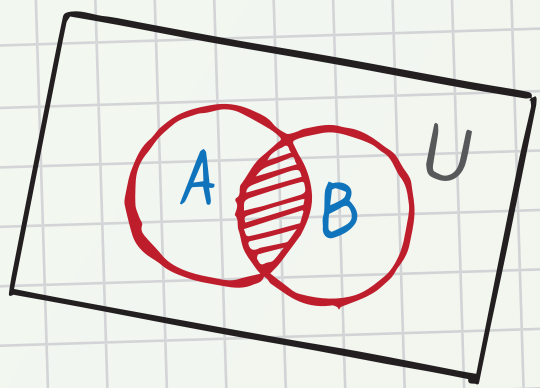
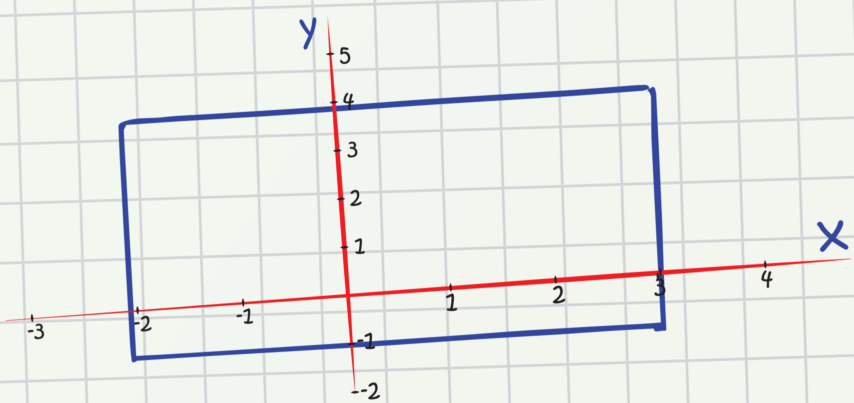
COLECCIÓN CB CIENCIAS BÁSICAS

Apuntes de matemática básica

Margarita Torrijos

$$\frac{-5(6^2)(3^2)}{7^3(-4)2^3}$$





UNIVERSIDAD CATÓLICA de Colombia
Vigilada Mineducación

MARGARITA TORRIJOS

Margarita Torrijos es licenciada en matemáticas y física, especialista en docencia de la matemática y la física y magíster en docencia e investigación universitaria, lo cual le confiere amplio conocimiento del campo de la enseñanza en cuanto a la pedagogía, la psicología y las técnicas de comunicación propias del proceso educativo.

Es docente de tiempo completo de la Universidad Católica de Colombia en el Departamento de Ciencias Básicas. Cuenta con experiencia docente de 20 años en diferentes instituciones en los niveles de educación básica, media, técnica y superior. Ha orientado las asignaturas ofrecidas por el mismo Departamento en las facultades de ingeniería, economía y psicología y ha trabajado en la implementación del Programa Aulas virtuales en la Universidad Católica de Colombia con las herramientas de comunicación, documentación, planeación y evaluación propias de la plataforma Moodle principalmente en la administración de aulas virtuales en las asignaturas de las facultades mencionadas.

La colección CIENCIAS BÁSICAS presenta obras que proponen soluciones prácticas a la educación en ciencias, con el objetivo de llegar a una apropiación contextualizada del conocimiento de las ciencias básicas. Así es como se busca, no solo aproximar a los estudiantes a este conocimiento fundante, sino que, como valor agregado, ejemplificar las ciencias básicas en contextos de formación profesional, estableciendo marcos de referencia, propios de cada disciplina. De esta forma, se pretende contribuir a optimizar los procesos de enseñanza, comprensión y aprendizaje para estudiantes y profesores.

Margarita Torrijos

APUNTES DE MATEMÁTICA BÁSICA

UNIVERSIDAD CATÓLICA de Colombia
Vigilada Mineducación

Bogotá, D. C.

Torrijos, Margarita
Apuntes de matemática básica / Margarita Torrijos.— Bogotá : Universidad Católica de Colombia, 2018
182 páginas; 20 x 24 cm
ISBN: 978-958-5456-40-2 (impreso)
ISBN: 978-958-5456-39-6 (digital)

I. Título
1. Matemáticas 2. Álgebra 3. Funciones 4. Trigonometría 5. Ecuaciones

Dewey 510. SCDD ed. 21

© Universidad Católica de Colombia

© Margarita Torrijos

Primera edición, Bogotá, D. C.
Diciembre de 2018

Dirección Editorial
Stella Valbuena García

Coordinación Editorial
María Paula Godoy Casasbuenas

Corrección de estilo
María del Pilar Hernández Moreno

Diseño de colección
Juanita Isaza

Diagramación LaTeX
Margoth Hernández Quitián

Publicación digital
Hipertexto Ltda.
www.hipertexto.com.co
Bogotá, D. C., Colombia

Impresión
Xpress Estudio Gráfico y Digital S. A.
Bogotá, D. C., Colombia

Departamento de Ciencias Básicas
Diagonal 45A # 15B-10, sede Claustro, bloque U
Teléfono: (571) 327 7300 ext. 3000, 3002, 3003 y 3007
Bogotá, D. C.
cienciasbasicas@ucatolica.edu.co

Editorial
Universidad Católica de Colombia
Av. Caracas 46-72, piso 5
Bogotá, D. C.
editorial@ucatolica.edu.co
www.ucatolica.edu.co

Todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida ni total ni parcialmente o transmitida por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sin el permiso previo del editor.

Hecho el depósito legal
© Derechos reservados

ÍNDICE GENERAL

1. TEORÍA DE NÚMEROS **1**
1.1. Orden jerárquico de las operaciones 2
1.2. Estrategias para aproximar números reales 3
1.2.1. Errores 4
1.3. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor (MCM) 5
1.4. Números primos 6
1.5. Números compuestos 6
1.5.1. Divisibilidad 7
1.6. Plano cartesiano 10
1.6.1. Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano 12
1.6.2. Coordenadas del punto medio 12
1.7. Conjuntos 13
1.7.1. Diagramas de Venn 14
1.7.2. Subconjuntos 14
1.7.3. Unión de conjuntos 14
1.7.4. Intersección de conjuntos 15
1.7.5. Complemento de un conjunto 15
1.7.6. Diferencia 16
1.7.7. Diferencia simétrica 16
1.8. Propiedades de las operaciones entre conjuntos 17
1.9. Valor absoluto 19
1.9.1. Propiedades del valor absoluto 20
1.9.2. Distancia entre dos números en la recta numérica 20
1.9.3. Ecuaciones lineales con valor absoluto 21
1.10. Potenciación, radicación y logaritmación 23
1.10.1. Exponentes y radicales 23
1.11. Notación científica 26
1.11.1. Regla de escritura de un número en notación científica 26

1.12. Equivalencia entre radicales y exponentes 28
1.13. Radicales equivalentes 28
1.14. Modificación de expresiones radicales 28
1.15. Operaciones con radicales 29
1.15.1. Radical de un producto 29
1.15.2. Radical de un cociente 29
1.15.3. Potencia de un radical 29
1.15.4. Radical de un radical 29
1.16. Suma de radicales 30
1.17. Racionalización 31
1.18. Logaritmación 33
1.18.1. Propiedades 33
1.18.2. Ejercicios del capítulo: trabajo independiente 36
1.18.3. Aplicación con Tecnología 39

2. ÁLGEBRA **51**
2.1. Polinomios 52
2.1.1. Multiplicación de binomios 54
2.1.2. Multiplicación de polinomios 54
2.1.3. División de un polinomio entre un monomio 54
2.1.4. Fórmulas del producto 55
2.2. Factorización 57
2.2.1. Factorización de polinomios de segundo grado 59
2.3. Expresiones racionales 63
2.4. Fracciones parciales 68
2.4.1. Caso 1: factores lineales distintos en el denominador 68
2.4.2. Caso 2: factores lineales repetidos en el denominador 70
2.4.3. Caso 3: factores cuadráticos irreductibles, distintos en el denominador 72
2.4.4. Caso 4: factores cuadráticos irreductibles repetidos en el denominador 73

3. ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS **83**
3.1. Ecuaciones lineales 84
3.1.1. Indicaciones para resolver problemas aplicados 86
3.2. Ecuaciones cuadráticas 88
3.2.1. Métodos para dar solución a una ecuación cuadrática 88
3.3. Soluciones de una ecuación cuadrática 94
3.4. Otros tipos de ecuaciones 98

4. FUNCIONES **107**
4.1. Representación gráfica de funciones 109
4.2. Función identidad, parte entera y valor absoluto 110
4.3. Operaciones con funciones 111
4.4. Función lineal 112

4.5. Representación de la función lineal 114
4.5.1. Ecuación de la recta 115
4.5.2. Modelado de la función lineal 118
4.6. Función cuadrática 119
4.7. Máximos y mínimos de una función cuadrática 120
4.7.1. Modelado de la función cuadrática 124
4.8. Función exponencial base ***a*** 127
4.9. Función exponencial base ***e*** 129
4.10. Función logaritmo (Base a) 132
4.10.1. Propiedades 133
4.10.2. Ecuaciones con logaritmos 134
4.11. Modelado de las funciones exponencial y logarítmica 137

5. TRIGONOMETRÍA 159
5.1. Sistema de medición de ángulos 159
5.2. Conversión entre los sistemas sexagesimal y radial 160
5.3. Razones trigonométricas 161
5.4. Solución de triángulos rectángulos 164
5.5. Razones trigonométricas para ángulos especiales **30°, 45° *y* 60°** 166
5.6. Identidades trigonométricas 167
5.7. Suma y resta de ángulos 167
5.8. Identidades de productos 168
5.9. Ángulo doble 168
5.10. Demostraciones de identidades trigonométricas 168
5.11. Ecuaciones trigonométricas 169
5.12. Ley de los senos 172
5.13. Ley de los cosenos 175
5.14. Funciones trigonométricas 175
5.15. Gráficas de las funciones trigonométricas 177
5.15.1. Aplicación con tecnología 181

BIBLIOGRAFÍA 185

PREFACIO

Desde hace ya algunos años, en el Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Católica de Colombia se han venido implementando estrategias que han permitido disminuir la mortalidad académica. Lo anterior se ha logrado sin comprometer la calidad del proceso educativo en todos y cada uno de los diferentes momentos del proceso; estas estrategias apoyan la labor academica presencial desarrollada por profesores y estudiantes en las diferentes asignaturas del Departamento. Dentro de los mecanismos de apoyo se cuenta con las tutorías presenciales, las tutorías virtuales a las que se puede acceder en horarios preestablecidos, las monitorías academicas de reciente implementación, los seminarios orientados por docentes de planta del Departamento y las aulas virtuales de cada una de las asignaturas disponibles para estudiantes matriculados. Para extender este portafolio de estrategias de apoyo, el Departamento ha propuesto el desarrollo de una serie de textos, que amplían los conceptos trabajados en las aulas de clase y plantean ejercicios de refuerzo y aplicación de los contenidos con el ánimo de fortalecer el trabajo independiente de los estudiantes que, como bien es sabido, es pieza fundamental en el aprendizaje de las ciencias básicas en el nivel universitario.

Los estudiantes de matemáticas ingresan a los diferentes cursos, con grandes vacíos en los conocimientos que debieron haber sido asimilados en los cursos previos. En los diferentes programas académicos ofertados por las facultades de Ingeniería, Psicología y Economía, que son las que nos competen en esta serie, estos vacíos dificultan la adquisición de nuevos conocimientos, impiden el avance en los programas establecidos y resultan un elemento que incide fuertemente en las altas tasas de abandono en la ecuación superior y dan la apariencia de que los fundamentos de álgebra y aritmética nunca hubieran sido dados a conocer o que los estudiantes nunca fueron parte activa de los cursos en los que estuvieron matriculados.

Específicamente, el presente texto fue concebido como un elemento de apoyo para los estudiantes que inician su carrera en ingeniería, psicología y economía y en él se presentan los tópicos de la matemática que debe manejar un estudiante en su etapa básica de formación, propone la realización de operaciones con diversos tipos de expresiones, la solución de ecuaciones, el trabajo con funciones y sus representaciones en el plano cartesiano, las razones y ecuaciones trigonométricas, y el manejo del lenguaje y los símbolos matemáticos. El presente texto busca el aprendizaje autónomo de las matemáticas en los estudiantes, describe los contenidos de la asignatura de una forma sencilla sin pérdida del rigor matemático ni descuido en la profundidad de los conceptos.

Además de apoyar el trabajo presencial, el texto permite que el estudiante comprenda, interprete y solucione problemas en diferentes contextos, el razonamiento lógico, las estrategias metacognitivas, el análisis, la representación, la abstracción, el manejo de la información y la coherencia con el mundo permitiéndole la formación como ciudadano que propone soluciones a los problemas con argumentos propios de las matemáticas, cultiva de forma permanente el autoaprendizaje y la autoformación, la autoevaluación de sus errores y la iniciativa propia para superarlos, la búsqueda y reflexión con sus pares sobre la forma de apropiación del conocimiento, las estrategias usadas en la solución de problemas, la reflexión sobre el trabajo en equipo, y la importancia de este tipo de asociación en el modelo constructivista de la educación.

El texto se encuentra dividido en cinco capítulos: Teoría de los números, Álgebra, Ecuaciones, Funciones y Trigonometría. En el primer capítulo titulado Teoría de números, se muestran al estudiante los conceptos relacionados con los números reales, las operaciones que se realizan con ellos y sus propiedades, se explora el concepto de conjunto, los intervalos y el valor absoluto; en el segundo capítulo denominado Álgebra, se muestran al estudiante las diferentes formas de trabajo con expresiones algebraicas y su aplicación al desarrollo de diversas situaciones en contexto que corresponden al tercer capítulo, las Ecuaciones; el cuarto capítulo titulado Funciones, presenta sus características y su representación gráfica; en el ultimo capitulo, Trigonometría, se trabajan los elementos de las funciones trigonométricas y la forma como estos temas se aplican a situaciones en contexto con los teoremas del seno y el coseno y la resolución de triángulos.

