# TRES

## ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

*En las matemáticas es donde el espíritu encuentra los elementos que más ansía: la continuidad y la perseverancia.*
Anatole France

En matemáticas las ecuaciones son igualdades entre expresiones algebraicas. Por ejemplo:

$$\sqrt{x+1} = 2,\ x^2 - 1 = (x+1)(x-1), \quad x|x-1| = 8$$

Corresponden a ecuaciones en la variable $x$.
La solución de una ecuación es un valor numérico que, sustituido en el lugar de la variable, hace que la ecuación se convierta en una identidad. Cuando se pide resolver una ecuación, se está pidiendo determinar la o las soluciones de la ecuación.

**Ejemplo 3.1**

2 es la solución de la ecuación $8x + 9 = 5x + 3$, porque $8(-2) + 9 = 5(-2) + 3$

Se dice que dos ecuaciones son equivalentes si las dos ecuaciones tienen las mismas soluciones. Ejemplo:

$$3x - 1 = 0, \quad 3x = 1, \quad y \quad x = \frac{1}{3}$$

Las operaciones descritas a continuación producen ecuaciones equivalentes:

Tabla 3.1. Operaciones que producen ecuaciones equivalentes

| |
|---|
| ∘ Sumar o restar en el lado de una ecuación el mismo número real.<br>∘ Multiplicar o dividir cada lado de una ecuación por el mismo número real diferente de cero |

**Ejemplo 3.2**

Resuelva $10x + 15 = 0$.

Solución. La siguiente lista muestra las ecuaciones equivalentes que se forman para llegar a la solución.

$$\begin{aligned}
&10x + 15 = 0.\\
&10x + 15 - 15 = 0 - 15\\
&10x = -15\\
&x = -\frac{15}{10}\\
&x = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

## 3.1. Ecuaciones lineales

Toda ecuación de la forma $ax + b = 0$ con $a \neq 0$ se denomina ecuación lineal y tiene exactamente una solución: $x = -\frac{b}{a}$

**Ejemplo 3.3**

Resuelva $2x - 7 = 5x + 6$
Solución. Se reagrupan los términos semejantes en cada uno de los lados de la ecuación y usando las operaciones que producen ecuaciones equivalentes se determina la solución.

$$\begin{aligned}
&2x - 7 = 5x + 6\\
&2x - 7 - 5x = 5x + 6 - 5x\\
&-3x - 7 + 7 = 6 + 7\\
&-3x = 13\\
&-\frac{1}{3}(-3x) = -\frac{1}{3}(13)\\
&x = -\frac{13}{3}
\end{aligned}$$

Es decir, que la solución para la ecuación es $x = -\frac{13}{3}$.

**Ejemplo 3.4**

Resuelva

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}=\frac{2}{x^2-4x}$$

Solución. Como parte del proceso de solución de este tipo de ecuaciones, se multiplica ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador para eliminar los denominadores y resolver la ecuación de manera semejante al ejemplo anterior.

$$\begin{aligned}
x\,(x-4)\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}\right] &= x(x-4)\left[\frac{2}{x^2-4x}\right]\\
(x-4)+x &= 2\\
2x &= 6\\
x &= 3
\end{aligned}$$

Sustituyendo $x=3$, se verifica que este valor satisface la ecuación original.

**Ejemplo 3.5**

Resolver la ecuación $\frac{3x}{x-2}=1+\frac{6}{x-2}$
Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{x-2} &= 1+\frac{6}{x-2}\\
\left(\frac{3x}{x-2}\right)(x-2) &= \left[1+\left(\frac{6}{x-2}\right)\right](x-2)\\
3x &= (x-2)+6\\
3x &= x+4\\
2x &= 4\\
x &= 2
\end{aligned}$$

A pesar de obtener la solución $x=2$, si este valor de $x$ es sustituido en el lado izquierdo de la ecuación inicial resulta:

$$\frac{3(2)}{(2)-2}=\frac{6}{0}$$

El resultado de una división entre 0 no es válido, por tanto, a pesar de haber obtenido $x=2$ como solución de la ecuación final, se dice que este valor no satisface la ecuación inicial y por tanto esta no tiene solución.

### 3.1.1. Indicaciones para resolver problemas aplicados

- Leer de forma detallada el problema y determinar cuál es la cantidad que debe hallarse
- Seleccionar una letra para nombrar a la variable desconocida. Pueden usarse las letras conocidas en otros contextos como A para el área o V para el volumen.
- De ser necesario se realiza un diagrama y en él se usan las letras seleccionadas en el ítem anterior.
- Elaborar un listado de variables y valores obtenidos en el problema.
- Después de elaborar la lista, determinar la ecuación que relaciona las variables del problema.
- Resolver la ecuación y dar solución a las preguntas del problema.
- Comprobar las soluciones obtenidas y contrastar con las condiciones iniciales la viabilidad de las respuestas.

