DOS

ÁLGEBRA

No supongas que la matemática es dura y avinagrada y repulsiva para el sentido común. Se trata simplemente de la idealización del sentido común.

William Thomson

Las letras suelen representar cantidades desconocidas. Por medio del algebra es posible realizar la traducción al lenguaje de las matemáticas al lenguaje cotidiano.

Ejemplo 2.1

Tabla 2.1. Lenguaje matemático y lenguaje habitual

El siguiente de un número entero, más tres unidades	$(x+1)+3$
El doble de un número más su mitad	$2n+\frac{n}{2}$
La tercera parte de un número, más el doble de dicho número	$\frac{p}{3}+2p$

Una expresión algebraica es el resultado de mezclar variables mediante las operaciones matemáticas básicas. En una expresión algebraica, al sustituir las variables por sus valores numéricos y realizar las operaciones indicadas se obtiene el valor numérico de la expresión. El dominio de una expresión algebraica es el conjunto de números que no indeterminan la expresión. La indeterminación se presenta principalmente por raíces de índice par y cantidad subradical negativa y por fracciones con denominador negativo.

Tabla 2.2. Valor de una expresión algebraica

Expresión	Dominio	Valor típico
$x^4+4x-\frac{8}{\sqrt{x}}$	Toda $x>0$	$En\ x=\ 44^3+5\,(4)-\frac{8}{\sqrt{4}}=16$
$\frac{3xy-\left(6/x^2\right)}{\sqrt[3]{y-1}}$	Toda $x\neq 0\ y\ y\neq 1$	$En\ x=1\ y\ \ y=9\frac{2(1)(9)-\left(6/1^2\right)}{\sqrt[3]{9-1}}=\frac{12}{2}=6$

Existen expresiones algebraicas, según el número de términos: el monomio consta de un sumando y el polinomio de más de un sumando. Entre los polinomios hay binomios y trinomios de dos y tres términos respectivamente.

2.1. Polinomios

Un polinomio en x es una suma de la forma $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, donde n es un entero positivo y los coeficientes a_k son números reales. Si $a_n\neq 0$, entonces el polinomio es de grado n.

A continuación se presentan algunos polinomios y sus características:

Tabla 2.3. Polinomios: sus coeficientes y su grado

Ejemplo	Coeficiente principal	Grado
$3x^4+5x^3+(-7)\,x+4$	3	4
$x^8+9x^2+(-2)\,x$	1	8
$-5x^2+1$	-5	2
$7x+2$	7	1
8	8	0

Si el coeficiente de un término en un polinomio es negativo, se utiliza un signo menos a la izquierda del término.

$$3x^2+(-5)\,x+(-7)=3x^2-5x-7$$

Además de la variable x se acostumbran a usar otras letras en los polinomios, por ejemplo:

$$\frac{2}{5}z^2-3z^7+8-\sqrt{5}z^4$$

Los polinomios se ordenan en forma descendente con respecto a los exponentes y alfabéticamente con relación a las letras.

$$\frac{2}{5}z^2-3z^7+8-\sqrt{5}z^4=-3z^7-\sqrt{5}z^4+\frac{2}{5}z^2+8$$

Las expresiones algebraicas que contengan radicales con variables en las cantidades subradical, fracciones con variables en los denominadores, no son considerados polinomios, por ejemplo:

No polinomios

$$\frac{1}{x}+3x \qquad \frac{x-5}{x^2+2} \qquad 3x^2+\sqrt{x}-2$$

Para el manejo de las operaciones algebraicas entre polinomios se mantienen las reglas conocidas.

Adición y sustracción de polinomios

Ejemplo 2.2

a) Sumar $\left(x^3+2x^2-5x+7\right)+(4x^3-5x^2+3)$

b) Restar $(x^3+2x^2-5x+7)-(4x^3-5x^2+3)$

Solución:

a) La suma de dos polinomios implica el uso de la reducción de términos semejantes

$$\begin{array}{lr}
\left(x^3+2x^2-5x+7\right)+\left(4x^3-5x^2+3\right) & \\
x^3+2x^2-5x+7+4x^3-5x^2+3 & \text{Quitar paréntesis} \\
(1+4)\,x^3+(2-5)\,x^2-5x+(7+3) & \text{Reducir términos semejantes en } x \\
5x^3-3x^2-5x+10 & \text{Simplificar}
\end{array}$$

b) Al realizar la resta entre polinomios, se retiran los paréntesis teniendo en cuenta el efecto del signo que precede el segundo paréntesis sobre el contenido del paréntesis.

$$\begin{array}{lr}
\left(x^3+2x^2-5x+7\right)-(4x^3-5x^2+3) & \\
x^3+2x^2-5x+7-4x^3-5x^2+3 & \text{Quitar paréntesis} \\
(1+4)\,x^3+(2+5)\,x^2-5x+(7-3) & \text{Reducir términos semejantes de } x \\
-3x^3+7x^2-5x+4 & \text{Simplificar}
\end{array}$$

2.1.1. Multiplicación de binomios

Ejemplo 2.3

Determine el producto de $(4x{+}5)\,(3x{-}2)$
Solución:

$(4x+5)(3x-2)$	
$(4x)(3x)+(4x)(-2)+(5)(3x)+(5)(-2)$	Propiedades distributivas
$12x^2-8x+15x-10$	Multiplicar
$12x^2+7x-10$	Simplificar

2.1.2. Multiplicación de polinomios

Ejemplo 2.4

Encuentre el producto de $(x^2+5x-4)(2x^3+3x-1)$

Solución:

Usando la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que $2x^3+3x-1$ es un factor, se obtiene:

$$(x^2+5x-4)(2x^3+3x-1)=x^2(2x^3+3x-1)+5x(2x^3+3x-1)-4(2x^3+3x-1)$$

Luego de realizar la distribución del factor y la reducción de términos semejantes, se obtiene:

$(x^2+5-4)(2x^3+3x-1)$
$2x^5+3x^3-x^2+10x^4+15x^2-5x-8x^3-12x+4$
$2x^5+10x^4-5x^3+14x^2-17x+4$

2.1.3. División de un polinomio entre un monomio

Ejemplo 2.5

Exprese como un polinomio en x y y: $\dfrac{6x^2y^34x^3y^2-10xy}{2xy}$
Solución:

$$\frac{6x^2y^3{+}4x^3y^2{-}10xy}{2xy}=\frac{6x^2y^3}{2xy}+\frac{4x^3y^2}{2xy}-\frac{10xy}{2xy}=3xy^2{+}2x^2y{-}5$$

A continuación se muestran las fórmulas para determinar por simple inspección el producto de dos factores algebraicos. En (2) y (3), son usados los símbolos superiores en ambos lados o el signo inferior en ambos lados. Así (2) es en realidad dos fórmulas:

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \qquad y \qquad (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$$

Del mismo modo, (3) donde esta representa dos fórmulas.

