CUATRO

FUNCIONES

No te preocupes por tus problemas con las matemáticas, los míos son todavía mayores.
Albert Einstein

El ser humano busca continuamente las causas de los fenómenos naturales y los factores que pueden variar en ellas, un ejemplo son los cambios climáticos. Huracanes, terremotos, inundaciones, sequías extremas con intensidades y frecuencias cada día más devastadoras. Es posible tomar dos variables: una donde se haga referencia a los cambios climáticos y la otra que se refiera a las intensidades y frecuencias. En este caso las variables son cualitativas. Este ejemplo se puede evidenciar en un diagrama de conjuntos o diagramas de Venn, donde se relacionan los elementos de la izquierda con los de la derecha.

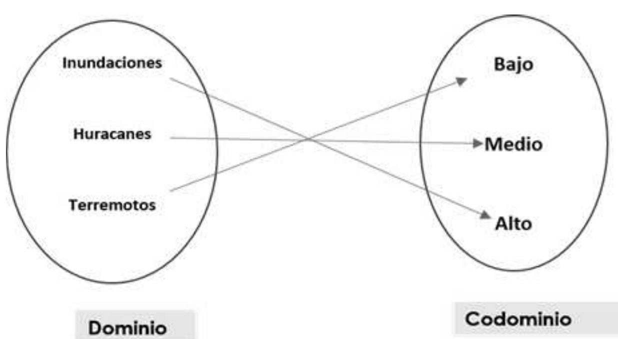


Figura 4.1. Diagrama de relación de una función.

Esta relación recibe el nombre de función si, para cada variable independiente existe un solo valor para la variable dependiente. Así se observa cómo cambia la variable independiente con respecto a la variable dependiente, como el ejemplo del cambio climático y sus consecuencias.

Las variables que se presentan en el desarrollo del capítulo son cuantitativas, por lo cual, se utilizan los números reales para cuantificarlas entre ellas. El vínculo estará ligado por una ecuación algebraica, que establece la relación de una variable con respecto a la otra.

Sea B el conjunto formado por los valores de la variable independiente (que también recibe el nombre de dominio) y C el conjunto formado por los valores de la variable dependiente (llamado codominio), donde exista una relación entre B y C es posible afirmar que es una función, si f asigna a cada elemento $x \in B$ un único elemento $y \in C$ llamado $f(x)$ o imagen de x *bajo* f.

Ejemplo 4.1

Para la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Determinar la imagen de 4 y todas las preimágenes de 81.

Solución:

Primero se debe tener en cuenta que la relación $f(x) = x^2$ es uno a uno, por lo cual todo número real se relaciona con un único número real. La imagen de 4 se calcula sustituyendo el valor de $x = 4$ en la función, $f(4) = 16$. Las preimágenes de 16 son todos los valores de x tal que $f(x) = 16$. Estos son los números reales cuyo cuadrado corresponde a 16.
Al resolver la ecuación:

$$x^2 = 81$$

Esta solución en $\mathbb{R}$ son $x = 9$ *y* $x = -9$, por lo cual las preimágenes de 81 son 9 y -9.
El dominio de una función puede determinarse analíticamente teniendo en cuenta que al conjunto de los reales se le debe restar aquellos x que generen las siguientes situaciones para las imágenes de la función:

- Divisores cero
- Cantidades subradicales negativas para raíces de índice par

Las funciones polinómicas tienen como dominio el conjunto de los números reales. En el caso de las funciones racionales se debe proceder como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.2

Sea $f(x) = \frac{3x}{x+4}$ determine su dominio.

Solución:

Se iguala el denominador a cero y se resuelve la ecuación obtenida. El ejemplo $x+4 = 0$ tiene como solución $x = -4$. Esto quiere decir que $f(-4)$ no está definido ya que la sustitución de x por -4 da como resultado $f(-4) = -\frac{12}{0}$. Según lo anterior el dominio corresponde al conjunto de los números reales menos el valor -4.

La anterior conclusión se escribe de la siguiente forma: $\mathbb{R} - \{-4\}$.

Ejemplo 4.3

Sea $f(x) = \frac{5x+3}{x^2-5x+6}$ determine su dominio.

Solución:

De forma similar al ejemplo anterior se iguala el denominador a cero y se resuelve la ecuación resultante para obtener: $x^2 - 5x + 6 = 0$ cuyas soluciones son $x = 3,\ x = 2$.
De tal forma que el dominio de la función es entonces: $\mathbb{R} - \{3, 2\}$

Ejemplo 4.4

Sea $f(x) = \frac{\sqrt{x+9}}{x-4}$. Determine el dominio de f.

Solución:

Para esta función se combinan dos de las situaciones presentadas anteriormente ya que es necesario que $x+9 \geq 0$, para que dé una solución real debido al índice par en la raíz. También se necesita que el denominador $x-4 \neq 0$. Por lo cual $x \geq -9$ y $x \neq 4$; por tanto, el dominio de la función corresponde al conjunto $(\mathbb{R} - \{3, 2\}) \cup x \geq -9$, expresión equivalente a $\mathbb{R} - \{3, 2\}$

Ejemplo 4.5

El perímetro de un rectángulo es 100 metros. Si se define b como la base y h como la altura determine una función para la base en función de la altura y encuentre su dominio.

Solución:

El perímetro del rectángulo es 100 m, entonces $2b+2h= 100$; luego, $b=\frac{100-2h}{2}$, simplificando se obtiene $b= 20-h$. De tal forma que la base en función de la altura es: $b(h) = 20-h$.
Dado que la altura debe ser mayor que cero, es decir, $h \geq 0$, por ser una longitud, no podría tomar valores negativos. El dominio de la función es [0;20].

4.1. Representación gráfica de funciones

Una función $f(x)$ se representa mediante el conjunto de puntos en el plano cartesiano de la forma $(x, f(x))$, donde x pertenece al dominio de la función y $f(x)$ es su imagen bajo f y por tanto pertenece al codominio. A continuación se presentan diferentes figuras; solo una corresponde a la función real de variable real.

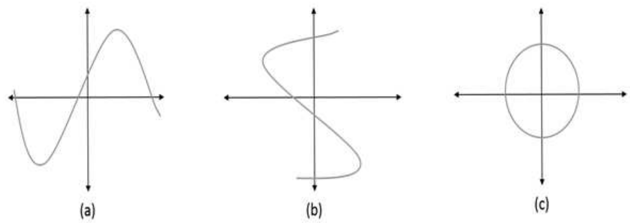
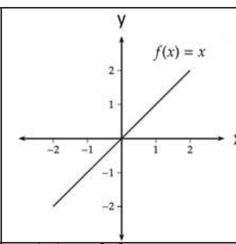
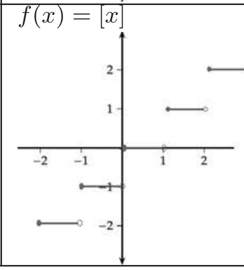
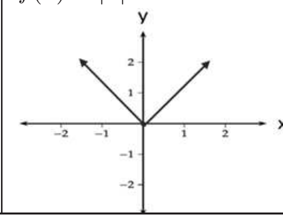


Figura 4.2. Graficas: a) Es función b) No es función c) No es función.

4.2. Función identidad, parte entera y valor absoluto

Tabla 4.1. Funciones identidad, parte entera y valor absoluto

Función identidad. $f(x) = x$ es una función en donde la imagen y preimagen son iguales. Su dominio es $\mathbb{R}$, y su rango $(-\infty, \infty)$, su representación es una recta que pasa por el punto $(0, 0)$ del plano formando un ángulo de $45°$ con el eje x.	
Función parte entera. $f(x) = [x]$ Esta función asigna a x, el mayor entero que es menor o igual a x, el dominio son los $\mathbb{R}$, pero su rango son los $\mathbb{Z}$. La figura tiene forma de escalera, su característica es relacionar a todo número no entero con el entero inmediato a la izquierda en la recta numérica; si es un número entero se le asigna el mismo número.	$f(x) = [x]$ 

Función valor absoluto. $F(x) = \|x\|$ corresponde a una función real, su imagen es el valor absoluto de la preimagen. Su dominio es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, y su rango $[0, \infty^{+})$.	$f(x) = \|x\|$ 

4.3. Operaciones con funciones

Con las funciones es posible sumar, restar, multiplicar, dividir y hallar funciones compuestas aplicando propiedades de expresiones algebraicas.

Ejemplo 4.6

Sea $f\left(x\right) = \frac{x}{x^2-9}$ y $g\left(x\right) = \frac{x+3}{x}$, cuyos dominios $\mathbb{R}-\{-3,3\}$ y $\mathbb{R}-\{0\}$; determinar el dominio y el criterio para las funciones $f+g, f-g$ y $f.g$.

Solución.

El dominio correspondiente para las funciones: $f+g, f-g$ y $f.g$. es la intersección de los dominios D_f y D_g. Obtenemos $\mathbb{R}-\{-3,0,3\}$.

- $f+g$ es $f+g\left(x\right) = f\left(x\right) + g\left(x\right)$

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-9} + \frac{x+3}{x} &= \frac{x^2+x^3+3x^2-9x-27}{x(x^2-9)}\\ &= \frac{x^3+4x^2-9x-27}{x(x^2-9)}\\ &= \frac{x^3+4x^2-9x-27}{x(x-3)(x+3)}\end{aligned}$$

- $f-g\ es\ f-g(x) = f(x) - g(x)$

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-9} - \frac{x+3}{x} &= \frac{x^2-x^3-3x^2+9x+27}{x(x^2-9)}\\ &= \frac{-x^3-2x^2+9x+27}{x(x^2-9)}\\ &= \frac{-x^3-2x^2+9x+27}{x(x-3)(x+3)}\end{aligned}$$

- $f.g\ es\ f.g(x) = f(x).g(x)$

$$\frac{x}{x^2-9}.\frac{x+3}{x}=\frac{x(x+3)}{x(x^2-9)}=\frac{x(x+3)}{x(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x-3}$$

El dominio para esta función es $\mathbb{R}-\{3\}$

Para el caso de la división el dominio sale de la división de los dominios de cada función eliminando los valores que anulan el divisor.

Ejemplo 4.7

Sean $f(x)=3x^2-2x+1$ y $g(x)=\sqrt{x+2}$ funciones reales, de variable real. Calcule $f\circ g$ y $g\circ f$. Determine si son iguales.