El éxito en la asignatura depende del compromiso y del trabajo del estudiante, por eso es indispensable que invierta como mínimo dos horas para el desarrollo de las actividades extraclase de matemáticas que exige la práctica y la ejercitación de los temas vistos en las sesiones de clase, como también asistir a tutorías y monitorías ofrecidas por el Departamento de Ciencias Básicas, además de los seminarios en las diferentes asignaturas.

UNO

TEORÍA DE NÚMEROS

¿Cómo puede ser que la matemática, siendo al fin y al cabo un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, esté tan admirablemente adaptada a los objetos de la realidad?
Albert Einstein

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se establece como resultado de un proceso progresivo de aplicación de los números que se utilizan normalmente para contar, medir o expresar relaciones. Ejemplos de estas situaciones son:

I) Los números naturales ($\mathbb{N}$) son el conjunto numérico en el cual cada uno de sus elementos se obtiene sumando 1 al elemento anterior. Sirven para contar elementos.

II) Calcular relaciones, proporciones, etc.:$\cdots \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \cdots$ los números racionales, $\mathbb{Q}$.

III) Determinar el área de un círculo o la diagonal de un cuadrado: $\sqrt{2}$, π,$\sqrt{5}$, e ... De los números irracionales y los racionales obtenemos los números reales, $\mathbb{R}$[1].

(1) Ejercicios de trabajo en clase

1. ¿El resultado de la resta y el resultado de la división de números enteros es un número entero?

2. ¿Es verdad que cualquier subconjunto de números enteros siempre tiene un primer elemento?

[1] La forma de definir los reales como la unión de racionales con irracionales es intuitiva y cercana a los estudiantes. Existe una definición formal por cortes o por sucesiones de Cauchy, que no se trabajará en este libro porque implica otro nivel de formalidad y profundidad.

3. Un número entero es par si se puede expresar como $2k$ donde k es un entero y un número entero es impar si se puede expresar de la forma $2k+1$ donde k es un entero.

   Exponga la razón por la cual:

   a. La suma de dos números enteros es un número entero par.
   b. El producto de dos números enteros pares es un número entero par.
   c. La suma de dos enteros impares es un número entero par.
   d. Si un número entero a es múltiplo de 3 entonces el número entero a^2 es un múltiplo de 3.

Exprese de forma racional (p/q) los siguientes decimales periódicos:

4. $2,345345\ldots$

5. $13,023491491\ldots$

6. $0,285714285714\ldots$

7. De ejemplos de números irracionales.

8 ¿Los resultados de las operaciones suma, resta, multiplicación y división de números irracionales dan como resultado números irracionales?

Determine un número racional que se encuentre entre los siguientes pares de números

9. $3/5$, $7/4$

10. $3/5$, $4/5$

11. Para un número irracional a, ¿existe un consecuente para a?

12. Al realizar la suma de un número racional con un número irracional ¿Qué clase de número se obtiene?

1.1. Orden jerárquico de las operaciones

Para realizar de forma correcta una serie de operaciones entre números reales se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Efectuar primero las multiplicaciones y las divisiones en el orden de lectura, es decir, de izquierda a derecha.

- Efectuar sumas y restas de forma similar a las operaciones anteriormente mencionadas.

- Si hay varios símbolos de agrupamiento como paréntesis (), corchetes [] o , uno dentro de otro, primero se efectúan las operaciones dentro de cada agrupamiento.

Ejemplo 1.1

Teniendo en cuenta el orden jerárquico observe los siguientes ejemplos.

a.

$$\begin{aligned}&8+5\times 6-15\div 3\\&8+(5\times 6)-(15\div 3)\\&8+30-5=33\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}&6-[8-(6+9)]\\&6-[8-(15)]\\&6+7=13\end{aligned}$$

c. $\dfrac{9\times 3-8\times(-2)}{6+12\times 7}=\dfrac{(9\times 3)-(8\times(-2))}{[(6)+(12\times 7)]}=\dfrac{[27-(-16)]}{[24+84]}=\dfrac{43}{108}$

(2) Ejercicios de trabajo en clase

Realice los siguientes ejercicios teniendo en cuenta el orden jerárquico de las operaciones

13. $15-\{4+[-5-4+(2-3)]-16\}$

14. $-4+5-\{3+4-5-[7+(6+4)-7-6]+4\}$

15. $-1+\{5+4-3-7+1-[5+8-7-(7+8+6-9-23)-5]+3\}$

16. $5+4-[5-(6+5-8)+(9-1+4)]$

1.2. Estrategias para aproximar números reales

Con frecuencia se realizan aproximaciones en las operaciones realizadas con los números reales. Cuando los resultados son menores que los valores exactos, se denominan aproximaciones por defecto, en caso contrario se denominan aproximaciones por exceso.

Aproximación por redondeo

Para realizar aproximación por redondeo se deben sustituir las cifras siguientes a la de orden n por ceros. En caso de que la primera cifra, que se cambia por cero, sea mayor o igual a 5 la última de las no sustituidas por cero se aumenta en uno; en caso contrario, es decir, si la primera cifra que es cambiada por cero es menor a 5, la última de las cifras no sustituidas por cero se mantiene igual.

Aproximación por truncamiento

Para realizar aproximación por truncamiento se deben sustituir por cero todas las cifras siguientes a la cifra del orden de truncamiento.

Ejemplo 1.2

$$\pi = 3,141592\ldots$$

Aproximación de orden 3 por redondeo: $3,142$
Aproximación de orden 3 por truncamiento: $3,141$
Aproximación de orden 3 por redondeo del número 51760: 51800
Aproximación hasta las centenas por truncamiento de 51760: 51700

1.2.1. Errores

Al realizar la aproximación de un número real, el hecho de modificar las cifras por ceros genera un error. Para cuantificarlo se puede emplear el error absoluto o el relativo.

Error absoluto $\mathbf{E}_a$: corresponde al valor absoluto de la diferencia que se obtiene entre un número y su aproximación. Se puede cuantificar mediante la expresión $E_a = \|A - a\|$, en esta expresión A representa el número que se ha aproximado y a representa su aproximación.

Error relativo $\mathbf{E}_r$: corresponde al cociente del error absoluto y el valor absoluto del número aproximado. Se obtiene mediante la expresión:

$$E_r \frac{E_a}{\|A\|} \tag{1.1}$$

1.3. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor (MCM)

Para algunas aplicaciones es necesario determinar el menor de los múltiplos comunes y el mayor de los divisores comunes de un conjunto de números enteros. Una estrategia para determinarlos es:

El mínimo común múltiplo se obtiene del producto de los factores primos que sean comunes y los que no sean comunes del conjunto de números con sus exponentes mayores.

Tabla 1.1. Forma de calcular el MCM

12	2	8	2	$12 = 2^2 \times 3$
6	2	4	2	$8 = 2^3$
3	3	2	2	$2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24$
1		1		$\mathrm{mcm}(12, 8) = 24$

El máximo común divisor de un conjunto de números enteros se obtiene del producto de los factores primos comunes con sus menores exponentes.

Si m es el máximo común divisor de los números a y b se denotará mediante la expresión $m = (a, b)$; existe una forma alternativa de calcular el máximo común divisor y es mediante el uso del algoritmo de Euclides, que se basa en:

$$\text{Si } m = (a, b) \text{ y } a = bq + r \text{ con } 0 \leq r < b, \text{ entonces } m = (b, r)$$

se procede de la siguiente forma: se divide a entre b para obtener un residuo r_1, después se divide$b \div r_1$ y se obtiene un residuo r_2; a continuación, se divide $r_1 \div r_2$ y se obtiene como residuo r_3 y se continúa con el proceso hasta obtener como residuo cero. El máximo común divisor es igual al último residuo que sea diferente de cero.

Ejemplo 1.3

Si se utiliza el algoritmo de Euclides, para calcular el máximo común divisor de las parejas de números el proceso será:

a. 328 y 1804
   1804 / 328 = 5 y residuo = 164
   328 / 164 = 2 y residuo = 0 por tanto (1804, 328) = 164

b. 105 y 385
   385 / 105 = 3 y residuo = 70

105 / 70 = 1 y residuo = 35
70 / 35 = 2 y residuo = 0 por tanto (385, 105) = 35

El máximo común divisor de los números enteros a y b cumple:

$$\text{Si } a > b(a,b) = (b, a-b)$$

Por último, no olvidar que el máximo común divisor de a y b es el mayor entero positivo que divide a a y b de tal forma que el residuo de ambas operaciones sea cero. Si el máximo común divisor de dos números es 1, al par de números se les denomina primos relativos o primos entre sí.

c. Calcular (1001,1000)

$$(1001, 1000) = (1000, 1001 - 1000) = (1000, 1) = 1.$$

1.4. Números primos

Un número entero P se denomina número primo si es mayor que 1 y sus únicos divisores son 1,-1, P y $-P$

Ejemplo 1.4

7, es divisible por (1,-1, 7,-7) primo positivo
-7,es divisible por (1,-1,7,-7) primo negativo

1.5. Números compuestos

Son los números que se pueden expresar como el producto de dos o más números primos. Todo número entero mayor que 1, es decir $n > 1$, puede ser expresado de forma única como el producto de potencias de un conjunto de números primos.

Ejemplo 1.5

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$$

Apoyo de la calculadora
Multiplicaciones con exponentes:
Se usa la tecla: $[\wedge]$ o $[x^y]$

Ejemplo 1.6

$$5^6 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \to 5\,[\wedge]\,[6] \times 3\,[\wedge]\,[2] \times 4\,[\wedge]\,[3]\,[enter] = 9000000$$

1.5.1. Divisibilidad

Un número es divisible entre otro número si este lo contiene un número entero de veces, es decir, si el residuo es cero.

Para a y b enteros, se dice que a divide a b (lo que se simboliza con $(a \mid b)$) si se cumple:

$$(a \mid b) \text{ si existe un entero } c \text{ tal que } b = (a)(c)$$

Ejemplo 1.7

a. $3|\ 12$ porque $12 = 4 \times 3$

b. $4 \nmid 10$ puesto que no existe un entero c tal que $10 = 4c$

c. $4 \mid 20$ debido a que si $c = 5$, $20 = 4c$

d. $3|0$ ya que $0 = 3c$ cuando $c = 0$

e. $1|\ 5$ puesto que $5 = 1 \times 5$

f. $5 \nmid 1$ dado que $1 \neq 5c$ para cualquier entero c

1.5.1.1. Criterios de divisibilidad

Para $\boldsymbol{x}$, entero se cumple que:

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 2 si su última cifra es 0 o su última cifra es un número par
- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 3 si la suma de todas sus cifras es múltiplo de 3

Ejemplo 1.8

387 es divisible por 3 porque $3 + 8 + 7 = 18$ y 18 es múltiplo de 3.

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 4 si sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 4. Ejemplo: 324 y 1840.
- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 5 si él termina en 0 o en 5.
- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 6 si tiene como divisores a 2 y a 3.
- Para determinar si $\boldsymbol{x}$ es divisible por 7 existen dos criterios: el método directo y el método recursivo.

Método directo

A partir del número se forman grupos de tres cifras y posteriormente se suma y se resta alternadamente cada conjunto de números; si el resultado obtenido es un múltiplo de 7, entonces el número dado también es divisible entre 7.

Ejemplo 1.9

267'651,475 es divisible entre 7 ya que al usar el método directo se obtiene:

$$267 - 651 + 475 = 91$$

Ya que 91 es un múltiplo de 7, el número 267'651,475 también lo es.

Método recursivo

Se descompone el número en dos partes que corresponden la primera a todas las cifras excepto la de las unidades y la otra parte solo a las unidades. Se multiplica la cifra de las unidades por 2 y se resta a la primera parte. Si el valor absoluto del resultado es 0 o es un múltiplo de 7, el número es divisible por 7. El proceso se repite hasta llegar a un resultado 0 o 7.

Ejemplo 1.10

$x = 329 \rightarrow$ (32 - (9 x 2)) $\rightarrow$14 La conclusión en este caso, es que 329 es divisible por 7.

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 8 si el número formado por las tres últimas cifras del número es divisible por 8 o si las tres últimas cifras del número son ceros.

Ejemplo 1.11

$x = 496120 \rightarrow 120$ que es divisible por 8, así que x también.

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 9 si la suma de todas sus cifras es múltiplo de 9, en este proceso se puede omitir sumar los 9 y los ceros para agilidad de la operación.

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 10 si termina en 0 (cero).

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 11 si al sumar por separado las cifras que ocupan los lugares impares y las cifras que ocupan los lugares pares y posteriormente restar los resultados se obtiene un múltiplo de 11.

Ejemplo 1.12

$957 = (9 + 7) - 5 = 16 - 5 = 11$.

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 12 si tiene como divisores a 3 y 4.
- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 13 si la suma alterna como la usada para el número 7) es divisible por 13.

Ejemplo 1.13

$x = 100035286 \rightarrow 100 - 035 + 286 = 351$ que es múltiplo de 13, luego x también.
También se puede determinar la divisibilidad por 13 con un método que es similar al del número 7, solo que multiplicando la cifra de las unidades por 9 en lugar de multiplicar por 2.

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 14 si es par y es divisible por 7
- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 15 si tiene como divisores a 3 y a 5
- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 16 si sus cuatro últimas cifras también lo son.

Ejemplo 1.14

$x = 27168 \rightarrow 7168$ que es divisible por 16, así que x también.

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 17 si se cumple que al restar la cantidad formada por la cifra de las decenas y la cifra de las unidades al doble producto de las cifras restantes es un múltiplo de 17.