**Ejemplo 3.6**

En un curso de matemáticas básicas, un estudiante tiene calificaciones de parciales de 56 y 68. ¿Cuál ha de ser la nota en el examen final para que el promedio sea 70?

Solución:

Leer el problema. Se ha de determinar la nota del examen final,
$x =$ Calificación del examen final.
Para este problema no se hace necesario el uso de un diagrama
A partir de la lectura del problema se conocen los valores 56 y 68 que son las notas de los primeros exámenes. La ecuación que relaciona a $x$ es la calificación promedio de 64, 78 y $x$. Entonces:

$$\text{calificación promedio} = \frac{56 + 68 + x}{3}$$

Como la calificación promedio debe ser 70, se emplea la ecuación:

$$\frac{56 + 68 + x}{3} = 70$$

Se resuelve la ecuación formulada en la directriz 5:

$$\begin{aligned} 56 + 68 + x &= 70 * 3 \\ 124 + x &= 210 \\ x &= 86 \end{aligned}$$

Prueba: si las tres calificaciones de examen son 64, 78, 98 entonces el promedio es:

$$\frac{56+68+86}{3}=\frac{210}{3}=70$$

Luego al respuesta al problema será que la nota del examen final es 86.

**Ejemplo 3.7**

En un almacén se ha anunciado un descuento de 20 % para toda la ropa masculina. Si el precio de una camisa es de U$28, ¿cuál era su precio inicial?
Solución: la cantidad desconocida es el precio inicial de venta, entonces:

$$x = \text{precio inicial de venta}$$

Luego:

$$0{,}20x = \text{descuento del } 20\,\% \text{ en el precio inicial de venta } 28 = \text{precio final con descuento}$$

El precio inicial de venta se determina como sigue:
$(\textit{precio inicial de venta}) - (\textit{descuento}) = \textit{precio con descuento}$, traduciendo la última ecuación a símbolos y luego resolviendo:

$$\begin{aligned} x - 0{,}20x &= 28 \\ 0{,}80x &= 28 \\ x &= \frac{28}{0{,}80} = 35 \end{aligned}$$

El precio inicial de la camisa fue de U$35.

Prueba: si la camisa costaba inicialmente U$35 y tiene un 20 % de descuento sobre ese precio, entonces el descuento es $(0{,}20)\,(35) = 7$ y el precio de la venta con descuento se obtiene al restar $35 - 7$, es decir U$28.

**(1) Ejercicios de trabajo en clase**

Demuestre que la ecuación es una identidad.

1. $(4x-39)^2 - 16x^2 = 9 - 24x$
2. $(3x-4)\,(2x+1) + 5x = 6x^2 - 4$

¿Cuál es el valor que debe tomar c para que $a$ sea una solución de la ecuación dada?

3. $4x + 1 + 2c = 5c - 3x + 6a = -2$

4. $3x - 2 + 6c = 2c - 5x + 1a = 4$

La ecuación se utiliza en la aplicación indicada. Despeje la variable indicada.

5. $I = Prt$ despeje $P$ (interés simple)
6. $C = 2\pi r$ despeje $r$ ( circunferencia de un círculo)
7. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ despeje $h$ (volumen del cono)
8. $A = \frac{1}{2}bh$ despeje $h$ (área del triángulo)
9. $F = g\frac{mM}{d^2}$ despeje $m$ ( Ley de Newton de gravitación)
10. $R = \frac{V}{I}$ despeje $I$ (Ley de Ohm en teoría eléctrica)
11. Las temperaturas en grados Celsius $(T_c)$ y en grados Fahrenheit $(T_F)$ se relacionan mediante la ecuación:
$$T_c = \frac{3}{5}(T_F - 32)$$
Halle la temperatura Fahrenheit correspondiente a: $16°C$, $120°C$ y $-5°C$.