2.1.4. Fórmulas del producto

Tabla 2.4. Fórmulas de productos notables

Fórmula	Ejemplo
(1)$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$	$(2a+3)(2a-3)=(2a)^2-3^2=4a^2-9$
(2)$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$	$(2a-3)^2=(2a)^2-2(2a)(3)+(3)^2=4a^2-12a+9$
(3)$(x\pm y)^3 = x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$	$(2a+3)^3 = (2a)^3+3(2a)^2(3)+3(2a)(3)^2+(3)^3 =$ $8a^3+36a^2+54a+27$

Ejemplo 2.6

Encuentre los productos:

1. $(2r^2-\sqrt{s})(2r^2+\sqrt{s})$
2. $(\sqrt{c}+\frac{1}{\sqrt{c}})^2$
3. $(2a-5b)^3$

Solución:

1. Usando la fórmula (1) del producto, con $x = 2r^2$ y $y = \sqrt{s}$:

$$(2r^2-\sqrt{s})(2r^2+\sqrt{s}) = (2r^2)^2-(\sqrt{s})^2$$
$$(2r^2-\sqrt{s})(2r^2+\sqrt{s}) = 4r^4-s$$

2. Usando la fórmula (2) del producto, con $x = \sqrt{c}$ y $y = \frac{1}{\sqrt{c}}$:

$$\left(\sqrt{c}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 = \left(\sqrt{c}\right)^2+2\sqrt{c}\frac{1}{\sqrt{c}}+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$$
$$\left(\sqrt{c}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 = c+2+\frac{1}{c}$$

Tenga en cuenta que la última expresión no es un polinomio

3. Usando la fórmula (3) del producto, con $x = 2a$ y $y = 5b$:

$$(2a-5b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2(5b) + 3(2a)(5b)^2 - (5b)^3$$
$$(2a-5b)^3 = 8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3$$

(1) Ejercicios de trabajo en clase

1. Determine la edad y la estatura de un compañero mediante la siguiente serie de pasos:

   a. Escriba la edad de él/ella
   b. Multiplíquela por 2
   c. Sume 5
   d. Multiplique la suma por 50
   e. Reste 365
   f. Sume la estatura de él/ella
   g. Sume 115

Los dos primeros dígitos del resultado corresponden a la edad y los dos últimos a la estatura de su compañero. Justifique la razón por la que sucede esto.
Halle el valor del polinomio para cada uno de los valores.

2. $x^2 - 8x + 6$ para $x = -6$
3. $\sqrt{5}x^2 + 10x - 3\sqrt{2}$ para $x = 10$
4. $5x - 3x^2 - 9x^3$ para $x = -1$
5. $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ para $x = -2$
6. $\frac{1}{6}x + 1$ para $x = -3$

Exprese el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios:

7. $y^3 - y^2 + y^{1/3} - 7$
8. $t^4 - t^3 + t^{-1} - 1$
9. $7x^{100} - 4x^{99} + 26x^{101} - 5$
10. $3 + 2x - \sqrt{7}x^3 + \frac{1}{2}x^{-10}$
11. $\sqrt{r} - 4$

12. $z^2(5z^3 - 4z + 18)$

Realice las operaciones, simplifique y ordene el polinomio:

13. $\left(3x^5 - 5x^2 + 4x - 7\right) + (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$
14. $\left(4x^{10} - 7x^5 + 1\right) + (3x^5 + 2x^2 - 7x + 1)$
15. $(y^3 - 3y^2 + 7y - 8) + (5y^3 + 4y^2 - 9y + 1)$
16. $\left(\sqrt{2}z^5 - 6z^3 + 17z + \sqrt[3]{6}\right) + (z^4 + 16z^3 - 5z + \sqrt{6})$

2.2. Factorización

Es una operación que consiste en expresar un polinomio como un producto de polinomios. Por ejemplo, $3x^2$ y x^2+2 son factores de $3x^4+6x^2$ porque:

$$3x^4+6x^2 = 3x^2(x^2+2)$$

Generalmente se buscan como factores, polinomios de primer grado o polinomios de grado mayor.
Cuando se factoriza se obtienen expresiones que reemplazan al polinomio por una serie de factores lineales. Un ejemplo es:

$$5x^3+6x^2-29x-6 = (5x+1)(x-2)(x+3)$$

Uno de los usos de la factorización es simplificar expresiones algebraicas; otro es resolver ecuaciones. En los siguientes ejemplos se presentan estas situaciones:

Ejemplo 2.7

Factorice $6x^4y^4-4x^2y^2+10\sqrt{2}xy^3-2xy^2$.

Solución: ya que $2xy^2$ es un factor común, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&6x^4y^4 - 4x^2y^2 + 10\sqrt{2}xy^3 - 2xy^2\\
&2xy^2(3x^3y^2) - 2xy^2(2x) + 2xy^2(5\sqrt{2}y) - 2xy^2\\
&2xy^2(3x^3y^2 - 2x + 5\sqrt{2}y - 1)
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.8

Factorice $x^2+2xy-x-2y$

Solución: cuando se organiza la expresión reuniendo los dos primeros y los dos últimos términos:

$$x^2+2xy-x-2y=\left(x^2+2xy\right)+(-x-2y)$$

$$x^2+2xy-x-2y=x\ \ (x+2y)+(-1)(x+2y)$$

Observe el factor común $x+2y$

$$x^2+2xy-x-2y=(x-1)\ \ (x+2y)$$

Si se invierten las fórmulas de los productos notables, se obtienen las fórmulas de factorización, que corresponden a las expresiones (1), (2), (3) y (4) escritas de forma inversa.