Solución:

La imagen de x bajo g es $\sqrt{x+2}$, entonces se sustituye la variable x en la función f por la expresión $\sqrt{x+2}$ y se simplifica. El resultado es:

$$(f\circ g)(x)=3\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2\sqrt{x+2}+1$$

$$(f\circ g)(x)=3(x+2)-2\sqrt{x+2}+1$$

$$(f\circ g)(x)=3x+7-\sqrt{x+2}$$

Para calcular $(g\circ f)(x)$ se tiene que la imagen de x bajo f es $f(x)=3x^2-2x+1$, entonces se sustituye la variable x en la función g por la expresión $3x^2-2x+1$ y se obtiene:

$$(g\circ f)(x)=\sqrt{\left(3x^2-2x+1\right)+2}$$

$$(g\circ f)(x)=\sqrt{3x^2-2x+3}$$

De lo anterior es posible afirmar que: $(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$

4.4. Función lineal

Esta función es de gran utilidad en los métodos estadísticos. Se le denomina la recta del mejor ajuste, que ayuda a estudiar los comportamientos de las variables en problemas específicos.

Una función $y=f(x)$ es lineal, si el incremento o la disminución en la variable dependiente es directamente proporcional a la diferencia en la variable independiente. En este caso se puede afirmar que las variables se relacionan linealmente.

Para $y = f(x)$; $y_1 = f(x_1)$ entonces $y - y_1 = m(x - x_1)$, donde m es la constante de proporcionalidad. Se puede reescribir como $y = mx + y_1 - mx_1$, si $b = y_1 - mx_1$, y obtener $f(x) = mx + b$ que corresponde a la forma como se expresa comúnmente la función lineal.

Ejemplo 4.8

La tabla indica los puntos de ebullición de algunas sustancias en las escalas de temperatura Fahrenheit F y Celsius C.

Tabla 4.2. Puntos de ebullición para diferentes sustancias

Sustancia	**C**	**F**
Hidrógeno	-252.8	-423.04
Oxígeno	-183	-297.4
Agua	100	212
Metano	-161.5	-258.7

Verificar que las variables F y C están relacionadas linealmente y que F se expresa en función de C.

Solución

Para verificar que las dos variables están relacionadas se toman dos valores respectivamente, $F_1 = 212$ y $F_2 = -297{,}4$ y $C_1 = 100$ y $C_2 = -183$. Se aplica:

$$F_1 - F_2 = m\,(C_1 - C_2) \Rightarrow 212 - (-297{,}4) = m\,(100 - (-183)) \Rightarrow m = \frac{509{,}4}{283} = 1{,}8$$

y $b = F_1 - mC_1 = 212 - 1{,}8 \times 100 = 32$, por tanto se obtiene $F\,(C) = 1{,}8\,C + 32$: es la función que expresa a F en función de C.

$m = 1{,}8$ indica que un incremento en un grado en la escala Celsius equivale a aumentar 1,8 grados en la escala Fahrenheit. Podemos decir que el valor de m determina una razón de crecimiento o decrecimiento entre variables y b es la interseccion con el eje y.

Ejemplo 4.9

Si F y C representan las escalas de temperatura Fahrenheit y Celsius, exprese C en función de F.

Solución

Para expresar C en función de F se busca la función inversa de $F\,(C) = 1{,}8\,C + 32$, encontrada en el ejemplo anterior. Esto se logra despejando C, de donde se obtiene:

$$F = 1{,}8\,C + 32$$

$$F - 32 = 1{,}8\,C$$
$$\frac{F-32}{1{,}8} = C$$
$$C = \frac{F}{1{,}8} - \frac{32}{1{,}8}$$
$$C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$$
$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

4.5. Representación de la función lineal

Cuando se representa la función lineal es importante tener en cuenta lo siguiente:

Si $x_1 < x_2$ teniendo presente las propiedades de las desigualdades se tiene que $mx_1 + b < mx_2 + b$ si $m > 0$, esto indica que la función lineal es creciente.

Si $mx_1 + b > mx_2 + b$ si $m < 0$ la función lineal es decreciente.

Y por último cuando la pendiente $m = 0$, se puede concluir que la función es constante, esto se puede evidenciar en la figura 4.3 que representa la pendiente.

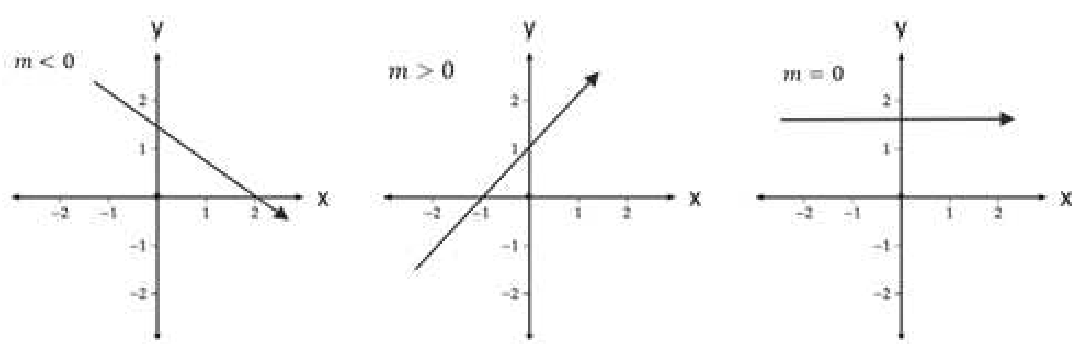


Figura 4.3. Funciones lineales decreciente, creciente y constante

4.5.1. Ecuación de la recta

Ejemplo 4.10

Dadas las ecuaciones:

$$4x - 6y = 2$$
$$x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}y$$

Verificar si representan la misma recta.

Solución:

Se puede notar que las ecuaciones son equivalentes al transformar una de ellas en la otra. Al iniciar con la ecuación $4x - 6y = 2$ y despejar x resulta:

$$4x = 2 + 6y$$

$$x = \frac{2 + 6y}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y$$

La última expresión es igual a la segunda ecuación con lo cual se ha demostrado su equivalencia.

Ejemplo 4.11

a. Si una recta tiene pendiente 4 y su punto de intersección sobre el eje y es $(0, -5)$ ¿Cuál será su ecuación?

   Como $m = 4$ y $b = -5$, de la forma de punto-intersección de la ecuación se obtiene lo siguiente: $y = 4x - 5$.

b. Sea la ecuación de la recta $-6y + 10x = 8$ determine el punto de intersección con el eje y y el valor de la pendiente de la recta.

Se escribe la ecuación de la forma $y = mx + b$, es decir, se despeja y

$$-6y + 10x = 8$$

$$-6y = 8 - 10x$$

$$y = \frac{8 - 10x}{-6}$$

$$y = -\frac{4}{3} + \frac{5}{3}x$$

De tal forma que la pendiente de la recta es $m = \frac{5}{3}$ y la intersección con el eje $y\ es\ b = -\frac{4}{3}$. Al relacionar una ecuación de la forma $ax + by = c$ con un conjunto de puntos, los cuales satisfacen la ecuación es posible afirmar que si $a, b\ y\ c$ son números reales, tales que $a\ y\ b$ no son cero a la vez, entonces el conjunto $\{(x, y) : ax + by = c\}$ tiene como gráfica una recta. A la ecuación $ax + by = c$ se le llama ecuación de la recta.

Ejemplo 4.12

Determine la intersección de las rectas:

$$\begin{gathered} 10x - 2y = 2 \\ -4x + y = 5 \end{gathered}$$

Solución:

La intersección es una pareja ordenada que corresponde a un punto del plano donde las rectas se cortan. Para buscar el punto de corte de las rectas se multiplica la segunda ecuación por 2 y se suma con la primera para obtener:

$$10x - 2y - 8x + 2y = 2 + 10$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

Este resultado de x será sustituido en la primera ecuación y da como resultado:

$$60 - 2y = 2$$

$$-2y = 2 - 60$$

$$-2y = -58$$

$$y = \frac{-58}{-2}$$

$$y = 29$$

De donde es posible concluir que el punto de intersección es (6,29).

Ejemplo 4.13

Determine el punto donde se cortan las rectas con ecuaciones $4x + 6y = 5\ y - 2x - 3y = 1$

Solución:

Al despejar la variable y de la ecuación $4x + 6y = 5$, se puede evidenciar $y = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{6}$, y al realizar el mismo procedimiento para la ecuación $-2x - 3y = 1$ obtenemos: $y = \frac{-2}{3}x - \frac{1}{3}$. Por tanto se puede observar que las dos rectas tienen la misma pendiente y diferente intersección. Se concluye que las rectas son paralelas.

Ejemplo 4.14

¿Son perpendiculares las rectas $\frac{5}{4}x + y = -10$ y $y = \frac{4}{5}x + 8$?

Solución:

Para resolver este problema se debe determinar la pendiente de ambas rectas y calcular el producto $m_1.m_2$. Para la primera ecuación se reescribe $y = -\frac{5}{4}x - 10$, donde $m_1 = -\frac{5}{4}$ y para la segunda recta la $m_2 = \frac{4}{5}$, calculamos $m_1.m_2 = -\frac{5}{4}.\frac{4}{4} = -1$, esto nos lleva a deducir que las dos rectas son perpendiculares.

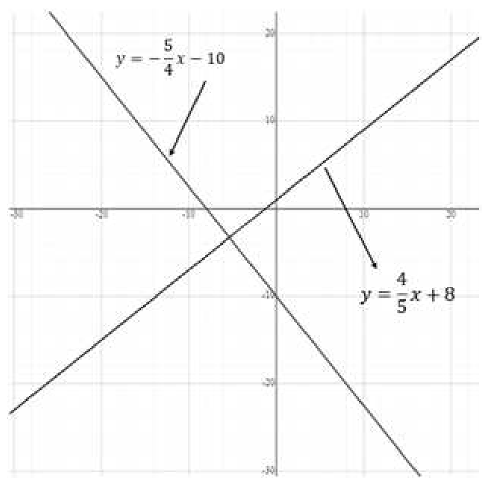


Figura 4.4. Rectas perpendiculares

(1) Ejercicios de trabajo en clase

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por P y Q

1. $P\,(2, 2)\,, Q(-10, 0)$
2. $P\,(-1, -4)\,, Q(6, 0)$
3. $P\,(1, 2)\,, Q(3, 3)$

Para los puntos 4, 5 y 6 determine una ecuación de la recta que cumpla las condiciones indicadas:

4. Pasa por $(-1,-2)$ y $(4,3)$

5. Pendiente 3; intersección en y es -2

6. Intersección $en\ x\ es\ -8$; intersección en y es 6

4.5.2. Modelado de la función lineal

Ejemplo 4.15

Un deportista que hace habitualmente una hora de ejercicio quema 210 calorías usando una máquina caminadora con una velocidad de 20 kilómetros por hora, si va a 60 kilómetros por hora, este deportista quema 370 calorías. Las calorías quemadas por hora son representadas por la letra C y la velocidad es representada con V.

Determine.

a) La función $C\ (v)$ que describa la situación

b) Si la velocidad del deportista es de 8 kilómetros por hora ¿Cuál será la cantidad de calorias quemadas?

