UNO

TEORÍA DE NÚMEROS

¿Cómo puede ser que la matemática, siendo al fin y al cabo un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, esté tan admirablemente adaptada a los objetos de la realidad?
Albert Einstein

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se establece como resultado de un proceso progresivo de aplicación de los números que se utilizan normalmente para contar, medir o expresar relaciones. Ejemplos de estas situaciones son:

i) Los números naturales ($\mathbb{N}$) son el conjunto numérico en el cual cada uno de sus elementos se obtiene sumando 1 al elemento anterior. Sirven para contar elementos.

ii) Calcular relaciones, proporciones, etc.:$\cdots \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \cdots$ los números racionales, $\mathbb{Q}$.

iii) Determinar el área de un círculo o la diagonal de un cuadrado: $\sqrt{2}$, π,$\sqrt{5}$, e ... De los números irracionales y los racionales obtenemos los números reales, $\mathbb{R}$[1].

(1) Ejercicios de trabajo en clase

1. ¿El resultado de la resta y el resultado de la división de números enteros es un número entero?

2. ¿Es verdad que cualquier subconjunto de números enteros siempre tiene un primer elemento?

[1] La forma de definir los reales como la unión de racionales con irracionales es intuitiva y cercana a los estudiantes. Existe una definición formal por cortes o por sucesiones de Cauchy, que no se trabajará en este libro porque implica otro nivel de formalidad y profundidad.

3. Un número entero es par si se puede expresar como $2k$ donde k es un entero y un número entero es impar si se puede expresar de la forma $2k+1$ donde k es un entero.

   Exponga la razón por la cual:

   a. La suma de dos números enteros es un número entero par.
   b. El producto de dos números enteros pares es un número entero par.
   c. La suma de dos enteros impares es un número entero par.
   d. Si un número entero a es múltiplo de 3 entonces el número entero a^2 es un múltiplo de 3.

Exprese de forma racional (p/q) los siguientes decimales periódicos:

4. $2,345345\ldots$

5. $13,023491491\ldots$

6. $0,285714285714\ldots$

7. De ejemplos de números irracionales.

8 ¿Los resultados de las operaciones suma, resta, multiplicación y división de números irracionales dan como resultado números irracionales?

Determine un número racional que se encuentre entre los siguientes pares de números

9. $3/5$, $7/4$

10. $3/5$, $4/5$

11. Para un número irracional a, ¿existe un consecuente para a?

12. Al realizar la suma de un número racional con un número irracional ¿Qué clase de número se obtiene?

1.1. Orden jerárquico de las operaciones

Para realizar de forma correcta una serie de operaciones entre números reales se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Efectuar primero las multiplicaciones y las divisiones en el orden de lectura, es decir, de izquierda a derecha.
- Efectuar sumas y restas de forma similar a las operaciones anteriormente mencionadas.

- Si hay varios símbolos de agrupamiento como paréntesis (), corchetes [] o , uno dentro de otro, primero se efectúan las operaciones dentro de cada agrupamiento.

Ejemplo 1.1

Teniendo en cuenta el orden jerárquico observe los siguientes ejemplos.

a.

$$\begin{aligned}&8+5\times 6-15\div 3\\&8+(5\times 6)-(15\div 3)\\&8+30-5=33\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}&6-[8-(6+9)]\\&6-[8-(15)]\\&6+7=13\end{aligned}$$

c. $\dfrac{9\times 3-8\times(-2)}{6+12\times 7}=\dfrac{(9\times 3)-(8\times(-2))}{[(6)+(12\times 7)]}=\dfrac{[27-(-16)]}{[24+84]}=\dfrac{43}{108}$

(2) Ejercicios de trabajo en clase

Realice los siguientes ejercicios teniendo en cuenta el orden jerárquico de las operaciones

13. $15-\{4+[-5-4+(2-3)]-16\}$
14. $-4+5-\{3+4-5-[7+(6+4)-7-6]+4\}$
15. $-1+\{5+4-3-7+1-[5+8-7-(7+8+6-9-23)-5]+3\}$
16. $5+4-[5-(6+5-8)+(9-1+4)]$

1.2. Estrategias para aproximar números reales

Con frecuencia se realizan aproximaciones en las operaciones realizadas con los números reales. Cuando los resultados son menores que los valores exactos, se denominan aproximaciones por defecto, en caso contrario se denominan aproximaciones por exceso.

Aproximación por redondeo

Para realizar aproximación por redondeo se deben sustituir las cifras siguientes a la de orden n por ceros. En caso de que la primera cifra, que se cambia por cero, sea mayor o igual a 5 la última de las no sustituidas por cero se aumenta en uno; en caso contrario, es decir, si la primera cifra que es cambiada por cero es menor a 5, la última de las cifras no sustituidas por cero se mantiene igual.

Aproximación por truncamiento

Para realizar aproximación por truncamiento se deben sustituir por cero todas las cifras siguientes a la cifra del orden de truncamiento.

Ejemplo 1.2

$$\pi = 3,141592\ldots$$

Aproximación de orden 3 por redondeo: $3,142$
Aproximación de orden 3 por truncamiento: $3,141$
Aproximación de orden 3 por redondeo del número 51760: 51800
Aproximación hasta las centenas por truncamiento de 51760: 51700

1.2.1. Errores

Al realizar la aproximación de un número real, el hecho de modificar las cifras por ceros genera un error. Para cuantificarlo se puede emplear el error absoluto o el relativo.

Error absoluto $\mathbf{E}_a$: corresponde al valor absoluto de la diferencia que se obtiene entre un número y su aproximación. Se puede cuantificar mediante la expresión $E_a = \|A - a\|$, en esta expresión A representa el número que se ha aproximado y a representa su aproximación.

Error relativo $\mathbf{E}_r$: corresponde al cociente del error absoluto y el valor absoluto del número aproximado. Se obtiene mediante la expresión:

$$E_r \frac{E_a}{\|A\|} \tag{1.1}$$

1.3. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor (MCM)

Para algunas aplicaciones es necesario determinar el menor de los múltiplos comunes y el mayor de los divisores comunes de un conjunto de números enteros. Una estrategia para determinarlos es:

El mínimo común múltiplo se obtiene del producto de los factores primos que sean comunes y los que no sean comunes del conjunto de números con sus exponentes mayores.

Tabla 1.1. Forma de calcular el MCM

12	2	8	2	$12 = 2^2 \times 3$
6	2	4	2	$8 = 2^3$
3	3	2	2	$2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24$
1		1		$\mathrm{mcm}(12, 8) = 24$

El máximo común divisor de un conjunto de números enteros se obtiene del producto de los factores primos comunes con sus menores exponentes.

Si m es el máximo común divisor de los números a y b se denotará mediante la expresión $m = (a, b)$; existe una forma alternativa de calcular el máximo común divisor y es mediante el uso del algoritmo de Euclides, que se basa en:

$$\text{Si } m = (a, b) \text{ y } a = bq + r \text{ con } 0 \leq r < b, \text{ entonces } m = (b, r)$$

se procede de la siguiente forma: se divide a entre b para obtener un residuo r_1, después se divide$b \div r_1$ y se obtiene un residuo r_2; a continuación, se divide $r_1 \div r_2$ y se obtiene como residuo r_3 y se continúa con el proceso hasta obtener como residuo cero. El máximo común divisor es igual al último residuo que sea diferente de cero.

Ejemplo 1.3

Si se utiliza el algoritmo de Euclides, para calcular el máximo común divisor de las parejas de números el proceso será:

a. 328 y 1804
   1804 / 328 = 5 y residuo = 164
   328 / 164 = 2 y residuo = 0 por tanto (1804, 328) = 164

b. 105 y 385
   385 / 105 = 3 y residuo = 70

105 / 70 = 1 y residuo = 35
70 / 35 = 2 y residuo = 0 por tanto (385, 105) = 35

El máximo común divisor de los números enteros a y b cumple:

$$\text{Si } a > b(a, b) = (b, a - b)$$

Por último, no olvidar que el máximo común divisor de a y b es el mayor entero positivo que divide a a y b de tal forma que el residuo de ambas operaciones sea cero. Si el máximo común divisor de dos números es 1, al par de números se les denomina primos relativos o primos entre sí.

c. Calcular (1001,1000)

$$(1001, 1000) = (1000, 1001 - 1000) = (1000, 1) = 1.$$

1.4. Números primos

Un número entero P se denomina número primo si es mayor que 1 y sus únicos divisores son 1,-1, P y $-P$

Ejemplo 1.4

7, es divisible por (1,-1, 7,-7) primo positivo
-7,es divisible por (1,-1,7,-7) primo negativo

1.5. Números compuestos

Son los números que se pueden expresar como el producto de dos o más números primos. Todo número entero mayor que 1, es decir $n > 1$, puede ser expresado de forma única como el producto de potencias de un conjunto de números primos.

Ejemplo 1.5

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$$

Apoyo de la calculadora
Multiplicaciones con exponentes:
Se usa la tecla: $[\wedge]$ o $[x^y]$

Ejemplo 1.6

$$5^6 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \rightarrow 5\,[\wedge]\,[6] \times 3\,[\wedge]\,[2] \times 4\,[\wedge]\,[3]\,[enter] = 9000000$$

1.5.1. Divisibilidad

Un número es divisible entre otro número si este lo contiene un número entero de veces, es decir, si el residuo es cero.

