigarrow [F^*\omega] \end{aligned}$$

que está bien definida porque si dos k -formas están en la misma clase, pongamos ω y $\tilde{\omega}$, esto es, se diferencian en una forma exacta $d\eta$, entonces:

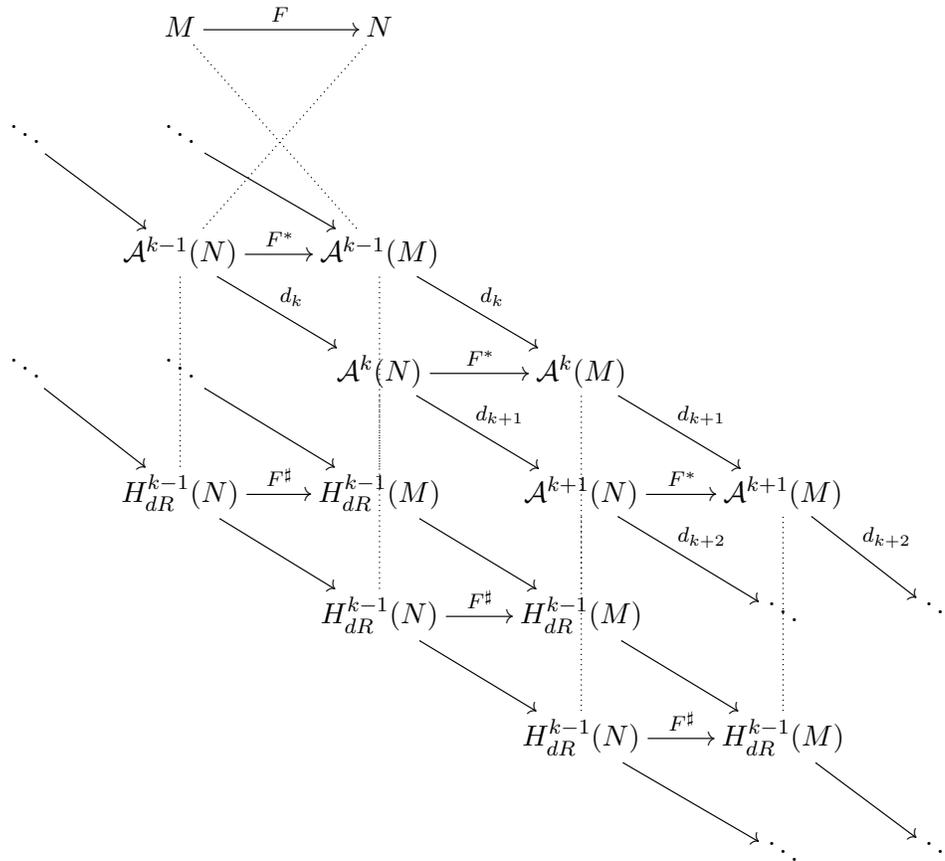
$$[F^*\omega] = [F^*\tilde{\omega} + F^*d\eta] = [F^*\tilde{\omega}]$$

Para los dos apartados restantes, probemos las propiedades para el pullback. Si tenemos dos aplicaciones diferenciables, $F : M \rightarrow N$ y $G : N \rightarrow P$, entonces si ω es una k -forma en P , entonces

$$\begin{aligned} (G \circ F)^*\omega(v_1, \dots, v_k) &= \omega((G \circ F)_{*p}(v_1), \dots, (G \circ F)_{*p}(v_k)) = \\ &= \omega(G_{*p}(F_{*p}(v_1)), \dots, G_{*p}(F_{*p}(v_k))) = \\ &= G^*\omega(F_{*p}(v_1), \dots, F_{*p}(v_k)) = F^* \circ G^*\omega(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

Además, si $Id : M \rightarrow N$ es la identidad, entonces el pullback es la identidad entre las formas porque la aplicación tangente también es la identidad.

Por construcción, sucede lo mismo para los homomorfismos inducidos entre los grupos de cohomología de De Rham. \square



En consecuencia, los grupos de de Rham son un funtor contravariante de la categoría de variedades diferenciables en la de espacios vectoriales. Además, si tenemos un difeomorfismo entre dos variedades, entonces los grupos de cohomología de De Rham son isomorfos.

Las ramas de las matemáticas que dan nombre a la construcción de sucesiones a partir de los objetos de estudio son la homología y la cohomología. Vamos a introducir algunos términos para denominar las estructuras que hemos construido.

Definición 5.6. Un **complejo** es una sucesión de estructuras algebraicas y aplicaciones lineales

$$\dots \longrightarrow A^{k-1} \xrightarrow{d_k} A^k \xrightarrow{d_{k+1}} A^{k+1} \longrightarrow \dots$$

de forma que la imagen de cada aplicación está contenida en el núcleo de la siguiente. Lo denotaremos por A^* . Una sucesión se dice **exacta** si en cada caso el núcleo coincide con la imagen. Si las aplicaciones van en el sentido decreciente, el complejo se denomina **complejo de cadenas**. Si es al contrario, se denomina **complejo de co-cadenas**.

El hecho de estar el núcleo contenido en la imagen es lo que permite definir los **grupos de cohomología o de homología** como el espacio cociente. En nuestro caso, tenemos la derivada exterior y los grupos de cohomología de De Rham.

Definición 5.7. Sean A^* y B^* dos complejos de co-cadenas. Una **co-cadena de aplicaciones** entre A^* y B^* es una familia de aplicaciones $F : A^k \rightarrow B^k$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^k & \xrightarrow{d_k} & A^{k+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow F & & \downarrow F & & \\ \dots & \longrightarrow & B^k & \xrightarrow{d_k} & B^{k+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Una **sucesión exacta de complejos** consiste en tres complejos A^* , B^* y C^* junto con dos co-cadenas de aplicaciones tales que la siguiente la sucesión

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{F} B^* \xrightarrow{G} C^* \longrightarrow 0$$

es exacta.

La homología trata los complejos de cadenas y la homología los de co-cadenas. En el caso que nos ocupa, los grupos de cohomología de De Rham junto con la derivada exterior son un complejo de co-cadenas de una variedad, mientras que si tenemos una aplicación diferenciable, los homomorfismos inducidos por los pullbacks son una co-cadena de aplicaciones entre los complejos de cada variedad (puesto que el pullback conmuta con la derivada exterior).

A partir de la definición podemos calcular los grupos de cohomología de algunas variedades sencillas.

Ejemplo 5.8. En primer lugar, si tenemos una variedad formada por un número finito de componentes conexas, $M = \bigcup_{i \in I} M_i$, entonces sus grupos de cohomología van a ser los productos cartesianos de los de las componentes. Para verlo podemos considerar la inclusión $i_{M_i} : M_i \rightarrow M$ para cada M_i y el pullback asociado $i_{M_i}^* : \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}^k(M_i)$ (que es la restricción de las formas en M a cada una de las componentes). Así mismo, tomamos $f : \bigcup_{i \in I} M_i \rightarrow M$ dada por la identidad en cada una de las componentes conexas. El pullback de f , $f^* : \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{A}^k(M_i)$ le asocia cada k -forma ω el elemento $(i_{M_i}^*(\omega))_{i \in I}$. Esta aplicación es inyectiva porque si una forma es nula en cada componente entonces lo es en todo M , y es sobreyectiva porque si damos unas formas cualesquiera en M_i , entonces definen otra en M que es su preimagen.