1. Cuadrado perfecto: $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
2. Diferencia de cuadrados perfectos: $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$
3. Diferencia de cubos perfectos: $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$
4. Suma de cubos perfectos: $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$

Ejemplo 2.9

Factorice $16x^4y^2-25$

Solución: esta es la diferencia cuadrados, para factorizar, se utiliza la fórmula 2, teniendo en cuenta que $x=4x^2y$ y $a=5$:

$$16x^4y^2-25=(4x^2y)^2-(5)^2$$

$$16x^4y^2-25=(4x^2y-5)(4x^2y+5)$$

Ejemplo 2.10

Factorice $8a^3+27b^6$

Solución: ya que $8a^3+27b^6$ es una suma de cubos, se puede factorizar usando la fórmula 4. Si identificamos $x=2a$ y $y=3b^2$, entonces:

$$8a^3+27b^6=(2a)^3+(3b^2)^3$$

$$8a^3+27b^6=(2a+3b^2)((2a)^2-(2a)\left(3b^2\right)+(3b^2)^2)$$

$$8a^3+27b^6=(2a+3b^2)(4a^2-6ab^2+9b^4)$$

2.2.1. Factorización de polinomios de segundo grado

Los polinomios cuadráticos de la forma ax^2+bx+c, donde a, b y c son enteros se puede factorizar como una expresión de la forma:

$$(ax+b)\,(cx+d)$$

Donde a, b, c y d corresponden a números enteros. Si el polinomio tiene como coeficiente principal $a=1$ será de la forma x^2+bx+c y tiene una factorización que se puede expresar de la forma:

$$(x+b)(x+d)$$

con valores para b y d correspondientes a números enteros.

Ejemplo 2.11

Factorice $x^2-9x+18$

Solución: con $b=-9$ y $c=18$, se buscan los números enteros de b y tales que:

$$b+d=-9 \text{ y } bd=18$$

Es posible obtener a 18 como el producto bd a partir de las siguientes expresiones:

$$1(18),\ 2(9),\ 3(6),\ (-1)(-18),\ (-2)(-9)\ o\ (-3)(-6)$$

Ya que -9 es la suma de -3 y -6, la factorización es:

$$x^2-9x+18=(x-3)(x-6)$$

Ejemplo 2.12

Factorice x^2+3x-1

Solución: se puede escribir el número -1 como el producto de los números enteros bd solamente de una sola forma: $(-1)\,(1)$. debido a que la suma

$$b+d=-1+1\neq 3$$

De tal forma que el polinomio x^2+3x-1 no puede ser factorizado mediante el uso de coeficientes enteros.

En el caso del polinomio ax^2+bx+c, con $a\neq 1$, se factoriza como $(Ax+B)(Cx+D)$ si:

$$AC=a, AD+BC=b, BD=c$$

Ejemplo 2.13

Factorice $2x^2{+}11x{-}6$

Solución: como primer paso se establecen los factores:

$$(2x+\quad)(1x+\quad)$$

Y luego estos factores se completan con dos números enteros B y D cuyo producto debe ser igual a -6. Los pares posibles son:

$$1y-6,\quad -1y6,\quad 3y-2,\quad -3y2$$

Se selecciona la pareja -1, 6 ya que se cumple que $2(6)+1(-1)=11$.
Por tanto, $2x^2{+}11x{-}6=(2x{-}1)(x{+}6)$

Ejemplo 2.14

Factorice $15x^2{+}17xy{+}4y^2$

Solución: los factores podrían tener la forma:

$$(5x+\quad y)(3x+\quad y)\ o\ 15x+\quad y)(1x+\quad y)$$

Los factores se pueden completar con dos números enteros cuyo producto sea 4
Las parejas de números:

$$1y4,\quad -1y-4,\quad 2y2,\quad -2y-2$$

Se comprueba cada pareja de forma semejante al ejemplo anterior para verificar cuál da como resultado 17:

$$15x^2+17xy+4y^2=(5x+4y)(3x+y)$$

Ejemplo 2.15

Factorice $2t^4{+}11t^2{+}12$

Solución: siendo $x{=}t^2$, y realizando la sustitución se obtiene un polinomio cuadrático de grado 2 en x.

$$2x^2{+}11x{+}12$$

Entonces, factorizando este polinomio cuadrático. Los factores son:

$$(x+\qquad)(2x+\qquad)$$

Y se completan con una pareja de números enteros cuyo producto sea 12. Los posibles pares son:

$$1y12, \qquad -1y-12 \qquad 2y6 \qquad 3y4 \qquad -3y-4$$

Se comprueba cada par para ver qué combinación de números da como resultado un coeficiente 11 concluyendo que:

$$2x^2+11x+12=(x+4)\,(2x+3)$$

La sustitución de t^2 por x nos da:

$$2t^4+11t^2+12=(t^2+4)(2t^2+3)$$

En el ejemplo anterior se debe verificar que ninguno de los polinomios t^2+4 ni $2t^2+3$ se puede factorizar utilizando coeficientes enteros.

Existen algunos polinomios que pueden ser factorizados en una segunda oportunidad, lo cual se ilustra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.16

Factorice x^6-y^6

Solución: se observa que la expresión x^6-y^6 corresponde a una diferencia de cuadrados que al ser factorizada da como resultado:

$$\begin{aligned}
x^6-y^6 &= (x^3)^2-(y^3)^2\\
x^6-y^6 &= ?(x?^3-y^3)?(x?^3+y^3)\\
x^6-y^6 &= (x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)\\
x^6-y^6 &= (x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)
\end{aligned}$$

(2) Ejercicios de trabajo en clase

Factorice el polinomio:

17. $12x^3+2x^2+6x$
18. $6x^3y^4-3\sqrt{3}x^2y^2-3x^2y+3xy$
19. $2y^2-yz+6y-3z$
20. $6x^5y^5+\sqrt{2}x^2y^3+14xy^3$
21. $15at+3bt+5as+bs$

Use las fórmulas de factorización para factorizar el polinomio.