Para a y b enteros, se dice que a divide a b (lo que se simboliza con $(a \mid b)$) si se cumple:

$$(a \mid b) \text{ si existe un entero } c \text{ tal que } b = (a)(c)$$

Ejemplo 1.7

a. $3|\ 12$ porque $12 = 4 \times 3$

b. $4 \nmid 10$ puesto que no existe un entero c tal que $10 = 4c$

c. $4 \mid 20$ debido a que si $c = 5$, $20 = 4c$

d. $3|0$ ya que $0 = 3c$ cuando $c = 0$

e. $1|\ 5$ puesto que $5 = 1 \times 5$

f. $5 \nmid 1$ dado que $1\ \neq\ 5c$ para cualquier entero c

1.5.1.1. Criterios de divisibilidad

Para $\boldsymbol{x}$, entero se cumple que:

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 2 si su última cifra es 0 o su última cifra es un número par
- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 3 si la suma de todas sus cifras es múltiplo de 3

Ejemplo 1.8

387 es divisible por 3 porque $3 + 8 + 7 = 18$ y 18 es múltiplo de 3.

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 4 si sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 4. Ejemplo: 324 y 1840.
- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 5 si él termina en 0 o en 5.
- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 6 si tiene como divisores a 2 y a 3.
- Para determinar si $\boldsymbol{x}$ es divisible por 7 existen dos criterios: el método directo y el método recursivo.

Método directo

A partir del número se forman grupos de tres cifras y posteriormente se suma y se resta alternadamente cada conjunto de números; si el resultado obtenido es un múltiplo de 7, entonces el número dado también es divisible entre 7.

Ejemplo 1.9

267'651,475 es divisible entre 7 ya que al usar el método directo se obtiene:

$$267 - 651 + 475 = 91$$

Ya que 91 es un múltiplo de 7, el número 267'651,475 también lo es.

Método recursivo

Se descompone el número en dos partes que corresponden la primera a todas las cifras excepto la de las unidades y la otra parte solo a las unidades. Se multiplica la cifra de las unidades por 2 y se resta a la primera parte. Si el valor absoluto del resultado es 0 o es un múltiplo de 7, el número es divisible por 7. El proceso se repite hasta llegar a un resultado 0 o 7.

Ejemplo 1.10

$x = 329 \rightarrow$ (32 - (9 x 2)) $\rightarrow$14 La conclusión en este caso, es que 329 es divisible por 7.

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 8 si el número formado por las tres últimas cifras del número es divisible por 8 o si las tres últimas cifras del número son ceros.

Ejemplo 1.11

$x = 496120 \rightarrow 120$ que es divisible por 8, así que x también.

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 9 si la suma de todas sus cifras es múltiplo de 9, en este proceso se puede omitir sumar los 9 y los ceros para agilidad de la operación.

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 10 si termina en 0 (cero).

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 11 si al sumar por separado las cifras que ocupan los lugares impares y las cifras que ocupan los lugares pares y posteriormente restar los resultados se obtiene un múltiplo de 11.

Ejemplo 1.12

$957 = (9 + 7) - 5 = 16 - 5 = 11$.

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 12 si tiene como divisores a 3 y 4.
- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 13 si la suma alterna como la usada para el número 7) es divisible por 13.

Ejemplo 1.13

$x = 100035286 \rightarrow 100 - 035 + 286 = 351$ que es múltiplo de 13, luego x también.
También se puede determinar la divisibilidad por 13 con un método que es similar al del número 7, solo que multiplicando la cifra de las unidades por 9 en lugar de multiplicar por 2.

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 14 si es par y es divisible por 7
- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 15 si tiene como divisores a 3 y a 5
- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 16 si sus cuatro últimas cifras también lo son.

Ejemplo 1.14

$x = 27168 \rightarrow 7168$ que es divisible por 16, así que x también.

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 17 si se cumple que al restar la cantidad formada por la cifra de las decenas y la cifra de las unidades al doble producto de las cifras restantes es un múltiplo de 17.

Ejemplo 1.15

$x = 11866 \rightarrow 2 * 118 - 66 = 170$ que es múltiplo de 17.

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 18 si tiene como divisores a 2 y 9.
- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 19 si la suma del doble producto de las unidades con el número sin la cifra de las unidades es un múltiplo de 19.

Ejemplo 1.16

$304 \;\rightarrow\; 4x2 + 30 = \; 8 + 30 \;=\; 38$ que es múltiplo de 19.

1.6. Plano cartesiano

Cualquier par de números reales de la forma (a, b) se denomina pareja ordenada. El conjunto formado por las infinitas parejas ordenadas de números reales se denomina producto cartesiano de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ y se define así:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

Ecuación 2 : Producto cartesiano

Al relacionar los puntos del plano con el producto cartesiano $\mathbb{R}^2$ se obtiene una representación muy útil denominada el plano cartesiano. Como se muestra en la figura 1.1.

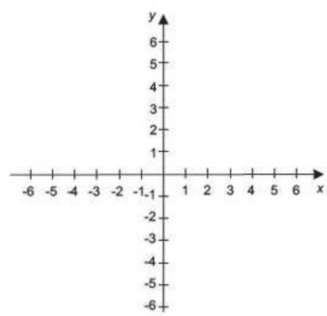


Figura 1.1. Plano cartesiano

Los números que conforman las parejas ordenadas son relacionados con las rectas vertical y horizontal de la forma conocida. No olvide que al eje horizontal se le llama eje de las x y al eje vertical se le llama eje de las y. Al primer número en cada pareja ordenada se le denomina abscisa y el segundo número en la pareja ordenada recibe el nombre de ordenada.

A la pareja (a, b) relacionada con un punto A, se le denomina las coordenadas del punto A. Observe en la figura 1.2, la forma como se ubica una serie de puntos a partir de sus coordenadas.

Además de representar puntos, en el plano cartesiano es posible representar regiones obtenidas a partir de igualdades. La siguiente región $A = \{(x, y)/x = 2,\ y = 3\}$ corresponde a las rectas mostradas en la figura 1.3.

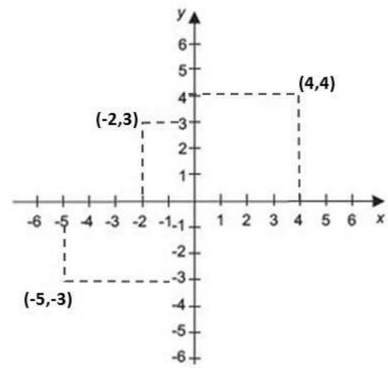


Figura 1.2. Ubicación de puntos en el plano cartesiano

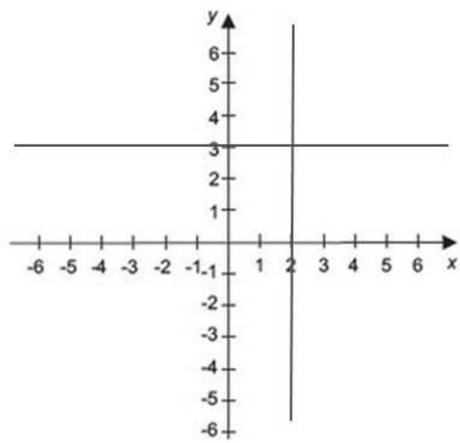


Figura 1.3. Solución regiones en el plano

Otro ejemplo de región en el plano cartesiano corresponde a la determinada por la expresión $A = \{(x, y)/-2 < x < 3,\ -1 < y < 4\}$. En este ejercicio, la condición indica que la coordenada x debe estar entre -2 y 3 y la coordenada y debe estar entre -1 y 4. La región sombreada corresponde a la intersección de las regiones indicadas. Note que en la ilustración 4, los límites de la región se muestran punteados. Lo anterior se debe a que estos puntos no hacen parte de la región por la condición de desigualdad.

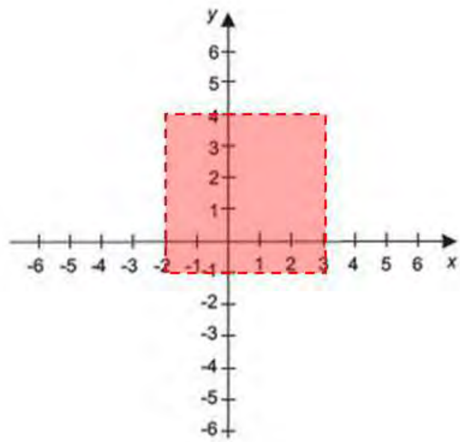


Figura 1.4. Región solución de una desigualdad

1.6.1. Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano

La distancia entre dos puntos $A(x_1,\ y_1)$ y $B(x_2,\ y_2)$ se determina mediante la expresión:

$$d\,(A,B)=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$$

Ecuación 3: Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano

1.6.2. Coordenadas del punto medio

Las coordenadas del punto medio entre $A(x_1,\ y_1)$ y $B(x_2,\ y_2)$ se determina mediante las expresiones:

$$x=\frac{x_2+x_1}{2}\qquad y=\frac{y_2+y_1}{2}$$

Ecuación 4: Coordenadas del punto medio

(3) Ejercicios de trabajo en clase

Representar los triángulos de vértices:

17. $\left(\sqrt{2},\ 0\right),\ (4,5),\ (-3,2)$

Represente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ en el plano cartesiano:

18. $\{(x,y)/x=-3,\ y=3\}$
19. $\{(x,y)/x<4\}$
20. $\{(x,y)/x\geq 2\}$
21. $\{(x,y)/x\leq -1, y\geq 2\}$
22. Una circunferencia tiene centro en $P(-4,1)$. Un diámetro de la circunferencia es QR. Si las coordenadas del punto son $Q\,(2,6)$, hallar las coordenadas del otro punto extremo del diámetro.