Solución:

Para encontrar la función lineal $C(v)$ que se ajusta a los datos debemos encontrar la pendiente de la función. Para este proceso se necesitan dos puntos: (20,210) y (60,370), y obtenemos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

$$m = \frac{370 - 210}{60 - 20} = \frac{160}{40} = 40$$

El valor 40 representa la razón de crecimiento.
Como ya obtuvimos la pendiente entonces vamos a utilizar la ecuación. Punto pendiente. $y - y_1 = m(x - x_{1)}$. Aplicando esta ecuación obtenemos:
(Recordemos que para utilizar la ecuación necesitamos por lo menos un punto y el valor de la pendiente).

$$y - 210 = 40(x - 20)$$

$$y - 210 = 40x - 80$$

$$y = 40x - 80 + 210$$

$$y = 40x + 130$$

4.6. Función cuadrática

Esta función es muy generosa ya que nos facilita modelar situaciones problema en la geometría, crecimiento y decrecimientos, lanzamiento de objetos y problemas que requieran maximizar o minimizar gastos entre otros.

Se define formalmente de la siguiente manera:

Sea f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, f es una función cuadrática si existen constantes $a, b\ y\ c \in \mathbb{R}\ con\ a \neq 0$ y $f\left(x\right) = ax^2 + bx + c$.

La gráfica de la función cuadrática se llama parábola, $f\left(x\right) = x^2$, que posee vértice y un eje simétrico; también puede ser cóncava o convexa.

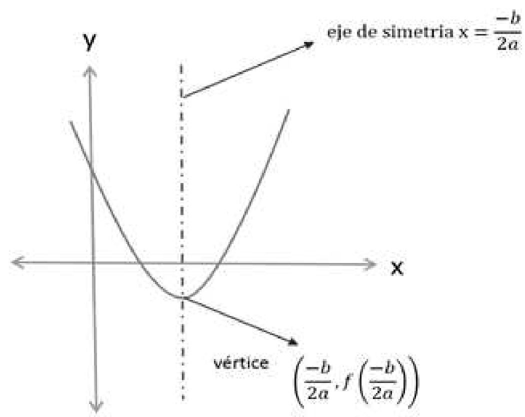


Figura 4.5. Eje de simetría y vértice en una parábola

Ejemplo 4.16

Exprese la función $f\left(x\right) = 2x^2 + 4x - 16$ en forma normal y trace su gráfica.

Para expresar la función en forma normal se debe factorizar y completar cuadrados.

$$f\left(x\right) = 3x^2 - 12x + 15$$
$$f\left(x\right) = 3\left(x^2 - 4x\right) + 15$$

$$f\left(x\right) \ = 3\left(x^2 - 4x + 4\right) + 15 - \left(3\right).\left(4\right) f\left(x\right) \ = 3(x-2)^2 + 3$$

La forma normal es: $f\left(x\right) = 3(x-2)^2 + 3$

Para trazar la gráfica se desplazan 2 unidades a la derecha, se alarga en 3 y se desplazan 3 unidades hacia arriba. El vértice de la parábola está dado por $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Al hacer el reemplazo se obtiene $V(2,3)$ y la parábola abre hacia arriba y su punto de intersección con el eje y es $f(0) = 15$.

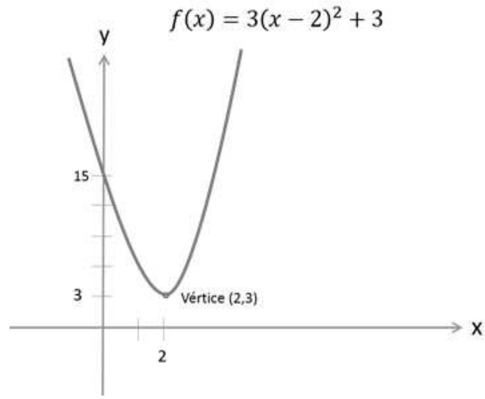


Figura 4.6. Vértice de la parábola $3(x-2)^2 + 3$

4.7. Máximos y mínimos de una función cuadrática

La función cuadrática tiene vértice (h, k) y tiene un valor mínimo si la gráfica abre hacia arriba, por el contrario, la función tiene un valor máximo ubicado en el vértice si su gráfica abre hacia abajo.

Sea f una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x-h)2 + k$ el valor máximo o el valor mínimo de la función se encuentra ubicado en $x = h$.

Si el coeficiente del término cuadrático es mayor que cero, es decir $a > 0$, entonces el valor mínimo de la función cuadrática será $f(h) = k$; por otra parte, si el coeficiente del término cuadrático es menor que cero, es decir $a < 0$, entonces el valor máximo de la función cuadrática será $f(h) = k$.

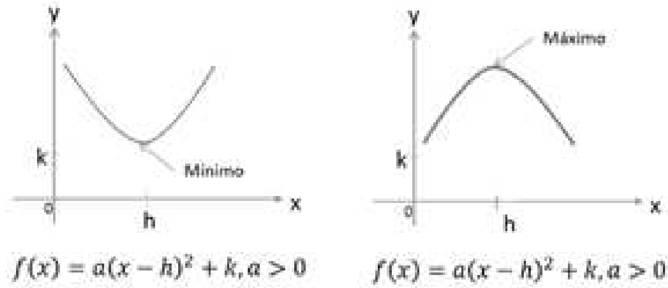


Figura 4.7. Valores máximos y mínimos de una parábola

Ejemplo 4.17

Dada la función cuadrática $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$

a) Escriba la función en forma normal

b) Determine las coordenadas del vértice y los puntos de intersección con los ejes x y y

c) Elabore la gráfica

d) Identifique el valor mínimo o máximo de f

a) Para expresar la función en forma normal se debe factorizar y completar cuadrados.

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x^2 + 12x - 5 \\ &= 6\left(x^2 + 2x\right) - 5 \\ &= 6\left(x^2 + 2x + 1\right) - 5 - (6{,}1) \\ &= 6(x+1)^2 - 11 \end{aligned}$$

La forma normal es $f(x) = 6(x+1)^2 - 11$

b) El vértice es $(-1, -11)$ y la parábola abre hacia arriba, el punto de intersección con el eje y es $f(0) = -5$, es decir $(0, 5)$, y los puntos que se intersecan en x, se obtienen al hacer $f(x) = 0$. Se debe resolver la expresión utilizando la fórmula de la ecuación cuadrática.

En este caso, con $a = 6$, $b = 12$, $c = -5$, el discriminante es positivo $b^2 - 4ac = 264$ y la ecuación tiene dos soluciones reales. De la forma cuadrática:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(6)(-5)}}{2(6)}$$

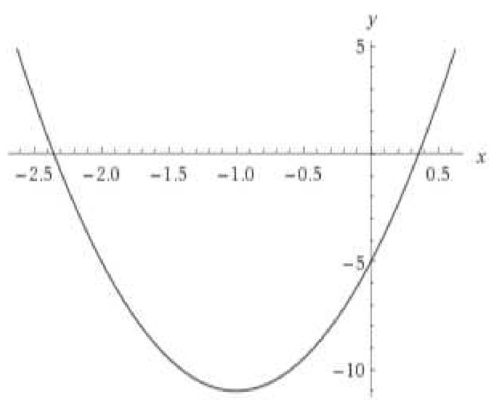
$$x=\frac{-12\pm\sqrt{264}}{12}$$

$$x=\frac{-12 \pm 2\sqrt{66}}{12}$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{66}}{6}$$

Entonces, las intersecciones con el eje x son:

$$\left(\frac{-6-\sqrt{66}}{6},\ 0\right) \quad \left(\frac{-6+\sqrt{66}}{6}, 0\right)$$



c) Como el coeficiente principal es positivo, f tiene un valor mínimo, que es:

$$f(-1) = -11$$

Ejemplo 4.18

Dada la función cuadrática $f\,(x) = -2x^2{+}6x{+}1$

a) Escriba la función en forma normal.

b) Determine las coordenadas del vértice y los puntos de intersección con los ejes x y y.

c) Elabore su gráfica.

d) Identifique el valor mínimo o máximo de f.

a) Para poder expresar la función en forma normal se debe factorizar y completar cuadrados.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2+6x+1 \\ &= -2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+1-(-2.\frac{9}{4}) \\ &= -2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{2} \end{aligned}$$

La forma normal es: $f(x) = -2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$

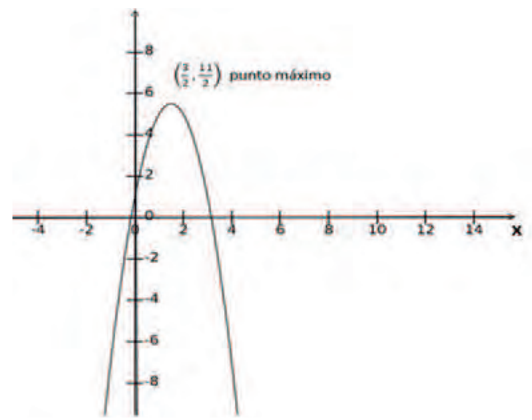


Figura 4.8. Punto máximo de la parábola $f(x) = -2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$

b) El vértice es: $\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$; la parábola abre hacia abajo y el punto de intersección con el eje y es $f(0) = 1$, es decir $(0,1)$. Los puntos de intersección con el eje x se obtienen al establecer $f(x) = 0$. Para determinar los valores de x que satisfacen esta ecuación se utiliza la fórmula de la ecuación cuadrática.

En este caso, $a= -2$, $b= 6$, $c= 1$, el discriminante es positivo $b^2-4ac= 44$ y la ecuación tiene dos soluciones reales. De la fórmula cuadrática se tiene:

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4(-2)(1)}}{2(-2)}$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{44}}{-4}$$

$$x=\frac{-6\pm2\sqrt{11}}{-4}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{11}}{-2}$$

Entonces, las intersecciones con el eje x se encuentran en los puntos:

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}\right) \quad y \quad \left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$$

(2) Ejercicios en clase

Realice el siguiente procedimiento: escriba la función en forma normal, determine las coordenadas del vértice y los puntos de intersección con los ejes x y y, elabore la gráfica e identifique el valor mínimo o máximo de f.

1. $k\,(x) = 3x^2 - 12x + 13$
2. $g\,(x) = 2x^2 + 8x + 11$
3. $j(x) = 1 - x - x^2$
4. $f\,(x) = 5x^2 + 12x - 3$

Encuentre el dominio y el rango en las siguientes funciones:

5. $f\,(x) = -8x + 5x + 12$
6. $h\,(x) = 14 - 10x + 2x^2$
7. $k\,(x) = \ -9x^2 + 5x + 2$

Determine la función cuadrática cuya gráfica tiene vértice en (1,22) y para la que el punto (4,16) pertenece a la gráfica.

4.7.1. Modelado de la función cuadrática

Ejemplo 4.19

Gloria es propietaria de una fábrica de pantalones para dama, el costo $C(n)$, que se genera por la elaboración de los pantalones se puede calcular mediante la expresion:

$$C\,(n) = n\,(50 - 0{,}2n)$$

En esta expresión, el factor $(50 - 0{,}2n)$ representa el precio por pantalón expresado en dólares.

a) Calcule el costo generado al fabricar 30 pantalones

b) ¿Qué cantidad de pantalones deben elaborarse para que se genere un costo de U$960?