## 3.2. Ecuaciones cuadráticas

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, se denomina ecuación cuadrática y puede tener:

- Dos soluciones iguales
- Dos soluciones distintas
- Dos soluciones complejas

### 3.2.1. Métodos para dar solución a una ecuación cuadrática

Para solucionar una ecuación cuadrática es posible usar los siguientes métodos:

- Factorización
- Raíz cuadrada
- Completando el cuadrado
- Por fórmula general

#### 3.2.1.1. Factorizando

Para usar este método de solución de estas ecuaciones, se emplea el siguiente teorema:

| | |
|---|---|
| Teorema del factor cero | Si p y q son expresiones algebraicas, entonces:<br>$pq = 0$ si y solo si $p = 0$ o $q = 0$ |

El teorema del factor cero se puede extender a cualquier número de expresiones algebraicas, es decir,

$$pqr = 0 \ \text{ Si y solo si } p = 0 \text{ o } q = 0 \text{ o } r = 0$$

Se deduce que si $ax^2+bx+c$ se puede escribir como un producto de dos polinomios de primer grado, entonces se pueden hallar soluciones al igualar a 0 cada uno de los factores, como se ilustra en los siguientes ejemplos. Esta técnica se conoce como método de factorización.

**Ejemplo 3.8**

Resuelva $2x^2+5x-3=0$.

Solución. Al factorizar el lado derecho de la ecuación resulta:

$$(x+3)(2x-1)=0$$

Al igualar cada factor de la ecuación a cero y resolver, se obtienen las dos soluciones

$$(x+3)=0 \quad (2x-1)=0$$
$$x=-3 \text{ y } x=\frac{1}{2}$$

Las soluciones de la ecuación $2x^2+5x-3=0$ son las mismas obtenidas con el proceso anterior y pueden verificarse por sustitución.

**(2) Ejercicios de trabajo en clase**

Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando factorización:

12. $x^2-16=0$
13. $y^2-17y+16=0$
14. $2x^2+x-1=0$
15. $8t^2-22t+15=0$
16. $x^6-2x^4-x^2-4$
17. $2x^5+x^4-2x-1$
18. $5t^3-30t+45$

#### 3.2.1.2. Usando la raíz cuadrada

Si la ecuación cuadrática tiene la forma $x^2 = d$, para $d \geq 0$ sus soluciones son:

$$x = \sqrt{d} \text{ o } x = -\sqrt{d}$$

**Ejemplo 3.9**

Usando la raíz cuadrada resolver las ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 = 6$

b) $(y-3)^2 = 5$.

Solución:

a) Multiplicando ambos lados $2x^2{=}\,6$ por $\frac{1}{2}$ se obtiene la forma especial (8):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(2x^2\right) &= \frac{1}{2}(6) \\ x^2 &= 3 \\ x &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Entonces, las soluciones son $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$

b) Para $x = y - 3$ y $d = 5$, la expresión $(y-3)^2 = 5$ se puede ver como un caso especial de una variable al cuadrado; luego se procede a simplificar la ecuación extrayendo raíz cuadrada en ambos lados:

$$(y-3)^2 = 5$$

$$y - 3 = \pm 5$$

Produce:

$$y - 3 = \sqrt{5} \quad y \quad y = 3 - \sqrt{5}$$

Resolviendo cada una de estas ecuaciones, se encuentra que:

$$y = 3 + \sqrt{5} \quad y \quad y = 3 - \sqrt{5}$$

Entonces, las soluciones son: $3 + \sqrt{5}$ y $3 - \sqrt{5}$

**(3) Ejercicios de trabajo en clase**

Emplee la raíz cuadrada como en los ejemplos anteriores para resolver las ecuaciones:

19. $x^2 = 17$

20. $(v+5)^2 = 5$

21. $3(t+1)^2 = 9$

22. $2y^2 = 100$

23. $5(w-1)^2 = 4$

24. $4(s-3)^2 = 5$

Determine el valor de $x$

25. $x^2 - b^2 = 0$

26. $(x-a)^2 = b^2$

27. $x^2 + 2dx + d^2 = 0$

28. $(x+c)^2 = d^2$

#### 3.2.1.3. Completando el cuadrado

Si en una ecuación cuadrática igualada a cero uno de los miembros de la ecuación es un trinomio de la forma

$$x^2 + Bx + C$$

Puede emplearse el método de completar un cuadrado con el fin de solucionar la ecuación.

$$x^2 + Bx + C = 0$$

Transponiendo el término independiente

$$x^2 + Bx = -C$$

Se suma el término $(B/2)^2$ a los dos lados de la ecuación:

$$x^2 + Bx + \left(\frac{B}{2}\right)^2 = -C + \left(\frac{B}{2}\right)^2$$

De tal forma que el lado izquierdo de la ecuación corresponde a un cuadrado:

$$\left(x + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C$$

Por último se emplea el método de la raíz, que ya fue explicado.