Ejemplo 1.15

$x = 11866 \rightarrow 2 * 118 - 66 = 170$ que es múltiplo de 17.

- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 18 si tiene como divisores a 2 y 9.
- $\boldsymbol{x}$ es divisible por 19 si la suma del doble producto de las unidades con el número sin la cifra de las unidades es un múltiplo de 19.

Ejemplo 1.16

$304 \;\rightarrow\; 4x2 + 30 = \; 8 + 30 \; = \; 38$ que es múltiplo de 19.

1.6. Plano cartesiano

Cualquier par de números reales de la forma (a, b) se denomina pareja ordenada. El conjunto formado por las infinitas parejas ordenadas de números reales se denomina producto cartesiano de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ y se define así:

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2=\{(x,y)/x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$$

Ecuación 2: Producto cartesiano

Al relacionar los puntos del plano con el producto cartesiano $\mathbb{R}^2$ se obtiene una representación muy útil denominada el plano cartesiano. Como se muestra en la figura 1.1.

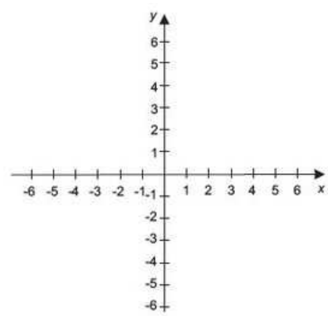


Figura 1.1. Plano cartesiano

Los números que conforman las parejas ordenadas son relacionados con las rectas vertical y horizontal de la forma conocida. No olvide que al eje horizontal se le llama eje de las x y al eje vertical se le llama eje de las y. Al primer número en cada pareja ordenada se le denomina abscisa y el segundo número en la pareja ordenada recibe el nombre de ordenada.

A la pareja (a, b) relacionada con un punto A, se le denomina las coordenadas del punto A. Observe en la figura 1.2, la forma como se ubica una serie de puntos a partir de sus coordenadas.

Además de representar puntos, en el plano cartesiano es posible representar regiones obtenidas a partir de igualdades. La siguiente región $A=\{(x,y)/x=2,\ y=3\}$ corresponde a las rectas mostradas en la figura 1.3.

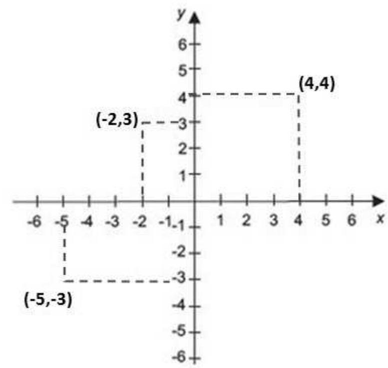


Figura 1.2. Ubicación de puntos en el plano cartesiano

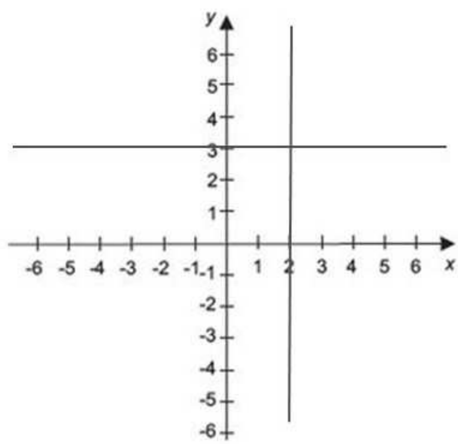


Figura 1.3. Solución regiones en el plano

Otro ejemplo de región en el plano cartesiano corresponde a la determinada por la expresión $A = \{(x, y)/-2 < x < 3,\ -1 < y < 4\}$. En este ejercicio, la condición indica que la coordenada x debe estar entre -2 y 3 y la coordenada y debe estar entre -1 y 4. La región sombreada corresponde a la intersección de las regiones indicadas. Note que en la ilustración 4, los límites de la región se muestran punteados. Lo anterior se debe a que estos puntos no hacen parte de la región por la condición de desigualdad.

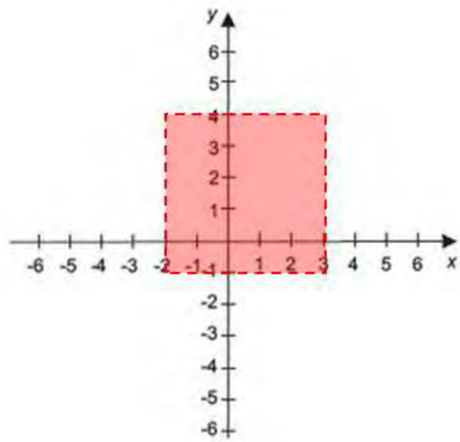


Figura 1.4. Región solución de una desigualdad

1.6.1. Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano

La distancia entre dos puntos $A(x_1,\ y_1)$ y $B(x_2,\ y_2)$ se determina mediante la expresión:

$$d\,(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ecuación 3: Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano

1.6.2. Coordenadas del punto medio

Las coordenadas del punto medio entre $A(x_1,\ y_1)$ y $B(x_2,\ y_2)$ se determina mediante las expresiones:

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2} \qquad y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

Ecuación 4: Coordenadas del punto medio

(3) Ejercicios de trabajo en clase

Representar los triángulos de vértices:

17. $\left(\sqrt{2},\ 0\right),\ (4, 5),\ (-3, 2)$

Represente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ en el plano cartesiano:

18. $\{(x, y) / x = -3,\ y = 3\}$
19. $\{(x, y) / x < 4\}$
20. $\{(x, y) / x \geq 2\}$
21. $\{(x, y) / x \leq -1, y \geq 2\}$
22. Una circunferencia tiene centro en $P(-4, 1)$. Un diámetro de la circunferencia es QR. Si las coordenadas del punto son $Q\,(2, 6)$, hallar las coordenadas del otro punto extremo del diámetro.

Hallar la distancia entre los puntos:

23. $(-3, 1)\,,\ (3, -1)$
24. $(4, 1)\,,\ (3, -2)$

Hallar el perímetro de los triángulos cuyos vértices son:

25. $(-2, 5), (4, 3)\,,\ (7, -2)$
26. $(-1, -2)\,,\ (4, 2)\,,\ (-3, 5)$

Determine si los siguientes triángulos son isósceles[2]:

27. $(6, 7),\ (-8, -1),\ (-2, -7)$
28. $(2, -2)\,,\ (-3, -1)\,,\ (1, 6)$
29. Hallar un punto de abscisa 3 que tenga una distancia de 10 unidades hasta el punto $(-3, 69)$

1.7. Conjuntos

Se puede definir un conjunto de forma intuitiva como una colección de objetos con una característica en común. Los conjuntos se nombran de dos formas: cuando un conjunto es descrito por una propiedad que comparten sus elementos, se dice que está definido por comprensión; cuando está definido por medio de una lista de sus elementos, se dice que está definido por extensión. Al que se toma como referencia para determinar la propiedad en los elementos se le denomina conjunto universal.

Un conjunto sin elementos se llama conjunto vacío. Se dice que un elemento pertenece al conjunto A y se denota $a \in A$, en caso contrario se dice que el elemento no pertenece y se denota $a \notin A$.

[2] El triángulo isósceles se define como un polígono de tres lados: dos de ellos miden igual.

1.7.1. Diagramas de Venn

Son una forma de representar por medio de una gráfica conjuntos y sus elementos, se usan circunferencias u óvalos enmarcados por un rectángulo para mostrar las relaciones existentes entre los conjuntos representados. La región encerrada por las curvas contiene los elementos de cada conjunto y la forma como esos círculos se sobreponen, muestra las posibles relaciones entre los conjuntos; por ejemplo, cuando las regiones se sobreponen indica la existencia de elementos que pertenecen a los dos conjuntos.

1.7.2. Subconjuntos

Sean dos conjuntos A y B, como se muestra en la figura 1.5, se dice que A es subconjunto de B, lo cual se escribe $A \subseteq B$ si todo elemento de A también es elemento de B, es decir:

$$\forall x,\ si\ x \in A \rightarrow x \in B$$

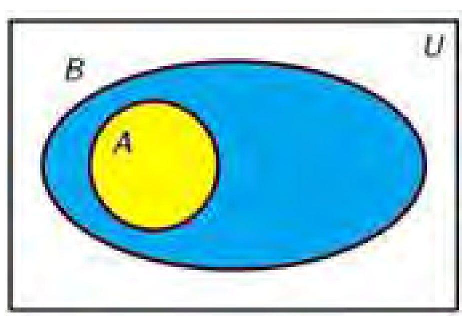


Figura 1.5. Diagrama de Venn para el subconjunto A

Con respecto a lo anterior es importante anotar que:

1. Para todo conjunto A, $\phi \subseteq A$
2. Si $Si\ A \subseteq B\ y\ B \subseteq C,\ entonces\ A \subseteq C$
3. Dos conjuntos son iguales si y solo si $A \subseteq B\ y\ B \subseteq A$
4. Sea A un conjunto, se define el conjunto partes de A al conjunto de subconjuntos de A, el cual tiene 2^n elementos donde n es la cantidad de elementos del conjunto A.

1.7.3. Unión de conjuntos

Sean los conjuntos A y B, la unión de los conjuntos se define de la siguiente forma:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Ecuación 5: Unión de conjuntos

Y el diagrama de Venn que representa la unión de conjuntos se observa en la figura 1.6.

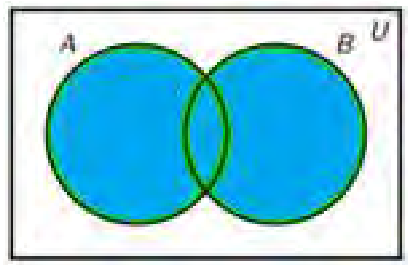


Figura 1.6. Diagrama de Venn para la unión de conjuntos

1.7.4. Intersección de conjuntos

Sean los conjuntos A y B, se define la intersección de los conjuntos de la siguiente forma:

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

Ecuación 6: Intersección de conjuntos

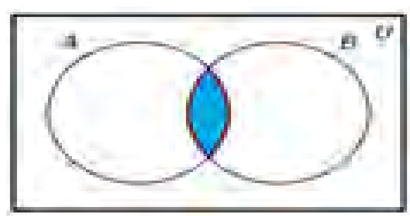


Figura 1.7. Diagrama de Venn para la intersección de conjuntos

1.7.5. Complemento de un conjunto

Sea un conjunto A, se define el complemento de A, (el cual se denota A^c o $A´$) con respecto al conjunto universal U de la siguiente forma:

$$A^c = \{x \in U/x \notin A\}$$

Ecuación 7: Complemento de un conjunto

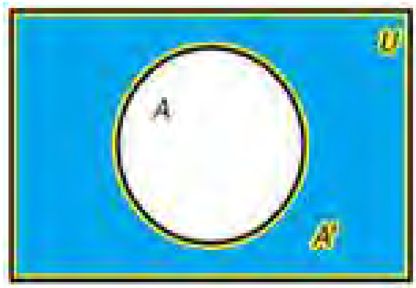


Figura 1.8. Diagrama de Venn para el complemento de conjuntos

1.7.6. Diferencia

Sean dos conjuntos A y B, se define la diferencia entre los conjuntos de la siguiente forma:

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

Ecuación 8: Diferencia de conjuntos

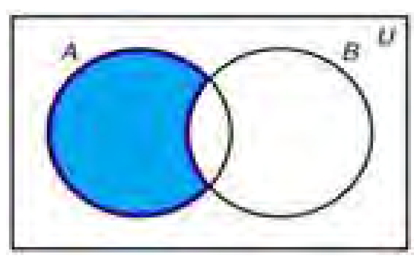


Figura 1.9. Diagrama de Venn para la diferencia de conjuntos

1.7.7. Diferencia simétrica

Sean A y B dos conjuntos, se define la diferencia simétrica de la siguiente forma:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A \triangle B = \left\{x/(x \in A \bigwedge x \notin B) \bigvee (x \notin A \bigwedge x \in B)\right\}$$

Ecuación 9: Diferencia simétrica de conjuntos

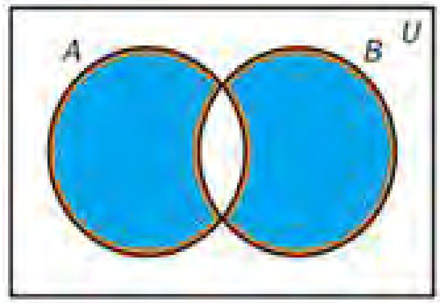


Figura 1.10. Diagrama de Venn para la diferencia simétrica de conjuntos

1.8. Propiedades de las operaciones entre conjuntos

A continuación, encontrara en la tabla 1.2 las propiedades de las operaciones entre conjuntos con sus nombres.

Tabla 1.2. Propiedades de las operaciones entre conjuntos.

Leyes asociativas	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Leyes conmutativas	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
Leyes distributivas	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Leyes de identidad	$A \cap \phi = \phi$
	$A \cap U = U$
Leyes de idempotencia	$A \cup A = A$
	$A \cap A = A$
Leyes de acotación	$A \cap \phi = \phi$
Leyes de absorción	$A \cup (A \cap B) = A$
	$A \cap (A \cup B) = A$
Ley de involución	$(A^c)^c = A$
Leyes de De Morgan para conjuntos	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Ejercicios de trabajo en clase

Dibuje cada uno de los diagramas de Venn para cada enunciado y sombree el área que represente el conjunto indicado.