Solución:

a) Para determinar el costo generado por 30 pantalones evaluamos la función para $n = 30$

$$\begin{aligned} C(n) &= n(50 - 0{,}2n) \\ C(30) &= 30(50 - 0{,}2(30)) \\ C(30) &= 30[50 - 6] \\ C(30) &= 30(44) \\ C(30) &= 1320 \end{aligned}$$

En este caso el costo es de $1320 dólares.

b) Se quiere determinar el número pantalones que se deben fabricar para generar costos por U$960 dólares, para lo cual se hace $C(n) = 960$ y despejar n.

$$\begin{aligned} C(n) &= n(50 - 0{,}2n) \\ 960 &= n(50 - 0{,}2n) \\ 960 &= 50n - 0{,}2n^2 \\ 0{,}2n^2 - 50n + 960 &= 0 \end{aligned}$$

Para desarrollar esta ecuación se usa la fórmula cuadrática.

Donde $a = 0{,}2, b = 50\ y\ c = 480$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n = \frac{-(50) \pm \sqrt{(50)^2 - 4(0{,}2)(480)}}{2(0{,}2)}$$

Realizando los cálculos obtenemos:

$$= \frac{-(-50) \pm \sqrt{2500-}}{0{,}4} = \frac{-(-50) \pm \sqrt{2500 - 2116}}{0{,}4}$$

$$= \frac{50 \pm \sqrt{384}}{0{,}4} = \frac{50 \pm 46}{0{,}4}$$

$$n = \frac{50 + 46}{0{,}4} = 240\ o\ n = \frac{50 - 46}{0{,}4} = 10$$

Se debe tener en cuenta que las dos soluciones son válidas, ya que son positivas y en consecuencia se genera un costo de U$960, cuando se fabrican 240 pantalones para dama o 10 pantalones para dama.

Ejemplo 4.20

Se quiere construir una caja con base cuadrada sin tapa a partir de una lámina cuadrada de acero, cortando en cada esquina cuadrados de 2 cm de lado, y doblando para formar la caja. ¿Qué dimensiones debe tener la lámina para que la caja tenga un volumen de 32 cm^3?

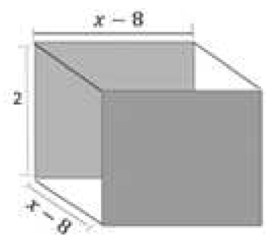


Figura 4.9. Representación de una caja de base cuadrada sin tapa

Solución

Según la figura 32, si x representa la longitud del lado de la lámina, $x-8$ será la longitud de cada lado de la base. El volumen de la caja se calcula con la ecuación $2(x-8)^2 = 32$, Al igualar a cero la ecuación cuadrática se obtiene $2x^2 - 32x + 96 = 0$. En este caso, $a{=}\ 2$, $b{=}\ -32$, $c{=}\ 96$, el discriminante es positivo $b^2{-}4ac{=}\ 256$ y la ecuación dada tiene dos soluciones. De la forma cuadrática:

$$t = \frac{-(-32) \pm \sqrt{256}}{2.(2)} = \frac{32 \pm 16}{4}$$

Los resultados de los tiempos son $x_1 = \frac{32+16}{4} = 12$ y $x_2 = \frac{32-16}{4} = 4$

x no puede ser 4 ya que se deben cortar cuadrados en cada esquina de lado 4. Por lo anterior, las dimensiones que debe tener la lámina de acero son 12×12 cm^2.

Ejemplo 4.21

Un atleta en una competencia de tiro con arco realiza el disparo de una flecha hacia arriba, desde una altura de 1 metro sobre el piso. La altura (h) representada en metros, en función del tiempo t expresado en segundos, está dada por la siguiente ecuación:

$$h = -2t^2 + 160t + 100$$

Halle el tiempo trascurrido de la flecha cuando alcance una altura de 1100 metros

Solución:

Para resolver se halla el valor de t, para una $h = 1100$. Esto se realiza sustituyendo h por 1100 en la ecuación cuadrática inicial.

$$1100 = 2t^2 + 160t + 100$$

Al igualar a cero la ecuación cuadrática $2t^2 - 160t - 1000 = 0$, con $a = -2$, $b = -160$, $c = -1000$, el discriminante es positivo $b^2 - 4ac = 48400$ y la ecuación dada tiene dos soluciones. De la forma cuadrática:

$$t = \frac{-(-160) \pm \sqrt{25600 + 8000}}{2.\,(2)} = \frac{-(-160) \pm \sqrt{33600}}{2.\,(2)} = \frac{160 \pm 40\sqrt{21}}{4}$$

Los resultados de los tiempos son $t_1 = 40 + 10\sqrt{21} \approx 85{,}8$ y $t_2 = 40 - 10\sqrt{21} \approx -5{,}8$. Por tanto, la solución del problema es $t_1 = 85{,}8$ segundos; es el tiempo que dura el proyectil cuando sube para estar a 1100 metros de altura. Ya que t_2 no es posible asumirlo porque el tiempo nunca es negativo.

4.8. Función exponencial base *a*

La función exponencial tiene la forma $f(x) = a^x$, en esta expresión se considera $a \neq 1$ y $a > 0$. Como en las expresiones algebraicas a se denomina base y x se denomina exponente. El dominio de la función exponencial es el conjunto de los números reales.

Para analizar la forma de la gráfica en la función exponencial, se toma $a = 2$ $(a > 0)$ y el luego se toma $a = \frac{1}{2}\,(0 < a < 1)$. A continuación se representan las funciones en la figura 4.10.

$f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $f(x) = a^x$

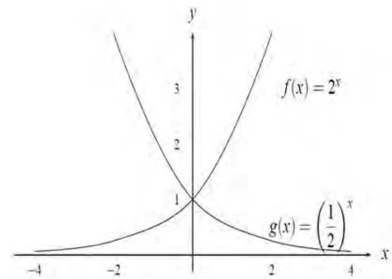


Figura 4.10. Representación de la función exponencial

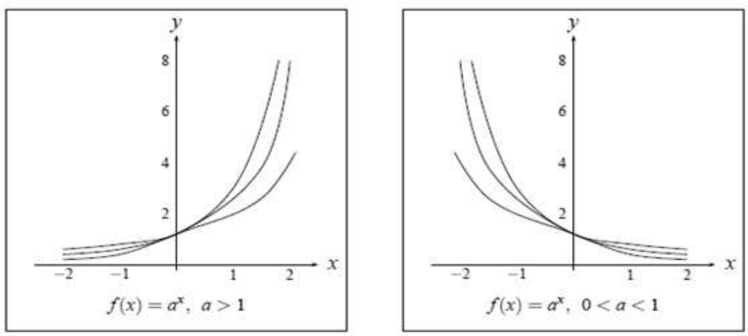


Figura 4.11. Representación de propiedades de la función exponencial

Propiedades de las funciones exponenciales.

1. $a^0 = 1$, para $a > 0$
2. $f(x) = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $a > 0$
3. La gráfica de $f(x) = a^x > 0$ para cualquier $a > 0$ es continua.
4. Si $x_1 > x_2 \Rightarrow \begin{cases} a^{x_1} & > a^{x_2} \text{ si } a < 1 \\ a^{x_1} & < a^{x_2} \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases}$
5. Para $a > 1$ la función $f(x) = a^x$ es creciente y para $0 < a < 1$ la función es decreciente.

Ejemplo 4.22

Ordene en forma ascendente los siguientes números

a) $2^{-2}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{0,4}, 2^{\sqrt{2}}$ la función $y = 2^x$, para $x \in \mathbb{R}$, crece por tanto $2^{-2}, 2^{0,4}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\sqrt{2}}$

b) $4^{\frac{1}{2}}, 2^3, (0{,}5)^{-2}, 0{,}125^2, (0{,}25)^{\sqrt{3}}$ cada número se puede representar como potencia de 2 y obtenemos:

$$(0{,}125)^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 2^{-6},\ (0{,}25)^{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3}} = 2^{-2\sqrt{3}},\ 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2,\quad (0{,}5)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2,\ 2^3$$

Ejemplo 4.23

Simplifique las siguientes expresiones:

a. $3^x{,}3^{x+5} = 3^{2x+5}$

b. $2^x + (1/2)^{-x} = 2^x + 2^x = 2{,}2^x = 2^{x+1}$

c.

$$\begin{aligned}
\frac{1+3^x}{2^x} + \frac{1}{6^x} &= \frac{1+3^x}{2^x} + \frac{1}{2^x{,}3^x} \\
&= \frac{1+3^x}{2^x}.\frac{3^x}{3^x} + \frac{1}{2^x{,}3^x} \\
&= \frac{(1+3^x).(3^x+1)}{(2^x{,}3^x)} \\
&= \frac{3^x+9^x+1}{6^x}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.24

Hallar el conjunto de todos los números reales x tales que $27^{x-1} = 9^{x+2}$

$$\begin{aligned}
27^{x-1} &= 9^{x+2} \\
&\Rightarrow \left(3^3\right)^{x-1} = \left(3^2\right)^{x+2} \\
&\Rightarrow 3^{3x-3} = 3^{2x+4} \\
&\Rightarrow 3x-3 = 2x+4 \\
&\Rightarrow x = 7
\end{aligned}$$

El conjunto solución tiene como único elemento a 7, es decir, el conjunto solución es $\{7\}$.

4.9. Función exponencial base *e*

Para poder entender el número e observe la siguiente expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Si se dan valores a n, cada vez más grandes se obtiene:

Tabla 4.3. Valores de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

n	1	100	1000	100000	1000000	10000000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.7048	2.7169	2.71826	2.71828	2.71828

Podemos evidenciar de la tabla anterior que a medida que los valores de n son más grandes se van acercando a 3, pero nunca serán mayores a este valor, lo cual se aproxima a un número irracional que conocemos como $e = 2{,}71828182\ldots$ La función exponencial es más conocida como $f(x) = e^x$.