Hallar la distancia entre los puntos:

23. $(-3,1)\,,\ (3,-1)$
24. $(4,1)\,,\ (3,-2)$

Hallar el perímetro de los triángulos cuyos vértices son:

25. $(-2,5),\ (4,3)\,,\ (7,-2)$
26. $(-1,-2)\,,\ (4,2)\,,\ (-3,5)$

Determine si los siguientes triángulos son isósceles[2]:

27. $(6,7),\ (-8,-1),\ (-2,-7)$
28. $(2,-2)\,,\ (-3,-1)\,,\ (1,6)$
29. Hallar un punto de abscisa 3 que tenga una distancia de 10 unidades hasta el punto $(-3,69)$

1.7. Conjuntos

Se puede definir un conjunto de forma intuitiva como una colección de objetos con una característica en común. Los conjuntos se nombran de dos formas: cuando un conjunto es descrito por una propiedad que comparten sus elementos, se dice que está definido por comprensión; cuando está definido por medio de una lista de sus elementos, se dice que está definido por extensión. Al que se toma como referencia para determinar la propiedad en los elementos se le denomina conjunto universal.

Un conjunto sin elementos se llama conjunto vacío. Se dice que un elemento pertenece al conjunto A y se denota $a\in A$, en caso contrario se dice que el elemento no pertenece y se denota $a\notin A$.

[2] El triángulo isósceles se define como un polígono de tres lados: dos de ellos miden igual.

1.7.1. Diagramas de Venn

Son una forma de representar por medio de una gráfica conjuntos y sus elementos, se usan circunferencias u óvalos enmarcados por un rectángulo para mostrar las relaciones existentes entre los conjuntos representados. La región encerrada por las curvas contiene los elementos de cada conjunto y la forma como esos círculos se sobreponen, muestra las posibles relaciones entre los conjuntos; por ejemplo, cuando las regiones se sobreponen indica la existencia de elementos que pertenecen a los dos conjuntos.

1.7.2. Subconjuntos

Sean dos conjuntos A y B, como se muestra en la figura 1.5, se dice que A es subconjunto de B, lo cual se escribe $A \subseteq B$ si todo elemento de A también es elemento de B, es decir:

$$\forall x,\ si\ x \in A \rightarrow x \in B$$

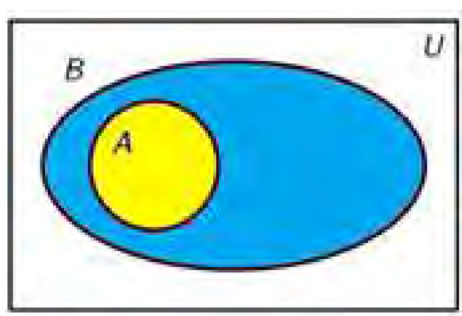


Figura 1.5. Diagrama de Venn para el subconjunto A

Con respecto a lo anterior es importante anotar que:

1. Para todo conjunto A, $\phi \subseteq A$

2. Si $Si\ A \subseteq B\ y\ B \subseteq C,\ entonces\ A \subseteq C$

3. Dos conjuntos son iguales si y solo si $A \subseteq B\ y\ B \subseteq A$

4. Sea A un conjunto, se define el conjunto partes de A al conjunto de subconjuntos de A, el cual tiene 2^n elementos donde n es la cantidad de elementos del conjunto A.

1.7.3. Unión de conjuntos

Sean los conjuntos A y B, la unión de los conjuntos se define de la siguiente forma:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Ecuación 5: Unión de conjuntos

Y el diagrama de Venn que representa la unión de conjuntos se observa en la figura 1.6.

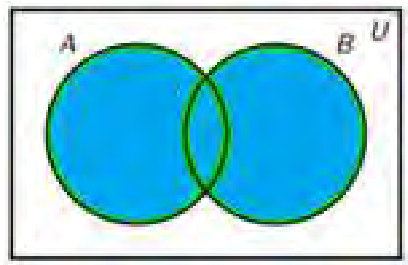


Figura 1.6. Diagrama de Venn para la unión de conjuntos

1.7.4. Intersección de conjuntos

Sean los conjuntos A y B, se define la intersección de los conjuntos de la siguiente forma:

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

Ecuación 6: Intersección de conjuntos

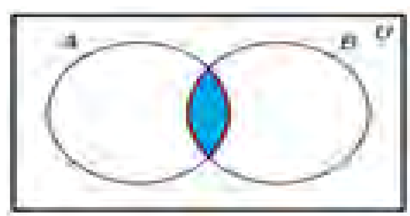


Figura 1.7. Diagrama de Venn para la intersección de conjuntos

1.7.5. Complemento de un conjunto

Sea un conjunto A, se define el complemento de A, (el cual se denota A^c o A') con respecto al conjunto universal U de la siguiente forma:

$$A^c = \{x \in U/x \notin A\}$$

Ecuación 7: Complemento de un conjunto

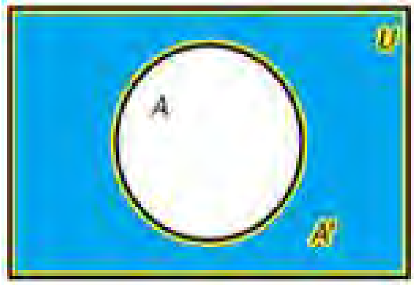


Figura 1.8. Diagrama de Venn para el complemento de conjuntos

1.7.6. Diferencia

Sean dos conjuntos A y B, se define la diferencia entre los conjuntos de la siguiente forma:

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

Ecuación 8: Diferencia de conjuntos

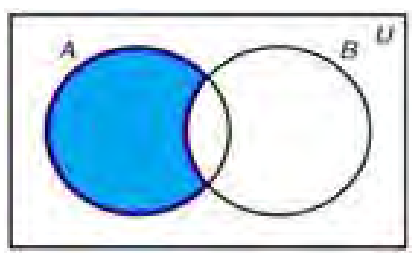


Figura 1.9. Diagrama de Venn para la diferencia de conjuntos

1.7.7. Diferencia simétrica

Sean A y B dos conjuntos, se define la diferencia simétrica de la siguiente forma:

$$A \bigtriangleup B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A \bigtriangleup B = \left\{x/(x \in A \bigwedge x \notin B) \bigvee (x \notin A \bigwedge x \in B)\right\}$$

Ecuación 9: Diferencia simétrica de conjuntos

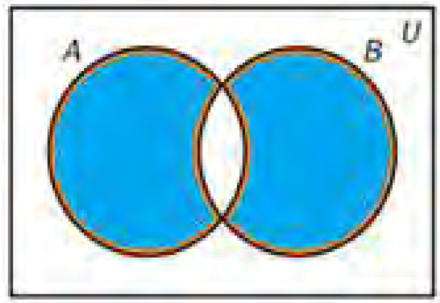


Figura 1.10. Diagrama de Venn para la diferencia simétrica de conjuntos

1.8. Propiedades de las operaciones entre conjuntos

A continuación, encontrara en la tabla 1.2 las propiedades de las operaciones entre conjuntos con sus nombres.

Tabla 1.2. Propiedades de las operaciones entre conjuntos.

Leyes asociativas	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
Leyes conmutativas	$A\cup B=B\cup A$
	$A\cap B=B\cap A$
Leyes distributivas	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
Leyes de identidad	$A\cap\phi=\phi$
	$A\cap U=U$
Leyes de idempotencia	$A\cup A=A$
	$A\cap A=A$
Leyes de acotación	$A\cap\phi=\phi$
Leyes de absorción	$A\cup(A\cap B)=A$
	$A\cap(A\cup B)=A$
Ley de involución	$(A^c)^c=A$
Leyes de De Morgan para conjuntos	$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$
	$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

Ejercicios de trabajo en clase

Dibuje cada uno de los diagramas de Venn para cada enunciado y sombree el área que represente el conjunto indicado.