30. $A \cap (B \cup C)$

31. $A \cup (B \cap C)$

32. $(((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\cup(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}))\cap((\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\cup(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}))\cap((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A})\ \cup(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})))^{\boldsymbol{c}}$

33. $(A^c \cup B^c)\cup C$

34. $(\boldsymbol{A}\ \uplus\ \boldsymbol{B})\ \cap\ (\boldsymbol{C}\ \bigcap\ \boldsymbol{D})\ \bigcup\ \boldsymbol{E}$

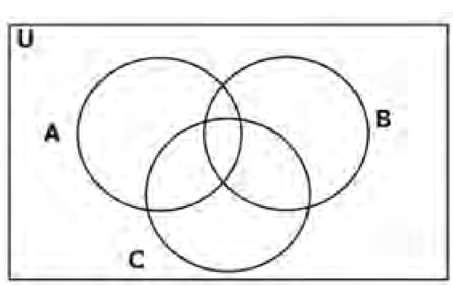
35. Dados los conjuntos

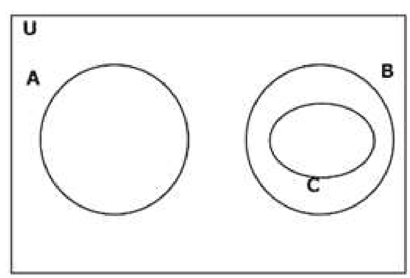
$$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14\ 15\ \}$$
$$A = \{4,\ 8,\ 10,\ 12\}$$
$$B = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\ \}$$
$$C = \{1,\ 2,\ 3,\ 11,\ 12,\ 13\ \}$$
$$D = \{1,\ 5,\ 6,\ 10,\ 11\ \}$$
$$E = \{12,\ 13,\ 14,\ 15\ \}$$

Determinar:

$A \cup B$	$(A \cap B)^c$	$(D \cap E)\ --\ A$
$B \cup C$	A^c	B^c
$E^c \cap D$	$B \cap E$	$B\ \Delta\ E$
$A \cup C$	$(\ B \cup C)^c$	$(\ C \cap D\ )^c$
$(\ A \cap D\ )^c$	$(\ E \cup C\ )^c$	

Tomando como base cada uno de los siguientes diagramas de Venn:





36. En una facultad de ingeniería se han matriculado mil doscientos estudiantes, quinientos ochenta y dos se matriculan en el curso de física, seiscientos veintisiete se matriculan en química, quinientos cuarenta y tres se matriculan en matemática básica, doscientos diecisiete se matriculan en física y química, trescientos siete se matriculan en física y matemática, doscientos cincuenta se matriculan en química y matemática y por último ciento veintidós estudiantes se matricularon en los tres cursos. Determinar:

a) Cuántos estudiantes no tomaron ningún curso
b) Cuántos estudian exactamente una materia
c) Cuántos estudian máximo dos materias
d) Cuántos estudian por lo menos una materia
e) Cuántos estudian física y química, pero no matemática

37. Se entrevistó a 3200 personas sobre el tipo de transporte que utilizan para desplazarse en el área metropolitana de una capital. 1950 personas respondieron que utilizan el metro, 400 utilizan motocicleta, 1500 utilizan bus, 800 utilizan bus y metro y ninguno de los que se transporta en motocicleta utiliza bus o metro. Determinar:

    a) El número de personas que solo utiliza metro
    b) El número de personas que utiliza máximo dos medios de transporte

38. Al entrevistar a 200 personas con discapacidad se obtuvieron los siguientes resultados: 60 personas con pérdida total de la voz, 90 personas con pérdida de la visión de los cuales 20 también tenían pérdida de la voz. De la población entrevistada 70 se dedicaban a conseguir su sustento como cantantes, de los cuales 30 pertenecen al grupo de personas con pérdida de la visión. Elabore un diagrama de Venn que ilustre los resultados de la entrevista y determine cuántos de los entrevistados que no son cantantes no tienen perdida de la visión ni de la voz.

1.9. Valor absoluto

Se puede interpretar el valor absoluto de un número entero como la distancia que existe en la recta numérica desde el número dado hasta cero. Si se desea determinar el valor absoluto de un número positivo, la distancia desde ese número hasta cero es igual al número, pero si el número fuera negativo, la distancia del número hasta el origen será el inverso aditivo del número.

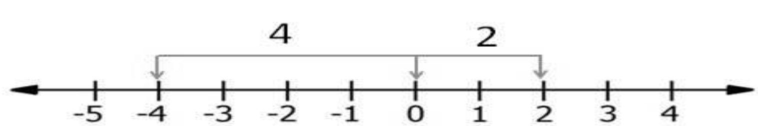


Figura 1.11. Representación gráfica del valor absoluto

Es posible expresar el valor absoluto mediante una función por partes denotando el valor absoluto de un número de la siguiente forma:

$$|x| = \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x < 0 \end{cases}$$

Ecuación 10: Definición de valor absoluto

Según lo anterior, el valor absoluto de un número, siempre será positivo, es decir mayor o igual a cero y coincide siempre con el de su inverso aditivo. El número contenido en las barras del valor absoluto se llama argumento.

Ejemplo 1.17

Simplificar:

1. $-|-2| = -(2) = -2$
2. $|0-2| = |-2| = 2$
3. $|6-3| = |3| = 3$
4. $|3+2(-4)| = |3-8| = |-5| = 5$
5. $(-|-2|)^2 = (-2)^2 = 4$

1.9.1. Propiedades del valor absoluto

Tabla 1.3. Propiedades del valor absoluto

$\boldsymbol{|x| \geq 0}$	$\boldsymbol{|x| = 0 \longleftrightarrow x = 0}$	$\boldsymbol{|x| = |-x|}$
$\boldsymbol{|x|^2 = x^2}$	$|x|^2 = |x|$	$|x.y| = |x|\,.\,|y|$
$\boldsymbol{|x+y| \leq |x| + |y|}$	$|x-y| \leq |x| + |y|$	$|x-y| = 0 \leftrightarrow x = y$
$\boldsymbol{\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \ si \ y \neq 0}$	$si \ |x| < a \ \rightarrow -a < x < a$	$Si \ |x| = a, \ \rightarrow \ x = a \ o \ x = -a$

1.9.2. Distancia entre dos números en la recta numérica

La distancia entre dos números a y b en la recta numérica es igual al valor absoluto de su diferencia, es decir:

$$d(a,b) = |b-a| = |a-b|$$

Ecuación 11: Distancia entre dos números en la recta numérica

Ejemplo 1.18

En la recta numérica la distancia entre los números -3 y 2 se obtiene de dos formas posibles:

$$\begin{array}{rl} |b-a| & |a-b| \\ |2-(-3)| & |-3-2| \\ |2+3| & |-5| \\ |5| & 5 \\ 5 & \end{array}$$

Figura 1.12. Distancia entre dos números en la recta numérica.

1.9.3. Ecuaciones lineales con valor absoluto

Por la definición de valor absoluto, se sabe que $|x|$ siempre será mayor o igual a cero. Observe que el valor absoluto de un número positivo es positivo y el de una cantidad negativa, cambia de signo, es decir:

1. Si $x > 2$, entonces $|x-2| = x-2$ porque $x-2 > 0$. Es decir, si el argumento es positivo, el valor absoluto queda expresado como una ecuación en la que se obtiene el valor de x.

2. Si $x < 2$, entonces $|x-2| = -(x-2)$ porque $x-2 < 0$. Es decir, si el argumento es negativo, el valor absoluto queda expresado como una ecuación en la que se obtiene el valor de x.

Ejemplo 1.19

Si x es la incógnita en la ecuación $|x-3| = 5$, como no se conoce si el argumento es positivo o es negativo, se debe evaluar las dos posibilidades de signo y obtener dos ecuaciones que nos conducen a dos soluciones a saber:

Solución 1	*Solución 2*
$x - 3 = 5$	$x - 3 = -5$
$x = 5 + 3$	$x = 3 - 5$
$x = 8$	$x = -2$

Las soluciones de una ecuación con valor absoluto satisfacen la ecuación. Si se comprueba, se obtiene:

Solución 1	*Solución 2*
$\|x - 3\| = 5$	$\|x - 3\| = -5$
$\|8 - 3\| = 5$	$\|-2 - 3\| = 5$
$\|5\| = 5$	$\|-5\| = 5$
$5 = 5$	$5 = 5$

Ejemplo 1.20

Resolver:

$$3\,|5 - 4x| = 9$$

Previamente se debe obtener el valor absoluto sin factores o divisores, lo anterior se consigue dividiendo entre 3 ambos lados de la ecuación para obtener:

$$|5 - 4x| = 3$$

Ecuación que se resuelve de la forma conocida:

Solución 1	*Solución 2*
$5 - 4x = 3$	$5 - 4x = -3$
$-4x = 3 - 5$	$-4x = -3 - 5$
$-4x = -2$	$-4x = -8$
$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$

Al realizar la prueba con las soluciones en la ecuación inicial, se obtiene:

Solución 1	*Solución 2*
$3\|5 - 4x\| = 9$	$3\|5 - 4x\| = 9$
$3\left\|5 - 4\left(\frac{1}{2}\right)\right\| = 9$	$3\,\|5 - 4\,(2)\| = 9$
$3\|5 - 2\| = 9$	$3\,\|5 - 8\| = 9$
$3\|3\| = 9$	$3\| - 3\| = 9$
$3\,(3) = 9$	$3\,(3) = 9$
$9 = 9$	$9 = 9$

(4) Ejercicios de trabajo en clase

Resolver las siguientes ecuaciones:

39. $|x-5|=10$

40. $|x-3|=-3$

41. $|2x+3|=-9$

42. $|5x-2|=3$

43. $4\,|x+2|-30=-10$

44. $|2x-3|=7$

1.10. Potenciación, radicación y logaritmación

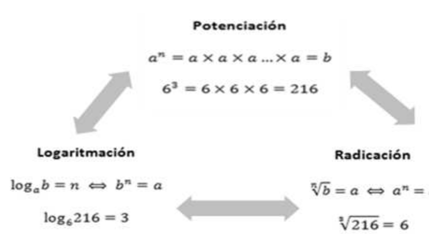


Figura 1.13. Relación entre potenciación, radicación y logaritmación.

1.10.1. Exponentes y radicales

Para realizar operaciones con exponentes y radicales es necesario recordar las propiedades que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y para todo m, n, racionales con lo que se obtiene:

a) $x^m x^n = x^{m+n}$

b) $x^{m-n} = \frac{x^m}{x^n}$

c) $(xy)^n = x^n y^n$

d) $(x^m)^n = x^{mn}$

e) $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$

f) $x^{\frac{n}{n}} = \sqrt[n]{x^n} = x$

Para los $x \in \mathbb{R}, x \neq 0, p \in \mathbb{N}$ tenga en cuenta

g) $x^0 = 1$

h) $x^{-p} = \frac{1}{x^p}$

Ejemplo 1.21

Simplifique la siguiente expresión:

$$\frac{-5(6^2)(3^2)}{7^3(-4)2^3}$$

$$\frac{-5(6^2)(3^2)}{7^3(-4)2^3} = \frac{(-5)(36)(9)}{(343)(-4)(8)} = \frac{-1620}{-10976} = \frac{405}{2744}$$

Ejemplo 1.22

Represente como potencia de 2 las siguientes expresiones:

a) $\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}\right] \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

Aplicando la regla $x^{-1} = \frac{1}{x}$ se obtiene:

$$\left[\frac{2^7}{2^3}\right] \times \left(2^4\right) = \frac{2^7}{2^3} \times 2^4 = \frac{2^{11}}{2^3} = 2^8$$

b) $\frac{\left[\left(2^{-3}\right)^{-2}\right]^{-5}}{\left[(2^{-4})^{-1}\right]^3}$

Aplicando la propiedad (d) se obtiene:

$$\frac{\left(2^{-3}\right)^{10}}{\left(2^4\right)^{-3}} = \frac{2^{-30}}{2^{-12}} = 2^{-30+12} = 2^{-18}$$

Ejemplo 1.23

Aplique las propiedades de los exponentes para la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt[5]{x^{13}y^5z^8}}{\sqrt[5]{x^8y^{15}z^3}} = \sqrt[5]{\frac{x^{13}y^5z^8}{x^8y^{15}z^3}}$$

Aplicando la propiedad b):

$$\sqrt[5]{\frac{x^5z^5}{y^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{x^5}\sqrt[5]{z}}{\sqrt[5]{y^{10}}} = \frac{xz}{y^2}$$

Ejemplo 1.24

Aplique las propiedades c) y e) para la siguiente expresión:

$$\sqrt[3]{\left(64a^6b^{18}\right)^5} = \left(\sqrt[3]{64a^6b^{18}}\right)^5 = \left(\left(\sqrt[3]{4^3}\right)\left(\sqrt[3]{a^6}\right)\left(\sqrt[3]{b^{18}}\right)\right)^5 = \left(4a^2b^6\right)^5 = 1024a^{10}b^{30}$$

(5) Ejercicios de trabajo en clase

Desarrolle las siguientes expresiones aplicando las propiedades de los exponentes:

45. $a^6.a^3$
46. $a^{-5}.a$
47. $a^{x+y}.a^{2x-3y}$
48. $\left(\dfrac{p^{2x-1}}{p^{3-2x}}\right)^{-6}$
49. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x . \left(\dfrac{6}{5}\right)^x$
50. $\left(\dfrac{a^{2x}}{a^3}\right)^{-3}$
51. $\left(\dfrac{n^{5x}}{n^{3x+1}}.\dfrac{n^{2x}}{n^3}\right)^{x-2}$
52. $\left(\dfrac{k^{3t+2}}{k^{2+3t}}\right)^{10}$
53. $\left(\dfrac{a^{3m-1}a^{2m-2}}{a^{4m-3}}\right)^n$
54. $\left(\dfrac{x^{2a-b}.x^{b+2a}}{x^{2a}.x^{3b}}\right)^{4a+3b}$

Observa la siguiente propiedad y aplíquela en los siguientes ejercicios: $\frac{a^y}{a^z} = a^{y-z}$:

55. $\frac{2^{-6}}{2^8}$
56. $\frac{3^{h+2}}{3^6}$
57. $\frac{27^3}{3^{-5}}$

58. $\frac{3^{-3}}{5^6,3^{-9}}$

59. $\frac{9^{-3}}{3^{-9}}$

60. $\frac{16^5}{4^6}$

61. $\frac{6^3,3^4}{2^6}$

Nota: Recuerde lo siguiente: $8^2 = \left(2^3\right)^2 = 2^{3,2} = 2^6$

1.11. Notación científica

Esta notación simplifica los cálculos y la escritura. Un número en notación científica se escribe como $Mx10^n$ donde M es un número entre 1 y 10.