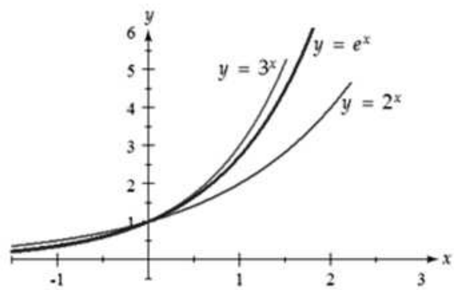


Figura 4.12. Función Exponencial e^x

Ejemplo 4.25

Factorizar sobre los números reales:

a.

$$\begin{aligned}3e^{2x} - 75e^{2y} &= 3\left(e^{2x} - 25e^{y}\right)\\ &= 3\left[\left(e^{x}\right)^2 - \left(5e^{y}\right)^2\right]\\ &= 3\left(e^{x} + 5e^{y}\right)\left(e^{x} - 5e^{y}\right)\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}e^{2x} - e^{x} - 6 &= \left(e^{x}\right)^2 - e^{x} - 6\\ &= \left(e^{x} - 3\right)\left(e^{x} + 2\right)\end{aligned}$$

Ejemplo 4.26

Efectuar las operaciones indicadas

a.

$$\begin{aligned} e^x\left(3e^{-x}\right)+e^{-x} &= 3e^0+e^{-x} \\ &= \frac{3e^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}=\frac{3e^x+1}{e^x} \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \frac{2e^{2x}-2}{2e^x}.\frac{e^{2x}}{e^x+1} &= \frac{2\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)}{2e^x}.\frac{\left(e^x\right)^2}{e^x+1} \\ &= e^x\left(e^x-1\right) \end{aligned}$$

(3) Ejercicios de trabajo en clase

Dada la siguiente función $f(x)=8^x$,halle:

1. $f\left(-\frac{1}{8}\right)$
2. $f(10)/f(5)$
3. $f(2).f(6)$

Elabore las gráficas en un mismo sistema de ejes para las siguientes funciones y analice su comportamiento:

4. $f(x)=2^x, g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
5. $f(x)=(6/4)^x,\ g(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$
6. $f(x)=5^x,\ g(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

Simplifique las siguientes expresiones:

7. $10^5.10^7{,}10$
8. $2^x\left(5{,}2^{-x}\right)+2^x$
9. $\left(6^x/10^x\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^x$
10. $e^2.e^{2x}$
11. $\frac{x}{e^x}+ye^{-x}$

Factorice para los números reales:

12. 2^x+2^{3x}
13. e^x+e^{x+y}
14. $(2e)^x+e^{2x}$
15. $4e^{3a}-36e^{3a}$

4.10. Función logaritmo (Base a)

Puesto que la función $f\left(x\right)=a^{x},a>0,a\neq1$ es inyectiva, entonces existe su inversa $f^{-1}(x)$, esta función recibe el nombre de función logaritmo en base a y se denota $f^{-1}\left(x\right)=log_{a}x$. El dominio de esta función es $(0,\infty)$

La función $y=log_{a}x\ \ con\ a=e$, es decir, la función inversa de $k\left(x\right)=e^{x}$ se llama función logaritmo natural y se denota por $f(x)=ln(x)$, es decir, $\ln(x)=log_{e}x$ por tanto $y=ln\left(x\right)$ que equivale a $x=e^{y}$.

Para las parejas de funciones y sus inversas son simétricas respecto a la recta $y=x$.

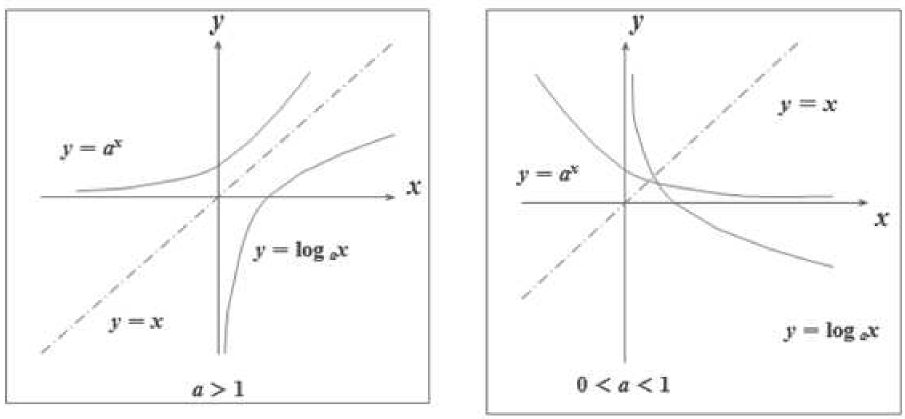


Figura 4.13. Función logaritmo

Basados en la figura 4.13 se puede deducir lo siguiente:

a. $loga\ \ 1\ =\ 0$ cuando $a\neq1$.

b. El dominio de la función logarítmica en base a es $(0,\infty)$ y su rango son los números reales.

c. Si $a\ >\ 1,f(x)\ =\ log_{a}x$ la función logaritmo es creciente y si $0<a<1$ la función logaritmo es decreciente.

d. Para la función $f\left(x\right)=log_{a}x$, si $a>1$ las imágenes de la función tienden a $+\infty$ para valores muy grandes de x.

e. Para la función $f\left(x\right)=log_{a}x$, si $0<a<1$, los valores de las imágenes tienden a $-\infty$ cuando x tiende a cero. Es posible afirmar que la recta $x=0$ es una asíntota vertical de $f\left(x\right)=log_{a}x$.

Ejemplo 4.27

1. $Si\ x = 25 \Rightarrow log_2 x = log_2 2^5 = 5$
2. $Si\ log_3 x = 4 \Rightarrow x = 34$
3. $Si\ log_{\frac{1}{2}} x = -3 \Longrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
4. $Si\ x = 6^{-3} \Rightarrow log_6 x = log_6 6^{-3} = -3$
5. $log_7 7^3 = 3$
6. $5^{log_5 2} = 2$

4.10.1. Propiedades

Tabla 4.4. Propiedades de los logaritmos

Propiedades	**Ejemplos**
1. $\boldsymbol{log_a xy = log_a x + log_a y}$ $\boldsymbol{si\ x > 0\ y\ y > 0}$	a. $log_3 125 = log_3 (5)\ (5)(5) = log_3 5 + log_3 5 + log_3 5$ b. $log_2 10 + log_2 8 + log_2 20 = log_2 1600$ c. Hallar el valor de x $log_{10} x = log_{10} 5 + log_{10} 4 + log_{10} 5$ $log_{10} x = log_{10} 5 + log_{10} 4 + log_{10} 5$ $= log_{10} (5)\ (4)(5) = log_{10} 100$ $x = 10^2$
2. $\boldsymbol{log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y}$ $\boldsymbol{si\ x > 0\ y\ y > 0}$	a. $log \frac{15}{5} = log 15 - log 5$ b. $log \frac{abc}{xyz} = log abc - log xy$ c. $log a + log b + log c - log x - log y$

3. $a^x = b^{x log_b a}$ $a^x = e^{x ln a}$	a. Pasar 3^x a base 5 entonces $3^x = 5^{x log_5 3}$ b. Pasar 6^x a base e entonces $6^x = e^{x ln 6}$
4. $log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$, es decir $log_b x = (log_a x)(log_b a)$	a. $log_2 x = \frac{log_1 0x}{log_{10} 2} = \frac{log x}{log 2}$ b. $log_5 7 = \frac{log_7 7}{log_7 5} = \frac{1}{log_7 5}$

4.10.2. Ecuaciones con logaritmos

Ejemplo 4.28

Halle el valor de x para cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $2^x = 5^x$

$$ln 2^x = ln 5^x$$

$$x ln 2 = x ln 5$$

$$x\left(ln 5 - ln 2\right) = 0$$

$$x ln\left(\frac{5}{2}\right) = 0$$

$$x = 0$$

2. $3^x = 27$

$$log_3 3^x \ = \ log_3 27$$

$$x = log_3 3^3$$

$$x = 3$$

3. $log\left(x-15\right) \ + log x \ = 2$. En primer lugar $\ x > 0 \ y \ x - 15 > 0, \text{ es decir}, \ x > 15$

$$log\left(x-15\right) \ + log x \ = 2$$

$$log\left(x-15\right) x = 2$$

$$\left(x-15\right) x = 10^2$$

$$x^2 - 15x - 100 = 0$$
$$(x-20)(x+5) = 0$$
$$x = 20 \text{ ó } x = -5$$

Como debe ser mayor de 15 el valor que satisface la ecuación es $x = 20$

4. $log_2 x \ + log_{1/2} x \ + log_4 x \ + log_{\sqrt{2}} x \ = 15/2$
   Debemos pasar la expresión a base 2:

$$log_{1/2} x = log_{2^{-1}} x = -log_2 x$$
$$log_{\sqrt{2}} x = log_{2^{1/2}} x = \frac{1}{1/2} log_2 x = 2log_2 x$$
$$log_4 x = log_{2^2} x = 1/2 log_2 x \text{ de esta forma:}$$
$$log_2 x - log_2 x + \frac{1}{2log_2 x} + 2log_2 x = (5/2) log_2 x$$

   Entonces:

$$(5/2) log_2 x = 15/2$$
$$log_2 x = 3 \text{ y así } x = 2^3 = 8$$

Ejemplo 4.29

Resolver la ecuación $\sqrt{logx} \ = log\sqrt{x}$

Podemos decir que $\sqrt{logx} \ = 1/2 logx$

$$logx \ \geq 0 \ y \ x > 0 \ \Rightarrow x \geq 1$$

Para eliminar la raíz de la ecuación elevamos al cuadrado a ambos lados:

$$logx \ = 1/4 log^2 x$$
$$logx \ - \left(\frac{1}{4}\right) log^2 x = 0 = (logx \ ) \left(1 - \frac{1}{4} logx \ \right) = 0$$
$$logx \ = 0 \text{ o } \ 1 - \frac{1}{4} logx \ = 0$$
$$x = 1 \text{ o } \ 1 = \frac{1}{4} logx \ \Leftrightarrow logx \ = 4 \Leftrightarrow x = 10^4$$

Los dos valores de x son mayores o iguales a 1, por tanto satisfacen la ecuación.

(4) Ejercicios de trabajo en clase

Escribir las siguientes igualdades en forma logarítmica:

1. $2^{\sqrt{5}} = x$
2. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$
3. $10^x = 0{,}01$

Escribir las siguientes expresiones en forma exponencial:

4. $log_2 64 = 6$
5. $log_5 125 = 3$
6. $log_e 1 = 0$

Usando la definición de logaritmos hallar el valor de x:

7. $x = log_3 27$
8. $log_4 x = \frac{2}{3}$
9. $x = log_5 x = 0$

Encuentre las bases de los siguientes logaritmos:

10. $log_a 36 = 2$
11. $log_h 2 = 0{,}5$
12. $log x = -0{,}02$

Resuelva las siguientes ecuaciones:

13. $5^x = 125$
14. $log_2 (x-5) = 3$
15. $ln (x-3) = 3$
16. $x^{log x} = \frac{100}{x}$
17. $5^{2-log_5 x} = 81x$
18. $x^{\frac{log x+7}{4}} = 10^{log x+1}$

4.11. Modelado de las funciones exponencial y logarítmica

Ejemplo 4.30

La población mundial en 2015 era de 7350 millones de personas y la tasa de crecimiento estimada anual es de 1,18 %. Si la población tiene crecimiento exponencial. ¿Cuándo se duplicará la población mundial?

Para iniciar se debe duplicar la población correspondiente a 2015, es decir, 14700 habitantes.