**Ejemplo 3.10**

Resuelva $x^2 + 5x + 6 = 0$ completando el cuadrado:
Solución: se reescribe la ecuación

$$x^2 + 5x = -6$$

Se suma el término $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ a los dos lados de la ecuación

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Simplificando:

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Se extrae la raíz cuadrada:

$$x + \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}$$

Las soluciones son entonces:

$$x = 3 \quad x = 2$$

**Ejemplo 3.11**

Resuelva $2x^2 + 2x - 1 = 0$ usando el método de completar el cuadrado.

Solución: como el coeficiente de $x^2$ es 2 , se dividen los dos lados de la ecuación para obtener:

$$x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$$

Organizando la ecuación resulta:

$$x^2 + x = \frac{1}{2}$$

Y se suma el término $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ a los dos lados de la ecuación:

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Entonces, se obtiene:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Se extrae raíz cuadrada:

$$x + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Las soluciones son entonces: $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

**(4) Ejercicios de trabajo en clase**

Resuelva las siguientes ecuaciones mediante la utilización de completando el cuadrado.

1. $u^2 + 2u - 1 = 0$
2. $2k^2 + 5k + 3 = 0$
3. $v^2 + 3v - 2 = 0$
4. $4b^2 - 4b - 35 = 0$

#### 3.2.1.4. Por fórmula general

Si es utilizado el método de completar el cuadrado para la expresión de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, se inicia con la división de los dos lados de la ecuación entre $a$, se obtiene:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Luego se completa el cuadrado y se despeja $x$:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
x + \frac{b}{2a} &= \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}
\end{aligned}$$

Si $a > 0$, entonces $\sqrt{4a^2} = |2a| = 2a$ y el resultado es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## 3.3. Soluciones de una ecuación cuadrática

Si $a \neq 0$, entonces las soluciones $x_1$ y $x_2$ de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

*Ecuación 29: Soluciones de la ecuación cuadrática* $ax^2 + bx + c = 0$

El discriminante: las soluciones $x_1$ y $x_2$ de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son definidas por la cantidad subradical $b^2 - 4ac$, denominada discriminante y puede tener tres opciones diferentes que se explican en la siguiente tabla:

Tabla 3.2. Discriminante y su interpretación

| Discriminante | Soluciones |
|---|---|
| $\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$ | Dos soluciones reales diferentes |
| $\boldsymbol{b^2 - 4a = 0}$ | Soluciones reales pero iguales |
| $\boldsymbol{b^2 - 4ac < 0}$ | No hay soluciones reales |

**Ejemplo 3.12**

Resuelva $3x^2 - 2x - 4 = 0$
Solución: en este caso, $a = 3$, $b = -2$, $c = -4$, el discriminante positivo $b^2 - 4ac = 52$ nos permite ver que la ecuación tiene dos soluciones reales. De la fórmula obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-4)}}{2\,(3)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{6} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3} \end{aligned}$$

Entonces, las soluciones son $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{13}$ y $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{13}$

**Ejemplo 3.13**

Resuelva $3x^2 - x + 2 = 0$
Solución: como el discriminante-

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\,(3)\,(2) = -23$$

Es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales.

**Ejemplo 3.14**

Resuelva $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$
Solución: la ecuación se puede ver como una ecuación cuadrática si se realiza una pequeña modificación:

$$\left(x^2\right)^2 - 2\left(x^2\right) - 2 = 0$$

Se usa la fórmula cuadrática para despejar $x^2$

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Entonces,

$$x^2 = 1 + \sqrt{3} \text{ o } x^2 = 1 - \sqrt{3}$$

Ahora, la ecuación cuadrática $x^2 = 1 - \sqrt{3}$ no tiene soluciones reales, ya que $1-\sqrt{3} < 0$ pero de $x^2 = 1 + \sqrt{3}$ se obtienen dos soluciones reales, $-\sqrt{1+\sqrt{3}}$ y $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ de la ecuación original.

**(5) Ejercicios de trabajo en clase**

Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando la fórmula cuadrática:

33. $3x^2 - 7x + 2 = 0$
34. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
35. $9z^2 + 30z + 25 = 0$
36. $1 + 2w - 6w^2 = 0$

**Ejemplo 3.15**

Si un rectángulo tiene un área de 138 $cm^2$, si el largo es $x$ centímetros mayor más que el triple del ancho, determine las dimensiones del rectángulo.