22. $36x^2 - 25$

23. $4x^2 - 1$

24. $x^4 - y^4$

25. $x^8 - y^8$

Use técnicas para factorizar los polinomios cuadráticos en los que sea posible hacerlo.

26. $x^2 - 5x + 6$

27. $y^2 + 7y + 10$

28. $x^2 - 10x + 24$

29. $y^4 + 10y^2 + 21$

30. $2p^2 + 7p + 5$

31. $6a^4 + 13a^2 - 15$

32. $2x^2 - 7xy + 3y^2$

Determine si las siguientes expresiones son falsas o verdaderas:

33. $x^2 + y^2 = (x + y)(x + y)$

34. $a^3 + b^3 = (a + b)^3$

35. $(r - 1)(r - 1) = r^2 + 1$

36. $r^3 - s^3 = (r - s)(r^2 + rs + s^2)$

37. El gasto calórico para un adulto se mide en calorías y corresponde a la cantidad de energía que utiliza su cuerpo para las funciones básicas entre las cuales se encuentran la circulación sanguínea, la regulación de la temperatura y el proceso de respiración. Si se conoce el peso de una persona (w) en kilogramos, la estatura de una persona (h) en centímetros y la edad (y) expresada en años se puede determinar el gasto calórico.

    Para las mujeres: $C_m = 65,9 + 17,9w + 6h - 7,1y$

    Para los hombres: $C_h = 66,1 + 9,4w + 1,7h - 4,6y$

    Calcule el gasto calórico de una mujer de 23 años con un peso de 56 kilogramos y una estatura de 1,63 metros y el gasto calórico de un hombre de 46 años de edad con un peso de 78 kilogramos y una estatura de 1,78 metros.

2.3. Expresiones racionales

Una expresión racional corresponde a los cocientes indicados entre polinomios, los cuales no necesariamente son múltiplos.

Ejemplo 2.17

$$\frac{2x^2+5}{x+1} \qquad y \qquad \frac{3}{2x^3-x+8}$$

Para las expresiones racionales, el dominio es un conjunto numérico que contiene aquellos valores que no indeterminan la expresión. La indeterminación se presenta cuando el denominador es igual a cero.

Por ejemplo, en la expresión racional $\dfrac{2x^2+5}{x+1}$ el dominio de la variable es $\{x|x \neq -1\}$ ya que el denominador se hace igual a cero cuando se sustituye x por -1.

Durante el trabajo con expresiones racionales es necesario operar con ellas y posteriormente simplificar los resultados obtenidos. En este proceso es posible hacer uso de las propiedades de los racionales y sus operaciones. En la siguiente tabla se muestran las propiedades más empleadas:
Sean los números reales a, b, c y d, se cumple que:

Tabla 2.5. Propiedades de las fracciones para suma, multiplicación y división

Nombre	Ecuación
i. Cancelación	$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}\ c\neq 0$
ii. Suma o resta de fracciones homogéneas	$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$
iii. Suma o resta de fracciones heterogéneas	$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm cb}{bd}$
iv. Multiplicación	$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
v. División	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

Ejemplo 2.18

Simplifique:

$$\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$$

Solución: luego de factorizar el numerador y el denominador y simplificar se obtiene:

$$\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}=\frac{(2x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x+1}{x+1}$$

Ejemplo 2.19

Simplifique:

$$\frac{4x^2+11x-3}{2-5x-12x^2}$$

Solución: se factorizan el numerador y el denominador según lo explicado en páginas anteriores para las expresiones de la forma ax^2+bx+c, además se toma como factor común en el denominador para el factor $(1-4x)$ de donde se obtiene $-1(4x-1)$ y posteriormente se simplifica

$$\frac{4x^2+11x-3}{2-5x-12x^2}=\frac{(4x-1)(x+3)}{(1-4x)(2+3x)}=\frac{(4x-1)(x+3)}{-(4x-1)(2+3x)}=-\frac{x+3}{2+3x}$$

Las operaciones suma y resta de expresiones racionales siguen en líneas generales el proceso empleado para números racionales.

Ejemplo 2.20

Encuentre el mínimo común múltiplo de los denominadores en las siguientes expresiones racionales:

$$\frac{1}{x^4-x^2},\qquad \frac{x+2}{x^2+2x+1},\qquad \frac{1}{x}$$

Solución: luego de realizar la factorización de los denominadores según las explicaciones de las páginas anteriores se obtiene:

$$\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)},\qquad \frac{x+2}{(x+1)^2},\qquad \frac{1}{x}$$

Los diferentes factores de los denominadores son $x, x-1\ y\ x+1$. Al usar el factor con el exponente más alto en cada uno de los denominadores y realizar el producto entre ellos se obtiene:

$$x^2(x-1)(x+1)^2$$

Ejemplo 2.21

Combine y simplifique:

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}$$

Solución: al factorizar los denominadores se obtiene $(x-2)\,(x+2)\ y\ (x+2)^2$. De esta manera el mínimo común múltiplo de los denominadores es $(x-2)\,(x+2)^2$. Al desarrollar el producto de las expresiones racionales por los factores faltantes en los denominadores para que tengan el denominador común se obtiene:

$$\frac{x}{x^2-4}=\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+2)}$$

$$\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{1(x-2)}{(x+2)^2(x-2)}$$

Entonces se usa (ii) para sumar y simplificar:

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)^2}+\frac{x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{x\,(x+2)+x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{x^2+2x+x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{x^2+3x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$

Las operaciones multiplicación y división entre expresiones racionales requieren del uso de las expresiones (iii) o (iv). Posteriormente se simplifica.