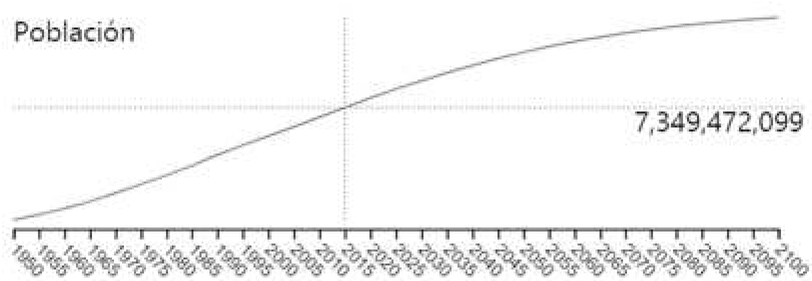


Figura 4.14. Población mundial 1950-2100
Fuente:https://www.populationpyramid.net/es/mundo/2015/

$$14698 = 7349e^{0{,}0118t}$$
$$2 = e^{0{,}0118t}$$

Utilizando los logaritmos se obtiene:

$$ln2 = 0{,}0118t \Leftrightarrow t = \frac{ln5}{0{,}0118} \approx 58{,}7$$

Si la población mantiene esta tasa de crecimiento, entonces es posible inferir que pasados 58.7 años podremos ver duplicada la población mundial.

Ejercicios del capítulo. Trabajo independiente

Ejercicios de la sección 4.1-4.3

1-3 Dadas las siguientes funciones calcule $f(2)\, y\ f(5)$. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 7$

1. $f(x) = 3x + 5$
2. $f(x) = \frac{3x-4}{2}$
3. $f(x) = 5x^2 - 3x + 8$

4-6 Para las siguientes funciones calcule la imagen de $x = 2$ y las preimágenes de 10.

4. $f(x) = x^2 - 2x + 4$
5. $f(x) = \sqrt{\frac{3x}{x+1}}$
6. $f(x) = \left|x^2 - 32\right|$

7-12 Determine los dominios reales para las siguientes funciones:

7. $f(x) = \frac{x}{3x-5} - \frac{5}{x-1}$
8. $f(x) = \sqrt{5-2x} + \sqrt{3x+11}$
9. $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{10-3x}}$
10. $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$
11. $f(x) = x^{-4} + 2x^{-2} - 3$
12. $f(x) = \sqrt[3]{4x-1} + \sqrt{x+1}$
13. Si $f(x) = 9x + \frac{9}{x}$, calcule $f\left(\frac{1}{x}\right)$ y $f\left(x^2\right)$. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 30$
14. Considere $f(x) = \frac{x}{x+1}$ y $g(x) = \frac{2x-1}{x}$. Determine el dominio y criterios para
$$f+g, f-g, f.g, \frac{f}{g}, f\circ g \text{ y } \ g\circ f.$$

15-17 Encuentre el punto de corte de las gráficas de f y g.

15. $f(x) = \sqrt{2x+4}\ y\ g(x) = x$
16. $f(x) = \frac{4x+1}{x}\ y\ g(x) = 3x + 2$
17. $f(x) = 5x^2 + 8x - 10\ y\ g(x) = 2 + x^3$

18-20 Plantee y resuelva los siguientes problemas:

18. El volumen de un cilindro circular recto es de 10 cm^3 y el radio de la base es r, considere las variables: h, altura en cm y S en cm^2 área total del cilindro. Encuentre $h(r)\, y\, S(r)$, y halle el dominio.

19. Un trapecio está inscrito en un semicírculo de radio 2, de manera que su base mayor es su diámetro. Exprese el área del trapecio en función de su altura h.

20. Exprese el área de un triángulo isósceles que se ha inscrito en un círculo de radio 5, en términos de la base b del triángulo.

Ejercicios de la sección 4.4
21-24 Determine las ecuaciones de las rectas que cumplan cada una de las siguientes condiciones:

21. Contiene los puntos $(2,7)$ y $(1,-1)$

22. Pasa por el punto $(2,5)$ e interseca al eje x en $(0,-4)$

23. Interseca al eje x en $(3,0)$ e interseca al eje y en $(0,-6)$

24. Pasa por la intersección en el eje y de $2x+3y=2$ y es perpendicular a esta recta.

25. Determine el valor de k para las rectas $5x+5y-3=0$ y $y=-3kx+1$ sean paralelas o sean perpendiculares.

26-30 Clasifique las siguientes restas en crecientes, decrecientes, constantes o verticales:

26. $3x-2y=5$

27. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$

28. $2y-8x=3(4+5x)-8$

29. $10x-5y=4x-6y+2$

30. $\frac{4x}{3}+\frac{7y}{6}=11x+7y+1$

31-34 Encuentre el punto de intersección de las rectas:

31. $8x-3y=7\ y-9x+3y=0$

32. $\frac{2x}{5}+\frac{3y}{2}=6\ y\ 4x+15y=7$

33. $12x-5y=-6\ y\ y=4x+100$

34. $\frac{5x}{6}+\frac{4y}{3}=1\ y\ 5x+8y=-6$

35-38 Plantee y resuelva los siguientes problemas:

35. Si la longitud de una varilla está relacionada linealmente con la temperatura, y se sabe que la longitud es de 108,75 cm a 25℃ y de 109,08 cm a 36℃. ¿Cuál es la longitud a x℃?

36. Los carros se han depreciado cada vez más. Suponga que uno que compró hace dos años con un costo de \$35 000 000; si el valor empieza a disminuir a razón de \$100 000 anuales, escriba el valor V en pesos del carro en el año t después de haber sido comprado. ¿Cuál es el valor actual? ¿Cuánto tiempo tardará en valer \$500 000 ?

De acuerdo con la ley de Hooke[1] desarrolle los siguientes ejercicios.

37. Un resorte de 10 cm de longitud inicial se cuelga de una viga; si se pone un peso de 2 kg el resorte se estira 5 cm. Determine cuánto medirá con peso de 3,7 kg, si el largo del alambre que forma el resorte es de 35 cm. Determine el máximo peso que teóricamente puede soportar.

38. Si la longitud de un resorte l en función del peso w está dado por la función

    $l\,(w) = 0{,}8x + 3{,}6$. ¿Cuál es la longitud del resorte? ¿Cuánto estira por kilo?

39-40 Determine si las siguientes tablas corresponden a una función lineal; de ser así, encuentre la fórmula.

39.

x	-2	5	8
$f(x)$	9	-5	-11

40.

x	2	6	10
$f(x)$	-8	3	11

41. Suponga que la gráfica de la población mundial en los últimos años es una recta. ¿Cómo está variando la población si la pendiente de esa gráfica es positiva? ¿y si es negativa? ¿Qué significaría que la pendiente de esa recta sea cero?

Ejercicios de la sección 4.5
42-46 Determine los valores máximo o mínimo de cada una de las siguientes funciones.

42. $f\,(x) = x^2 + x + 1$

43. $f\,(t) = 100 - 49t - 7t^2$

44. $f\,(s) = s^2 - 12s + 16$

45. $f\,(x) = 13x^2 - \frac{2}{7}x - 6\frac{3}{7}$

46. $g\,(x) = 100x^2 - 1500x$

[1] Recordemos que la relación de estiramiento y la fuerza es la magnitud de la fuerza del resorte que es igual al peso de la masa suspendida, cuando el sistema está en posición de equilibrio.

47. $h(a) = 2a(a-4)+7$

48. Determine una función cuadrática para la cual el vértice de su gráfica es (1,-2) y que contiene al punto (4,16).

49-51 Plantee y resuelva los siguientes problemas:

49. Sebastián desea construir una cerca rectangular para sus 5 caballos. Compró 1200 metros para el corral, con la condición de que uno de sus lados mida 600 metros.

    a. Plantee la función que expresa el área del corral en función del ancho x del corral.

    b. Calcule las dimensiones del corral que encierre el área máxima.

50. Dos estudiantes de ingeniería civil de la Universidad Católica de Colombia quieren construir un canal con una lámina de aluminio que tiene forma rectangular de 50 pulgadas de ancho.

    a. Encuentre la función que plantea el área de sección transversal del canal de aguas residuales en función de x.

    b. ¿Cuál es la máxima área de la sección transversal del canal?

51. Un equipo de fútbol juega la final de un torneo local en el estadio El Campín que tiene una capacidad para 36.343 aficionados. Con un precio promedio de \$60.000, la asistencia promedio por partidos es 20.000. Se han realizado encuestas y estas cocluyen que con una rebaja del 7 % en las boletas, la asistencia a los partidos sube en un 15 %.

    a. Encuentre la función del ingreso en función del precio de la boleta.

    b. Calcule el precio que genera el máximo ingreso por ventas de boletas

    c. ¿Cuál es el precio de venta de boletería que genera cero ingresos?

Ejercicios de la sección 4.6
51- 61 Grafique la función y exprese el dominio, rango y asíntotas.

51. $f(x) = -3^x$

52. $g(x) = 2^x - 4$

53. $h(x) = 2^{x-6}$

54. $f(t) = 1 - 5^{-x}$

55. $k(x) = 8 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

56. $f(x) = -e^x$

57. $y = 1 - e^x$

58. $f(x) = e^{x-3} + 4$

59. $g(x) = -e^{x-3} - 2$

60. $f(x) = -e^{-x}$

61. Si $f(x) = 10^x$ demuestre que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 10^x\left(\frac{10^h-1}{h}\right)$

63-64 Plantee y resuelva los siguientes problemas:

63. La empresa Petroleum Company contrata a un ingeniero especializado en perforaciones con un excelente salario, y le propone dos formas de pago:

64. Un millón de dólares pagaderos mes vencido (30 días)

65. 2^n centavos en el día n en periodos de tiempo de un mes (30 días)

    ¿Cuál de las dos formas de pago le favorece más?

66. El profesor de matemáticas deja una tarea a su grupo de estudiantes, solicita que se elabore la gráfica de la función exponencial $f(x) = 2^x$, para x entre 0 y 10, e indica usar una escala de 10 unidades por cada centímetro de papel. ¿Cuáles serían las dimensiones mínimas de la hoja en la que se entregue la tarea?