Figura 3.1. Dimensiones de un rectángulo en términos de la variable $a$

Solución: en la ilustración 22 se muestra un esquema del rectángulo en el que:

$$a = \text{ ancho del rectángulo en centímetros.}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 3a+5 &= \text{ longitud del rectángulo en centímetros} \\ a(3a+5) &= 138 \end{aligned}$$

Se reescribe esta ecuación:

$$3a^2+5a-138=0$$

De la fórmula cuadrática, $a=-\frac{23}{3}$ o $a=6$. Debido a que el ancho del rectángulo, no puede ser de signo negativo, se descarta esta solución en la ecuación, de tal forma que las dimensiones son: largo 23 centímetros y ancho 6 centímetros.

Ya que el ancho de un rectángulo debe ser positivo, se descarta $a=-\frac{23}{3}$. En consecuencia, las dimensiones del rectángulo son 6 cm y 23 cm.

**Ejemplo 3.16**

Pedro es un comerciante de bebidas alcohólicas y ha invertido US$800 en un lote de botellas de champaña. Si el costo de cada botella hubiera sido US$4 mayor, Pedro hubiera adquirido un lote 10 unidades menor por el mismo dinero. ¿De qué cantidad es el lote de botellas de champaña?

$$(\text{costo por botella})\,(\text{número de botellas}) = 800$$

Para la compra real se define:

$$x = \text{número de botellas compradas}$$

Entonces:

$$\frac{800}{x} = \text{costo por botella}$$

Al precio más alto:

$$x-10 = \text{número de botellas compradas}$$
$$\frac{800}{x}+4 = \text{costo por botella}$$

De tal forma que:

$$\left(\frac{800}{x}+4\right)(x-10)=800$$

Con el cual se despeja $x$ como sigue:

$$\begin{gathered} (800+4x)\,(x-10)=800x \\ 4x^2-40x-8000=0 \\ x^2-10x-2000=0 \\ x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{8100}}{2}=\frac{10\pm 90}{2} \\ x=50 \text{ o } x=-40 \end{gathered}$$

Como el tamaño del lote no puede ser negativo, se descarta la solución $x = -40$, de tal forma que el tamaño del lote es de 50 botellas.

**Ejemplo 3.17**

Un cohete a escala es lanzado hacia arriba. Después de $t$ segundos, la expresión que permite calcular la altura (medida en pies) en función del tiempo, a la cual se encuentra el cohete es: $h= -16t^2+120t$ ¿Cuánto tiempo después de su lanzamiento estará el cohete a 180 pies de altura?
Solución: usando $h= -16t^2+120t$:

$$180 = -16t^2+120t$$
$$-16t^2 - 120t+180 = 0$$
$$-4t^2 - 30t+45 = 0$$

Al aplicar la fórmula cuadrática con los valores $a= -4$ , $b= -30$ y $c= 45$:

$$t = \frac{-(-30)\pm\sqrt{(-30)^2 - 4(-4)(45)}}{2(4)}$$
$$= \frac{30\pm\sqrt{180}}{8} = \frac{30 \pm 6\sqrt{5}}{8} = \frac{15 \pm 3\sqrt{5}}{4}$$

De tal forma que hay dos instantes de tiempo en los que el cohete está a una altura de 180 pies sobre el suelo:

$$t = \frac{15 - 3\sqrt{5}}{4} = 2{,}07s$$
$$t = \frac{15 + 3\sqrt{5}}{4} = 5{,}43s$$

Valores de tiempo que corresponden a el recorrido de ascenso del cohete en el primer caso y al recorrido de descenso en el segundo caso.

**(6) Ejercicios de trabajo en clase**

37. Al ser sumados dos números se obtiene 22, y al ser sumados los cuadrados de los números se obtiene 274. ¿Cuáles son los números?

38. La medida de la base de un triángulo es 3 centímetros mayor que la medida de su altura. Al calcular el área del triángulo se obtiene como resultado 119 centímetros cuadrados. Determine las medidas de la base y de la altura.

39. Al realizar un recorrido ecoturístico de 35 kilómetros de distancia José hace el recorrido medio kilómetro por hora más rápido que Pablo. Si José gasta una hora y cuarenta minutos menos que Pablo, determine los tiempos que emplean José y Pablo en completar el trayecto.

40. Para un proyecto escolar, la profesora Clara ha creado una huerta, el terreno donde se ejecuta el proyecto tiene un perímetro de 76 metros y un área de 360 metros cuadrados. ¿Cuáles son las medidas del terreno?

41. Un campo de béisbol fue trazado sobre un terreno que mide 90 pies por cada lado. ¿Cuál es la distancia que existe entre la primera base y la tercera base en este terreno?