Ejemplo 2.22

Combine y Simplifique

$$\left(\frac{x}{5x^2+21x+4}\right)\left(\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x}\right)$$

Solución:

$$\left(\frac{x}{5x^2+21x+4}\right)\left(\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x}\right)=\frac{x\left(25x^2+10x+1\right)}{(5x^2+21x+4)\,(3x^2+x)}$$

$$\left(\frac{x}{5x^2+21x+4}\right)\left(\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x}\right)=\frac{x\left(25x^2+10x+1\right)}{(5x^2+21x+4)\,(3x^2+x)}$$

$$\left(\frac{x}{5x^2+21x+4}\right)\left(\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x}\right)=\frac{x(5x+1)(5x+1)}{(5x+1)\,(x+4)\,x(3x+1)}$$

$$\left(\frac{x}{5x^2+21x+4}\right)\left(\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x}\right)=\frac{5x+1}{(x+4)(3x+1)}$$

Ejemplo 2.23

Combine y simplifique

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}\div\frac{2x+5}{x+3}$$

Solución:

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}\div\frac{2x+5}{x+3}=\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}*\frac{x+3}{2x+5}$$

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}=\frac{(2x^2+9x+10)(x+3)}{(x^2+4x+3)(2x+5)}$$

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}=\frac{(2x+5)(x+2)(x+3)}{(x+3)(x+1)(2x+5)}$$

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}=\frac{x+2}{x+1}$$

Ejemplo 2.24

Simplifique:

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{x}{x+1}}{1+\frac{1}{x}}$$

Solución: primero se obtienen expresiones individuales para el numerador y el denominador:

$$\frac{1}{x}-\frac{x}{x+1}=\frac{1\,(x+1)}{x\,(x+1)}-\frac{x\times x}{(x+1)\,x}=\frac{x+1-x^2}{x\,(x+1)}=\frac{-x^2+x+1}{x\,(x+1)}$$

$$1+\frac{1}{x}=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$$

De esta manera:

$$\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x+1}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{\dfrac{-x^2+x+1}{x(x+1)}}{\dfrac{x+1}{x}}$$

Ahora se aplica (iv) a este cociente para obtener

$$\frac{\dfrac{-x^2+x+1}{x\,(x+1)}}{\dfrac{x+1}{x}}$$

$$=\frac{-x^2+x+1}{x(x+1)}\times\frac{x}{x+1}=\frac{-x^2+x+1}{(x+1)^2}$$

Ejemplo 2.25

Simplifique:

$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}$$

Solución: primero se encuentra el MCM de los denominadores y luego se suma:

$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y}\sqrt{x}}+\frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}=\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$$

Al racionalizar el denominador, el resultado final es:

$$\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}*\frac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}=\frac{x^2\sqrt{y}+y^2\sqrt{x}}{xy}$$

(3) Ejercicios de trabajo en clase

Simplifique la expresión racional.

38. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+6x+8}$

39. $\frac{v^4+4v^2+4}{4-v^4}$

40. $\frac{z^2-9}{z^3+27}$

41. $\frac{x^2-2xy-3y^2}{x^2-4xy+3y^2}$

42. $\frac{3x^2-7x-20}{2x^2-5x-12}$

43. $\frac{4y^2+20y+25}{2y^3+3y^2-5y}$

44. $\frac{w^3-9w}{w^3-6w^2+9w}$

45. $\frac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2}$

Determine el mínimo común múltiplo de los denominadores de las expresiones racionales y efectúe las operaciones indicadas:

46. $\frac{1}{x^2+x-2}\times\frac{4}{x+2}$

47. $\frac{5}{v^2+2v+1}\times\frac{v}{v^2-3v-4}$

48. $\frac{10}{b^3+b^2-6b}\times\frac{1}{b^3-6b^2}\times\frac{b}{b-2}$

49. $\frac{1}{x^2-10x+25} \times \frac{x}{x^2-25} \times \frac{1}{x^2+10x+25}$

50. $\frac{1}{c^2+c} \times \frac{c}{c^2+2c+1} \times \frac{1}{c^2-1}$

51. En un circuito que consta de tres resistencias R_1, R_2, R_3 , se utiliza un cable conductor para conectar las resistencias en paralelo. La resistencia equivalente del circuito es

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}$$

Simplifique la expresión.

52. En una lente, p representa la distancia entre el objeto y la lente y q representa la distancia entre la imagen y la lente; el valor de la longitud focal de la lente se puede calcular mediante la expresión:

$$\frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$$

Simplifique la expresión.

2.4. Fracciones parciales

La expresión racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ formada por los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se denomina fracción propia, si el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x)$. En caso contrario, la expresión racional se denomina fracción impropia.

Las fracciones impropias pueden ser expresadas como la suma de un polinomio y una fracción propia, es decir: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\{polinomio\}+\frac{N_1(x)}{Q(x)}$, por otra parte, las fracciones propias se pueden expresar como la suma de dos o más fracciones. Al proceso de determinar esas fracciones se le denomina descomposición en fracciones parciales.

2.4.1. Caso 1: factores lineales distintos en el denominador

La expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede expresar como una suma de fracciones con denominadores lineales si su denominador se puede descomponer en factores lineales distintos, en este caso la expresión racional se expresa como la suma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

Ecuación 26: Descomposición en fracciones parciales: factores lineales distintos

Ejemplo 2.26

Descomponga en fracciones parciales la expresión racional:

$$\frac{7x+3}{x^2+3x-4}$$

Solución: el denominador puede ser factorizado de la siguiente forma:

$$x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$$

Al descomponer en fracciones parciales según la ecuación 26 se obtiene:

$$\frac{7x+3}{x^2+3x-4}=\frac{7x+3}{(x+4)(x-1)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-1}$$

El siguiente paso es determinar los valores de A y B, multiplicando por $(x+4)(x-1)$ para obtener:

$$7x+3 = A\,(x-1) + B(x+4)$$

Luego de desarrollar los productos indicados y agrupar términos semejantes el resultado es:

$$7x + 3 = Ax - A + Bx + 4B$$

$$7x+3 = Ax + Bx - A + 4B$$

$$7x+3 = x\,(A + B) + (-A + 4B)$$

Igualando los coeficientes de x de ambos lados de la igualdad se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$A+B= 7$$

$$-A+4B= 3$$

Al resolver el sistema de ecuaciones surge los valores para A y para B, que son respectivamente 5 y 2, por lo que la fracción original al descomponerse en fracciones parciales se expresará:

$$\frac{7x+3}{x^2+3x-4}=\frac{5}{x+4}+\frac{2}{x-1}$$

Ejemplo 2.27

Descomponer en fracciones parciales la fracción:

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}$$

Solución: al factorizar el denominador resulta:

$$2x^3+3x^2-2x=x(2x^2+3x-2) =x(2x-1)(x+2)$$

Según lo explicado, la descomposición en fracciones parciales será

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}$$

Al multiplicar los dos lados de la ecuación por el mínimo común denominador se observa:

$$x^2+2x-1=A(2x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(2x-1)$$

Con,

$$A=\frac{1}{2},\quad B=\frac{1}{5}\quad y\quad C=-\frac{1}{10}$$

Así:

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}=\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{5}}{2x-1}+\frac{-\frac{1}{10}}{x+2}$$

2.4.2. Caso 2: factores lineales repetidos en el denominador

Para expresiones racionales de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ si el denominador $Q(x)$ tiene un factor lineal repetido k veces de la forma $(a_1x+b_1)^k$, la descomposición en fracciones parciales contiene k términos y la descomposición en fracciones parciales será:

$$\frac{A_1}{a_{1x}+b_1}+\frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(a_1x+b_1)^k}$$

Donde $A_1, A_2, \ldots, A_k$son constantes

Ecuación 27: Descomposición en fracciones parciales: factores lineales repetidos

Ejemplo: descomponer en fracciones parciales.

$$\frac{5x^2-36x+48}{x(x-4)^2}$$

Solución: la descomposición de fracciones parciales en:

$$\frac{5x^2-36x+48}{x(x-4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-4)}+\frac{C}{(x-4)^2}$$

Al multiplicar los dos lados de la ecuación por el denominador común se advierte:

$$5x^2-36x+48=A(x-4)^2+Bx(x-4)+Cx$$

Desarrollando la diferencia de dos cantidades al cuadrado, el producto y simplificando se obtiene:

$$5x^2-36x+48=Ax^2+Bx^2-8Ax-4Bx+Cx+16A$$

Para determinar los valores de $A,\ B,\ C$ se igualan los coeficientes de $x^2,\ x$ y los términos independientes al lado derecho y al lado izquierdo del símbolo de igual, cuyo sistema es:

$$A{+}B{=}\ 5$$
$$-8A-4B+C=-36$$
$$16A=48$$

De las ecuaciones anteriores es posible despejar y obtener los valores de $A,\ B,\ C$

$$A=3$$
$$B=2$$
$$C=-4$$

Luego:

$$\frac{5x^2{-}36x{+}48}{x(x{-}4)^2}{=}\frac{3}{x}{+}\frac{2}{(x{-}4)}{-}\frac{4}{(x{-}4)^2}$$

Ejemplo 2.28

Descomponer en fracciones parciales.

$$\frac{x^4{-}2x^2{+}4x{+}1}{x^3{-}x^2{-}x{+}1}$$

Solución: se dividen los polinomios para obtener:

$$\frac{x^4{-}2x^2{+}4x{+}1}{x^3{-}x^2{-}x{+}1}{=}x{+}1{+}\frac{4x}{x^3{-}x^2{-}x{+}1}$$

Luego, factorizando el polinomio $Q\,(x)\,{=}x^3{-}x^2{-}x{+}1$ resulta:

$$x^3{-}x^2{-}x{+}1=(x{-}1)^2(x{+}1)$$

De tal forma que la descomposición de la expresión racional en fracciones parciales será:

$$\frac{4x}{(x{-}1)^2(x{+}1)}{=}\frac{A}{x{-}1}{+}\frac{B}{(x{-}1)^2}{+}\frac{C}{x{+}1}$$

$$\frac{4x}{(x{-}1)^2(x{+}1)}{=}\frac{A\,(x-1)\,(x+1)+B\,(x+1)+C(x-1)^2}{(x{-}1)^2(x{+}1)}$$

$$4x=A\,(x-1)\,(x+1)+B\,(x+1)+C(x-1)^2$$

$$4x{=}Ax^2{+}Cx^2{+}Bx{-}2Cx{-}A{+}B{+}C$$

Igualando los coeficientes de la variable y los términos independientes resulta un conjunto de ecuaciones:

$$A+C=0$$
$$B-2C=4$$
$$-A+B+C=0$$

Del cual se obtiene:

$$A=1$$
$$B=2$$
$$C=-1$$

De modo que:

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}=x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}$$

2.4.3. Caso 3: factores cuadráticos irreductibles, distintos en el denominador

Si en la expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$, el denominador $Q(x)$ tiene un factor cuadrático no repetido de la forma ax^2+bx+c, en donde, $b^2-4ac<0$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene un término de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Donde A y B son constantes.

Ejemplo 2.29

Descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{4x^2-8x+1}{x^3-x+6}$$

Se tiene que:

$$\frac{4x^2-8x+1}{x^3-x+6}=\frac{4x^2-8x+1}{(x+2)(x^2-2x+3)}$$

$$\frac{4x^2-8x+1}{x^3-x+6}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+3}$$

Multiplicando por el común denominador:

$$4x^2-8x+1=A\left(x^2-2x+3\right)+Bx+C(x+2)$$

Luego de multiplicar y reducir términos semejantes se obtiene el sistema:

$$A+B=4$$

$$-2A+2B+C=-8$$

$$3A+2C=1$$

De donde:

$$A=3,\quad B=1,\quad C=-4$$

Por tanto:

$$\frac{4x^2-8x+1}{x^3-x+6}=\frac{3}{x+2}+\frac{x-4}{x^2-2x+3}$$

Ejemplo 2.30

Descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}$$

Solución: la expresión racional se descompone así:

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

De donde se resulta:

$$A+B=2,\ \ C=-1,\ \ 4A=4 \qquad\qquad A=1,\ \ B=1\ \ y\ \ C=-1$$

Por lo cual:

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}$$

2.4.4. Caso 4: factores cuadráticos irreductibles repetidos en el denominador

Si en la expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$, el denominador $Q(x)$ tiene un factor cuadrático repetido k veces de la forma $(ax^2+bx+c)^k$, donde $b^2-4ac<0$, la descomposición de la expresión racionales en fracciones parciales contiene k términos en la forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

Donde A_1, $A_{2,\ldots\ldots}A_k$ y B_1, B_2 , ...B_k son constantes.