Ejemplo 5.9. Si M es una variedad diferenciable conexas, entonces $H_{dR}^0(M)$ es el espacio de funciones constantes (en nuestro caso \mathbb{R}). Tenemos que $H_{dR}^0(M) = \ker(d_1)$, ya que $\text{Im}(d_0) = 0$, mientras que aquellas funciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $df = 0$ son justamente las constantes. Por lo tanto el cociente también van a ser las constantes, y $H_{dR}^0(M) = \mathbb{R}$

Ejemplo 5.10. Consideremos el plano \mathbb{R}^2 . Podemos dotar al plano de estructura de variedad utilizando una carta global con la aplicación identidad. Denotaremos por x e y a las coordenadas en \mathbb{R}^2 , así como por $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ a las derivadas parciales y dx , dy a sus duales. Podemos considerar los diferentes conjuntos de formas que no son todas nulas, y las derivadas exteriores que las relacionan. Construimos el siguiente diagrama:

$$0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{A}^0(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{d_1} \mathcal{A}^1(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{d_2} \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{d_3} 0$$

donde

- $\mathcal{A}^0(\mathbb{R}^2) = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciables}\}$ son las funciones diferenciables sobre \mathbb{R}^2 .
- $\mathcal{A}^1(\mathbb{R}^2) = \{f dx + g dy : f, g \text{ funciones diferenciables}\}$ son las 1-formas sobre \mathbb{R}^2 .
- $\mathcal{A}^2(\mathbb{R}^2) = \{f dx \wedge dy : f \text{ diferenciable}\}$ son las 2-formas sobre \mathbb{R}^2 .

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{aligned} d_1(f) &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ d_2(f dx + g dy) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy \right) \wedge dy = \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx \wedge dy \\ d_3(f dx \wedge dy) &= 0 \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la definición de la derivada exterior dada en el Teorema 4.7 y hemos visto, por el Lema 3.14, apartado a), que el producto exterior de dos elementos básicos iguales se anula.

Sin más dilación, calculemos $\mathcal{Z}^k(M)$ y $\mathcal{B}^k(M)$ para $k = 0, 1, 2$:

$$\mathcal{Z}^0(\mathbb{R}^2) = \text{Ker}(d_1).$$

Son las funciones tales que sus derivadas parciales se anulan. Es decir, las constantes. Por lo tanto, $\mathcal{Z}^0(M) \cong \mathbb{R}$

$$\mathcal{Z}^1(\mathbb{R}^2) = \text{Ker}(d_2).$$

O lo que es lo mismo, las 1-formas tales que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$.

$$\mathcal{Z}^2(\mathbb{R}^2) = \text{Ker}(d_3) = \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^2).$$

$$\mathcal{B}^0(\mathbb{R}^2) = \text{Im}(d_0) = 0.$$

$$\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^2) = \text{Im}(d_1).$$

Son las diferenciales de funciones, esto es 1-formas de la forma $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ con f diferenciable.

$$\mathcal{B}^2(\mathbb{R}^2) = \text{Im}(d_2). \text{ Son las 2-formas que se escriben como } \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx \wedge dy$$

Por lo tanto ya podemos calcular los grupos de cohomología de De Rham:

$$H_{dR}^0(\mathbb{R}^2) = \frac{\mathcal{Z}^0(\mathbb{R}^2)}{\mathcal{B}^0(\mathbb{R}^2)} \cong \mathbb{R}$$

$$H_{dR}^1(\mathbb{R}^2) = \frac{\mathcal{Z}^1(\mathbb{R}^2)}{\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Veamos cuando una 1-forma cerrada es exacta, esto es, cuándo podemos escribir aquellas 1-formas $f dx + g dy$ tales que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ como el resultado de la derivada exterior de otra función. Basta considerar $F(x, y) = \int_0^x f(t, 0) dt + \int_0^y g(x, t) dt$ y entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= f(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = f(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt \\ &= f(x, 0) + f(x, y) - f(x, 0) = f(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= g(x, y) \end{aligned}$$

En consecuencia, ambos subespacios coinciden y $H_{dR}^1(\mathbb{R}^2) \cong 0$

$$H_{dR}^2(\mathbb{R}^2) = \frac{\mathcal{Z}^2(\mathbb{R}^2)}{\mathcal{B}^2(\mathbb{R}^2)}.$$

En este caso, hemos visto que el núcleo es todo el espacio $\mathcal{A}^2(\mathbb{R}^2)$, mientras que la imagen son aquellas 2-formas de la forma $(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x})dx \wedge dy$. Ahora bien, si, dada una 2-forma $f dx \wedge dy$, consideramos la 1-forma gdy con $g = \int_0^x f(t, y)dt$, entonces es claro que $d(gdy) = \frac{\partial g}{\partial x}(dx \wedge dy) = f(dx \wedge dy)$. Así, núcleo e imagen son coincidentes y $H_{dR}^2(\mathbb{R}^2) \cong 0$

5.1. Integrales de línea

Siguiendo ahora el Capítulo 6 de [5] vamos a hablar un poco sobre la integración de formas. Esto nos va a permitir obtener una caracterización de las 1-formas exactas. Consideremos una 1-forma $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ y una curva diferenciable $\alpha : I = [a, b] \rightarrow M$. Podemos considerar el pullback de ω por α , $\alpha^*\omega \in \mathcal{A}^1(I)$, y podemos poner $\alpha^*\omega = f dt$, siendo $f \in \mathcal{F}(I)$ y t la función coordenada en I .

Definición 5.11. Se define la integral de ω sobre α como:

$$\int_{\alpha} \omega = \int_a^b \alpha^*\omega = \int_a^b f(t)dt.$$

Notación. A las curvas cerradas sobre las que integramos también las llamaremos **caminos**

De hecho, podemos hacer una definición semejante para curvas que son diferenciables a trozos:

Definición 5.12. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una curva dada por una parametrización. Decimos que α es diferenciable a trozos si es continua y existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_q = b$ del intervalo $[a, b]$ tal que $\alpha_i = \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es diferenciable.

Podemos poner entonces $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_q$ y definir

$$\int_{\alpha} \omega = \sum_{i=1}^q \int_{\alpha_i} \omega$$

Ahora, si α es una curva parametrizada diferenciable, y consideramos una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$, entonces tenemos, con la notación introducida en la definición anterior, que

$$\int_{\alpha} \omega = \int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^q \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt = \sum_{i=1}^q \int_{\alpha_i} \omega$$

Por lo tanto, da lo mismo qué particion escojamos, siempre y cuando los trozos resultantes sean diferenciables.

Ahora vamos a probar ciertas propiedades que necesitaremos para demostrar la caracterización de las 1-formas exactas.

Lema 5.13. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una curva diferenciable a trozos dada por su parametrización. Sean $u : [c, d] \rightarrow [a, b]$ un cambio de parametrización diferenciable y la parametrización $\sigma = \alpha \circ u$. Dada $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$, tenemos que

$$1) \text{ Si } u(c) = a \text{ y } u(d) = b, \text{ entonces } \int_{\sigma} \omega = \int_{\alpha} \omega$$

2) Si $u(c) = b$ y $u(d) = a$, entonces $\int_{\sigma} \omega = -\int_{\alpha} \omega$

Demostración. Primero supongamos que α es diferenciable. Tenemos que $\sigma^*\omega = u^*(\alpha^*\omega) = u^*(f dt)$. Utilizando la ecuación (4.3), tenemos que $u^*(f dt) = (f \circ u)d(t \circ u) = (f \circ u)\frac{du}{ds} ds$, donde s es la coordenada en $[c, d]$. Por lo tanto, utilizando el cambio de variable $t = u(s)$, en 1):

$$\int_{\sigma} \omega = \int_c^d (f \circ u) \frac{du}{ds} ds = \int_a^b f dt = \int_{\alpha} \omega.$$

En 2):

$$\int_{\sigma} \omega = \int_c^d (f \circ u) \frac{du}{ds} ds = \int_b^a f dt = -\int_{\alpha} \omega.$$

Ahora sea $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_q$ diferenciable a trozos. Tenemos que $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_q$ con $\sigma_i = \alpha_i \circ u|_{(t_{i-1}, t_i)}$. Por otro lado, para cada uno de los segmentos donde la curva es diferenciable hemos probado que las igualdades son ciertas. En consecuencia, en 1):

$$\int_{\alpha} \omega = \sum_{i=1}^q \int_{\alpha_i} \omega = \sum_{i=1}^q \int_{\sigma_i} \omega = \int_{\sigma} \omega.$$