42. Si un lote de terreno tiene una diagonal que mide 100 pies ¿cuál es el área del campo?

## 3.4. Otros tipos de ecuaciones

Estas ecuaciones contienen ecuaciones con radicales, ecuaciones polinómicas y ecuaciones racionales.

Las ecuaciones anteriormente desarrolladas eran trasformadas para poder ser factorizables; en el caso de las ecuaciones con raíces se deben efectuar otros algoritmos matemáticos.

**Ejemplo 3.18**

Resuelva la siguiente ecuación: $x - 4\sqrt{x+3} + 6 = 0$

Para desarrollar esta ecuación se parte de lo siguiente:

| | |
|---|---|
| $x + 6 = 4\sqrt{x+3}$ | Despejar el término que contiene el radical. |
| $(x+6)^2 = \left(4\sqrt{x+3}\right)^2$ | Elevar los dos lados de la ecuación al cuadrado. |
| $16(x+3) = 16x + 48$<br>$x^2 + 12x + 36 = 16x + 48$ | Se resuelve el cuadrado al lado izquierdo y se aplican las propiedades de las potencias al lado derecho. |
| $x^2 - 4x - 12 = 0$ | Se organiza la ecuación cuadrática obtenida |
| $x_1 = 6 \ y \ x_2 = -2$ | Se obtienen las soluciones para la ecuación cuadrática. |

Para determinar el conjunto solución, se deben evaluar los valores de 6 y -2, en la ecuación original,

$$x = 6, 6 - 4\sqrt{6+3} + 6 = 0, \ 6 - 12 + 6 = 0$$

Esto indica que $x = 6$ si es solución para la ecuación, de forma similar si se evalúa para $x = -2$, también satisface las condiciones. Por tanto, el conjunto de soluciones es $S = \{-2, 6\}$. Para solucionar ecuaciones donde el grado del polinomio sea mayor que dos, se requiere factorizar los polinomios, esto se puede evidenciar en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.19**

Resuelva la ecuación $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

Para resolver la ecuación se factoriza el polinomio, y se obtiene lo siguiente:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \ = 0$$

$$(x+2)(x+3)(x+1) = 0$$

La expresión se hace cero si algún factor se vuelve cero, cada uno de los factores se iguala a cero, y se obtiene como soluciones $x = -2, x = -3$ $y$ $x = -1$, de allí que el conjunto solución sea:

$$S = \{-2, -3 - 1\}.$$

**Ejemplo 3.20**

Resuelva la ecuación $\frac{1}{x} = \frac{3}{x-2}$

Para resolver ecuaciones con fracciones racionales, se realiza primero una inspección de aquellos números reales que anulan cada uno de los denominadores, en este caso $x = 0$ $y$ $x = 2$, estos valores posteriormente se deben tener en cuenta para descartarlos del conjunto solución de la ecuación.
Luego se multiplican los dos lados de la ecuación por $x(x-2)$ y se obtiene:

$$\frac{x(x-2)}{x} = \frac{3x(x-2)}{x-2}$$

Al lado izquierdo se cancela el factor $x$ y en el lado derecho se cancela el factor $x - 2$, esto da una trasformación a una ecuación lineal $x - 2 = 3x$, es decir,$-2x - 2 = 0$, cuya solución es $x = -1$, obtenemos $S = \{-1\}$.

**Ejercicios del capítulo: trabajo independiente**

**Ejercicios de la sección 3.1**

1-7 Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $-2x + 5 = 0$
2. $x(x+1) - x^2 = -3x - 8$
3. $\frac{2}{3}x - 5 = \frac{1}{4}x + 2$
4. $(3x-4)^2 = (9x-2)(x-3)$

5. $\frac{3x-5}{2} = \frac{2-7x}{3}$
6. $\frac{3x+5}{2x-3} + 7 = \frac{x-2}{2x-3} - 5$
7. $(2x+3)^2 - x(3x+7) = x^2 - 6x + 13$

8-10 Plantee y resuelva los siguientes problemas:

8. Un estudiante de un curso de matemáticas tiene notas de 72 y 65 en dos parciales; en talleres tiene promedio 90 y la ponderación de los talleres es de un 20 %, y los tres parciales el 80 % restante. ¿Qué nota debe en el tercer corte del examen para aprobar la asignatura?
9. A las diez de la mañana una persona inicia una caminata con una velocidad constante de 8.5 km/h, al cabo de 12 minutos sale del mismo lugar un segundo atleta y corre a una velocidad contante de 13km/h por la misma ruta del primero. ¿A qué hora alcanzará el segundo atleta al primero?
10. Dos personas que se encuentran a 400 m de distancia empiezan a caminar uno en dirección del otro y en línea recta. Si la primera camina a una velocidad de 1.5 m/s y la segunda camina a una velocidad de 2 m/s. ¿Después de cuánto tiempo se encuentran? ¿Cuánta distancia ha caminado la segunda persona?