30. $A\cap(B\cup C)$
31. $A\cup(B\cap C)$

32. $(((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\cup(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}))\cap((\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\cup(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}))\cap((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A})\ \cup(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})))^{\boldsymbol{c}}$

33. $(A^c \cup B^c) \cup C$

34. $(\boldsymbol{A} \uplus \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{C} \bigcap \boldsymbol{D}) \bigcup \boldsymbol{E}$

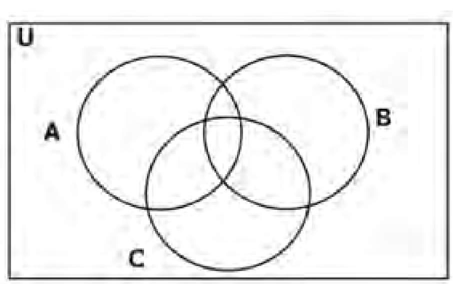
35. Dados los conjuntos

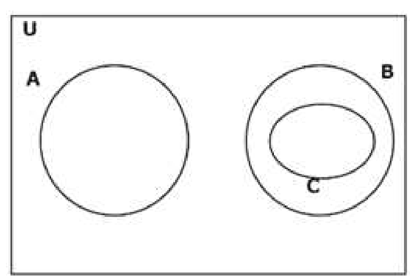
$$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14\ 15\ \}$$
$$A = \{4,\ 8,\ 10,\ 12\}$$
$$B = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\ \}$$
$$C = \{1,\ 2,\ 3,\ 11,\ 12,\ 13\ \}$$
$$D = \{1,\ 5,\ 6,\ 10,\ 11\ \}$$
$$E = \{12,\ 13,\ 14,\ 15\ \}$$

Determinar:

$A \cup B$	$(A \cap B)^c$	$(D \cap E)\ --\ A$
$B \cup C$	A^c	B^c
$E^c \cap D$	$B \cap E$	$B\ \Delta\ E$
$A \cup C$	$(\ B \cup C)^c$	$(\ C \cap D\ )^c$
$(\ A \cap D\ )^c$	$(\ E \cup C\ )^c$	

Tomando como base cada uno de los siguientes diagramas de Venn:





36. En una facultad de ingeniería se han matriculado mil doscientos estudiantes, quinientos ochenta y dos se matriculan en el curso de física, seiscientos veintisiete se matriculan en química, quinientos cuarenta y tres se matriculan en matemática básica, doscientos diecisiete se matriculan en física y química, trescientos siete se matriculan en física y matemática, doscientos cincuenta se matriculan en química y matemática y por último ciento veintidós estudiantes se matricularon en los tres cursos. Determinar:

a) Cuántos estudiantes no tomaron ningún curso

b) Cuántos estudian exactamente una materia

c) Cuántos estudian máximo dos materias

d) Cuántos estudian por lo menos una materia

e) Cuántos estudian física y química, pero no matemática

37. Se entrevistó a 3200 personas sobre el tipo de transporte que utilizan para desplazarse en el área metropolitana de una capital. 1950 personas respondieron que utilizan el metro, 400 utilizan motocicleta, 1500 utilizan bus, 800 utilizan bus y metro y ninguno de los que se transporta en motocicleta utiliza bus o metro. Determinar:

    a) El número de personas que solo utiliza metro

    b) El número de personas que utiliza máximo dos medios de transporte

38. Al entrevistar a 200 personas con discapacidad se obtuvieron los siguientes resultados: 60 personas con pérdida total de la voz, 90 personas con pérdida de la visión de los cuales 20 también tenían pérdida de la voz. De la población entrevistada 70 se dedicaban a conseguir su sustento como cantantes, de los cuales 30 pertenecen al grupo de personas con pérdida de la visión. Elabore un diagrama de Venn que ilustre los resultados de la entrevista y determine cuántos de los entrevistados que no son cantantes no tienen perdida de la visión ni de la voz.

1.9. Valor absoluto

Se puede interpretar el valor absoluto de un número entero como la distancia que existe en la recta numérica desde el número dado hasta cero. Si se desea determinar el valor absoluto de un número positivo, la distancia desde ese número hasta cero es igual al número, pero si el número fuera negativo, la distancia del número hasta el origen será el inverso aditivo del número.

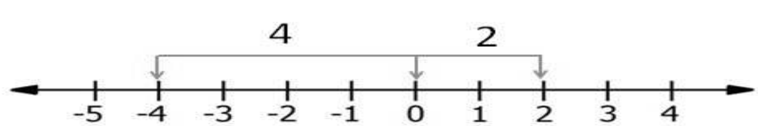


Figura 1.11. Representación gráfica del valor absoluto

Es posible expresar el valor absoluto mediante una función por partes denotando el valor absoluto de un número de la siguiente forma:

$$|x| = \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x < 0 \end{cases}$$

Ecuación 10: Definición de valor absoluto

Según lo anterior, el valor absoluto de un número, siempre será positivo, es decir mayor o igual a cero y coincide siempre con el de su inverso aditivo. El número contenido en las barras del valor absoluto se llama argumento.

Ejemplo 1.17

Simplificar:

1. $-|-2| = -(2) = -2$
2. $|0-2| = |-2| = 2$
3. $|6-3| = |3| = 3$
4. $|3+2(-4)| = |3-8| = |-5| = 5$
5. $(-|-2|)^2 = (-2)^2 = 4$

1.9.1. Propiedades del valor absoluto

Tabla 1.3. Propiedades del valor absoluto

$\boldsymbol{\|x\| \geq 0}$	$\boldsymbol{\|x\| = 0 \longleftrightarrow x = 0}$	$\boldsymbol{\|x\| = \|-x\|}$
$\boldsymbol{\|x\|^2 = x^2}$	$\|x\|^2 = \|x\|$	$\|x.y\| = \|x\| . \|y\|$
$\boldsymbol{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|}$	$\|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$	$\|x-y\| = 0 \leftrightarrow x = y$
$\boldsymbol{\left\|\frac{x}{y}\right\| = \frac{\|x\|}{\|y\|} \ si \ y \neq 0}$	$si \ \|x\| < a \ \rightarrow -a < x < a$	$Si \ \|x\| = a, \ \rightarrow \ x = a \ o \ x = -a$

1.9.2. Distancia entre dos números en la recta numérica

La distancia entre dos números $a \ y \ b$ en la recta numérica es igual al valor absoluto de su diferencia, es decir:

$$d(a,b) = |b-a| = |a-b|$$

Ecuación 11: Distancia entre dos números en la recta numérica

Ejemplo 1.18

En la recta numérica la distancia entre los números -3 y 2 se obtiene de dos formas posibles:

$$\begin{array}{rl} |b-a| & |a-b| \\ |2-(-3)| & |-3-2| \\ |2+3| & |-5| \\ |5| & 5 \\ 5 & \end{array}$$

Figura 1.12. Distancia entre dos números en la recta numérica.

1.9.3. Ecuaciones lineales con valor absoluto

Por la definición de valor absoluto, se sabe que $|x|$ siempre será mayor o igual a cero. Observe que el valor absoluto de un número positivo es positivo y el de una cantidad negativa, cambia de signo, es decir:

1. Si $x > 2$, entonces $|x-2| = x-2$ porque $x-2 > 0$. Es decir, si el argumento es positivo, el valor absoluto queda expresado como una ecuación en la que se obtiene el valor de x.

2. Si $x < 2$, entonces $|x-2| = -(x-2)$ porque $x-2 < 0$. Es decir, si el argumento es negativo, el valor absoluto queda expresado como una ecuación en la que se obtiene el valor de x.

Ejemplo 1.19

Si x es la incógnita en la ecuación $|x-3| = 5$, como no se conoce si el argumento es positivo o es negativo, se debe evaluar las dos posibilidades de signo y obtener dos ecuaciones que nos conducen a dos soluciones a saber:

Solución 1	*Solución 2*
$x-3=5$	$x-3=-5$
$x=5+3$	$x=3-5$
$x=8$	$x=-2$

Las soluciones de una ecuación con valor absoluto satisfacen la ecuación. Si se comprueba, se obtiene:

Solución 1	*Solución 2*
$\lvert x-3\rvert=5$	$\lvert x-3\rvert=-5$
$\lvert 8-3\rvert=5$	$\lvert -2-3\rvert=5$
$\lvert 5\rvert=5$	$\lvert -5\rvert=5$
$5=5$	$5=5$

Ejemplo 1.20

Resolver:

$$3\,|5-4x|=9$$

Previamente se debe obtener el valor absoluto sin factores o divisores, lo anterior se consigue dividiendo entre 3 ambos lados de la ecuación para obtener:

$$|5-4x|=3$$

Ecuación que se resuelve de la forma conocida:

Solución 1	*Solución 2*
$5-4x=3$	$5-4x=-3$
$-4x=3-5$	$-4x=-3-5$
$-4x=-2$	$-4x=-8$
$x=\frac{1}{2}$	$x=2$

Al realizar la prueba con las soluciones en la ecuación inicial, se obtiene:

Solución 1	*Solución 2*
$3\lvert 5-4x\rvert=9$	$3\lvert 5-4x\rvert=9$
$3\left\lvert 5-4\left(\frac{1}{2}\right)\right\rvert=9$	$3\,\lvert 5-4\,(2)\rvert=9$
$3\lvert 5-2\rvert=9$	$3\,\lvert 5-8\rvert=9$
$3\lvert 3\rvert=9$	$3\lvert -3\rvert=9$
$3\,(3)=9$	$3\,(3)=9$
$9=9$	$9=9$

(4) Ejercicios de trabajo en clase

Resolver las siguientes ecuaciones:

39. $|x-5|=10$

40. $|x-3|=-3$

41. $|2x+3|=-9$

42. $|5x-2|=3$

43. $4\,|x+2|-30=-10$

44. $|2x-3|=7$

1.10. Potenciación, radicación y logaritmación

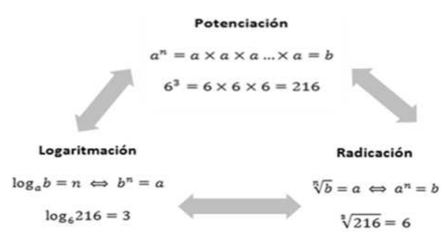


Figura 1.13. Relación entre potenciación, radicación y logaritmación.