De manera similar se obtiene 2), por lo que hemos acabado la prueba. \square

Lema 5.14. Sean $\alpha_1 : [a, b] \rightarrow M$ y $\alpha_2 : [c, d] \rightarrow M$ dos curvas que coinciden en los puntos inicial y final, p y q . Entonces, si f es diferenciable,

$$\int_{\alpha_1} df = \int_{\alpha_2} df = f(p) - f(q) \quad (5.2)$$

Demostración. Supongamos que la curva es diferenciable. Por el Lema previo, tenemos que si $[a, b]$ y $[c, d]$ son dos intervalos diferentes, entonces podemos considerar un cambio de parametrización diferenciable entre ambos, y la integral sería la misma. En consecuencia, podemos asumir $[c, d] = [a, b]$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1} df &= \int_a^b \alpha_1^*(df) = \int_a^b d(f \circ \alpha_1) = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\alpha_1(t)) dt = \\ &= f(\alpha_1(b)) - f(\alpha_1(a)) = f(\alpha_2(b)) - f(\alpha_2(a)) = \dots = \int_{\alpha_2} df \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el teorema fundamental del cálculo para funciones reales de una variable. Si las curvas fuesen diferenciables a trozos, $\alpha_1 = \alpha_{1_1} + \dots + \alpha_{1_q}$ y $\alpha_2 = \alpha_{2_1} + \dots + \alpha_{2_r}$, entonces tenemos lo mismo para cada uno de los fragmentos. En consecuencia:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1} df &= \sum_{i=1}^q \int_{\alpha_{1_i}} \omega = \sum_{i=1}^q f(\alpha_{1_i}(t_i)) - f(\alpha_{1_i}(t_{i-1})) = f(\alpha_1(b)) - f(\alpha_1(a)) = \\ &= f(\alpha_2(b)) - f(\alpha_2(a)) = \sum_{i=1}^r f(\alpha_{2_i}(t_i)) - f(\alpha_{2_i}(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^r \int_{\alpha_{2_i}} \omega = \int_{\alpha_2} df \end{aligned}$$

\square

Esto quiere decir que si consideramos una 1-forma exacta, df , entonces la integral sólo va a depender de los puntos inicial y final.

Lema 5.15. *Sea $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ tal que $\int_{\alpha} \omega = 0$ para cualquier curva diferenciable a trozos α . Entonces $\omega = 0$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que hay un punto $p \in M$ y un vector $v \in T_p M$ tales que $\omega_p(v) \neq 0$ (podemos suponer que es mayor que cero, puesto que si fuese menor consideraríamos $-\omega$). Consideremos una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$, con ϵ suficientemente pequeño para que $\omega_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) > 0$ para cualquier $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Entonces, dado que $(\alpha^*\omega)_t(v) = \omega_p(\alpha_p^*(v)) = \omega_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$ para $v \in T_t(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \alpha^* \omega = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \omega_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) dt > 0 \quad (5.3)$$

y hemos llegado a contradicción. \square

Definición 5.16. Una curva se dice cerrada si los puntos inicial y final coinciden. También llamaremos a una curva cerrada **lazo**.

Utilizando estos tres lemas, podemos enunciar un teorema para caracterizar las 1-formas cerradas sobre una variedad.

Teorema 5.17. *Sea $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$. Son equivalentes:*

- 1) ω es exacta.
- 2) $\int_{\alpha} \omega = 0$ para cualquier curva diferenciable a trozos cerrada α .
- 3) La integral de ω sobre una curva diferenciable a trozos cualquiera depende sólo de los puntos inicial y final de dicha curva.

Demostración.

1) \Rightarrow 2) Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una curva cerrada. Entonces, por el Lema 5.14, tenemos que

$$\int_{\alpha} df = f(\alpha(a)) - f(\alpha(b)) = 0$$

2) \Rightarrow 3) Sean $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ y $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ dos curvas con los mismos puntos inicial y final, x e y . Por el Lema 5.13, podemos suponer sin pérdida de generalidad que dichas curvas están parametrizadas sobre los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$ respectivamente. Consideremos ahora $u : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ definida por $u(t) = 1 - t$. Entonces $\sigma \circ u$ empieza en y y termina en x . En consecuencia, podemos concatenar las dos curvas: $\tau = \alpha + \sigma \circ u : (-1, 1) \rightarrow M$. Por construcción, τ es una curva cerrada diferenciable a trozos, por lo que por 2) tenemos que:

$$0 = \int_{\tau} \omega = \int_{\alpha} \omega + \int_{\sigma \circ u} \omega.$$

Por el apartado 2) del Lema 5.13,

$$\int_{\sigma \circ u} \omega = - \int_{\sigma} \omega,$$

así que

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{\sigma} \omega$$

3)⇒1) Supongamos primero que M es conexa y sea $p \in M$. Utilizando el Teorema 3.8.7 de [5], tenemos que existe un camino diferenciable a trozos que une p y otro punto cualquiera a , y que llamaremos α_a . Definimos

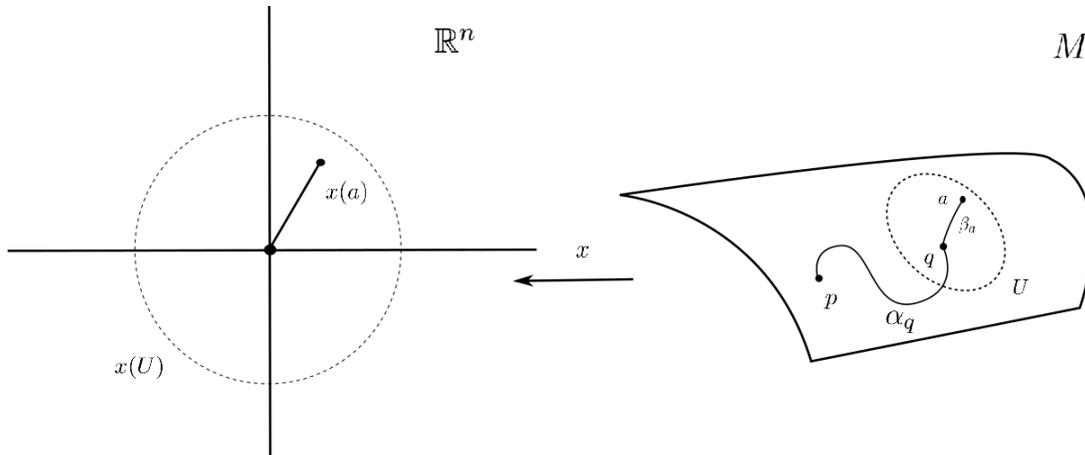
$$f(a) = \int_{\alpha_a} \omega.$$

f está bien definida porque, por hipótesis, las integrales de ω sólo dependen de los puntos inicial y final del camino.

Veamos que f es diferenciable. Sea $q \in M$ un punto arbitrario. Consideremos una carta con dominio coordenado U , $q \in U$, y coordenadas x^1, \dots, x^n , de manera que la imagen de q sea el origen y U sea la bola unidad en \mathbb{R}^n . Entonces tenemos que:

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$$

donde $\omega_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. Ahora, para cada $a \in U$ definimos $\beta_a : (0, 1) \rightarrow U$ por $\beta_a(t) = x^{-1}(tx(a))$.