Ejemplo 1.25

Masa de la tierra: 5970000000000000000000000 kg, que a través de la notación científica se puede escribir con la notación científica como: $5,97x10^{24}$ kg.

Ejemplo 1.26

Masa del protón: 0.00000000000000000000167262158 kg que a través de la notación científica se puede escribir con la notación científica como: 1,67262158 $\times$ 10^{-21}kg.

1.11.1. Regla de escritura de un número en notación científica

1. Mover el punto decimal en el número dado para que quede con un solo dígito a su izquierda. El número resultante es M.
2. Contar cuántas posiciones se deben mover en el punto decimal en el paso 1. Si el punto decimal debe moverse a la izquierda, n es positivo, si debe moverse a la derecha, n es negativo.
3. Escribir el número dado: $Mx10^n$.

Ejemplo 1.27

a. 868000, entonces: $8,68x10^5$ porque el punto decimal se mueve cinco posiciones hacia la izquierda, entonces el exponente 5 es positivo.

b. 0.00123456, entonces: $1,23x10^{-3}$ porque el punto decimal se mueve tres posiciones hacia la derecha, entonces el exponente 3 es negativo.

c. La conductividad térmica del vidrio es de 0.00025 entonces: $2,5x10^{-4}$ porque el punto decimal se mueve cuatro posiciones hacia la izquierda, entonces el exponente 4 es negativo.

d. 0.035(onzas en un gramo), entonces: $3,5x10^{-2}$ porque el punto decimal se mueve dos posiciones hacia la izquierda, entonces el exponente 2 es negativo.

Apoyo de la calculadora

Para escribir en la calculadora en notación científica, se debe realizar el siguiente proceso: ejemplo: escribir en la calculadora: $3,5x10^{-2}$, se escribe: 3,5 [exp] (−)2 [=] 0,035.
Se pueden hacer operaciones:

Ejemplo 1.28

$(7,75x10^5)(9,8x10^6)$ se debe realizar el siguiente proceso:
7,75 [exp] 5 × 9,8 [exp] 6 = $7{,}595^{[12]}$, este resultado se traduce como: $7,595x10^{12}$, si se desea escribir el número simplemente se escribe: 7.595.000.000.000.

Ejemplo 1.29

$(7,2x10^{-3})(3,5x10^{-8})$ se debe realizar el siguiente proceso: 7,2 [exp] (−)3 × 3,5 [exp] (−)8 = $2{,}52^{[-10]}$, este resultado se traduce como: $2,52x10^{-10}$.

(6) Ejercicios de trabajo en clase

Escriba en notación decimal los siguientes números:

62. $7,65 \times 10^5$
63. $9,3 \times 10^4$
64. $2,68 \times 10^3$
65. $1,86 \times 10^2$
66. $6,8 \times 10^{-3}$

Escriba los siguientes números en notación científica:

67. 98,0000
68. 0,000000152
69. 7,281, 3
70. 160,723, 4

71. 1,8

72. $0,08$

Multiplicar o dividir según sea el caso. Escribir el resultado en notación científica.

73. $\frac{\left(2{,}52\ \times 10^{-2}\ \right)}{\left(4{,}2\ \times 10^{-3}\ \right)}$

74. $\left(6 \times 10^{2}\right) . \left(2,3 \times 10^{3}\right)$

75. $\left(0,18 \times 10^{3}\right) . \left(1,28 \times 10^{-5}\right)$

76. $\frac{(2{,}52\times 10^{-2})}{(4{,}6\times 10^{-4})}$

1.12. Equivalencia entre radicales y exponentes

La raíz enésima de un número real a, se puede expresar como:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n},\ ya\ que\ \left(a^{1/n}\right)^{n} = a^{n/n} = a^{1} = a$$

Ecuación 12: Raíz n-ésima de un número real

Ejemplo 1.30

$$\sqrt[2]{25} = 25^{1/2}\ \ \sqrt[3]{729} = 729^{1/3}\,\sqrt[6]{4096} = 4096^{1/6}$$

1.13. Radicales equivalentes

Si dos radicales tienen índices diferentes, pero tienen el mismo valor numérico, se denominan radicales equivalentes. Al trabajar con radicales es importante tener en cuenta que, si se multiplica la cantidad subradical y el índice de la raíz por una misma cantidad, se obtiene un radical equivalente al inicial.

$$\sqrt[n]{a^{m}}\ y\ \ \sqrt[np]{a^{mp}}\ \ (p \neq 0)\ \text{son equivalentes si}\ \ \sqrt[n]{a^{m}} = a^{m/n} = a^{mp/np} = \sqrt[np]{a^{mp}}[con]p \neq 0$$

Ecuación 13: Equivalencia de radicales

1.14. Modificación de expresiones radicales

Cuando se haga necesario modificar expresiones radicales, es importante tener en cuenta que si se desea extraer un factor de un radical se modifican para expresarlos con un exponente igual al índice de la raíz ya que en este caso se puede extraer de la raíz. Para introducir factores en un radical se expresan los factores con un exponente igual al índice de la raíz.

1.15. Operaciones con radicales

1.15.1. Radical de un producto

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

Ecuación 14: Radical de un producto

Ejemplo 1.31

Si tenemos $\sqrt[3]{9 \times 8} = \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{9} =\cong 4,160$

1.15.2. Radical de un cociente

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ecuación 15: Radical de un cociente

Ejemplo 1.32

$$\text{Si tenemos } \sqrt[2]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[2]{16}}{\sqrt[2]{81}} = \frac{4}{9}$$

1.15.3. Potencia de un radical

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ecuación 16: Potencia de un radical

Ejemplo 1.33

$$\text{Si tenemos } \left(\sqrt[4]{16}\right)^2 \text{ esta expresión se puede escribir } \sqrt[4]{16^2} = 4$$

1.15.4. Radical de un radical

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

Ecuación 17: Radical de un radical

Ejemplo 1.34

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} \text{ esta expresión se puede escribir como } \sqrt[6]{64} = 2$$

1.16. Suma de radicales

La suma de radicales implica que los radicales deben tener el mismo índice y la misma cantidad subradical.

$$x.\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} = (x+y)\sqrt[n]{a}$$

Ecuación 18: Suma de radicales

Ejemplo 1.35

$$7\sqrt[2]{100} + 8\sqrt[2]{100} \text{ se puede escribir como } (15)\sqrt[2]{100} = 15 \times 10 = 150$$

(7) Ejercicios de trabajo en clase

Calcule el valor de la expresión:

77. $\sqrt{4} + \sqrt{25} - \sqrt{49}$
78. $\sqrt[3]{9} + 5\sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{-1}$
79. $\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{0} + \sqrt[7]{-1}$
80. $\sqrt{121} + \sqrt[3]{-64} + \sqrt[4]{16}$

Simplifique las siguientes expresiones:

81. $\sqrt[3]{x^4}$
82. $\sqrt[4]{81x^8y^4}$
83. $\sqrt{x^6}$
84. $\sqrt[5]{x^7}$

Extraer todos los factores posibles de los siguientes radicales:

85. $\sqrt{18}$
86. $\sqrt{98a^3b^5c^2}$
87. $\frac{1}{2a}\sqrt{168a^5b^3}$

88. $3\sqrt{48}$
89. $2\sqrt{75x^4y^3}$
90. $\frac{6-\sqrt{54}}{3}$

Solución del ítem 90) $3\sqrt{48} = 3\sqrt{2^4{,}3} = 3{,}2^2.\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

Introduzca todos los factores posibles en los siguientes radicales:

91. $2\sqrt{3y^2}$
92. $0,5m\sqrt[4]{8m^3}$
93. $3x\sqrt{3x^2}$
94. $x.y\sqrt[3]{x^2y}$

Aplicar propiedades y reducir la expresión:

95. $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}$
96. $\sqrt[3]{125\sqrt[2]{32.\sqrt[3]{8}}}$
97. Piense cómo se resuelve $5\sqrt{\frac{1}{12} + 2\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{27}}}$

Examinar si el resultado es racional o irracional

98. $\sqrt{5} + \sqrt{5}$
99. $\sqrt{16} + (4 - \sqrt{25})$
100. $\left(\sqrt{3} + \sqrt{3}\right) + \sqrt{27} - \sqrt{3}$

1.17. Racionalización

La racionalización consiste en expresar una fracción sin radicales en el denominador.

Con fracciones del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}}$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{b}$, para obtener:

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}}$$

Ecuación 19: Racionalización de una expresión con raíz cuadrada en el denominador

Ejemplo 1.36

$$\text{sea } \frac{9}{\sqrt{625}} \text{ podemos escribir } \frac{9\sqrt{625}}{\sqrt{625}\sqrt{625}} \text{ por lo tanto obtenemos } \frac{9\sqrt{625}}{625} = \frac{9}{25}$$

Con fracciones del tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$, con $m < n$, se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$, y se obtiene:

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a.\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}.\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a.\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a.\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}}$$

Ecuación 20: Racionalización de una expresión con raíz n-ésima en el denominador

Ejemplo 1.37

$$\frac{5}{\sqrt[4]{25^2}} \text{ equivale a } \frac{5\sqrt[4]{25^{4-2}}}{\sqrt[4]{25^2}.\sqrt[4]{25^{4-2}}} \text{ por tanto } \frac{5\sqrt{25^2}}{\sqrt[4]{25^4}} \text{ es igual a } \frac{5\sqrt[4]{25^2}}{25}$$

Fracciones del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ se multiplica numerador y denominador por la conjugada del denominador:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)} = \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}$$

Ecuación 21: Racionalización de una expresión con suma de raíces en el denominador

Ejemplo 1.38

$$Sea \quad \frac{4}{\sqrt{225}+\sqrt{100}} = \frac{4\left(\sqrt{225}-\sqrt{100}\right)}{\left(\sqrt{225}+\sqrt{100}\right)\left(\sqrt{225}-\sqrt{100}\right)} = \frac{4\times 5}{\left(\sqrt{225}\right)^2-\left(\sqrt{100}\right)^2} = \frac{4}{25}$$

Ejemplo 1.39

a. $\frac{3}{5\sqrt{x}} = \frac{3}{5\sqrt{x}}.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{5x}$

b. $\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}.\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x+1-1} = \frac{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x} = \sqrt{x+1}-1$

(8) Ejercicios de trabajo en clase

Racionalice las siguientes expresiones. No olvide simplificar el resultado.

101. $\frac{4x}{\sqrt{2x}}$

102. $\frac{2a-3b-\sqrt{ab}}{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}$

103. $\frac{5}{\sqrt[3]{x}-1}$

104. $\frac{x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}$

105. $\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{x}$

1.18. Logaritmación

La logaritmación es la operación inversa a la potenciación que consiste en determinar el exponente al que hay que elevar una base dada conocida para obtener una potencia determinada.

$$log_a b = n \iff a^n = b$$

Ecuación 22: Definición de logaritmo

Ejemplo 1.40

1. $log_2 1 \ = 0 \ porque \ 2^0 = 1$
2. $log_2 8 = 3 \ porque \ 2^3 = 8$
3. $log_{1/2} 4 \ = 2 \ porque \ \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

Para tener presente:

Se denomina logaritmos decimales o comunes a aquellos logaritmos cuya base es 10 y se escribe como $logb$, también logaritmos naturales o neperianos a aquellos cuya base es el número $e = 2{,}7182812$ y escribe Ln.