**Ejercicios de la sección 3.2**

11-16 Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando los métodos vistos en el capítulo para resolver ecuaciones cuadráticas.

11. $35x^2 - 69x + 28 = 0$
12. $3x(x+2) - 5(x+1)^2 = x - 2$
13. $2h^2 - 5h - 2$
14. $(x-3)^2 - 24 = x(x(x-1)$
15. $(z+2)^3 - 5(z-1)^2 = z^3 + 13z + 10$
16. $x^2 - 3x + 1 = 0$

17-21 Construya una ecuación cuadrática cuyas raíces sean:

17. $x_1 = \frac{m}{n}$ , $x_2 = \frac{n}{m}$ $(m, n \neq 0)$
18. $x_1 = a^2 + b^2$ , $x_2 = a^2 - b^2$
19. $x_1 = \frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}$ , $x_2 = \frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$

20. $x_1 = \quad \sqrt{3} - 1$ , $x_2 = 3 + \sqrt{3}$

21. $x_1 = \ 2a - a\sqrt{3}$ , $x_2 = 2a - a\sqrt{3}$

22-25 Plantee y resuelva los siguientes problemas:

22. Un proveedor desea construir una caja sin tapa para trasportar su mercancía, donde el largo de la base de la lámina que se use sea el doble del ancho. Si en cada esquina se cortan cuadrados de 3 cm de lado, ¿qué tamaño de lámina debe comprar para tener un volumen de 60 $cm^3$ de volumen?

23. Un terreno rectangular, cuyas dimensiones son de $26 \times 38$ metros es cercado por un muro de ancho uniforme. Se sabe que el área del muro es 250 $m^2$, ¿cuál es la altura del muro?

24. Un objeto es lanzado hacia arriba con velocidad de 60 m/s. La altura en metros denotada $s$, después de $t$ segundos, se refleja en la expresión $s = -4{,}9 + 60t$. ¿Cuándo estará el objeto a 100 metros sobre la superficie? ¿Cuándo tocará la superficie?

25. Dos supervisores salen de la oficina a las ocho de la mañana con sus radioteléfonos correspondientes. El primero se dirige hacia el norte con una velocidad de 3 km/h y el segundo se dirige al oeste con una velocidad de 4km/h. ¿Cuánto tiempo pueden hacer uso de los radioteléfonos, si el alcance es de 2km?

**Ejercicios sección 3.4**

26-36 Resuelva e indique el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

26. $1 - x\,(2 - x) = (x - 1)^2$

27. $(2x + 1)\,(3 - x) = 3$

28. $x + \sqrt{2 - x^2} = 0$

29. $1 - 2\sqrt{2 - x} = 2x + 1$

30. $-5 + \sqrt{x^2 + 1} = -x$

31. $\sqrt{1 - 2x} + \sqrt{-x} = 5$

32. $\frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = \frac{1 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

33. $\frac{2}{k^2} = \frac{3}{4 - k^2} - \frac{1}{k}$

34. $x^2\left(x^2 + x\right) = x^3\left(x - x^2\right)$

35. $4\sqrt{x + 3} = x + 6$

36. $1+\sqrt{1-5x}=x$

37-43 Resuelva e indique el conjunto solución de las siguientes ecuaciones, donde debe realizar pasos que involucren conceptos algebraicos vistos en lo capítulos 1 y 2.

37. $\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{x}\right)^{-2}=25$

38. $\left(\frac{-2}{x}\right)^{-1}+\frac{-x}{4}=-1$

39. $\frac{x+2}{1+2(x+2)}=\frac{3}{7}$

40. $\frac{x^4-4x^3}{x^2}=0$

41. $\frac{x^2-9}{x+3}=x-3$

42. $8x^2+6x-5\sqrt{8x^2+6x+9}+3=0$

43. $5\left(x^2-3x+4\right)^2+30x\left(x^2-3x+4\right)$-100=0

44. Resuelva la siguiente ecuación: $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^{10}=7-5\left(x-\frac{1}{2}\right)^5$usando el cambio de variable

$$v=\left(x-\frac{1}{2}\right)^5.$$

**Aplicación con tecnología**

Desarrolle los siguientes ejercicios usando el programa www.symbolab.com y www.wolframalpha.com donde podrá evidenciar los procesos desarrollados analíticamente.