Entonces en U podemos poner

$$f(a) = \int_{\alpha_a} \omega = \int_{\alpha_q} \omega + \int_{\beta_a} \omega = f(q) + \int_{\beta_a} \omega.$$

Por lo tanto, siendo $x(a) = (a^1, \dots, a^n)$,

$$\begin{aligned} (f \circ x^{-1})(a^1, \dots, a^n) &= (f \circ x^{-1})(0) + \int_{\beta_a} \omega = \\ &= (f \circ x^{-1})(0) + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \omega_i(ta^1, \dots, ta^n) \frac{d}{dt}(ta^i) dt = \\ &= (f \circ x^{-1})(0) + \sum_{i=1}^n a^i \int_0^1 \omega_i(ta^1, \dots, ta^n) dt, \end{aligned}$$

que es diferenciable en $(0,0)$ por ser la suma de una constante y las funciones de las variables en \mathbb{R}^n multiplicadas por constantes. Por lo tanto, f es diferenciable en U , y como hemos escogido q de manera arbitraria, f es diferenciable. Veamos que $\omega = df$. Sea $\tau : [a, b] \rightarrow M$ una curva diferenciable a trozos cualquiera. Sea $\alpha_{\tau(a)} : [c, a] \rightarrow M$ otra curva diferenciable a trozos que una p con $\tau(a)$. Entonces:

$$f(\tau(b)) = \int_{\tau+\alpha_{\tau(a)}} \omega = \int_{\alpha_{\tau(a)}} \omega + \int_{\tau} \omega = f(\tau(a)) + \int_{\tau} \omega.$$

Por lo tanto:

$$\int_{\tau} \omega = f(\tau(b)) - f(\tau(a)) = \int_{\tau} df.$$

Entonces tenemos que

$$\int_{\tau} \omega - df = 0$$

para cualquier curva diferenciable a trozos τ . En consecuencia, por el Lema 5.15, $\omega = df$ y ω es exacta. □

Con esto hemos conseguido una caracterización de las formas exactas. Ahora, si ω y η son dos 1-formas cerradas, entonces pertenecen a la misma clase en $H_{dR}^1(M)$ si y sólo si $\int_{\alpha} \omega = \int_{\alpha} \eta$ para cualquier curva diferenciable a trozos α .

Como se explica en [13], la homología consiste en buscar objetos sin borde que no son el borde de ningún objeto. Lo que busca la cohomología de De Rham son formas cerradas que no son la derivada exterior de ninguna otra forma. El Teorema de Stokes (ver [7], Teorema 16.11), relaciona estos dos conceptos.

Ejemplo 5.18. Continuando con el Ejemplo 5.2, veamos que $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ no es exacta. Para ello vamos a considerar el camino $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\alpha(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Entonces, como $\alpha^*(\omega) = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)d\theta = d\theta$

Por lo tanto:

$$\int_{\alpha} \omega = \int_0^{2\pi} \alpha^*\omega = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

En consecuencia, α es una curva cerrada diferenciable a trozos tal que la integral sobre ω no es cero. Por lo tanto, por el Teorema 5.17, ω no es exacta.

Esto se debe a que en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nos falta un punto. De hecho, vamos a ver que variedades que tienen distintos grupos de cohomología de De Rham no pueden ser homotópicamente equivalentes.

5.2. Invarianza Homotópica

Además de conservarse por difeomorfismos, los grupos de cohomología de De Rham son invariantes homotópicos. Eso tiene como consecuencia que dos variedades diferenciables homeomorfas tengan los mismos grupos de cohomología de De Rham. La prueba que vamos a realizar se puede encontrar en [12], capítulo 28.

Definición 5.19. Sean X, Y dos espacios topológicos y $F, G : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas. Se dice que F y G son **homótopas** si existe una aplicación continua $H : X \times I \rightarrow Y$, donde $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, tal que:

$$H(x, 0) = F(x) \quad H(x, 1) = G(x) \quad (5.4)$$

para cualquier $x \in X$. Lo denotaremos por $F \sim G$. Si además H es diferenciable, entonces diremos que F y G son diferenciablemente homótopas.

Se dice que dos espacios topológicos **tienen el mismo tipo de homotopía**, o que **son homotópicamente equivalentes**, si existen dos aplicaciones continuas, $F : X \rightarrow Y$ y $G : Y \rightarrow X$, de forma que

$$G \circ F \sim Id_X \quad F \circ G \sim Id_Y.$$

En este caso se dice que F y G son inversas homótopas.

Lo que queremos probar es que si dos variedades diferenciables tienen el mismo tipo de homotopía, entonces los grupos de cohomología de De Rham son isomorfos.

El primer problema que se plantea es el de pasar de aplicaciones continuas a aplicaciones diferenciables. El resultado que resuelve este problema es el **Teorema de aproximación de Whitney**, que vamos a enunciar pero que no vamos a probar. Puede encontrarse una prueba en [7], Teorema 9.27.

Teorema 5.20. *Sean M y N dos variedades diferenciables y sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación continua. Entonces F es homótopa a una aplicación diferenciable.*

Como consecuencia, tenemos este resultado:

Teorema 5.21. *Si dos aplicaciones diferenciables F y G son homótopas entonces son diferenciablemente homótopas.*

En consecuencia, basta que probemos el resultado para aplicaciones diferenciablemente homótopas.

Por otro lado, para probar la invarianza homotópica, vamos a demostrar primero que dos aplicaciones diferenciables que sean homotópicamente equivalentes inducen el mismo homomorfismo entre los grupos de cohomología de De Rham. Dicho de otra manera, si $F, G : M \rightarrow N$ son dos aplicaciones diferenciables queremos ver que si ω es una k -forma cerrada, entonces existe una k -forma exacta η tal que:

$$F^*(\omega) - G^*(\omega) = \eta$$

y así tenemos que

$$F^\sharp[\omega] - G^\sharp[\omega] = 0 \quad (5.5)$$

Una manera de obtener η es a través de una aplicación lineal $K : \mathcal{A}^k(N) \rightarrow \mathcal{A}^{k-1}(M)$ de forma que

$$F^* - G^* = d \circ K \pm K \circ d$$

De esta manera, si ω es cerrada,

$$F^*(\omega) - G^*(\omega) = (d \circ K)(\omega) \pm (K \circ d)(\omega) = (d \circ K)(\omega)$$

y tendríamos (5.5). Dicha aplicación se llama operador homotópico.

Ahora bien, sean F y G dos aplicaciones diferenciablemente homótopas, y sea $H : M \times I \rightarrow N$ la homotopía cumpliendo (5.4). Si consideramos para cada $t \in \mathbb{R}$ la aplicación $i_t : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ definida por $i_t(x) = (x, t)$, entonces podemos reescribir estas condiciones como

$$H \circ i_0 = F \qquad H \circ i_1 = G,$$

de manera que por las propiedades del pullback y de los homomorfismos inducidos, tenemos que

$$i_0^\# = i_1^\# \Rightarrow i_0^\# \circ H^\# = i_1^\# \circ H^\# \Leftrightarrow F^\# = G^\#$$

Por lo tanto, hemos de encontrar un operador homotópico entre i_0 e i_1 . Para ello vamos a necesitar el siguiente resultado, conocido como el Lema de Urysohn:

Lema 5.22 (Lema de Urysohn). *Sean A y B dos cerrados disjuntos sobre una variedad M . Entonces existe una función diferenciable f tal que*

$$f \equiv 1 \text{ en } A \qquad f \equiv 0 \text{ en } B \qquad (5.6)$$

Demostración. Por la Proposición 2.11 sabemos que existe una partición de la unidad subordinada al recubrimiento abierto $\{M \setminus A, M \setminus B\}$, pongamos $\{\phi_{M \setminus A}, \phi_{M \setminus B}\}$. Entonces es claro que $\phi_{M \setminus B}$ cumple las condiciones requeridas. \square

Proposición 5.23. *Existe un operador homotópico entre i_0 e i_1 .*

Demostración. Primero vamos a ver que podemos poner cualquier forma diferenciable en $M \times \mathbb{R}$ como una suma localmente finita de dos tipos de formas. Después definiremos K para cada uno de los tipos y por último veremos que efectivamente K es un operador homotópico.

Consideramos la proyección $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ y un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ en M . Sea $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada a \mathcal{A} (que sabemos que existe por la Proposición 2.11) y, utilizando el Lema de Urysohn, sea $\{g_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ una familia de funciones diferenciables tales que

$$g_\alpha \equiv 1 \text{ en } \text{supp}(\phi_\alpha) \text{ y } \text{supp}(g_\alpha) \subset U_\alpha \qquad (5.7)$$

Notación. A lo largo de la demostración vamos a utilizar funciones definidas sobre M compuestas con la proyección π que hemos mencionado anteriormente (por ejemplo $\phi_\alpha \circ \pi$). Puesto que una función es una 0-forma, podemos considerar el pullback π^* , que equivale a la composición con π para funciones sobre M (es decir, $\phi_\alpha \circ \pi = \pi^* \phi_\alpha$). Utilizaremos ambas notaciones según sea conveniente.