1.18.1. Propiedades

Sean a, x, y números reales no negativos y $a \neq 1$. Entonces,

1. $\boldsymbol{log_a xy = log_a x \ + log_a y}$

Ecuación 23: Logaritmo de un producto

Ejemplo 1.41

a. $log_3(27) = log_3(3)(3)(3) \quad = log_3 3 \ + log_3 3 \ + log_3 3$

b. $log_2 8 \ + log_2 10 \ + log_2 5 \ = log_2(8)(10)(5) \ = log_2 400$

Determine x tal que:

$$\begin{aligned} log_{10}x &= log_{10}20 + log_{10}5 + log_{10}10 \\ log_{10}x &= log_{10}(20)(5)(10) = log_{10}1000 \\ &= log_{10}10^3 \text{ Obtenemos} \\ log_{10}x &= 3, \text{ por tanto} \\ x &= 10^3 \end{aligned}$$

II. $\boldsymbol{log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y}$

Ecuación 24: Logaritmo de un cociente

Ejemplo 1.42

a. $log\frac{20}{2} = log20 - log2$

b.

$$\begin{aligned} & log3 - log2 - log3 + log24 \\ & = log3 + log24 - log2 - log3 \\ & = log3 + log24 - (log2 + log3) \\ & = log3 \times 24 - log2 \times 3 \\ & = log72 - log6 = log12 \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} & log\frac{abc}{xy} = logabc - logxy \\ & loga + logb + logc - logx - logy \end{aligned}$$

III. $\boldsymbol{log_a x^y = y log_a x}$

Ecuación 25: Logaritmo de una potencia

Ejemplo 1.43

a. $log_3 3^5 = 5\ log_3 3 = 5$

b. $log_{\sqrt{2}} 32 = log_{2^{1/2}} 2^5 = (5/(\frac{1}{2})\ \ )log_2 2 = 10$

c.

$$\begin{aligned} log_9 15 = log_{3^2} 15 &= log_{3^2}(5)(3) = log_{3^2} 5 + log_{3^2} 3 \\ &= \frac{1}{2} log_3 5 + \frac{1}{2} log_3 3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} log_3 5 \end{aligned}$$

(9) Ejercicios de trabajo en clase

Escribir las siguientes igualdades en forma logarítmica:

106. $2^5 = 32$

107. $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

108. $10^3 = 1000$

Exprese en forma exponencial:

109. $log_2 32 = 5$

110. $log_3 243 = 5$

111. $log 0{,}001 = -3$

Determine el valor de x:

112. $x = log_3 27$

113. $x = log_2 0{,}125$

114. $log_4 x = 2/3$

115. $log_5 x = 0$

116. $log x = -0{,}02$

1.18.2. Ejercicios del capítulo: trabajo independiente

Ejercicios de la sección 1.1

1-5 Seleccione de los signos $<,>$ o $=$ que dan la afirmación verdadera:

1. 3^{-1}_____7^{-1}____$\frac{19}{100}$
2. -3^2+2^2____0
3. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$_____$1,618$
4. $\sqrt{2}$____$1,41422$
5. $\sqrt{3^2+4^2}$_____5

6-10 Efectué las siguientes operaciones y simplifique el resultado:

6. $(8 \div 2+5) \div (7-4 \times 8)$
7. $(11 \div 3-2 \div 9) \div (5 \div 3-7 \div 6)$
8. $\sqrt{(4-3\times 5)^2}+2\times |3| -5\times |3-4|$
9. $\frac{2}{3}\times \left(\frac{3}{2}+5\right) -4+10\div 2$
10. $\sqrt[60]{(-9)^{60}}-\sqrt[5]{(-7)^5}$

11-14 Exprese los siguientes números racionales en la forma a/b, con a y b enteros:

11. $0,2\overline{57}$
12. $0,31\overline{2}$
13. $0,\overline{123}$
14. $0,78\overline{523}$

15-16 Si a y b son números reales con $a>b>0$,verifique las siguientes identidades:

15. $\frac{|a+b|-|b-a|}{2}=b$
16. $\frac{|a-b|+|b+a|}{2}=b$

Ejercicios de la sección 1.6

17. Muestre que el cuadrilátero con vértices $ABCD$ es un rombo, con $(-4,3)$, $B(5,6)$, $C(8,15)$ y $D(-1,12)$

18. Dado un cuadrilátero con vértices $ABCD$ tenemos $A(-2,3), B(1,5), C(0,2)$ y $D(-3,0)$, haga el gráfico y demuestre que los vértices son los de un paralelogramo.

19. Determine los valores de a, para los que la distancia entre $(a,3)$ y $(5,2a)$ es mayor a $\sqrt{26}$.

Ejercicios de la sección 1.10

Realice las operaciones y simplifique al máximo cada resultado. Compruebe su resultado usando calculadora.

20. $4096^{1/12}$

21. $(-27)^{4/3}$

22. $(-8)^{1/3} \div \sqrt[3]{8}$

23. $(-0{,}001)^{-2/3}$

24. $\sqrt{125} + \sqrt{45}$

25. $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$

26. $\left(\frac{81}{16}\right)^{3/4}$

27. $\left(\frac{81}{16}\right)^{-3/4}$

28. $\left(-\frac{81}{16}\right)^{-3/4}$

Realice las operaciones indicadas y simplifique el resultado:

29. $\frac{2}{3} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{64}}$

30. $\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{24} + 3\sqrt[3]{375}$

31. $\left[\frac{2^5+2^3-(1/8)}{3+2^3}\right]\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} + 2^{-1}\right]$

32. $\left[(-1)^2 - 2^{-3} \div \frac{1}{2}\right]^{-1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\left[2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\right] - 3^0 \times 3^{-2}$

33. $\frac{\left[3^{-2}-(-2)^{-2}\right]^{-1}}{3-\frac{3(-2)}{3-2}}$

34. $\left[(-3)^2 \div 9^{1/2} - \frac{2}{3}\right]^{-1} - \left(\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}\right) \times 2^{-1/3} - 4 \times 4^{-1}$

Racionalice y simplifique el resultado de las siguientes expresiones:

35. $\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

36. $\frac{\sqrt{x+1}+1}{x}$

37. $\frac{7}{5\sqrt{x}-2\sqrt{a}}$

38. $\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

39. $\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

40. $\frac{4-\sqrt{x}}{x-16}$

Efectué las operaciones indicadas, reescriba el resultado de manera simplificada, sin exponentes negativos y sin radicales en el denominador.

41. $\left(2a^3b\right)^4\left(\frac{-a^3}{4b^2}\right)^3$

42. $\left(\frac{8x^2y^4}{-125x^{1/2}y^{1/4}}\right)^{1/3}$

43. $a^{1/8}\left[a^{1/4}\left(a^{1/2}\right)^{-4}\right]^{-1/2}$

44. $\frac{x^{2/7}y^{-2/5}}{x^{1/3}y^{-1/5}}$

45. $\sqrt[4]{\frac{5x^7y^5}{27x^2y^2}}$

46. $\sqrt[5]{\frac{8x^3}{y^4}} \times \sqrt[5]{\frac{4x^4}{y^2}}$

Ejercicios de la sección 1.18

47-52 Exprese en forma exponencial:

47. $log_3 9 = 2$

48. $log_7 1 = 0$

49. $log_{10} 0{,}1 = -1$

50. $log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

51. $ln 5 = x$

52. $ln\,(x+1) = 2$

53-58 Exprese la ecuación en forma logarítmica:

53. $10^3 = 1000$
54. $81^{1/2} = 9$
55. $4^{-3/2} = 0{,}125$
56. $e^x = 2$
57. $e^3 = y$
58. $e^{x+1} = 0{,}5$

59-63 Evalué las siguientes expresiones:

59. $log_5 5^4$
60. $log_3 \left(\frac{1}{27}\right)$
61. $log_{10} \sqrt{10}$
62. $log_5 0{,}2$
63. $log_6 1$

1.18.3. Aplicación con Tecnología

Desarrolle los siguientes ejercicios usando el programa www.symbolab.com www.wolframalpha.com donde podrá evidenciar los procesos desarrollados analíticamente.
Ejemplo de vista del *software* Symbolab.

Figura 1.14. Vista del programa Symbolab
Fuente: *software* www.wolframalpha.com

64-70 Encuentre el conjunto solución de las siguientes operaciones entre conjuntos usando diagramas de Venn.

64. $A \cup B$

65. $B \cap C$

66. $A \cap B \cap C$

67. $B \cup C \cap A$

68. $(A \cup B \cup C)^c$

69. $A - B$

70. $C^c - A$

Figura 1.15. Vista del programa Wolfram Alpha
Fuente: *software* www.wolframalpha.com

71-73 Realice las siguientes operaciones y exprese en notación científica.

71. $\left(2{,}3840 \times 10^{12}\right)\left(6{,}52 \times 10^{20}\right)$

72. $\frac{3{,}68975\times 10^{11}}{(5{,}215\times 10^{-14})(1{,}253\times 10^{7})}$

73. $\frac{\left(1{,}235\times 10^{-9}\right)^{5}}{(8{,}52\times 10^{3})^{15}}$

74-77 simplifique las siguientes expresiones e indique la ley de exponentes aplicada para cada ejercicio:

74. $\sqrt[8]{t^7}\,\sqrt[4]{t^3}$

75. $\sqrt[5]{x\sqrt{x}}$

76. $\frac{\sqrt[6]{t^2}}{\sqrt[6]{t}}$

77. $\sqrt{\frac{81a^3b}{ab^7}}$

78- 85 Resuelva las siguientes ecuaciones en forma analítica y gráfica hallando el dominio y rango:

78. $\sqrt{5\sqrt{20}+\sqrt{x}}-\sqrt{5\sqrt{20}-\sqrt{x}}=\sqrt[5]{625}$

79. $\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{x^2}$

80. $\frac{a\sqrt{t}+c}{c\sqrt{t}+a}=\frac{a\sqrt{t}+c-2a}{c\sqrt{t}-a}$

81. $log\,(x-12)\ -log6\ =\frac{1}{6}log\,(4x+8)$

82. $x^{logx}\ =\frac{10}{x}$

83. $5^{3-log_5 x}\ =125x$

84. $\left(\sqrt{x}\right)^{log_8 x-2}\ =8$

85. $x^{\frac{logx+9}{5}}=10^{logx+6}$

86. **Proyectos aplicados a las ciencias básicas**

La esencia de la ingeniería es la solución de los problemas de la vida cotidiana mediante la aplicación de las matemáticas. A continuación encontrará unas ideas para solucionar problemas en contexto cotidianos mediante la aplicación de los contenidos vistos en clase.

- La visita imposible al museo: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/fops3.html
- Encontrar patrones con poderes: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/fops2.html

Ejemplo de vista:

Figura 1.16. Fuente: https://www.stewartmath.com/media/8_home.php

- El número de Oro (ϕ)

La geometría tiene dos grandes tesoros, uno es el teorema de Pitágoras y el número áureo cuyo valor es $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033988\ldots$ que corresponde a un número irracional también llamado divina proporción.
Este número aparece en el arte, la naturaleza y el diseño. Es por eso que lo llaman de número de Oro.
El modo de obtenerlo es tomando la solución positiva de la ecuación $x^2 - px - q = 0$, donde p y q son iguales a 1.

Tomando como herramienta el *software* GeoGebra (https://www.geogebra.org) realice las siguientes representaciones.

- Espiral áurea o espiral de Durero.
- Proporciones áurea número de oro para rostro

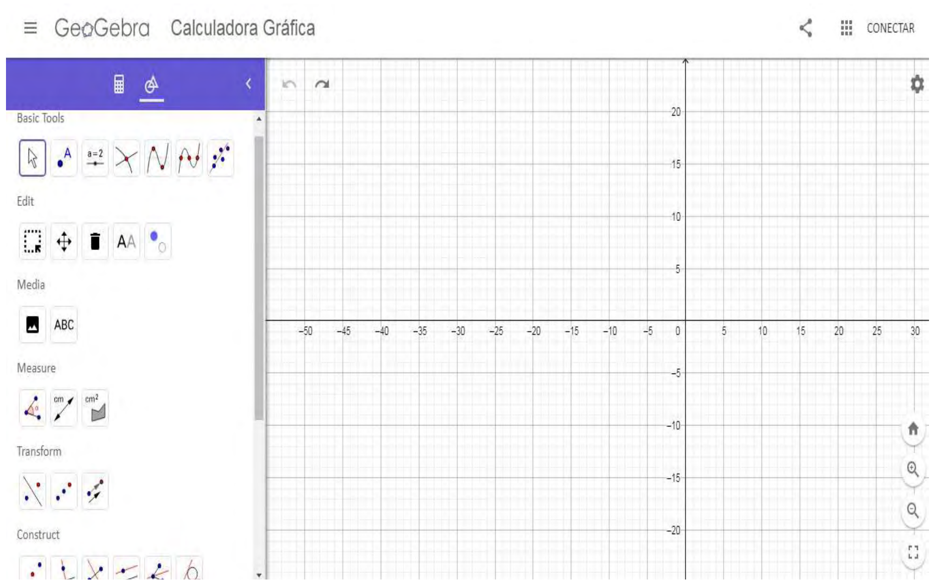


Figura 1.17. Vista del *software* GeoGebra

Solución de los ejercicios de trabajo en clase

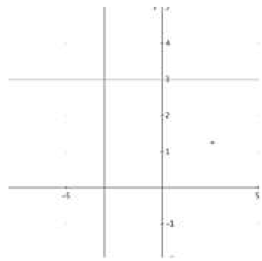
7. $\frac{781}{333}$
9. $\frac{2}{7}$

13. $\frac{10}{10} = 1$

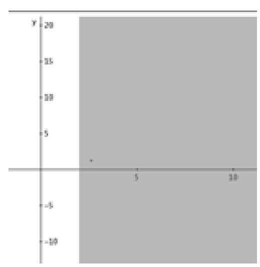
17. -15

19. -10

23.



25.



29. $\sqrt{10}$

31. $\sqrt{53} + \sqrt{58} + \sqrt{41} \cong 21{,}29901\ldots$

33. Los puntos sí corresponden a un triángulo isósceles. (Existen dos lados que son iguales de medida $\sqrt{65}$).

35.

37.

39.