65-72 Resuelva las ecuaciones exponenciales:

65. $e^{-8x} = 9$

66. $3^{2x-1} = 5$

67. $3e^x = 10$

68. $10 + 5^{3x} = 6$

69. $5^{x/100} = 2$

70. $e^{2x+1} = 200$

71. $2^{3x+1} = 3^{x-2}$

72. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 50$

Ejercicios de la sección 4.7
73-80 De la ecuación logarítmica despeje x:

73. $lnx = 20$

74. $log\,(x-4) = 3$

75. $ln\left(3+x\right) \ = 2$

76. $log_2\left(x^2-x-2\right)=2$

77. $log_3\left(x+15\right)-log_3\left(x-1\right)=2$

78. $\sqrt{x^{log\sqrt{x}}=10}$

79. $x+log\left(1+2^x\right) \ = xlog5 \ +log6$

80. $log^{-1}x=2+log^{-1}x$

81-83 Plantee y resuelva los siguientes problemas[2]:

81. La dificultad de usar el ratón para hacer clic en un ícono en la pantalla de un computador depende de la distancia del objetivo y de su tamaño. De acuerdo con la ley de Fitts, el índice de dificultad está dado por:

$$ID=\frac{log\left(\frac{2A}{W}\right)}{log2}$$

Donde W representa el ancho del objetivo y A es la distancia al centro del objetivo. Compare la dificultad de hacer clic en un ícono de 5 mm en uno de 10 mm de ancho y suponga que el ratón está a 100 mm del ícono.

82. Tome logaritmos para demostrar que la ecuación $x^{\frac{1}{logx}} \ = 5$ no tiene solución. ¿Para qué valores de k tiene solución la ecuación $x^{\frac{1}{logx}} \ = k$?

83. Analice y resuelva cómo se transforman ecuaciones con logaritmos en ecuaciones lineales y cuadráticas, usando las siguientes sugerencias:

a. $(x-1)^{log(x-1)} \ = 100(x-1)$ sugerencia (tome log de cada lado)

b. $log_2x \ +log_4x \ +log_8x \ = 11$ sugerencia (cambie todos los log a base 2)

c. $4^x-2^{x+1}=3$ sugerencia (escriba como cuadrática en 2^x)

Aplicación con tecnología

Desarrolle los siguientes ejercicios usando el programa www.symbolab.com, donde podrá evidenciar los procesos desarrollados analíticamente.

84-86 Determine la ecuación de la recta que cumple con las condiciones dadas y elabore la gráfica.

[2] Los problemas 81-83 fueron tomados del libro de *Precálculo* de Stewart.

84. Pasa por $(1,\ 7)$ y tiene pendiente $\frac{2}{3}$
85. La recta contiene el punto $(1,\ 26)$ y es paralela a la recta $x + 2y = 6$
86. La recta es perpendicular a la recta $2x + 5y + 8 = 0$ y contiene al punto $(-1,\ -2)$

87-89 Dadas las siguientes funciones cuadráticas determine dominio, rango, vértice, valores de las intersecciones con los ejes y el máximo o mínimo de forma analítica y gráfica para cada una de las funciones que se presentan a continuación:

87. $f(x) = -2x^2 - 2{,}6x + 1{,}8$
88. $f(x) = 1{,}5x^2 + 3{,}7x - 0{,}8$
89. $f(x) = -\sqrt{5}x^2 - x + 2$

90-92 Haga las dos gráficas de la familia de las funciones para c= 0,15, 0,50, 1, 5 y describa el comportamiento de las gráficas analizando el rango de las funciones y su crecimiento o decrecimiento.

90. $f(x) = c5^x$
91. $f(x) = 5^{cx}$
92. Elabore las gráficas de forma simultánea de las funciones $f(x) = 1 + ln(1 + x)$ y $h(x) = \sqrt{x}$ y describa su comportamiento.

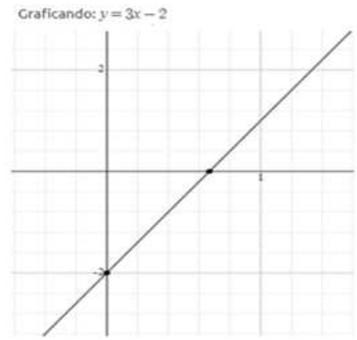
Proyectos aplicados a las ciencias básicas

Desarrolle las siguientes ideas que representan proyectos basados en los contenidos vistos en el capítulo

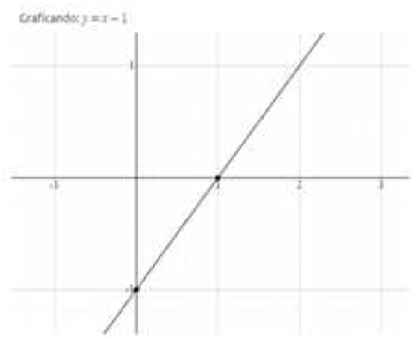
- El mejor ajuste contra el ajuste exacto: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/dp13.html
- Relaciones y funciones: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/dp4.html
- Explosión exponencial: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/dp7.html
- Diseñando una montaña rusa: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/dp18.html

Solución de los ejercicios de trabajo en clase

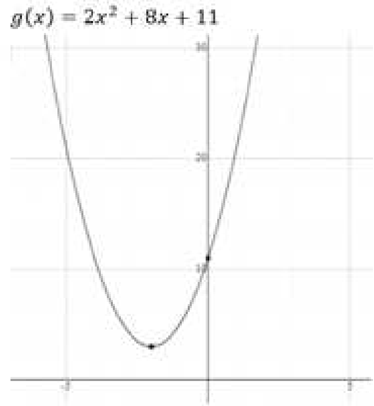
1. $m = \frac{1}{6}$
3. $m = \frac{1}{2}$
5. $y = 3x - 2$



7. Use la fórmula de la pendiente y la ecuación general de la recta $y = mx + b$ para encontrar $y = x - 1$



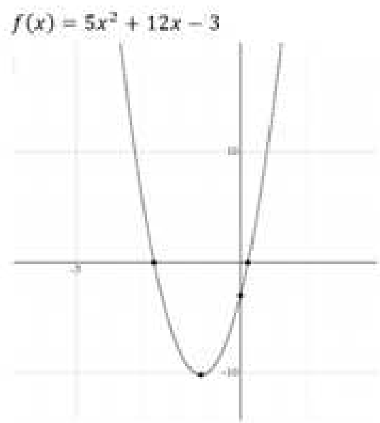
9. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[3, \infty)$; intersección con eje x: no tiene.
Intersección con eje y: $(0, 11)$; vértice:$(-2, 3)$,



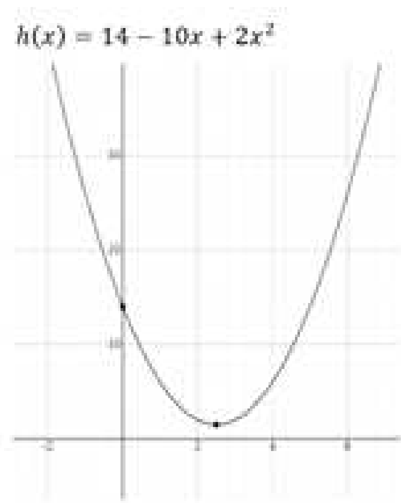
11. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[-\frac{51}{5}, \infty)$;

    intersección con eje x: $\left(\dfrac{\sqrt{51}-6}{5}, 0\right)$, $\left(-\dfrac{6+\sqrt{51}}{5}, 0\right)$

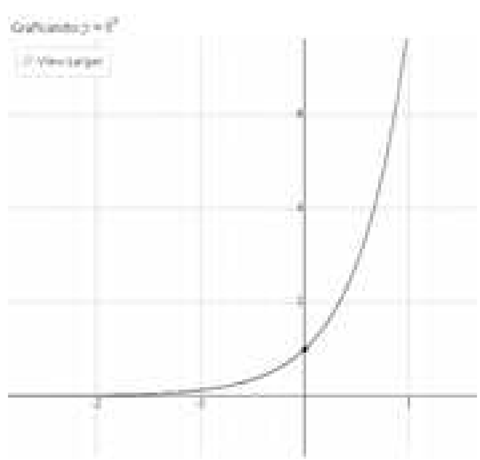
    Intersección con eje y: $(0, -3)$; vértice: $(-\frac{6}{5}, -\frac{51}{5})$.



13. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[\frac{3}{2}, \infty)$;
Intersección con eje x: no tiene.
Intersección con eje y: $(0, 14)$; vértice: $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$.

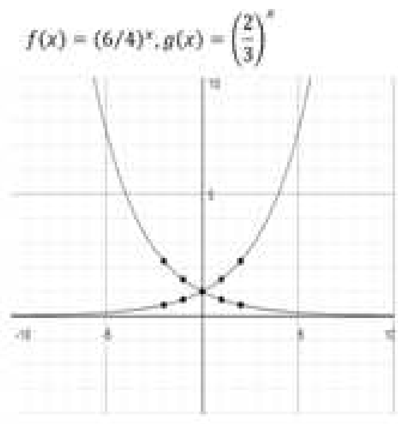


15. $f(x) = 8^x$, $f\left(-\dfrac{1}{8}\right) = 8^{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{8}}} = 0{,}77111\ldots$



17. $f(x) = 8^x, f(2) \cdot f(6) = 8^8 = 16777216$

19.



21. Aplicar las leyes de los exponentes:

$$a^b.a^c = a^{b+c}$$
$$10^5.10^7{,}10 = 10^{13}$$

23. $\left(\dfrac{6^x}{10^x}\right) + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{3^x}{5^x} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

25. $\frac{x}{e^x} + ye^{-x} = \frac{x+y}{e^x}$

27. Aplicar las leyes de los exponentes $a^b.a^c$=a^{b+c}:

$$e^x + e^x e^y \ factorizando \ e^x \ , \ e^x\left(e^y + 1\right)$$

29. $4e^{3a} - 36e^{3a} = -32^{3a}$

31. $log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{64}\right) = 3$

33. $2^6 = 64$

35. $e^0 = 1$

37. $x = 4^{\frac{2}{3}},\ x \approx 2{,}51984209\ldots$

39. $a = 6$

41. $x = \frac{1}{10^{\frac{1}{100}}},\ x \cong 0{,}97723722\ldots$

43. $x = 13$

45. $x = 10$, $x = 0{,}01$

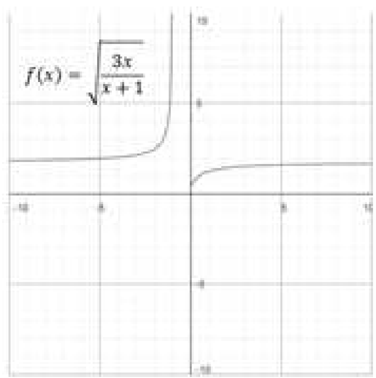
47. $x = 0{,}0001$, $x = 10$

Solución de los ejercicios de trabajo independiente

1. $f(2) = 11, f(5) = 20,\ x = 2/3$

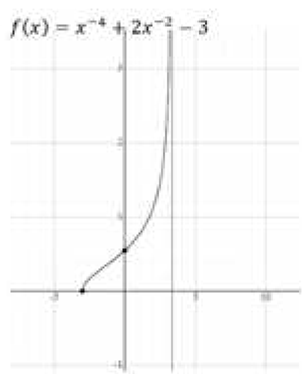
3. $f(2) = 22, f(5) = 118,\ x = \frac{-3\pm\sqrt{29}}{10}$