Tenemos entonces que:

- $\pi^{-1}(U_\alpha)$ es un recubrimiento abierto de $M \times \mathbb{R}$. Son abiertos porque son las contraímagenes de los abiertos U_α por la aplicación π , que es continua. Cubre todo $M \times \mathbb{R}$ porque cada par (x, t) está contenido en la contraímagen de aquel abierto U_{α_x} que contenga a x (dicho abierto existe porque $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_\alpha$ es un atlas de M).
- $\{\phi_\alpha \circ \pi\}_{\alpha \in A} = \{\pi^* \phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una partición de la unidad subordinada a $\pi^{-1}(U_\alpha)$:

- $0 \leq \pi^* \phi_\alpha \leq 1$ para todo $\alpha \in A$ por cumplirlo cada ϕ_α
 - $\text{supp}(\pi^* \phi_\alpha) \subseteq \pi^{-1}(U_\alpha)$
 - La familia de soportes $\text{supp}(\pi^* \phi_\alpha)$ localmente finita: tomemos un par $(x, t) \in M \times \mathbb{R}$. Como la familia de soportes de $\{\phi_\alpha\}$ es localmente finita, entonces existe U entorno de x que interseca a un número finito de dichos soportes. Luego, como $\text{supp}(\pi^* \phi_\alpha) \subseteq \pi^{-1}(\phi_\alpha)$, $\pi^{-1}(U)$ interseca a un número finito de los $\text{supp}(\pi^* \phi_\alpha)$.
 - $\sum_{\alpha \in A} \pi^* \phi_\alpha(x, t) = \sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha(x) = 1$.
- En $\pi^{-1}(U_\alpha)$ tenemos coordenadas $\pi^* x_\alpha^1, \dots, \pi^* x_\alpha^n, t$. Consideramos para cada t las mismas que tenemos en U_α , pero sobre $M \times \mathbb{R}$. Para simplificar la notación, escribiremos x_α^i para referirnos a $\pi^* x_\alpha^i$. Notemos que son la misma función salvo que la segunda tiene un argumento más, t , que no interviene.
 - Tenemos que las funciones $g_\alpha \circ \pi = \pi^* g_\alpha$ cumplen

$$\text{supp}(\pi^* g_\alpha) \subseteq \pi^{-1}(U_\alpha) \text{ y } \pi^* g_\alpha \equiv 1 \text{ en } \text{supp}(\pi^* \phi_\alpha)$$

Sea ω una k -forma diferenciable en $M \times \mathbb{R}$. Entonces podemos poner

$$\omega = \sum_{\alpha} (\pi^* \phi_\alpha) \omega := \sum_{\alpha} \omega_\alpha$$

y tenemos que

$$\text{supp}(\omega_\alpha) \subset \text{supp}(\pi^* \phi_\alpha) \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$$

En consecuencia, en $\pi^{-1}(U_\alpha)$

$$\omega_\alpha = \sum a_I^\alpha dx_\alpha^I + \sum b_J^\alpha dt \wedge dx_\alpha^J$$

donde, por un lado, a_I^α y b_J^α son funciones diferenciables en $M \times \mathbb{R}$, y por otro I es un multi-índice de longitud k y J es un multi-índice de longitud $k - 1$.

Finalmente, para extender esta expresión a todo $M \times \mathbb{R}$, notemos que, como $\text{supp}(\omega_\alpha) \subset \text{supp}(\pi^* \phi_\alpha)$ y $\pi^* g_\alpha \equiv 1$ en dichos soportes, entonces podemos poner $\omega_\alpha = \pi^* g_\alpha \omega_\alpha$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= \pi^* g_\alpha \omega_\alpha = \pi^* g_\alpha \left(\sum a_I^\alpha dx_\alpha^I + \sum b_J^\alpha dt \wedge dx_\alpha^J \right) = \\ &= \sum a_I^\alpha ((\pi^* g_\alpha) dx_\alpha^I) + \sum b_J^\alpha dt \wedge ((\pi^* g_\alpha) dx_\alpha^J). \end{aligned}$$

Como $\text{supp}(g_\alpha) \subset U_\alpha$, entonces extiende $g_\alpha dx_\alpha^I$ al resto de M , tomando valor 0 fuera de U_α .

Sea $f(x, t)$ una función diferenciable en $M \times \mathbb{R}$ y sea η una forma diferenciable en M . Si ahora llamamos tipo I a las formas del estilo $f(x, t) \pi^* \eta$ y tipo II a las del estilo $f(x, t) dt \wedge \pi^* \eta$, entonces hemos puesto cada ω_α , y por lo tanto ω , como una suma localmente finita de formas de ambos tipos.

Ahora, para cada uno de los tipos, definimos el operador homotópico $K : \mathcal{A}^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}^{k-1}(M)$:

- Para el tipo I :

$$K(f \pi^* \eta) = 0$$

- Para el tipo *II*:

$$K(fdt \wedge \pi^*\eta) = \left(\int_0^1 f(x, t) dt \right) \eta$$

Veamos que efectivamente K es un operador homotópico. Para ello, es suficiente probar que en un dominio de una carta cualquiera se cumple que

$$dK \pm Kd = i_1^* - i_0^* \quad (5.8)$$

Tipo *I*: Aplicando la propiedad *b*) del Teorema 4.7

$$Kd(f\pi^*\eta) = K \left(\frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge \pi^*\eta + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge \pi^*\eta + f\pi^*d\eta \right)$$

De los tres sumandos de $d(f\pi^*\eta)$, los dos últimos se anulan al aplicar K por ser del tipo *I* y por la definición de K . Por otro lado:

$$K \left(\frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge \pi^*\eta \right) = \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) \eta = (f(x, 1) - f(x, 0))\eta = (i_1^* - i_0^*)(f(x, t)\pi^*\eta)$$

y como $dK(f\pi^*\eta) = d(0) = 0$, entonces

$$dK + Kd = i_1^* - i_0^*$$

para las del primer tipo.

Tipo *II*: Volviendo a aplicar otra vez la propiedad *b*) del Teorema 4.7

$$\begin{aligned} dK(fdt \wedge \pi^*\eta) &= d \left(\left(\int_0^1 f(x, t) dt \right) \eta \right) = \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \int_0^1 f(x, t) dt \right) dx^i \wedge \eta + \left(\int_0^1 f(x, t) dt \right) d\eta \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} Kd(fdt \wedge \pi^*\eta) &= K(d(fdt) \wedge \pi^*\eta - fdt \wedge d\pi^*\eta) = \\ &= K \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \pi^*dx^i \wedge dt \wedge \pi^*\omega \right) - K(fdt \wedge d\pi^*\eta) = \\ &= -K \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dt \wedge \pi^*dx^i \wedge \pi^*\eta \right) - \left(\int_0^1 f(x, t) dt \right) d\eta = \\ &= - \sum_i \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} dt \right) dx^i \wedge \eta - \left(\int_0^1 f(x, t) dt \right) d\eta \end{aligned}$$

Como f es diferenciable (\mathcal{C}^∞), podemos derivar bajo el signo integral. En consecuencia, para las formas del tipo *II*,

$$dK + Kd = 0$$

Ahora veamos que coincide con $i_1^* - i_0^*$. Utilizando la linealidad del pullback respecto del producto exterior y su conmutatividad con la derivada exterior, tenemos que:

$$i_1^* - i_0^*(f dt \wedge \pi^* \eta) = i_1^*(f dt \wedge \pi^* \eta) - i_0^*(f dt \wedge \pi^* \eta) = f(x, 1) di_1^*(t) \wedge i_1^*(\pi^* \eta) - f(x, 0) di_0^*(t) \wedge i_0^*(\pi^* \eta)$$

Pero $di_1^*(t) = d(1) = 0$ y $di_0^*(t) = d(0) = 0$, por lo que todo se anula y hemos terminado.