45-48 Encuentre para qué valor de $h$ las siguientes ecuaciones tienen dos raíces reales diferentes.

45. $x^2-8x-5h=0$

46. $2x^2-3x+3-2h=0$

47. $(3h+1)\,x^2+x-4=0$

48. $(h+3)\,x^2-2hx+h+6=0$

49-51 Resuelva las siguientes ecuaciones, teniendo en cuenta que $a, b, c$ son números dados.

49. $\frac{(a+x)(2x+a-b)+(x-b)^2}{(a+x)^2-(x-b)(a+b)} = \frac{7}{8}$

50. $\frac{2a+b-x}{2b-a+x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x-b}{x-b}$

51. $\frac{x-b}{x+b} + \frac{x+c}{x-c} + \frac{x+a}{x-a} = 10$

52-55 Encuentre para qué valor de $t$ las siguientes ecuaciones tienen dos raíces reales diferentes con signos iguales.

52. $x^2 + (t-5)\,x + \left(t^2 + t + \frac{1}{4}\right) = 0$

53. $x^2 + 2tx + 4t - 3$

54. $x^2 - tx + 3t - 5 = 0$

55. $(t+2)\,x^2 + 6tx + 4t - 1 = 0$

**Proyectos aplicados a las ciencias básicas**

Las ecuaciones han sido aplicadas para resolver problemas a lo largo de la historia. A continuación presentamos algunas ideas de proyectos que pueden complementar lo visto en el capítulo.

- Ecuaciones a lo largo de las edades: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/dp2.html
- En busca de patrones: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/fops10.html
- Trabajar hacia atrás: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/fops8.html
- Trabajando al revés: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/fops13.html

La información referente a los proyectos formulados anteriormente se encuentra en el siguiente enlace: http://www.stewartmath.com/media/8_inside_discovery.php#

**Solución de los ejercicios de trabajo en clase**

5. $P = \frac{I}{rt}$

7. $h = -\frac{1}{3}\left(\pi r^2\right)$

9. $m = \frac{Fd^2}{gM}$

13. $(y-1)(y-16)$

15. $(4t-5)(2t-3)$

17. $(x+1)(x-1)(2x+1)\left(x^2+1\right)$

19. $v=-5+\sqrt{5};\ v=-5-\sqrt{5}$
    $v\approx -2{,}7639; v=\ -7{,}236067$

21. $y=5\sqrt{5};\ y=-5\sqrt{5}$
    $y\approx 7{,}071067;\ y=-7{,}071067$

23. $s=3+\frac{\sqrt{5}}{2}; s=\ 3-\frac{\sqrt{5}}{2}$
    $s\approx 4{,}118033; s=1{,}881966$

25. $x=a+b;\ \ x=a-b$

27. $x=-c+d; x=-c-d$

29. $k=-\frac{3}{2};\ k=-\frac{3}{2}$

31. $b=\frac{7}{2};\ b=-\frac{5}{2}$

33. $x=2;\ x=\frac{1}{3}$

35. $w=\frac{\sqrt{7}-1}{6};\ w=\frac{\sqrt{7}+1}{6}$

**Solución de los ejercicios de trabajo independiente**

1. $x=\frac{5}{2}$

3. $x=-2$

5. $x=\frac{19}{23}$

7. $x=\frac{4}{11}$

11. $x=\frac{7}{5};\ \frac{4}{7}$

13. $h=\frac{5+\sqrt{41}}{4};\ \ h=\frac{5-\sqrt{41}}{4}$

15. $z=\frac{-9+\sqrt{109}}{2};\ \ z=\frac{-9-\sqrt{109}}{2}$

17. $mnx^2-\left(m^2+n^2\right)x+mn=0$

19. $t^2-kt+1$

21. $x^2-4ax-a^2=0$

27. $x=0; x=\frac{5}{2}$

29. $x = -2$

31. $x = -4$

33. $k = -1; k = -2 + 2\sqrt{3};\ k = -2 - 2\sqrt{3}\ k \approx -1; k \approx 1{,}4641\ ; k \approx -5{,}46410$

35. $x = -2; x = 6$

37. $vx = -\frac{21}{\sqrt{2}};\ \frac{21}{\sqrt{2}}$

39. $vx = 1$

41. $x \neq -3$

43. $x = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}};\ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}}$