1.10.1. Exponentes y radicales

Para realizar operaciones con exponentes y radicales es necesario recordar las propiedades que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y para todo m, n, racionales con lo que se obtiene:

a) $x^m x^n = x^{m+n}$

b) $x^{m-n} = \frac{x^m}{x^n}$

c) $(xy)^n = x^n y^n$

d) $(x^m)^n = x^{mn}$

e) $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$

f) $x^{\frac{n}{n}} = \sqrt[n]{x^n} = x$

Para los $x \in \mathbb{R}, x \neq 0, p \in \mathbb{N}$ tenga en cuenta

g) $x^0 = 1$

h) $x^{-p} = \frac{1}{x^p}$

Ejemplo 1.21

Simplifique la siguiente expresión:

$$\frac{-5(6^2)(3^2)}{7^3(-4)2^3}$$
$$\frac{-5(6^2)(3^2)}{7^3(-4)2^3} = \frac{(-5)(36)(9)}{(343)(-4)(8)} = \frac{-1620}{-10976} = \frac{405}{2744}$$

Ejemplo 1.22

Represente como potencia de 2 las siguientes expresiones:

a) $\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}\right] \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

Aplicando la regla $x^{-1} = \frac{1}{x}$ se obtiene:

$$\left[\frac{2^7}{2^3}\right] \times \left(2^4\right) = \frac{2^7}{2^3} \times 2^4 = \frac{2^{11}}{2^3} = 2^8$$

b) $\frac{\left[\left(2^{-3}\right)^{-2}\right]^{-5}}{\left[\left(2^{-4}\right)^{-1}\right]^{3}}$

Aplicando la propiedad (d) se obtiene:

$$\frac{\left(2^{-3}\right)^{10}}{\left(2^4\right)^{-3}} = \frac{2^{-30}}{2^{-12}} = 2^{-30+12} = 2^{-18}$$

Ejemplo 1.23

Aplique las propiedades de los exponentes para la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt[5]{x^{13}y^5z^8}}{\sqrt[5]{x^8y^{15}z^3}} \quad = \quad \sqrt[5]{\frac{x^{13}y^5z^8}{x^8y^{15}z^3}}$$

Aplicando la propiedad b):

$$\sqrt[5]{\frac{x^5z^5}{y^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{x^5}\,\sqrt[5]{z}}{\sqrt[5]{y^{10}}} = \frac{xz}{y^2}$$

Ejemplo 1.24

Aplique las propiedades c) y e) para la siguiente expresión:

$$\sqrt[3]{\left(64a^6b^{18}\right)^5} = \left(\sqrt[3]{64a^6b^{18}}\right)^5 = \left(\left(\sqrt[3]{4^3}\right)\left(\sqrt[3]{a^6}\right)\left(\sqrt[3]{b^{18}}\right)\right)^5 = \left(4a^2b^6\right)^5 = 1024a^{10}b^{30}$$

(5) Ejercicios de trabajo en clase

Desarrolle las siguientes expresiones aplicando las propiedades de los exponentes:

45. $a^6.a^3$

46. $a^{-5}.a$

47. $a^{x+y}.a^{2x-3y}$

48. $\left(\dfrac{p^{2x-1}}{p^{3-2x}}\right)^{-6}$

49. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x . \left(\dfrac{6}{5}\right)^x$

50. $\left(\dfrac{a^{2x}}{a^3}\right)^{-3}$

51. $\left(\dfrac{n^{5x}}{n^{3x+1}} . \dfrac{n^{2x}}{n^3}\right)^{x-2}$

52. $\left(\dfrac{k^{3t+2}}{k^{2+3t}}\right)^{10}$

53. $\left(\dfrac{a^{3m-1}a^{2m-2}}{a^{4m-3}}\right)^n$

54. $\left(\dfrac{x^{2a-b}.x^{b+2a}}{x^{2a}.x^{3b}}\right)^{4a+3b}$

Observa la siguiente propiedad y aplíquela en los siguientes ejercicios: $\frac{a^y}{a^z} = a^{y-z}$:

55. $\frac{2^{-6}}{2^8}$

56. $\frac{3^{h+2}}{3^6}$

57. $\frac{27^3}{3^{-5}}$

58. $\frac{3^{-3}}{5^6,3^{-9}}$

59. $\frac{9^{-3}}{3^{-9}}$

60. $\frac{16^5}{4^6}$

61. $\frac{6^3,3^4}{2^6}$

Nota: Recuerde lo siguiente: $8^2 = \left(2^3\right)^2 = 2^{3,2} = 2^6$

1.11. Notación científica

Esta notación simplifica los cálculos y la escritura. Un número en notación científica se escribe como $Mx10^n$ donde M es un número entre 1 y 10.

Ejemplo 1.25

Masa de la tierra: 5970000000000000000000000 kg, que a través de la notación científica se puede escribir con la notación científica como: $5,97x10^{24}$ kg.

Ejemplo 1.26

Masa del protón: 0.00000000000000000000167262158 kg que a través de la notación científica se puede escribir con la notación científica como: 1,67262158 $\times$ 10^{-21}kg.

1.11.1. Regla de escritura de un número en notación científica

1. Mover el punto decimal en el número dado para que quede con un solo dígito a su izquierda. El número resultante es M.

2. Contar cuántas posiciones se deben mover en el punto decimal en el paso 1. Si el punto decimal debe moverse a la izquierda, n es positivo, si debe moverse a la derecha, n es negativo.

3. Escribir el número dado: $Mx10^n$.

Ejemplo 1.27

a. 868000, entonces: $8,68x10^5$ porque el punto decimal se mueve cinco posiciones hacia la izquierda, entonces el exponente 5 es positivo.

b. 0.00123456, entonces: $1,23x10^{-3}$ porque el punto decimal se mueve tres posiciones hacia la derecha, entonces el exponente 3 es negativo.

c. La conductividad térmica del vidrio es de 0.00025 entonces: $2,5x10^{-4}$ porque el punto decimal se mueve cuatro posiciones hacia la izquierda, entonces el exponente 4 es negativo.

d. 0.035(onzas en un gramo), entonces: $3,5x10^{-2}$ porque el punto decimal se mueve dos posiciones hacia la izquierda, entonces el exponente 2 es negativo.

Apoyo de la calculadora

Para escribir en la calculadora en notación científica, se debe realizar el siguiente proceso: ejemplo: escribir en la calculadora: $3,5x10^{-2}$, se escribe: 3,5 [exp] (−)2 [=] 0,035.
Se pueden hacer operaciones:

Ejemplo 1.28

$(7,75x10^5)(9,8x10^6)$ se debe realizar el siguiente proceso:
7,75 [exp] 5 × 9,8 [exp] 6 = $7{,}595^{[12]}$, este resultado se traduce como: $7,595x10^{12}$, si se desea escribir el número simplemente se escribe: 7.595.000.000.000.

Ejemplo 1.29

$(7,2x10^{-3})(3,5x10^{-8})$ se debe realizar el siguiente proceso: 7,2 [exp] (−)3 × 3,5 [exp] (−)8 = $2{,}52^{[-10]}$, este resultado se traduce como: $2,52x10^{-10}$.

(6) Ejercicios de trabajo en clase

Escriba en notación decimal los siguientes números:

62. $7,65 \times 10^5$
63. $9,3 \times 10^4$
64. $2,68 \times 10^3$
65. $1,86 \times 10^2$
66. $6,8 \times 10^{-3}$

Escriba los siguientes números en notación científica:

67. 98,0000
68. 0,000000152
69. 7,281, 3
70. 160,723, 4

71. 1,8

72. $0,08$

Multiplicar o dividir según sea el caso. Escribir el resultado en notación científica.

73. $\frac{\left(2{,}52\ \times 10^{-2}\ \right)}{\left(4{,}2\ \times 10^{-3}\ \right)}$

74. $\left(6 \times 10^{2}\right) . \left(2,3 \times 10^{3}\right)$

75. $\left(0,18 \times 10^{3}\right) . \left(1,28 \times 10^{-5}\right)$

76. $\frac{(2{,}52\times 10^{-2})}{(4{,}6\times 10^{-4})}$

1.12. Equivalencia entre radicales y exponentes

La raíz enésima de un número real a, se puede expresar como:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n},\ ya\ que\ \left(a^{1/n}\right)^{n} = a^{n/n} = a^{1} = a$$

Ecuación 12: Raíz n-ésima de un número real

Ejemplo 1.30

$$\sqrt[2]{25} = 25^{1/2}\ \sqrt[3]{729} = 729^{1/3}\,\sqrt[6]{4096} = 4096^{1/6}$$

1.13. Radicales equivalentes

Si dos radicales tienen índices diferentes, pero tienen el mismo valor numérico, se denominan radicales equivalentes. Al trabajar con radicales es importante tener en cuenta que, si se multiplica la cantidad subradical y el índice de la raíz por una misma cantidad, se obtiene un radical equivalente al inicial.

$$\sqrt[n]{a^{m}}\ y\ \ \sqrt[np]{a^{mp}}\quad (p \neq 0)\ \text{son equivalentes si}\ \ \sqrt[n]{a^{m}} = a^{m/n} = a^{mp/np} = \ \sqrt[np]{a^{mp}}[con]p \neq 0$$

Ecuación 13: Equivalencia de radicales

1.14. Modificación de expresiones radicales

Cuando se haga necesario modificar expresiones radicales, es importante tener en cuenta que si se desea extraer un factor de un radical se modifican para expresarlos con un exponente igual al índice de la raíz ya que en este caso se puede extraer de la raíz. Para introducir factores en un radical se expresan los factores con un exponente igual al índice de la raíz.