Por lo tanto, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.24. *Si M y N son variedades diferenciables homotópicamente equivalentes, entonces $H_{dR}^p(M) \cong H_{dR}^p(N)$*

Demostración. Sean $F : M \rightarrow N$ y $G : N \rightarrow M$ dos aplicaciones continuas que sean inversas homótopas. Por el Teorema de Aproximación de Whitney, existen aplicaciones diferenciables \tilde{F} y \tilde{G} homótopas a F y G respectivamente. Entonces es claro que:

$$\begin{aligned} \tilde{F} \circ \tilde{G} &\sim F \circ G \sim Id_N \\ \tilde{G} \circ \tilde{F} &\sim G \circ F \sim Id_M. \end{aligned}$$

Por el Teorema 5.21, tenemos que $\tilde{F} \circ \tilde{G}$ e Id_N son diferenciablemente homótopas (resp. $\tilde{G} \circ \tilde{F}$ e Id_M). Por la Proposición 5.23, sabemos que dos aplicaciones diferenciablemente homótopas inducen los mismos homomorfismos entre los grupos de cohomología. En consecuencia:

$$\begin{aligned} (\tilde{F} \circ \tilde{G})^\# &= \tilde{G}^\# \circ \tilde{F}^\# = Id_N^\# \\ (\tilde{G} \circ \tilde{F})^\# &= \tilde{F}^\# \circ \tilde{G}^\# = Id_M^\# \end{aligned}$$

Así que $\tilde{F}^\#$ es isomorfismo. □

Como consecuencia inmediata, los grupos de cohomología de De Rham también son invariantes topológicos, porque los homeomorfismos son equivalencias homotópicas.

Este resultado nos permite saber un poco más sobre los grupos de cohomología de algunas variedades:

Corolario 5.25 (Lema de Poincaré). *Si M es una variedad diferenciable contráctil, entonces $H_{dR}^k(M) = 0$ para $k \geq 1$.*

Demostración. Existe un punto $q \in M$ tal que la identidad en M es homótopa a la aplicación constante c_q . En consecuencia, si i_q es la inclusión de $\{q\}$ en M , tenemos que $c_q \circ i_q = Id_{\{q\}}$ y que $i_q \circ c_q \sim Id_M$. Así que $\{q\}$ y M tienen el mismo tipo de homotopía, por lo que sus grupos de cohomología de De Rham coinciden. Pero los grupos de cohomología del punto son nulos para $k \geq 1$, así que los de M también. □

Lo mismo ocurre para los conjuntos estrellados, que también son contráctiles. Por otro lado, como para cada punto en una variedad diferenciable tenemos un entorno homeomorfo a una bola abierta de \mathbb{R}^n entonces toda forma cerrada va a ser localmente exacta. Por el resultado anterior, los grupos de cohomología son localmente nulos, y esto no es otra cosa que la igualdad entre las formas cerradas y las exactas.

Notemos que aunque toda forma ω sea localmente exacta, eso no quiere decir que podamos definir globalmente una forma η tal que $\omega = d\eta$. Por ejemplo, si tenemos dos abiertos U y V que se intersecan, con $\omega = d\eta$ y $\omega = d\eta'$ en cada uno de ellos, entonces en la intersección tenemos que $d\eta = d\eta'$, esto es, $d(\eta - \eta') = 0$. Por lo tanto, sólo se cumple que $\eta - \eta'$ es cerrada, pero nada garantiza la igualdad entre ellas.

Finalmente, tenemos que los grupos de cohomología de \mathbb{R}^n van a ser:

$$H_{dR}^p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \geq 1. \end{cases} \quad (5.9)$$

5.3. Sucesión de Mayer-Vietoris

En la mayor parte de las ocasiones, computar los grupos de cohomología de algunas variedades no va a ser posible utilizando únicamente la definición. Es por eso que conviene introducir una herramienta nueva para poder hacerlo, y esta va a ser la sucesión de Mayer-Vietoris. Para hacerlo vamos a necesitar, por un lado, algún resultado (el Lema del zig-zag), y por otro, algunas propiedades de las variedades diferenciables, como son la admisión de particiones diferenciables de la unidad, las aplicaciones tangente y el pullback y su interacción con la derivada exterior que nos ha dado los grupos de De Rham. Seguimos [7], capítulo 17.

Lema 5.26 (Lema del zig-zag). *Consideramos una sucesión exacta de complejos de la siguiente forma:*

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \longrightarrow 0$$

Entonces existe una aplicación lineal

$$\delta : H^k(C^*) \longrightarrow H^k(A^*)$$

de forma que la siguiente sucesión es exacta:

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^k(A^*) \xrightarrow{f} H^k(B^*) \xrightarrow{g} H^k(C^*) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(A^*) \xrightarrow{f} \dots$$

No incluiremos la demostración de este lema. Se puede consultar una prueba en [7], Lema 17.40.

Sea M una variedad cubierta por dos abiertos U y V . Consideremos cada una de las inclusiones, que denotamos como en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & U \cap V & \\ i_U \swarrow & & \searrow j_V \\ U & & V \\ i_M \searrow & & \swarrow j_M \\ & M & \end{array}$$

Por otro lado, tenemos los pullbacks:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{A}^k(U \cap V) & \\
 i_U^* \nearrow & & \nwarrow j_V^* \\
 \mathcal{A}^k(U) & & \mathcal{A}^k(V) \\
 i_M^* \nwarrow & & \nearrow j_M^* \\
 & \mathcal{A}^k(M) &
 \end{array}$$

Por último consideremos las siguientes aplicaciones construídas a partir de los pullbacks:

$$\begin{aligned}
 i_M^* \oplus j_M^* : \mathcal{A}^k(M) &\longrightarrow \mathcal{A}^k(U) \oplus \mathcal{A}^k(V) \\
 \omega &\rightsquigarrow (\omega|_U, \omega|_V)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i_U^* - i_V^* : \mathcal{A}^k(U) \oplus \mathcal{A}^k(V) &\longrightarrow \mathcal{A}^k(U \cap V) \\
 (\omega, \eta) &\rightsquigarrow \omega|_{U \cap V} - \eta|_{U \cap V}
 \end{aligned}$$

que son la restricción de las formas a U y a V y la diferencia en $U \cap V$ respectivamente. Entonces enunciamos y probamos el siguiente teorema:

Teorema 5.27 (Mayer-Vietoris). *Sea M una variedad diferenciable, y sean U y V dos abiertos de M tales que su unión es M . Entonces para cada entero k existe una aplicación lineal*

$$\delta : H_{dR}^k(U \cap V) \longrightarrow H_{dR}^{k+1}(M)$$

de forma que la siguiente sucesión es exacta:

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_{dR}^k(M) \xrightarrow{i_M^\# \oplus j_M^\#} H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) \xrightarrow{i_U^\# - j_V^\#} H_{dR}^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H_{dR}^{k+1}(M) \xrightarrow{i_M^\# \oplus j_M^\#} \dots \quad (5.10)$$

Demostración. Primero vamos a probar que la siguiente sucesión es exacta para cada k .

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^k(M) \xrightarrow{i_M^* \oplus j_M^*} \mathcal{A}^k(U) \oplus \mathcal{A}^k(V) \xrightarrow{i_U^* - j_V^*} \mathcal{A}^k(U \cap V) \longrightarrow 0 \quad (5.11)$$

I) $i_M^* \oplus j_M^* : \mathcal{A}^k(M) \longrightarrow \mathcal{A}^k(U) \oplus \mathcal{A}^k(V)$ es inyectiva.

Como hemos explicado antes, las aplicaciones inducidas por las inclusiones no son más que restricciones en el dominio de las formas. Por lo tanto, si $i_M^* \oplus j_M^*(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V) = (0, 0)$, como $U \cup V = M$, entonces $\omega = 0$.

II) $i_U^* - j_V^* : \mathcal{A}^k(U) \oplus \mathcal{A}^k(V) \longrightarrow \mathcal{A}^k(U \cap V)$ es sobreyectiva.