Ecuación 28: Descomposición en fracciones parciales: factores cuadráticos irreductibles

Ejemplo 2.31

Descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x\left(x^2+1\right)^2}$$

Solución: la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Lo anterior debido a que se tiene un factor lineal en el denominador y un factor cuadrático. Note que los numeradores dependen del tipo de factor en el denominador.
Como $x(x^2+1)^2$ corresponde al común denominador de las fracciones, se realiza la suma indicada de las fracciones, y luego igualando coeficientes, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$A+B=0, \quad C=-1, \quad 2A+B+D=2, \quad C+E=-1, \quad A=1$$

Cuya solución es:

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=-1, \quad D=1 \quad y \quad E=0$$

Entonces:

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}$$

Ejercicios del capítulo: trabajo independiente

Ejercicios de la sección 2.1

1-6 Realice las operaciones y simplifique:

1. $(2x+3)(x-4)+4x(x-2)$
2. $(h+3)(p+5)(p-5)$
3. $\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{2ab}$
4. $\left(2x-4b^3\right)\left(4a^2+8ab^3+16b^6\right)$
5. $x^4(x+4)(3x-2)$
6. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

Ejercicios de la sección 2.2

7-12 Factorice completamente sobre los enteros:

7. $x^2 + 4x - 32$
8. $r^2 + 7r + 12$
9. $a^2t^2 - 3at - 18$
10. $2x^2 + x - 10$
11. $18x^2 + 9x - 2$
12. $2(3a - b)^2 + 3\,(3a - b) - 5$

13-17 Factorice completamente los polinomios como suma o diferencia de cubos:

13. $8(abc)^3 - 1$
14. $64 - h^3$
15. $(a + b)^3 - (c + d)^3$
16. $y^{10} - 8k^4y^3$
17. $54x^6 - 128y^3$

18-25 Aplique los casos de factorización para factorizar las siguientes expresiones:

19. $a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2$
20. $ax^2 - 4ax + 4a$
21. $3x^2 + 8x + 5$
22. $4x^2 - 4x + 1$
23. $x^2 - 16$
24. $r^2x^2 - r^2$
25. $8x^2 + 27y^3$
26. $4x^2 + 23x - 6$

Ejercicios de la sección 2.3

26-33 Realice las siguientes operaciones y simplifique al máximo:

26. $\frac{2x}{2x+5}+\frac{5}{2x+5}$
27. $\frac{x}{x+1}.\frac{1}{x}-1$
28. $\frac{2}{2-t}+\frac{5}{t-2}$
29. $\frac{h}{h+1}+\frac{1}{h^{2-1}}$
30. $\frac{9x^3}{2(x-2)^4}.\frac{4(x-2)^2}{18x^5}$
31. $\frac{2}{x}\div\left(\frac{2}{x}-1\right)+2$
32. $\frac{9x^3y^2}{(z-4)^3}\div\frac{12x^2y^3}{(z-4)}$
33. $(a-b)\div\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

34-38 Simplifique la siguiente expresión fraccionaria:

34. $\frac{\frac{1}{1+a+h}-\frac{1}{1+x}}{h}$
35. $\frac{\frac{1}{\sqrt{a+h}}-\frac{1}{\sqrt{a}}}{h}$
36. $\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$
37. $\frac{(x+h)^3-5(x+h)-\left(x^3-5x\right)}{h}$
38. $\sqrt{1+\left(\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\right)^2}$
39. Encuentre un polinomio $P(x)$ de grado 3 y con 1 como coeficiente principal, que cumpla con que $P(x)$ es divisible por $(x-2)\,,P\,(0)=6\;y\;P\,(1)=-2$
40. Si $P\,(x)=2x^3-kx^2-8x+4k$, con k como número real. Verifique que $\frac{k}{2}$ es un cero de $P(x)$, factorice $P(x)$.

41-46 Racionalice el denominador y simplifique al máximo:

41. $\frac{1-x}{x-\sqrt{2x-1}}$
42. $\frac{-2x+4}{\sqrt{3x}+2\sqrt{x^2-1}}$

43. $\frac{4x^3-12x}{\sqrt{x}-\sqrt{x^2+x-3}}$

44. $\frac{ax^2-a^2x}{\sqrt{ax}-a}$

45. $\frac{1}{\sqrt{x}+5}$

46. $\frac{a\sqrt{2}-2\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}$

Ejercicios de la sección 2.4

46-52 Escriba la expresión racional como una suma de fracciones parciales:

47. $\frac{1}{(x-1)(x+4)}$

48. $\frac{2x+3}{(x-1)^2}$

49. $\frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$

50. $\frac{8x^3+5x^{2+x-1}}{x^2(x+1)}$

51. $\frac{3x^3+6x^2+3x+8}{(x^2+1)(3x^2+4)}$

52. $\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^5-x}$

Aplicación con tecnología

Desarrolle los siguientes ejercicios usando el programa www.symbolab.com. en el que podrá evidenciar los procesos desarrollados analíticamente.

53-56 Resuelva la adición o sustracción simplificando las siguientes expresiones algebraicas y calcule el valor dado para cada una de ellas:

53. $5+\frac{x}{x-8}$ $para\ x=1$

54. $\frac{1}{h+3}+\frac{6}{h-2}$ $para\ h=3$

55. $\frac{9}{3t-2}-\frac{1}{(3t-2)^2}$ $para\ t=-5$

56. $\frac{3}{b^2}+\frac{4}{bc}-\frac{5}{c^2}$ $para\ \ b=-2, c=-3$

57-59 Resuelva la multiplicación o división con su correspondiente simplificación de las siguientes expresiones:

58. $\dfrac{\frac{2x^2-3x-2}{x^2-1}}{\frac{2x^2+5x+2}{x^2+10x+2}}$

59. $\dfrac{\frac{g^3}{g+1}}{\frac{g}{g^2+2g+1}}$

60. $\left[\frac{t^2+2ts\ +s^2}{t^2-s^2}\right]\bullet\left[\frac{2t^2-ts\ +s^2}{t^2-ts-2s^2}\right]$

61-64 Calcule el valor de las siguientes expresiones

61. $\frac{1+(g+h)^{-1}}{1-(g+h)^{-1}}\left[1-\frac{\left(g^2+h^2\right)}{2gh}\right],\ g=\frac{1}{h+2}$

62. $\frac{t+1}{1+\sqrt{1+t}}+\frac{t-1}{1-\sqrt{1+t}},\ t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

63. $\left[\frac{\left(a^2+b^2\right)^{-1/3}+\left(a^2-b^2\right)^{-1/3}}{(a^2+b^2)^{-1/3}-(a^2-b^2)^{-1/3}}\right]^{-3}, a=b\sqrt{\frac{s^3+t^3}{3}}$

64. $\frac{a^2-5x\sqrt{7}-\sqrt[3]{6+5}}{x+\sqrt{7}},\ x=\sqrt{11}-\sqrt[3]{5}$

Proyectos aplicados a las ciencias básicas

Cuando se trabaja con las expresiones algebraicas como los productos notables estos se representan como áreas de cuadrados y rectángulos.