45. Sin solución para $x \in \mathbb{R}$

47. $x = -\frac{1}{5}$ o $x = 1$

49. $x = -2$ o $x = 5$

51. Aplicando las leyes de los exponentes: $x^m x^n = x^{m+n}$

$$a^{-5}.a = a^{-5+1} = a^{-4}$$

53. Aplicando las leyes de los exponentes: $x^{-1} = \frac{1}{x^p}$

$$\frac{1}{\left(p^{4x-47}\right)^6}$$

55. Aplicando las leyes de los exponentes: $x^{-1} = \frac{1}{x^p}$

$$\frac{1}{\left(a^{2x-3}\right)^3}$$

59. Aplicando las leyes de los exponentes: $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

$$\left(\frac{x^{4a-5}}{a.b}\right)^{4a+3b}$$

61. 3^{h-4}

63. $\frac{3^6}{5^6}$

65. 256

67. $10^5 = 100000 \Rightarrow 100000 \times 7{,}65 = 765000$

69. $10^3 = 1000 \Rightarrow 1000 \times 2{,}68 = 2680$

71. $10^{-3} = 0{,}001 \Rightarrow 0{,}001 \times 6{,}8 = 0{,}0068$

73. $1{,}52 \times 10^{-7}$

75. $1{,}607234 \times 10^5$

77. 8×10^{-2}

79. $13{,}8 \times 10^5$

81. 252×10^2

83. $\sqrt[n]{-1} = -1$, si n es impar

$$\sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\sqrt[3]{9} - 10 - (-1) = \sqrt[3]{9} - 9$$

85. 9

87. Aplicar propiedad de los radicales:
$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$, cuando a≥ 0

$$3x^2\sqrt[4]{y^4} = 3x^2y$$

91. Aplicar propiedades de los radicales:

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

$$= \sqrt{98}\sqrt{c^2}\sqrt{a^3b^5}$$

$$= 7\sqrt{2}c\sqrt{a^3b^5}$$

103. $2\sqrt{5} \cong 4{,}47214\ldots$

105. $7\sqrt{2} + \sqrt{3} \cong 11{,}63155\ldots$

107. $\frac{\left(2a-3b-b\sqrt{a}\right)\left(2\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)}{4a-9b}$

109. $\sqrt{x+3} + \sqrt{3}$

111. Aplicando definición de logaritmo: $a^n = b \Rightarrow log_a b \ = n$

$$a = 2, b = 32, n = 5$$

$$log_2 32 \ = 5$$

115. $3^4 = 81$

117. $x = 3$

119. $x = 4^{2/3}$

Solución de los ejercicios de trabajo independiente

7. $\frac{\frac{11}{3}-\frac{2}{9}}{\frac{5}{3}-\frac{7}{6}} = \frac{62}{9}$, en forma decimal $6{,}88889\ldots$

9. $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}+5\right) - 4 + \frac{10}{2} = \frac{16}{3}$

11. $\frac{17}{66}$

13. $\frac{41}{333}$

21. Aplicar las leyes de los exponentes:

$$(-a)^{m/n} = (-1)^{m/n}(a)^{m/n}$$

$$(-27)^{\frac{4}{3}} = (-1)^{\frac{4}{3}}(27)^{\frac{4}{3}} = 81$$

25. Aplicar las propiedades de los radicales:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt{2}\,\sqrt[6]{3}$$

27. Aplicar las leyes de los exponentes:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right)^{c} = \left(\frac{b}{a}\right)^{c} = \left(\frac{16}{81}\right)^{-3/4}$$

Aplicar las leyes de los exponentes:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{c} = \frac{a^c}{b^c} = \frac{16^{3/4}}{81^{3/4}} = \frac{8}{27}$$

29. Reescribir las fracciones basándose en el mínimo común denominador:

$$\frac{2 \times 100}{300} + \frac{75}{300} - \frac{3^2 \times 12}{300}$$

Combinar las fracciones $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$

Se obtiene $\frac{2 \times 100 + 75 - 3^2 \times 12}{300} = \frac{167}{300}$

31. $\left[\frac{2^5+2^3-(1/8)}{3+2^3}\right]\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} + 2^{-1}\right] = -\frac{667}{144}$

33. $\frac{\left[3^{-2}-(-2)^{-2}\right]^{-1}}{3-\frac{3(-2)}{3-2}} = -\frac{5}{324} = -0{,}01543\ldots$

35. Multiplicar la fracción por la raíz para quitar el radical del numerador.

$$\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \text{ obtenemos como resultado:}$$

$$\frac{x-3}{x\sqrt{x+1} + 2x + 3\sqrt{x+1} + 6}$$

37. Multiplicar la fracción por el conjugado.

$$\frac{7}{5\sqrt{x}-2\sqrt{a}}$$

Obtenemos como resultado:

$$-\frac{7(55\sqrt{x}-2\sqrt{a}}{4a-25x}$$

41. Aplicar las leyes de los exponentes:

$$(a.b)^n = a^n.b^n \ y \ \left(a^b\right)^c = a^{bc}$$

$$\left(2a^3b\right)^4\left(\frac{-a^3}{4b^2}\right)^3 = 2^4\left(-\frac{a^9}{4^3b^6}\right)a^{12}b^4$$

Aplicando las leyes de exponentes:

$$a^b.a^c = a^{b+c}$$

$$obtenemos \ -\frac{a^{21}}{4b^2}$$

43. Usar la regla de la potencia $a^b.a^c = a^{b+c}$

Combinando exponentes:

$$a^{1/8}\left[a^{1/4}\left(a^{1/2}\right)^{-4}\right]^{-1/2} = a^{-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\left(\left(a^{1/2}\right)^{-4}\right)^{-1/2}}$$

Da como resultado a.

45. Aplicar las leyes de los exponentes $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$:

$$\sqrt[4]{\frac{5x^7y^5}{27x^2y^2}} = \sqrt[4]{\frac{5x^5y^3}{27}}$$

47. $log_5 25 = 2$ conversión a forma exponencial $5^2 = 25$

49. $log_{10} 0{,}1 = -1$ conversión a forma exponencial $10^{-1} = 0{,}1$

51. Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$a = log_b b^a$$

$$5 = ln\left(e^5\right) \ \Rightarrow lnx = ln\left(e^5\right)$$

da como resultado $e^5 = x$

DOS

ÁLGEBRA

No supongas que la matemática es dura y avinagrada y repulsiva para el sentido común. Se trata simplemente de la idealización del sentido común.

William Thomson

Las letras suelen representar cantidades desconocidas. Por medio del algebra es posible realizar la traducción al lenguaje de las matemáticas al lenguaje cotidiano.

Ejemplo 2.1

Tabla 2.1. Lenguaje matemático y lenguaje habitual

El siguiente de un número entero, más tres unidades	$(x+1)+3$
El doble de un número más su mitad	$2n+\frac{n}{2}$
La tercera parte de un número, más el doble de dicho número	$\frac{p}{3}+2p$

Una expresión algebraica es el resultado de mezclar variables mediante las operaciones matemáticas básicas. En una expresión algebraica, al sustituir las variables por sus valores numéricos y realizar las operaciones indicadas se obtiene el valor numérico de la expresión. El dominio de una expresión algebraica es el conjunto de números que no indeterminan la expresión. La indeterminación se presenta principalmente por raíces de índice par y cantidad subradical negativa y por fracciones con denominador negativo.

Tabla 2.2. Valor de una expresión algebraica

Expresión	Dominio	Valor típico
$x^4+4x-\frac{8}{\sqrt{x}}$	Toda $x>0$	*En* $x=44^3+5\,(4)-\frac{8}{\sqrt{4}}=16$
$\frac{3xy-\left(6/x^2\right)}{\sqrt[3]{y-1}}$	Toda $x\neq 0$ *y* $y\neq 1$	*En* $x=1$ *y* $y=9\,\frac{2(1)(9)-\left(6/1^2\right)}{\sqrt[3]{9-1}}=\frac{12}{2}=6$

Existen expresiones algebraicas, según el número de términos: el monomio consta de un sumando y el polinomio de más de un sumando. Entre los polinomios hay binomios y trinomios de dos y tres términos respectivamente.

2.1. Polinomios

Un polinomio en x es una suma de la forma $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, donde n es un entero positivo y los coeficientes a_k son números reales. Si $a_n\neq 0$, entonces el polinomio es de grado n.

A continuación se presentan algunos polinomios y sus características:

Tabla 2.3. Polinomios: sus coeficientes y su grado

Ejemplo	Coeficiente principal	Grado
$3x^4+5x^3+(-7)\,x+4$	3	4
$x^8+9x^2+(-2)\,x$	1	8
$-5x^2+1$	-5	2
$7x+2$	7	1
8	8	0

Si el coeficiente de un término en un polinomio es negativo, se utiliza un signo menos a la izquierda del término.

$$3x^2+(-5)\,x+(-7)=3x^2-5x-7$$

Además de la variable x se acostumbran a usar otras letras en los polinomios, por ejemplo:

$$\frac{2}{5}z^2-3z^7+8-\sqrt{5}z^4$$

Los polinomios se ordenan en forma descendente con respecto a los exponentes y alfabéticamente con relación a las letras.

$$\frac{2}{5}z^2-3z^7+8-\sqrt{5}z^4=-3z^7-\sqrt{5}z^4+\frac{2}{5}z^2+8$$

Las expresiones algebraicas que contengan radicales con variables en las cantidades subradical, fracciones con variables en los denominadores, no son considerados polinomios, por ejemplo:

No polinomios

$$\frac{1}{x}+3x \qquad \frac{x-5}{x^2+2} \qquad 3x^2+\sqrt{x}-2$$

Para el manejo de las operaciones algebraicas entre polinomios se mantienen las reglas conocidas.

Adición y sustracción de polinomios

Ejemplo 2.2

a) Sumar $\left(x^3+2x^2-5x+7\right)+\left(4x^3-5x^2+3\right)$

b) Restar $(x^3+2x^2-5x+7)-(4x^3-5x^2+3)$

Solución:

a) La suma de dos polinomios implica el uso de la reducción de términos semejantes

$$\begin{array}{lr}
\left(x^3+2x^2-5x+7\right)+\left(4x^3-5x^2+3\right) & \\
x^3+2x^2-5x+7+4x^3-5x^2+3 & \text{Quitar paréntesis} \\
(1+4)\,x^3+(2-5)\,x^2-5x+(7+3) & \text{Reducir términos semejantes en } x \\
5x^3-3x^2-5x+10 & \text{Simplificar}
\end{array}$$

b) Al realizar la resta entre polinomios, se retiran los paréntesis teniendo en cuenta el efecto del signo que precede el segundo paréntesis sobre el contenido del paréntesis.

$$\begin{array}{lr}
\left(x^3+2x^2-5x+7\right)-\left(4x^3-5x^2+3\right) & \\
x^3+2x^2-5x+7-4x^3-5x^2+3 & \text{Quitar paréntesis} \\
(1+4)\,x^3+(2+5)\,x^2-5x+(7-3) & \text{Reducir términos semejantes de } x \\
-3x^3+7x^2-5x+4 & \text{Simplificar}
\end{array}$$

2.1.1. Multiplicación de binomios

Ejemplo 2.3

Determine el producto de $(4x+5)\,(3x-2)$
Solución:

$$\begin{array}{ll} (4x+5)(3x-2) & \\ (4x)(3x)+(4x)(-2)+(5)(3x)+(5)(-2) & \text{Propiedades distributivas} \\ 12x^2-8x+15x-10 & \text{Multiplicar} \\ 12x^2+7x-10 & \text{Simplificar} \end{array}$$

2.1.2. Multiplicación de polinomios

Ejemplo 2.4

Encuentre el producto de $(x^2+5x-4)(2x^3+3x-1)$

Solución:

Usando la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que $2x^3+3x-1$ es un factor, se obtiene:

$$(x^2+5x-4)(2x^3+3x-1) = x^2(2x^3+3x-1)+5x(2x^3+3x-1)-4(2x^3+3x-1)$$

Luego de realizar la distribución del factor y la reducción de términos semejantes, se obtiene:

$(x^2+5-4)(2x^3+3x-1)$
$2x^5+3x^3-x^2+10x^4+15x^2-5x-8x^3-12x+4$
$2x^5+10x^4-5x^3+14x^2-17x+4$

2.1.3. División de un polinomio entre un monomio

Ejemplo 2.5

Exprese como un polinomio en x y y: $\dfrac{6x^2y^3 4x^3y^2-10xy}{2xy}$
Solución:

$$\frac{6x^2y^3+4x^3y^2-10xy}{2xy} = \frac{6x^2y^3}{2xy}+\frac{4x^3y^2}{2xy}-\frac{10xy}{2xy} = 3xy^2+2x^2y-5$$

A continuación se muestran las fórmulas para determinar por simple inspección el producto de dos factores algebraicos. En (2) y (3), son usados los símbolos superiores en ambos lados o el signo inferior en ambos lados. Así (2) es en realidad dos fórmulas:

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2 \qquad y \qquad (x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$

Del mismo modo, (3) donde esta representa dos fórmulas.

2.1.4. Fórmulas del producto

Tabla 2.4. Fórmulas de productos notables

Fórmula	Ejemplo
$(1)(x+y)\,(x-y)=x^2-y^2$	$(2a+3)\,(2a-3)=(2a)^2-3^2=4a^2-9$
$(2)(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$	$(2a-3)^2=(2a)^2-2\,(2a)\,(3)+(3)^2=4a^2-12a+9$
$(3)(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$	$(2a+3)^3=(2a)^3+3\,(2a)^2\,(3)+3\,(2a)\,(3)^2+(3)^3=$ $8a^3+36a^2+54a+27$

Ejemplo 2.6

Encuentre los productos:

1. $(2r^2-\sqrt{s})(2r^2+\sqrt{s})$
2. $(\sqrt{c}+\frac{1}{\sqrt{c}})^2$
3. $(2a-5b)^3$

Solución:

1. Usando la fórmula (1) del producto, con $x=2r^2$ y $y=\sqrt{s}$:

$$(2r^2-\sqrt{s})(2r^2+\sqrt{s})=(2r^2)^2-(\sqrt{s})^2$$
$$(2r^2-\sqrt{s})(2r^2+\sqrt{s})=4r^4-s$$

2. Usando la fórmula (2) del producto, con $x=\sqrt{c}$ y $y=\frac{1}{\sqrt{c}}$:

$$\left(\sqrt{c}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2=\left(\sqrt{c}\right)^2+2\sqrt{c}\frac{1}{\sqrt{c}}+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$$
$$\left(\sqrt{c}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2=c+2+\frac{1}{c}$$

Tenga en cuenta que la última expresión no es un polinomio

3. Usando la fórmula (3) del producto, con $x = 2a$ y $y = 5b$:

$$(2a - 5b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2(5b) + 3(2a)(5b)^2 - (5b)^3$$
$$(2a - 5b)^3 = 8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3$$

(1) Ejercicios de trabajo en clase

1. Determine la edad y la estatura de un compañero mediante la siguiente serie de pasos:

   a. Escriba la edad de él/ella
   b. Multiplíquela por 2
   c. Sume 5
   d. Multiplique la suma por 50
   e. Reste 365
   f. Sume la estatura de él/ella
   g. Sume 115

Los dos primeros dígitos del resultado corresponden a la edad y los dos últimos a la estatura de su compañero. Justifique la razón por la que sucede esto.
Halle el valor del polinomio para cada uno de los valores.