Veamos que dada $\omega \in \mathcal{A}^k(U \cap V)$, podemos encontrar $\eta \in \mathcal{A}^k(U)$ y $\eta' \in \mathcal{A}^k(V)$ de forma que $(i_U^* - j_V^*)(\eta, \eta') = \eta|_{U \cap V} - \eta'|_{U \cap V} = \omega$. Sea $\{\phi_U, \phi_V\}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada a $\{U, V\}$, que sabemos que existe por la Proposición 2.11. Podemos definir entonces:

$$\eta = \begin{cases} \phi_V \omega & \text{si } p \in U \cap V \\ 0 & \text{si } p \in U \setminus \text{supp}(\phi_V) \end{cases}$$

respectivamente. Consideremos $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ y $V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$. Es claro que U y V son abiertos y que $U \cup V = M$, por lo que podemos construir la sucesión de Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H_{dR}^0(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{i_{\mathbb{S}^n}^\# \oplus j_{\mathbb{S}^n}^\#} & H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) & \xrightarrow{i_U^\# - j_V^\#} & H_{dR}^0(U \cap V) \\
& & & & \searrow \delta & & \swarrow \\
& & H_{dR}^1(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{i_{\mathbb{S}^n}^\# \oplus j_{\mathbb{S}^n}^\#} & H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) & \xrightarrow{i_U^\# - j_V^\#} & H_{dR}^1(U \cap V) \\
& & & & \searrow \delta & & \swarrow \\
& & & & \vdots & & \\
& & H_{dR}^k(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{i_{\mathbb{S}^n}^\# \oplus j_{\mathbb{S}^n}^\#} & H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) & \xrightarrow{i_U^\# - j_V^\#} & H_{dR}^k(U \cap V) \\
& & & & \searrow \delta & & \swarrow \\
& & & & \vdots & & \\
& & H_{dR}^n(M) & \xrightarrow{i_{\mathbb{S}^n}^\# \oplus j_{\mathbb{S}^n}^\#} & H_{dR}^n(U) \oplus H_{dR}^n(V) & \xrightarrow{i_U^\# - j_V^\#} & H_{dR}^n(U \cap V) \longrightarrow 0
\end{array}$$

Vamos a utilizar inducción sobre n . Primero, notemos que como U y V son homeomorfos a \mathbb{R}^n , entonces sus grupos de cohomología son los mismos, esto es, \mathbb{R} para el de dimensión 0 y nulos para el resto.

Para $n = 1$, tenemos que $H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$ por ser conexa (Ejemplo 5.9). Por otro lado, tenemos:

$$\dots \longrightarrow H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \xrightarrow{i_U^\# - j_V^\#} H_{dR}^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{i_{\mathbb{S}^1}^\# \oplus j_{\mathbb{S}^1}^\#} H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \longrightarrow \dots$$

Por ser U y V homotópicamente equivalentes a \mathbb{R} , $H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) = 0$. Además, $U \cap V$ es homotópicamente equivalente a dos puntos, así que $H_{dR}^0(U \cap V) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Entonces queda:

$$\dots \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{i_U^\# - j_V^\#} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{i_{\mathbb{S}^1}^\# \oplus j_{\mathbb{S}^1}^\#} 0 \oplus 0 \longrightarrow \dots$$

Como la sucesión es exacta, tenemos que $Im(\delta) = Ker(i_{\mathbb{S}^1}^\# \oplus j_{\mathbb{S}^1}^\#)$, siendo esta última idénticamente nula. Por lo tanto δ es sobreyectiva. Por otro lado, $Ker(\delta) = Im(i_U^\# - j_V^\#)$. Ahora bien, como $H_{dR}^0(U)$ y $H_{dR}^0(V)$ son las funciones constantes y hacemos una diferencia, podemos obtener cualquier otra constante. Por lo tanto, $Ker(\delta) = Im(i_U^\# - j_V^\#) \cong \mathbb{R}$, y ha de ser $H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) = Im(\delta) = \mathbb{R}$.

Para $n = 2$, utilizando lo que sabemos de \mathbb{S}^1 y que $U \cap V$ es homotópicamente equivalente a \mathbb{S}^1 , tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \xrightarrow{i_{\mathbb{S}^2}^\# \oplus j_{\mathbb{S}^2}^\#} & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \xrightarrow{i_U^\# - j_V^\#} & \mathbb{R} \\
& & & & \delta & & \\
& & & \swarrow & & \searrow & \\
& & H_{dR}^1(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{i_{\mathbb{S}^2}^\# \oplus j_{\mathbb{S}^2}^\#} & 0 & \xrightarrow{i_U^\# - j_V^\#} & \mathbb{R} \\
& & & & \delta & & \\
& & & \swarrow & & \searrow & \\
& & H_{dR}^2(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{i_{\mathbb{S}^2}^\# \oplus j_{\mathbb{S}^2}^\#} & 0 & \xrightarrow{i_U^\# - j_V^\#} & 0 \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Para el primer grupo, $H_{dR}^1(\mathbb{S}^2)$, tenemos por la exactitud en $H_{dR}^1(\mathbb{S}^2)$ que $Im(\delta) = Ker(i_{\mathbb{S}^2}^\# \oplus j_{\mathbb{S}^2}^\#) = H_{dR}^1(\mathbb{S}^2)$, así que δ ha de ser sobreyectiva. Por la exactitud en $H_{dR}^0(U \cap V) \cong \mathbb{R}$, el núcleo de δ ha de ser la imagen de $i_U^\# - j_V^\#$, que hemos visto antes que son las aplicaciones constantes. Por lo tanto, el núcleo de δ es \mathbb{R} y $H_{dR}^1(\mathbb{S}^2) = 0$.

Para el segundo grupo, $H_{dR}^2(\mathbb{S}^2)$, δ tiene que ser biyectiva, así que $H_{dR}^2(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{R}$.

Finalmente, veamos que se cumple para $n \geq 3$ cualquiera. Para $k = 0$ sabemos que $H_{dR}^0(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$ por ser \mathbb{S}^n conexa.

Para $1 < k \leq n$, consideramos la sucesión de Mayer-Vietoris:

$$\cdots \longrightarrow H_{dR}^{k-1}(U) \oplus H_{dR}^{k-1}(V) \xrightarrow{i_U^\# - j_V^\#} H_{dR}^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H_{dR}^k(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{i_{\mathbb{S}^n}^\# \oplus j_{\mathbb{S}^n}^\#} H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) \longrightarrow \cdots$$

U y V son homeomorfos al espacio euclídeo de dimensión n , cuyos grupos de cohomología de De Rham hemos visto en (5.9). Por lo tanto $H_{dR}^k(U) = H_{dR}^k(V) = 0$ para $k \geq 1$. Además, $U \cap V$ va a ser homotópicamente equivalente a \mathbb{R}^n menos un punto, esto es, a la esfera de una dimensión menos. En consecuencia, para $k \geq 2$

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{i_U^\# - j_V^\#} H_{dR}^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\delta} H_{dR}^k(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{i_{\mathbb{S}^n}^\# \oplus j_{\mathbb{S}^n}^\#} 0 \longrightarrow \cdots$$

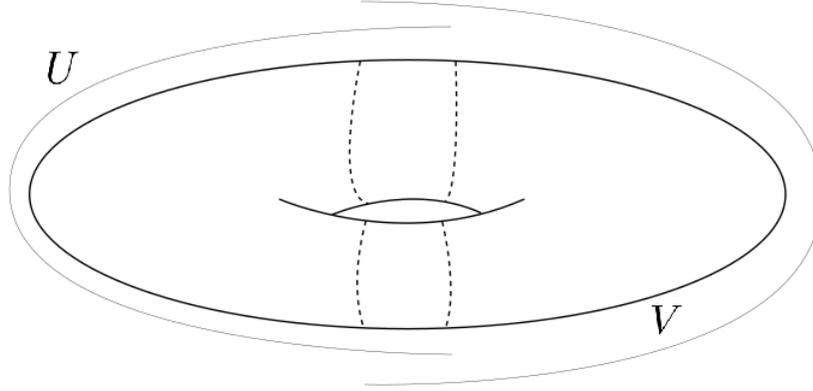
Por ser la sucesión exacta, tenemos que $H_{dR}^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong H_{dR}^k(\mathbb{S}^n)$. Por lo tanto para $k \geq 2$, tenemos que $H_{dR}^k(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{R}$ si $k = n$ y es nulo para el resto.