5. $f(2) = \frac{\sqrt{6}}{2},\ x = -\frac{100}{97}$

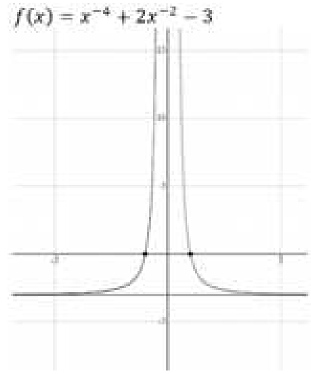


7. Dominio: $(-\infty, 1) \cup \left(1, \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$

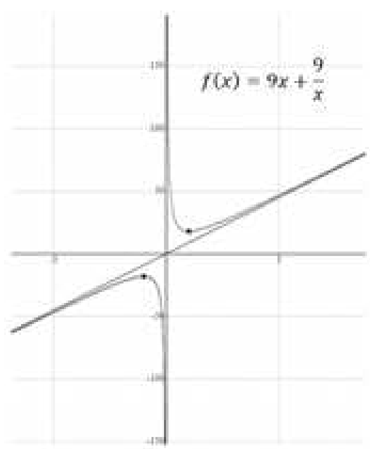
9. Dominio: $\left[-3,\ \frac{10}{3}\right)$



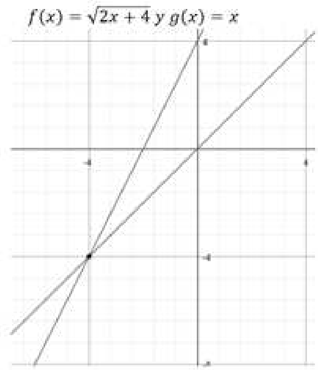
11. Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



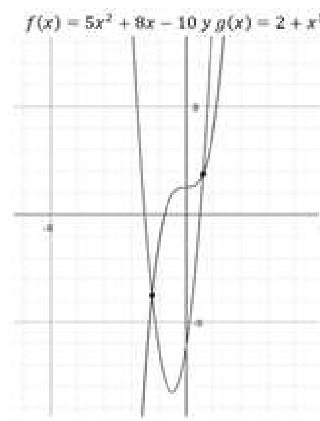
13. $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{9}{x} + 9x, f\left(x^2\right) = 9x^2 + \frac{9}{x^2},\; x = 3, x = \frac{1}{3}$



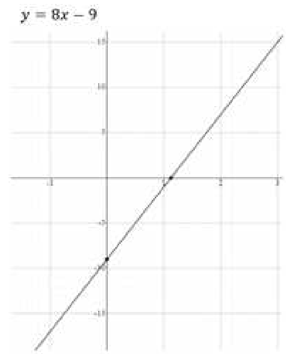
15. $x = -4$



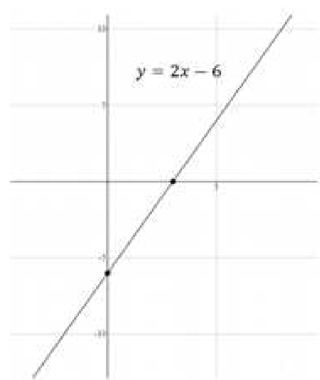
17. $x = 6; 1; -2$



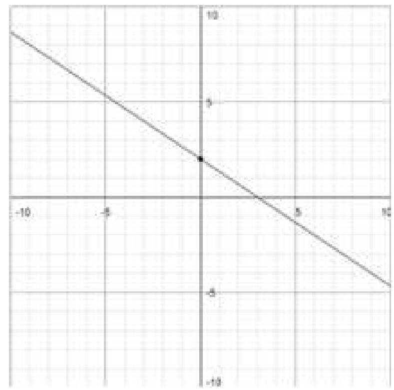
21. $y = 8x - 9$



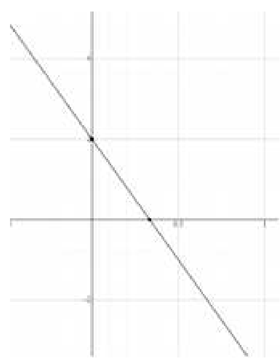
23.



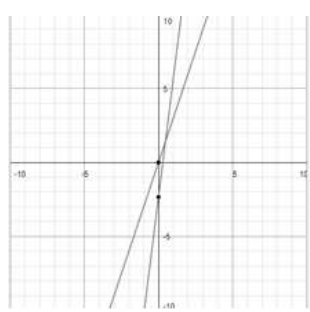
27. $y = -\frac{2x}{3} + 2$, decreciente con pendiente negativa



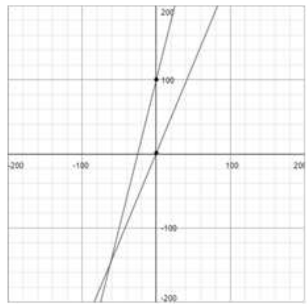
29. $y = -6x + 2$



31. $x = \frac{7}{15}$

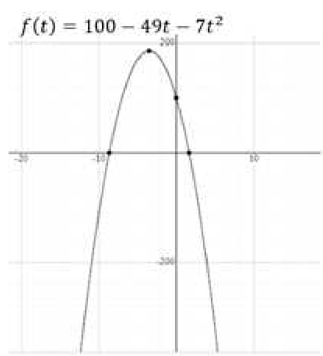


33. $x = -\frac{247}{4}$



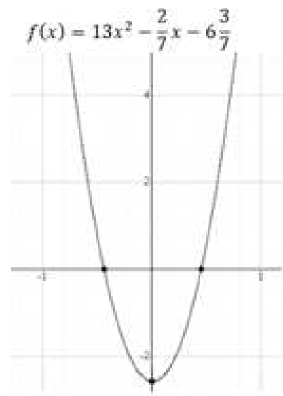
39. La tabla de valores no corresponde a una función lineal.

43. Máximo: $\left(-\frac{7}{2}, \frac{743}{4}\right)$



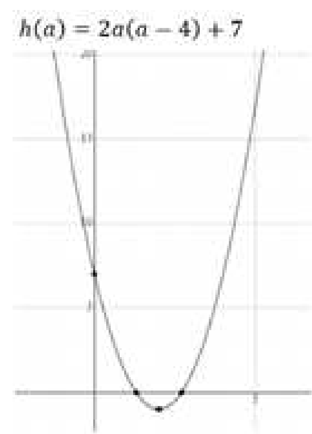
45. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $\left[-\dfrac{1639}{637}, \infty\right)$; intersección x: $\left(\dfrac{1+\sqrt{1639}}{91}, 0\right)$

$$\text{Intersección } y\text{: } \left(\frac{1-\sqrt{1639}}{91}, 0\right);\ \text{Mínimo: } \left(\frac{1}{91}, -\frac{1639}{637}\right)$$



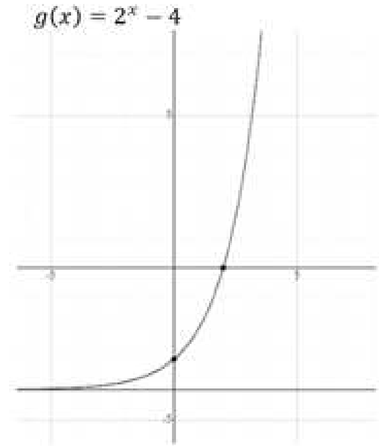
47. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[-1, \infty)$; intersección x: $\left(\frac{\sqrt{2}+4}{2}, 0\right)$

$$\text{Intersección } y\text{: } \left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}, 0\right);\ \text{Mínimo: } (2, -1)$$



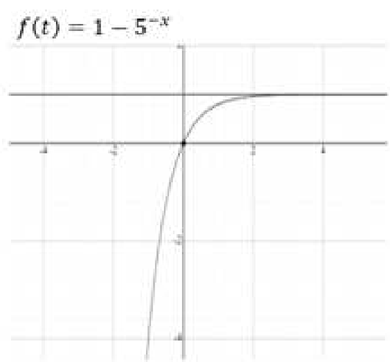
53. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(-4, \infty)$; asíntota $H{:}y = -4$;

$$\text{interseccion } x\text{: } (2, 0);\ \text{intersección } y\text{: } (0, -3)$$



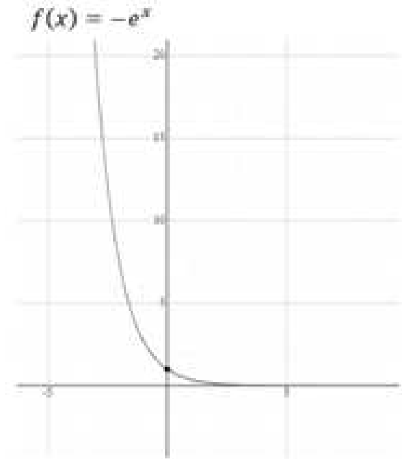
55. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(-\infty, 1)$; asíntota $H{:}y = 1$;

interseccion x: $(0, 0)$; intersección y: $(0, 0)$



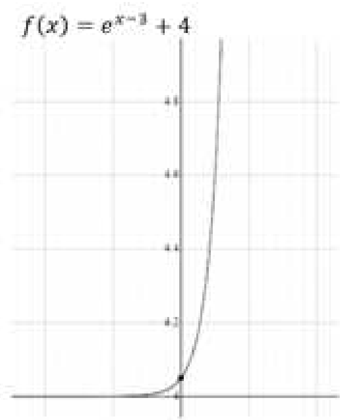
57. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(0, 1)$; asíntota $H{:}y = 0$;

Intersección y: $(0, 1)$



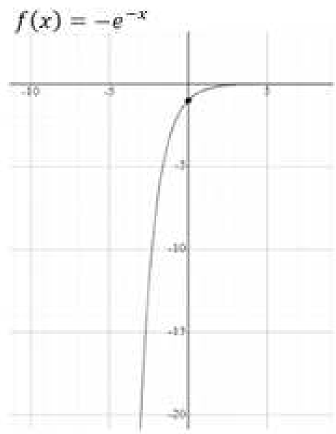
59. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(4, 1)$; asíntota $H\!:\!y = 4$;

$$\text{Intersección } y\text{: } \left(0, \frac{1}{e^3} + 4\right)$$



61. Dominio: $(-\infty, \infty)\,; rango : (-\infty, 0)$; asíntota $H\!:\!y = 0$;

$$\text{Intersección } y\text{: } (0, -1)$$



65. $x = -\frac{ln(3)}{4}; x = -0{,}27465\ldots$

67. $x = -\frac{ln(9)}{8}; x = -0{,}27465307\ldots$

69. $x = \frac{100ln(2)}{ln(5)}; x = 43{,}06766\ldots$

71. $x = -\frac{ln(18)}{ln\frac{8}{3}}$

73. $x = e^{20}; x = 4854\ldots$

75. $x = e^2 - 3; x = 4{,}3890\ldots$

77. $x = 3$

79. $x = 1$