Desarrolle las siguientes ideas que representan proyectos basados en los contenidos vistos en el capítulo.

- Visualizando una fórmula: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/dp1.html
- Puesta a cero en un cero: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/dp6.html
- Cuadrados y primos: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/fops1.html

Represente gráficamente la idea de proyecto visualizando una fórmula

Solución de los ejercicios de trabajo en clase

3. $\sqrt{5}x^2 + 10x - 3\sqrt{2}$ *para* $x = -1$

   Se obtiene -102.006

5. $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ *para* $x = -2$ Se obtiene 31

7. No es polinomio

9. Polinomio de grado 101 y coeficiente 26.

13. Eliminación de paréntesis, agrupación de términos semejantes y por último suma de elementos similares.

$$\left(3x^5 - 5x^2 + 4x - 7\right) + (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$$

$$= 3x^5 + x^3 - 8x^2 + 6x - 6$$

15. $6y^3 + y^2 - 2y - 7$

17. Factorizar el término común

$$2x(6x^2 + x + 3)$$

19. $(y + 3)(2y - z)$

21. Factorizar el máximo común denominador de cada grupo:

$$3t\,(5a + b) + s(5a + b)$$

   Factorizar el polinomio factorizando $(5a + b)$

$$(5a + b)(3t + s)$$

23. Aplicar la regla del binomio cuadrado $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

$$4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$$

25. Aplicar la regla del binomio cuadrado $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

$$x^8 - y^8 = \left(x^4 + y^4\right)\left(x^4 - y^4\right)$$

   Factorizar $\left(x^4 - y^4\right) = (x + y)\,(x - y)\left(x^2 + y^2\right)$

$$= (x + y)\,(x - y)\left(x^4 + y^4\right)\left(x^2 + y^2\right)$$

27. $(y+2)(y+5)$

29. Sea $u = y^2$

$$u^2 + 10u + 21$$

Factorizar $u^2 + 10u + 21$

$$(u+3)(u+7)$$

Sustituir en la ecuación $u = y^2$

$$\left(y^2+3\right)\left(y^2+7\right)$$

31. $\left(a^2+3\right)\left(\sqrt{6}a+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}a+\sqrt{5}\right)$

33. Falso

35. Falso porque $(r-1)(r-1) = r^2 - 2r + 1$

39. $-\frac{v^2+2}{v^2-2}$

41. $\frac{x+y}{x-y}$

43. $\frac{2y+5}{y(y-1)}$

45. Aplicar regla del binomio al cuadrado $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$\frac{ab\,(a+b)}{(a+b)\,(a-b)} = \frac{ab\,(a+b)}{(a+b)\,(a-b)} = \frac{ab}{(a-b)}$$

47. El mínimo común múltiplo MCM $(v+1)^2\,(v-4)$

49. El mínimo común múltiplo MCM $(x-5)^2(x+5)^2$

51. Simplificando la expresión $\frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$

Solución de los ejercicios de trabajo independiente

1. $(2x+3)(x-4) + 4x(x-2) = (2x+3)(x-4)$

3. Usar la regla de la potencia $a^m a^n = a^{m+n}$

$$\frac{(a+b)^3 - (a-b)^3}{2ab} = 3a^3b^2 + ab^4$$

5. $x^4(x+4)(3x-2) = 3x^6 + 10x^5 - 8x^4$

7. Considerar la forma $x^2 + bx + c$, encontrar dos números cuyo producto sea c y cuya suma sea b.

   En este caso -32 y la suma sea 4. Utilizando estos números es posible factorizar $(x-4)(x-8)$.

9. $a^2t^2 - 3at - 18 = (at-6)(at+3)$

11. $18x^2 + 9x - 2 = (6x-1)(3x+2)$

13. $8(abc)^3 - 1 = (2abc-1)\left(4a^2b^2c^2 + 2abc + 1\right)$

15. $(a+b)^3 - (c+d)^3 = ((a+b)-(c+d))\left((a+b)^2 + (a+b)(c+d) + (c+d)^2\right)$

17. $54x^6 - 128y^3 = 2\left(3x^2 - 4y\right)\left(9x^4 + 12x^2y + 16y^2\right)$

19. $ax^2 - 4ax + 4a = a(x+2)^2$

21. $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

23. $r^2x^2 - r^2 = r(x+1)(x-1)$

25. $4x^2 + 23x - 6 = (x+6)(4x-1)$

27. $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x} - 1 = -\frac{x}{x+1}$

29. $\frac{h}{h+1} + \frac{1}{h^{2-1}} = \frac{h}{h+1} + \frac{1}{h}$

31. $\frac{2}{x} \div \left(\frac{2}{x} - 1\right) + 2 = \frac{2}{2-x} + 2$

33. $(a-b) \div \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = -ab$

35. $\frac{\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}}}{h} = \frac{\left(a - \sqrt{a+h}\right)(a+h)}{a^2h + ah^2}$

37. $\frac{(x+h)^3 - 5(x+h) - \left(x^3 - 5x\right)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 - 5$

41. $\frac{1-x}{x-\sqrt{2x-1}} = -\frac{x+\sqrt{2x-1}}{x-1}$

43. $\frac{4x^3 - 12x}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2+x-3}} = -4x\left(\sqrt{x} - \sqrt{x^2+x-3}\right)$

47. $\frac{1}{(x+1)(x-4)} = \frac{1}{5(x+1)} + \frac{4}{5(x-1)}$

49. $\frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1}$

51. $\frac{3x}{3x^2+4} + \frac{2}{x^2+1}$