1.15. Operaciones con radicales

1.15.1. Radical de un producto

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

Ecuación 14: Radical de un producto

Ejemplo 1.31

Si tenemos $\sqrt[3]{9 \times 8} = \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{9} = \cong 4,160$

1.15.2. Radical de un cociente

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ecuación 15: Radical de un cociente

Ejemplo 1.32

$$\text{Si tenemos } \sqrt[2]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[2]{16}}{\sqrt[2]{81}} = \frac{4}{9}$$

1.15.3. Potencia de un radical

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ecuación 16: Potencia de un radical

Ejemplo 1.33

$$\text{Si tenemos } \left(\sqrt[4]{16}\right)^2 \text{ esta expresión se puede escribir } \sqrt[4]{16^2} = 4$$

1.15.4. Radical de un radical

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

Ecuación 17: Radical de un radical

Ejemplo 1.34

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} \text{ esta expresión se puede escribir como } \sqrt[6]{64} = 2$$

1.16. Suma de radicales

La suma de radicales implica que los radicales deben tener el mismo índice y la misma cantidad subradical.

$$x.\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} = (x+y)\sqrt[n]{a}$$

Ecuación 18: Suma de radicales

Ejemplo 1.35

$$7\sqrt[2]{100} + 8\sqrt[2]{100} \text{ se puede escribir como } (15)\sqrt[2]{100} = 15 \times 10 = 150$$

(7) Ejercicios de trabajo en clase

Calcule el valor de la expresión:

77. $\sqrt{4} + \sqrt{25} - \sqrt{49}$
78. $\sqrt[3]{9} + 5\sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{-1}$
79. $\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{0} + \sqrt[7]{-1}$
80. $\sqrt{121} + \sqrt[3]{-64} + \sqrt[4]{16}$

Simplifique las siguientes expresiones:

81. $\sqrt[3]{x^4}$
82. $\sqrt[4]{81x^8y^4}$
83. $\sqrt{x^6}$
84. $\sqrt[5]{x^7}$

Extraer todos los factores posibles de los siguientes radicales:

85. $\sqrt{18}$
86. $\sqrt{98a^3b^5c^2}$
87. $\frac{1}{2a}\sqrt{168a^5b^3}$

88. $3\sqrt{48}$

89. $2\sqrt{75x^4y^3}$

90. $\frac{6-\sqrt{54}}{3}$

Solución del ítem 90) $3\sqrt{48} = 3\sqrt{2^4{,}3} = 3{,}2^2.\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

Introduzca todos los factores posibles en los siguientes radicales:

91. $2\sqrt{3y^2}$

92. $0,5m\sqrt[4]{8m^3}$

93. $3x\sqrt{3x^2}$

94. $x.y\sqrt[3]{x^2y}$

Aplicar propiedades y reducir la expresión:

95. $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}$

96. $\sqrt[3]{125\sqrt[2]{32.\sqrt[3]{8}}}$

97. Piense cómo se resuelve $5\sqrt{\frac{1}{12}+2\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{27}}}$

Examinar si el resultado es racional o irracional

98. $\sqrt{5}+\sqrt{5}$

99. $\sqrt{16}+(4-\sqrt{25})$

100. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{27}-\sqrt{3}$

1.17. Racionalización

La racionalización consiste en expresar una fracción sin radicales en el denominador.

Con fracciones del tipo $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{b}$, para obtener:

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}}$$

Ecuación 19: Racionalización de una expresión con raíz cuadrada en el denominador

Ejemplo 1.36

$$\text{sea } \frac{9}{\sqrt{625}} \text{ podemos escribir } \frac{9\sqrt{625}}{\sqrt{625}\sqrt{625}} \text{ por lo tanto obtenemos } \frac{9\sqrt{625}}{625} = \frac{9}{25}$$

Con fracciones del tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$, con $m < n$, se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$, y se obtiene:

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a.\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}.\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a.\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a.\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}}$$

Ecuación 20: Racionalización de una expresión con raíz n-ésima en el denominador

Ejemplo 1.37

$$\frac{5}{\sqrt[4]{25^2}} \text{ equivale a } \frac{5\sqrt[4]{25^{4-2}}}{\sqrt[4]{25^2}.\sqrt[4]{25^{4-2}}} \text{ por tanto } \frac{5\sqrt{25^2}}{\sqrt[4]{25^4}} \text{ es igual a } \frac{5\sqrt[4]{25^2}}{25}$$

Fracciones del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ se multiplica numerador y denominador por la conjugada del denominador:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)} = \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}\right)^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}$$

Ecuación 21: Racionalización de una expresión con suma de raíces en el denominador

Ejemplo 1.38

$$Sea \quad \frac{4}{\sqrt{225}+\sqrt{100}} = \frac{4\left(\sqrt{225}-\sqrt{100}\right)}{\left(\sqrt{225}+\sqrt{100}\right)\left(\sqrt{225}-\sqrt{100}\right)} = \frac{4\times 5}{\left(\sqrt{225}\right)^2-\left(\sqrt{100}\right)^2} = \frac{4}{25}$$

Ejemplo 1.39

a. $\frac{3}{5\sqrt{x}} = \frac{3}{5\sqrt{x}}.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{5x}$

b. $\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}.\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x+1-1} = \frac{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x} = \sqrt{x+1}-1$

(8) Ejercicios de trabajo en clase

Racionalice las siguientes expresiones. No olvide simplificar el resultado.

101. $\frac{4x}{\sqrt{2x}}$

102. $\frac{2a-3b-\sqrt{ab}}{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}$

103. $\frac{5}{\sqrt[3]{x}-1}$

104. $\frac{x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}$

105. $\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{x}$

1.18. Logaritmación

La logaritmación es la operación inversa a la potenciación que consiste en determinar el exponente al que hay que elevar una base dada conocida para obtener una potencia determinada.

$$log_a b = n \iff a^n = b$$

Ecuación 22: Definición de logaritmo

Ejemplo 1.40

1. $log_2 1 = 0$ *porque* $2^0 = 1$

2. $log_2 8 = 3$ *porque* $2^3 = 8$

3. $log_{1/2} 4 = 2$ *porque* $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

Para tener presente:

Se denomina logaritmos decimales o comunes a aquellos logaritmos cuya base es 10 y se escribe como $logb$, también logaritmos naturales o neperianos a aquellos cuya base es el número $e = 2{,}7182812$ y escribe Ln.

1.18.1. Propiedades

Sean a, x, y números reales no negativos y $a \neq 1$. Entonces,

1. $\boldsymbol{log_a xy = log_a x + log_a y}$

Ecuación 23: Logaritmo de un producto

Ejemplo 1.41

a. $log_3\,(27) = log_3\,(3)\,(3)\,(3) \quad = log_3 3 \ + log_3 3 \ + log_3 3$

b. $log_2 8 \ + log_2 10 \ + log_2 5 \ = log_2\,(8)\,(10)\,(5) \ = log_2 400$

Determine x tal que:

$$\begin{aligned} log_{10}x &= log_{10}20 + log_{10}5 + log_{10}10 \\ log_{10}x &= log_{10}(20)(5)(10) = log_{10}1000 \\ &= log_{10}10^3 \text{ Obtenemos} \\ log_{10}x &= 3, \text{ por tanto} \\ x &= 10^3 \end{aligned}$$

II. $\boldsymbol{log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y}$

Ecuación 24: Logaritmo de un cociente

Ejemplo 1.42

a. $log\frac{20}{2} = log20 - log2$

b.

$$\begin{aligned} &log3 - log2 - log3 + log24 \\ &= log3 + log24 - log2 - log3 \\ &= log3 + log24 - (log2 + log3) \\ &= log3 \times 24 - log2 \times 3 \\ &= log72 - log6 = log12 \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} &log\frac{abc}{xy} = logabc - logxy \\ &loga + logb + logc - logx - logy \end{aligned}$$

III. $\boldsymbol{log_a x^y = ylog_a x}$

Ecuación 25: Logaritmo de una potencia

Ejemplo 1.43

a. $log_3 3^5 = 5\ log_3 3 = 5$

b. $log_{\sqrt{2}} 32 = log_{2^{1/2}} 2^5 = (5/(\frac{1}{2})\ \ )log_2 2 = 10$

c.

$$\begin{aligned} log_9 15 = log_{3^2} 15 &= log_{3^2}(5)(3) = log_{3^2} 5 + log_{3^2} 3 \\ &= \frac{1}{2} log_3 5 + \frac{1}{2} log_3 3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} log_3 5 \end{aligned}$$

(9) Ejercicios de trabajo en clase

Escribir las siguientes igualdades en forma logarítmica:

106. $2^5 = 32$

107. $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

108. $10^3 = 1000$

Exprese en forma exponencial:

109. $log_2 32 = 5$

110. $log_3 243 = 5$

111. $log 0{,}001 = -3$

Determine el valor de x:

112. $x = log_3 27$

113. $x = log_2 0{,}125$

114. $log_4 x = 2/3$

115. $log_5 x = 0$

116. $log x = -0{,}02$

1.18.2. Ejercicios del capítulo: trabajo independiente

Ejercicios de la sección 1.1

1-5 Seleccione de los signos $<, >$ o $=$ que dan la afirmación verdadera:

1. 3^{-1}_____7^{-1}____$\frac{19}{100}$
2. $-3^2 + 2^2$____0
3. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$_____$1,618$
4. $\sqrt{2}$____$1,41422$
5. $\sqrt{3^2 + 4^2}$_____5

6-10 Efectué las siguientes operaciones y simplifique el resultado:

6. $(8 \div 2 + 5) \div (7 - 4 \times 8)$
7. $(11 \div 3 - 2 \div 9) \div (5 \div 3 - 7 \div 6)$
8. $\sqrt{(4 - 3 \times 5)^2} + 2 \times |3| - 5 \times |3 - 4|$
9. $\frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{2} + 5\right) - 4 + 10 \div 2$
10. $\sqrt[60]{(-9)^{60}} - \sqrt[5]{(-7)^5}$

11-14 Exprese los siguientes números racionales en la forma a/b, con a y b enteros:

11. $0,2\overline{57}$
12. $0,31\overline{2}$
13. $0,\overline{123}$
14. $0,78\overline{523}$

15-16 Si a y b son números reales con $a > b > 0$,verifique las siguientes identidades:

15. $\frac{|a+b| - |b-a|}{2} = b$
16. $\frac{|a-b| + |b+a|}{2} = b$

Ejercicios de la sección 1.6

17. Muestre que el cuadrilátero con vértices $ABCD$ es un rombo, con $(-4, 3)$, $B(5, 6)$, $C(8, 15)$ y $D(-1, 12)$

18. Dado un cuadrilátero con vértices $ABCD$ tenemos $A(-2,3)$, $B(1,5)$, $C(0,2)$ y $D(-3,0)$, haga el gráfico y demuestre que los vértices son los de un paralelogramo.

19. Determine los valores de a, para los que la distancia entre $(a,3)$ y $(5,2a)$ es mayor a $\sqrt{26}$.

Ejercicios de la sección 1.10

Realice las operaciones y simplifique al máximo cada resultado. Compruebe su resultado usando calculadora.

20. $4096^{1/12}$

21. $(-27)^{4/3}$

22. $(-8)^{1/3} \div \sqrt[3]{8}$

23. $(-0{,}001)^{-2/3}$

24. $\sqrt{125} + \sqrt{45}$

25. $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$

26. $\left(\frac{81}{16}\right)^{3/4}$

27. $\left(\frac{81}{16}\right)^{-3/4}$

28. $\left(-\frac{81}{16}\right)^{-3/4}$

Realice las operaciones indicadas y simplifique el resultado:

29. $\frac{2}{3} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{64}}$

30. $\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{24} + 3\sqrt[3]{375}$

31. $\left[\frac{2^5+2^3-(1/8)}{3+2^3}\right]\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} + 2^{-1}\right]$

32. $\left[(-1)^2 - 2^{-3} \div \frac{1}{2}\right]^{-1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\left[2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\right] - 3^0 \times 3^{-2}$

33. $\frac{\left[3^{-2}-(-2)^{-2}\right]^{-1}}{3-\frac{3(-2)}{3-2}}$

34. $\left[(-3)^2 \div 9^{1/2} - \frac{2}{3}\right]^{-1} - \left(\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}\right) \times 2^{-1/3} - 4 \times 4^{-1}$

Racionalice y simplifique el resultado de las siguientes expresiones:

35. $\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

36. $\frac{\sqrt{x+1}+1}{x}$

37. $\frac{7}{5\sqrt{x}-2\sqrt{a}}$

38. $\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

39. $\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

40. $\frac{4-\sqrt{x}}{x-16}$

Efectué las operaciones indicadas, reescriba el resultado de manera simplificada, sin exponentes negativos y sin radicales en el denominador.

41. $\left(2a^3b\right)^4\left(\frac{-a^3}{4b^2}\right)^3$

42. $\left(\frac{8x^2y^4}{-125x^{1/2}y^{1/4}}\right)^{1/3}$

43. $a^{1/8}\left[a^{1/4}\left(a^{1/2}\right)^{-4}\right]^{-1/2}$

44. $\frac{x^{2/7}y^{-2/5}}{x^{1/3}y^{-1/5}}$

45. $\sqrt[4]{\frac{5x^7y^5}{27x^2y^2}}$

46. $\sqrt[5]{\frac{8x^3}{y^4}} \times \sqrt[5]{\frac{4x^4}{y^2}}$

Ejercicios de la sección 1.18

47-52 Exprese en forma exponencial:

47. $log_3 9 = 2$

48. $log_7 1 = 0$

49. $log_{10} 0{,}1 = -1$

50. $log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

51. $ln 5 = x$

52. $ln\left(x+1\right) = 2$

53-58 Exprese la ecuación en forma logarítmica:

53. $10^3 = 1000$
54. $81^{1/2} = 9$
55. $4^{-3/2} = 0{,}125$
56. $e^x = 2$
57. $e^3 = y$
58. $e^{x+1} = 0{,}5$

59-63 Evalué las siguientes expresiones:

59. $log_5 5^4$
60. $log_3 \left(\frac{1}{27}\right)$
61. $log_{10}\sqrt{10}$
62. $log_5 0{,}2$
63. $log_6 1$

1.18.3. Aplicación con Tecnología

Desarrolle los siguientes ejercicios usando el programa www.symbolab.com www.wolframalpha.com donde podrá evidenciar los procesos desarrollados analíticamente.
Ejemplo de vista del *software* Symbolab.

Figura 1.14. Vista del programa Symbolab
Fuente: *software* www.wolframalpha.com

64-70 Encuentre el conjunto solución de las siguientes operaciones entre conjuntos usando diagramas de Venn.

64. $A \cup B$
65. $B \cap C$
66. $A \cap B \cap C$
67. $B \cup C \cap A$
68. $(A \cup B \cup C)^c$
69. $A - B$
70. $C^c - A$

Figura 1.15. Vista del programa Wolfram Alpha
Fuente: *software* www.wolframalpha.com

71-73 Realice las siguientes operaciones y exprese en notación científica.

71. $\left(2{,}3840 \times 10^{12}\right)\left(6{,}52 \times 10^{20}\right)$

72. $\frac{3{,}68975\times10^{11}}{(5{,}215\times10^{-14})(1{,}253\times10^{7})}$

73. $\frac{\left(1{,}235\times10^{-9}\right)^{5}}{(8{,}52\times10^{3})^{15}}$

74-77 simplifique las siguientes expresiones e indique la ley de exponentes aplicada para cada ejercicio:

74. $\sqrt[8]{t^7}\,\sqrt[4]{t^3}$

75. $\sqrt[5]{x\sqrt{x}}$

76. $\frac{\sqrt[6]{t^2}}{\sqrt[6]{t}}$

77. $\sqrt{\frac{81a^3b}{ab^7}}$

78- 85 Resuelva las siguientes ecuaciones en forma analítica y gráfica hallando el dominio y rango:

78. $\sqrt{5\sqrt{20}+\sqrt{x}}-\sqrt{5\sqrt{20}-\sqrt{x}}=\sqrt[5]{625}$

79. $\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{x^2}$

80. $\frac{a\sqrt{t}+c}{c\sqrt{t}+a}=\frac{a\sqrt{t}+c-2a}{c\sqrt{t}-a}$

81. $log\left(x-12\right)\ -log6\ =\frac{1}{6}log\left(4x+8\right)$

82. $x^{logx}\ =\frac{10}{x}$

83. $5^{3-log_5 x}\ =125x$

84. $\left(\sqrt{x}\right)^{log_8 x-2}\ =8$

85. $x^{\frac{logx+9}{5}}=10^{logx+6}$

86. **Proyectos aplicados a las ciencias básicas**

La esencia de la ingeniería es la solución de los problemas de la vida cotidiana mediante la aplicación de las matemáticas. A continuación encontrará unas ideas para solucionar problemas en contexto cotidianos mediante la aplicación de los contenidos vistos en clase.

- La visita imposible al museo: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/fops3.html
- Encontrar patrones con poderes: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/fops2.html

Ejemplo de vista:

Figura 1.16. Fuente: https://www.stewartmath.com/media/8_home.php

- El número de Oro (ϕ)

La geometría tiene dos grandes tesoros, uno es el teorema de Pitágoras y el número áureo cuyo valor es $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033988\ldots$ que corresponde a un número irracional también llamado divina proporción.
Este número aparece en el arte, la naturaleza y el diseño. Es por eso que lo llaman de número de Oro.
El modo de obtenerlo es tomando la solución positiva de la ecuación $x^2 - px - q = 0$, donde p y q son iguales a 1.