Por último, para $k = 1$, tenemos

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{i_U^\# - j_V^\#} H_{dR}^0(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} H_{dR}^1(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{i_{\mathbb{S}^n}^\# \oplus j_{\mathbb{S}^n}^\#} 0 \longrightarrow \cdots$$

De aquí se deduce que δ es sobreyectiva y que $Ker(\delta) \cong Im(i_U^\# - j_V^\#) = \mathbb{R}$, por lo que $H_{dR}^1(\mathbb{S}^n) \cong 0$ para todo n .

Ejemplo 5.29. Consideremos el Toro \mathbb{T}^2 . Vamos a tomar como abiertos U y V dos “medias lunas” que se interesequen en los extremos, como se muestra en la imagen.



Tenemos entonces que ambos son homotópicamente equivalentes a la esfera \mathbb{S}^1 , y que $U \cap V$ es homotópicamente equivalente a dos circunferencias. Por lo tanto, $H_{dR}^k(U) \cong H_{dR}^k(V) \cong H_{dR}^k(\mathbb{S}^1)$ y $H_{dR}^k(U \cap V) \cong H_{dR}^k(\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1)$. Haciendo uso de la sucesión de Mayer-Vietoris, tenemos que la siguiente secuencia es exacta:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H_{dR}^0(\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{i_{\mathbb{T}^2}^\# \oplus j_{\mathbb{T}^2}^\#} & H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \xrightarrow{i_U^\# - j_V^\#} & H_{dR}^0(U \cap V) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\
& & & & \searrow \delta & & \downarrow \\
& & & & H_{dR}^1(\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{i_{\mathbb{T}^2}^\# \oplus j_{\mathbb{T}^2}^\#} & H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \xrightarrow{i_U^\# - j_V^\#} & H_{dR}^1(U \cap V) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\
& & & & \searrow \delta & & \downarrow \\
& & & & H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{i_{\mathbb{T}^2}^\# \oplus j_{\mathbb{T}^2}^\#} & 0 & \xrightarrow{i_U^\# - j_V^\#} & 0 & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Como el toro es conexo, entonces $H_{dR}^0(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{R}$.

Como consecuencia del Teorema 17.30 en [7] tenemos el siguiente resultado:

Proposición 5.30. *Si M es una variedad diferenciable compacta y orientable de dimensión n , entonces $H_{dR}^n(M)$ es 1-dimensional.*

Como el toro lo cumple, tenemos que $H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{R}$.

Puesto que a partir de la diferencia de funciones constantes podemos obtener cualquier constante, podemos utilizar la exactitud en $H_{dR}^0(U \cap V)$ para deducir que $\text{Ker}(\delta) \cong \text{Im}(i_U^\# - j_V^\#) \cong \mathbb{R}$. En consecuencia, como la suma de la dimensión de la imagen y la dimensión del núcleo ha de ser la del total, $\text{Im}(\delta) \cong \mathbb{R}$. Usando la exactitud en $H_{dR}^1(\mathbb{T}^2)$, $\text{Ker}(i_{\mathbb{T}^2}^\# \oplus j_{\mathbb{T}^2}^\#) \cong \mathbb{R}$.

Por otro lado, como $H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{R}$ y δ ha de ser sobreyectiva por la exactitud en $H_{dR}^2(\mathbb{T}^2)$, entonces $\text{Ker}(\delta) = \mathbb{R}$ y $\text{Im}(i_U^\# - j_V^\#) \cong \text{Ker}(\delta) \cong \mathbb{R}$. Por lo tanto, $\text{Ker}(i_U^\# - j_V^\#) \cong \mathbb{R}$. Por la exactitud en $H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V)$ tenemos que $\text{Im}(i_{\mathbb{T}^2}^\# \oplus j_{\mathbb{T}^2}^\#) \cong \text{Ker}(i_U^\# - j_V^\#) \cong \mathbb{R}$. Esto unido a que $\text{Ker}(i_{\mathbb{T}^2}^\# \oplus j_{\mathbb{T}^2}^\#) \cong \mathbb{R}$ implica que $H_{dR}^1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{R}$.

Hemos probado entonces que

$$H_{dR}^k(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, 2 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

Capítulo 6

Conclusión

Recopilando los resultados de algunos ejemplos que hemos hecho hasta ahora tenemos los siguientes grupos de cohomología de De Rham calculados.

$$H_{dR}^k(\mathbb{S}^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k = 1 \\ \mathbb{R} & \text{si } k = 2 \end{cases} \quad H_{dR}^k(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k = 2 \end{cases} \quad H_{dR}^k(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{si } k = 1 \\ \mathbb{R} & \text{si } k = 2 \end{cases}$$

Estos resultados no nos extrañan: sabemos que dos variedades homeomorfas tienen los mismos grupos de cohomología de De Rham. La esfera, el cilindro y el toro no son homeomorfos entre sí, y ésta es una prueba más de ello.

Ahora veamos un poco más de cerca los grupos de grado 1. Para el caso de homotopía, teníamos que $\Pi_1(\mathbb{S}^2) = 0$, $\Pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ y $\Pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Observamos que son similares a los grupos de cohomología de De Rham salvo por el grupo. Esto tampoco debería extrañarnos, puesto que los grupos de cohomología de De Rham son invariantes homotópicos. Sin embargo, tampoco hemos dado una explicación de por qué ocurre algo así, lo que nos lleva a hacernos las siguientes preguntas: ¿Hay alguna relación más “cercana” entre los grupos de cohomología de De Rham y los grupos de homotopía?

Y es que hay diferentes formas de definir grupos de cohomología sobre un espacio topológico, pero para espacios suficientemente buenos todas ellas coinciden. En particular, para variedades diferenciables, el teorema de De Rham nos da un isomorfismo entre los grupos de cohomología de De Rham y los grupos de cohomología singular con coeficientes reales.

Bibliografía

- [1] DENNIS BARDEN, CHARLES THOMAS *An introduction to differential manifolds* Imperial College Press, Londres, 2003.
- [2] RAOUL BOTT, LORING W. TU *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, Nueva York, 1982.
- [3] FREDERIC BRICKELL, R.S. CLARK *Differentiable Manifolds: An Introduction*. Van Nostrand, Londres, 1970.
- [4] SRISHTI CHATTERJI, MANUEL OJANGUREN *A glimpse of the de Rham era*. ICCM Not. 1 (2013), no. 2, 117–137. Disponible en <http://sma.epfl.ch/~ojangure/Glimpse.pdf> [05/06/2019].
- [5] LAWRENCE CONLON *Differentiable Manifolds (Second edition)*. Birkhäuser, Boston, 2008.
- [6] PATRICK GREENE *De Rham Cohomology, connections, and characteristic classes*. University of Chicago, Chicago, 2009. Disponible en <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/REUPapers/Greene.pdf> [05/06/2019].
- [7] JOHN M. LEE, *Introduction to Smooth Manifolds.*, Nueva York, 2003.
- [8] ELON L. LIMA, *Álgebra Exterior.*, Rio de Janeiro, 2005.
- [9] CHARLES W. MISNER, KIP S. THORNE, JOHN ARCHIBALD WHEELER, *Gravitation.*, W. H. Freeman and Company, 1973.
- [10] JOHN J. O’CONNOR, EDMUND F. ROBERTSON *Georges De Rham*. School of Mathematics and Statistics University of St. Andrews, Escocia, enero 2010. Disponilble en https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Rham.html[05/06/2019]
- [11] TERENCE TAO *Differential forms and integration* 2007. Disponible en <http://www.math.ucla.edu/~tao/preprints/forms.pdf> [05/06/2019].
- [12] LORING W. TU *An introduction to manifolds*. Springer, Medford, 2008.
- [13] *Tungsteno.io* 2018. Disponible en http://tungsteno.io/post/exp-goal_de_rham_cohomology/ [05/06/2019].