Tomando como herramienta el *software* GeoGebra (https://www.geogebra.org) realice las siguientes representaciones.

- Espiral áurea o espiral de Durero.
- Proporciones áurea número de oro para rostro

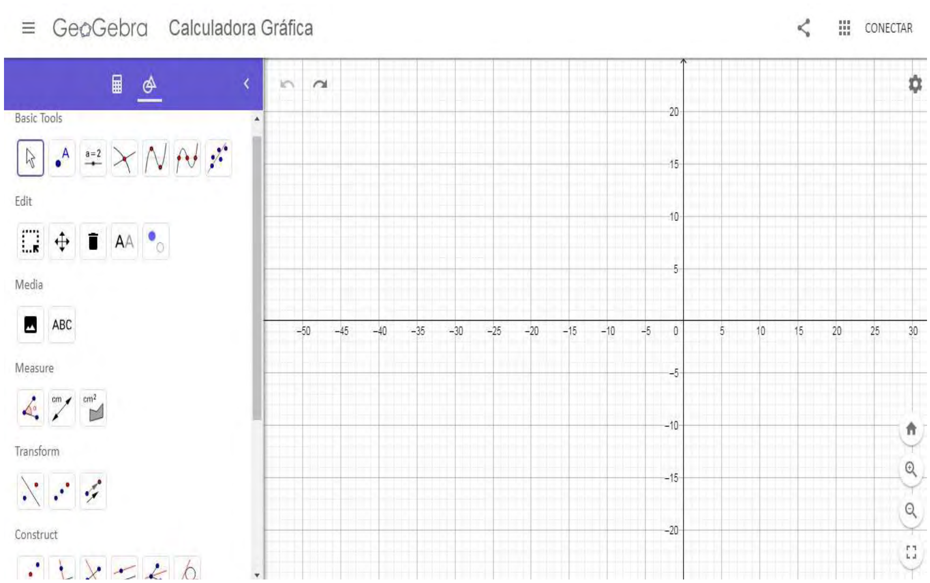


Figura 1.17. Vista del *software* GeoGebra

Solución de los ejercicios de trabajo en clase

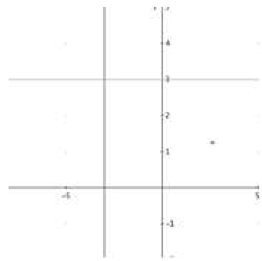
7. $\frac{781}{333}$
9. $\frac{2}{7}$

13. $\frac{10}{10} = 1$

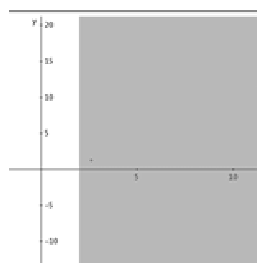
17. -15

19. -10

23.



25.



29. $\sqrt{10}$

31. $\sqrt{53} + \sqrt{58} + \sqrt{41} \cong 21{,}29901\ldots$

33. Los puntos sí corresponden a un triángulo isósceles. (Existen dos lados que son iguales de medida $\sqrt{65}$).

35.

37.

39.

45. Sin solución para $x \in \mathbb{R}$

47. $x = -\frac{1}{5}$ o $x = 1$

49. $x = -2$ o $x = 5$

51. Aplicando las leyes de los exponentes: $x^m x^n = x^{m+n}$

$$a^{-5}.a = a^{-5+1} = a^{-4}$$

53. Aplicando las leyes de los exponentes: $x^{-1} = \frac{1}{x^p}$

$$\frac{1}{\left(p^{4x-47}\right)^6}$$

55. Aplicando las leyes de los exponentes: $x^{-1} = \frac{1}{x^p}$

$$\frac{1}{\left(a^{2x-3}\right)^3}$$

59. Aplicando las leyes de los exponentes: $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

$$\left(\frac{x^{4a-5}}{a.b}\right)^{4a+3b}$$

61. 3^{h-4}

63. $\frac{3^6}{5^6}$

65. 256

67. $10^5 = 100000 \Rightarrow 100000 \times 7{,}65 = 765000$

69. $10^3 = 1000 \Rightarrow 1000 \times 2{,}68 = 2680$

71. $10^{-3} = 0{,}001 \Rightarrow 0{,}001 \times 6{,}8 = 0{,}0068$

73. $1{,}52 \times 10^{-7}$

75. $1{,}607234 \times 10^5$

77. 8×10^{-2}

79. $13{,}8 \times 10^5$

81. 252×10^2

83. $\sqrt[n]{-1} = -1$, si n es impar

$$\sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\sqrt[3]{9} - 10 - (-1) = \sqrt[3]{9} - 9$$

85. 9

87. Aplicar propiedad de los radicales:
$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$, cuando a≥ 0

$$3x^2\sqrt[4]{y^4} = 3x^2 y$$

91. Aplicar propiedades de los radicales:

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

$$= \sqrt{98}\sqrt{c^2}\sqrt{a^3b^5}$$

$$= 7\sqrt{2}c\sqrt{a^3b^5}$$

103. $2\sqrt{5} \cong 4{,}47214\ldots$

105. $7\sqrt{2} + \sqrt{3} \cong 11{,}63155\ldots$

107. $\frac{\left(2a-3b-b\sqrt{a}\right)\left(2\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)}{4a-9b}$

109. $\sqrt{x+3} + \sqrt{3}$

111. Aplicando definición de logaritmo: $a^n = b \Rightarrow log_a b \ = n$

$$a = 2, b = 32, n = 5$$

$$log_2 32 \ = 5$$

115. $3^4 = 81$

117. $x = 3$

119. $x = 4^{2/3}$

Solución de los ejercicios de trabajo independiente

7. $\frac{\frac{11}{3}-\frac{2}{9}}{\frac{5}{3}-\frac{7}{6}} = \frac{62}{9}$, en forma decimal $6{,}88889\ldots$

9. $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}+5\right) - 4 + \frac{10}{2} = \frac{16}{3}$

11. $\frac{17}{66}$

13. $\frac{41}{333}$

21. Aplicar las leyes de los exponentes:

$$(-a)^{m/n} = (-1)^{m/n}(a)^{m/n}$$

$$(-27)^{\frac{4}{3}} = (-1)^{\frac{4}{3}}(27)^{\frac{4}{3}} = 81$$

25. Aplicar las propiedades de los radicales:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt{2}\,\sqrt[6]{3}$$

27. Aplicar las leyes de los exponentes:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right)^{c} = \left(\frac{b}{a}\right)^{c} = \left(\frac{16}{81}\right)^{-3/4}$$

Aplicar las leyes de los exponentes:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{c} = \frac{a^c}{b^c} = \frac{16^{3/4}}{81^{3/4}} = \frac{8}{27}$$

29. Reescribir las fracciones basándose en el mínimo común denominador:

$$\frac{2 \times 100}{300} + \frac{75}{300} - \frac{3^2 \times 12}{300}$$

Combinar las fracciones $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$

Se obtiene $\frac{2 \times 100 + 75 - 3^2 \times 12}{300} = \frac{167}{300}$

31. $\left[\frac{2^5+2^3-(1/8)}{3+2^3}\right]\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} + 2^{-1}\right] = -\frac{667}{144}$

33. $\frac{\left[3^{-2}-(-2)^{-2}\right]^{-1}}{3-\frac{3(-2)}{3-2}} = -\frac{5}{324} = -0{,}01543\ldots$

35. Multiplicar la fracción por la raíz para quitar el radical del numerador.

$$\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \text{ obtenemos como resultado:}$$

$$\frac{x-3}{x\sqrt{x+1}+2x+3\sqrt{x+1}+6}$$

37. Multiplicar la fracción por el conjugado.

$$\frac{7}{5\sqrt{x}-2\sqrt{a}}$$

Obtenemos como resultado:

$$-\frac{7(55\sqrt{x}-2\sqrt{a}}{4a-25x}$$

41. Aplicar las leyes de los exponentes:

$$(a.b)^n = a^n.b^n \ y \ \left(a^b\right)^c = a^{bc}$$

$$\left(2a^3b\right)^4 \left(\frac{-a^3}{4b^2}\right)^3 = 2^4 \left(-\frac{a^9}{4^3b^6}\right) a^{12}b^4$$

Aplicando las leyes de exponentes:

$$a^b.a^c = a^{b+c}$$

$$obtenemos \ -\frac{a^{21}}{4b^2}$$

43. Usar la regla de la potencia $a^b.a^c = a^{b+c}$

Combinando exponentes:

$$a^{1/8}\left[a^{1/4}\left(a^{1/2}\right)^{-4}\right]^{-1/2} = a^{-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\left(\left(a^{1/2}\right)^{-4}\right)^{-1/2}}$$

Da como resultado a.

45. Aplicar las leyes de los exponentes $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$:

$$\sqrt[4]{\frac{5x^7y^5}{27x^2y^2}} = \sqrt[4]{\frac{5x^5y^3}{27}}$$

47. $log_5 25 = 2$ conversión a forma exponencial $5^2 = 25$

49. $log_{10} 0{,}1 = -1$ conversión a forma exponencial $10^{-1} = 0{,}1$

51. Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$a = log_b b^a$$

$$5 = ln\left(e^5\right) \ \Rightarrow lnx = ln\left(e^5\right)$$

da como resultado $e^5 = x$