2. $x^2 - 8x + 6$ para $x = -6$
3. $\sqrt{5}x^2 + 10x - 3\sqrt{2}$ para $x = 10$
4. $5x - 3x^2 - 9x^3$ para $x = -1$
5. $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ para $x = -2$
6. $\frac{1}{6}x + 1$ para $x = -3$

Exprese el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios:

7. $y^3 - y^2 + y^{1/3} - 7$
8. $t^4 - t^3 + t^{-1} - 1$
9. $7x^{100} - 4x^{99} + 26x^{101} - 5$
10. $3 + 2x - \sqrt{7}x^3 + \frac{1}{2}x^{-10}$
11. $\sqrt{r} - 4$

12. $z^2(5z^3 - 4z + 18)$

Realice las operaciones, simplifique y ordene el polinomio:

13. $\left(3x^5 - 5x^2 + 4x - 7\right) + (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$
14. $\left(4x^{10} - 7x^5 + 1\right) + (3x^5 + 2x^2 - 7x + 1)$
15. $(y^3 - 3y^2 + 7y - 8) + (5y^3 + 4y^2 - 9y + 1)$
16. $\left(\sqrt{2}z^5 - 6z^3 + 17z + \sqrt[3]{6}\right) + (z^4 + 16z^3 - 5z + \sqrt{6})$

2.2. Factorización

Es una operación que consiste en expresar un polinomio como un producto de polinomios. Por ejemplo, $3x^2$ y x^2+2 son factores de $3x^4+6x^2$ porque:

$$3x^4+6x^2= 3x^2(x^2+2)$$

Generalmente se buscan como factores, polinomios de primer grado o polinomios de grado mayor.
Cuando se factoriza se obtienen expresiones que reemplazan al polinomio por una serie de factores lineales. Un ejemplo es:

$$5x^3+6x^2-29x-6 = (5x+1)(x-2)(x+3)$$

Uno de los usos de la factorización es simplificar expresiones algebraicas; otro es resolver ecuaciones. En los siguientes ejemplos se presentan estas situaciones:

Ejemplo 2.7

Factorice $6x^4y^4-4x^2y^2+10\sqrt{2}xy^3-2xy^2$.

Solución: ya que $2xy^2$ es un factor común, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&6x^4y^4 - 4x^2y^2 + 10\sqrt{2}xy^3 - 2xy^2 \\
&2xy^2(3x^3y^2) - 2xy^2(2x) + 2xy^2(5\sqrt{2}y) - 2xy^2 \\
&2xy^2(3x^3y^2 - 2x + 5\sqrt{2}y - 1)
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.8

Factorice $x^2+2xy-x-2y$

Solución: cuando se organiza la expresión reuniendo los dos primeros y los dos últimos términos:

$$x^2+2xy-x-2y=\left(x^2+2xy\right)+(-x-2y)$$

$$x^2+2xy-x-2y=x\ \ (x+2y)+(-1)(x+2y)$$

Observe el factor común $x+2y$

$$x^2+2xy-x-2y=(x-1)\ \ (x+2y)$$

Si se invierten las fórmulas de los productos notables, se obtienen las fórmulas de factorización, que corresponden a las expresiones (1), (2), (3) y (4) escritas de forma inversa.

1. Cuadrado perfecto: $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
2. Diferencia de cuadrados perfectos: $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$
3. Diferencia de cubos perfectos: $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$
4. Suma de cubos perfectos: $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$

Ejemplo 2.9

Factorice $16x^4y^2-25$

Solución: esta es la diferencia cuadrados, para factorizar, se utiliza la fórmula 2, teniendo en cuenta que $x=4x^2y$ y $a=5$:

$$16x^4y^2-25=(4x^2y)^2-(5)^2$$

$$16x^4y^2-25=(4x^2y-5)(4x^2y+5)$$

Ejemplo 2.10

Factorice $8a^3+27b^6$

Solución: ya que $8a^3+27b^6$ es una suma de cubos, se puede factorizar usando la fórmula 4. Si identificamos $x=2a$ y $y=3b^2$, entonces:

$$8a^3+27b^6=(2a)^3+(3b^2)^3$$

$$8a^3+27b^6=(2a+3b^2)((2a)^2-(2a)\left(3b^2\right)+(3b^2)^2)$$

$$8a^3+27b^6=(2a+3b^2)(4a^2-6ab^2+9b^4)$$

2.2.1. Factorización de polinomios de segundo grado

Los polinomios cuadráticos de la forma ax^2+bx+c, donde a, b y c son enteros se puede factorizar como una expresión de la forma:

$$(ax+b)\,(cx+d)$$

Donde a, b, c y d corresponden a números enteros. Si el polinomio tiene como coeficiente principal $a=1$ será de la forma x^2+bx+c y tiene una factorización que se puede expresar de la forma:

$$(x+b)(x+d)$$

con valores para b y d correspondientes a números enteros.

Ejemplo 2.11

Factorice $x^2-9x+18$

Solución: con $b=-9$ y $c=18$, se buscan los números enteros de b y tales que:

$$b+d=-9 \text{ y } bd=18$$

Es posible obtener a 18 como el producto bd a partir de las siguientes expresiones:

$$1(18),\ 2(9),\ 3(6),\ (-1)(-18),\ (-2)(-9)\ o\ (-3)(-6)$$

Ya que -9 es la suma de -3 y -6, la factorización es:

$$x^2-9x+18=(x-3)(x-6)$$

Ejemplo 2.12

Factorice x^2+3x-1

Solución: se puede escribir el número -1 como el producto de los números enteros bd solamente de una sola forma: $(-1)\,(1)$. debido a que la suma

$$b+d=-1+1\neq 3$$

De tal forma que el polinomio x^2+3x-1 no puede ser factorizado mediante el uso de coeficientes enteros.

En el caso del polinomio ax^2+bx+c, con $a\neq 1$, se factoriza como $(Ax+B)(Cx+D)$ si:

$$AC=a, AD+BC=b, BD=c$$

Ejemplo 2.13

Factorice $2x^2+11x-6$

Solución: como primer paso se establecen los factores:

$$(2x+\quad)(1x+\quad)$$

Y luego estos factores se completan con dos números enteros B y D cuyo producto debe ser igual a -6. Los pares posibles son:

$$1y-6, \quad -1y6, \quad 3y-2, \quad -3y2$$

Se selecciona la pareja -1, 6 ya que se cumple que $2(6)+1(-1)=11$.
Por tanto, $2x^2+11x-6=(2x-1)(x+6)$

Ejemplo 2.14

Factorice $15x^2+17xy+4y^2$

Solución: los factores podrían tener la forma:

$$(5x+\quad y)(3x+\quad y)\ o\ 15x+\quad y)(1x+\quad y)$$

Los factores se pueden completar con dos números enteros cuyo producto sea 4
Las parejas de números:

$$1y4, \quad -1y-4, \quad 2y2, \quad -2y-2$$

Se comprueba cada pareja de forma semejante al ejemplo anterior para verificar cuál da como resultado 17:

$$15x^2+17xy+4y^2=(5x+4y)(3x+y)$$

Ejemplo 2.15

Factorice $2t^4+11t^2+12$

Solución: siendo $x=t^2$, y realizando la sustitución se obtiene un polinomio cuadrático de grado 2 en x.

$$2x^2+11x+12$$

Entonces, factorizando este polinomio cuadrático. Los factores son:

$$(x+\qquad)(2x+\qquad)$$

Y se completan con una pareja de números enteros cuyo producto sea 12. Los posibles pares son:

$$1y12, \qquad -1y-12 \qquad 2y6 \qquad 3y4 \qquad -3y-4$$

Se comprueba cada par para ver qué combinación de números da como resultado un coeficiente 11 concluyendo que:

$$2x^2+11x+12 = (x+4)\,(2x+3)$$

La sustitución de t^2 por x nos da:

$$2t^4+11t^2+12 = (t^2+4)(2t^2+3)$$

En el ejemplo anterior se debe verificar que ninguno de los polinomios t^2+4 ni $2t^2+3$ se puede factorizar utilizando coeficientes enteros.

Existen algunos polinomios que pueden ser factorizados en una segunda oportunidad, lo cual se ilustra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.16

Factorice x^6-y^6

Solución: se observa que la expresión x^6-y^6 corresponde a una diferencia de cuadrados que al ser factorizada da como resultado:

$$\begin{aligned}
x^6 - y^6 &= (x^3)^2 - (y^3)^2 \\
x^6 - y^6 &= ?(x?^3 - y^3)?(x?^3 + y^3) \\
x^6 - y^6 &= (x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2) \\
x^6 - y^6 &= (x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)
\end{aligned}$$

(2) Ejercicios de trabajo en clase

Factorice el polinomio:

17. $12x^3 + 2x^2 + 6x$
18. $6x^3y^4 - 3\sqrt{3}x^2y^2 - 3x^2y + 3xy$
19. $2y^2 - yz + 6y - 3z$
20. $6x^5y^5 + \sqrt{2}x^2y^3 + 14xy^3$
21. $15at + 3bt + 5as + bs$

Use las fórmulas de factorización para factorizar el polinomio.

22. $36x^2 - 25$

23. $4x^2 - 1$

24. $x^4 - y^4$

25. $x^8 - y^8$

Use técnicas para factorizar los polinomios cuadráticos en los que sea posible hacerlo.

26. $x^2 - 5x + 6$

27. $y^2 + 7y + 10$

28. $x^2 - 10x + 24$

29. $y^4 + 10y^2 + 21$

30. $2p^2 + 7p + 5$

31. $6a^4 + 13a^2 - 15$

32. $2x^2 - 7xy + 3y^2$

Determine si las siguientes expresiones son falsas o verdaderas:

33. $x^2 + y^2 = (x + y)(x + y)$

34. $a^3 + b^3 = (a + b)^3$

35. $(r - 1)(r - 1) = r^2 + 1$

36. $r^3 - s^3 = (r - s)(r^2 + rs + s^2)$

37. El gasto calórico para un adulto se mide en calorías y corresponde a la cantidad de energía que utiliza su cuerpo para las funciones básicas entre las cuales se encuentran la circulación sanguínea, la regulación de la temperatura y el proceso de respiración. Si se conoce el peso de una persona (w) en kilogramos, la estatura de una persona (h) en centímetros y la edad (y) expresada en años se puede determinar el gasto calórico.

    Para las mujeres: $C_m = 65,9 + 17,9w + 6h - 7,1y$

    Para los hombres: $C_h = 66,1 + 9,4w + 1,7h - 4{,}6y$

    Calcule el gasto calórico de una mujer de 23 años con un peso de 56 kilogramos y una estatura de 1,63 metros y el gasto calórico de un hombre de 46 años de edad con un peso de 78 kilogramos y una estatura de 1,78 metros.

2.3. Expresiones racionales

Una expresión racional corresponde a los cocientes indicados entre polinomios, los cuales no necesariamente son múltiplos.

Ejemplo 2.17

$$\frac{2x^2+5}{x+1} \qquad y \qquad \frac{3}{2x^3-x+8}$$

Para las expresiones racionales, el dominio es un conjunto numérico que contiene aquellos valores que no indeterminan la expresión. La indeterminación se presenta cuando el denominador es igual a cero.

Por ejemplo, en la expresión racional $\dfrac{2x^2+5}{x+1}$ el dominio de la variable es $\{x|x \neq -1\}$ ya que el denominador se hace igual a cero cuando se sustituye x por -1.

Durante el trabajo con expresiones racionales es necesario operar con ellas y posteriormente simplificar los resultados obtenidos. En este proceso es posible hacer uso de las propiedades de los racionales y sus operaciones. En la siguiente tabla se muestran las propiedades más empleadas:
Sean los números reales $a,\ b,\ c$ y d, se cumple que:

Tabla 2.5. Propiedades de las fracciones para suma, multiplicación y división

Nombre	Ecuación
i. Cancelación	$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}\ \ c\neq 0$
ii. Suma o resta de fracciones homogéneas	$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$
iii. Suma o resta de fracciones heterogéneas	$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm cb}{bd}$
iv. Multiplicación	$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
v. División	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

Ejemplo 2.18

Simplifique:

$$\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$$

Solución: luego de factorizar el numerador y el denominador y simplificar se obtiene:

$$\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}=\frac{(2x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x+1}{x+1}$$

Ejemplo 2.19

Simplifique:

$$\frac{4x^2+11x-3}{2-5x-12x^2}$$

Solución: se factorizan el numerador y el denominador según lo explicado en páginas anteriores para las expresiones de la forma ax^2+bx+c, además se toma como factor común en el denominador para el factor $(1-4x)$ de donde se obtiene $-1(4x-1)$ y posteriormente se simplifica

$$\frac{4x^2+11x-3}{2-5x-12x^2}=\frac{(4x-1)(x+3)}{(1-4x)(2+3x)}=\frac{(4x-1)(x+3)}{-(4x-1)(2+3x)}=-\frac{x+3}{2+3x}$$

Las operaciones suma y resta de expresiones racionales siguen en líneas generales el proceso empleado para números racionales.

Ejemplo 2.20

Encuentre el mínimo común múltiplo de los denominadores en las siguientes expresiones racionales:

$$\frac{1}{x^4-x^2}, \qquad \frac{x+2}{x^2+2x+1}, \qquad \frac{1}{x}$$

Solución: luego de realizar la factorización de los denominadores según las explicaciones de las páginas anteriores se obtiene:

$$\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}, \qquad \frac{x+2}{(x+1)^2}, \qquad \frac{1}{x}$$

Los diferentes factores de los denominadores son $x, x-1\ y\ x+1$. Al usar el factor con el exponente más alto en cada uno de los denominadores y realizar el producto entre ellos se obtiene:

$$x^2(x-1)(x+1)^2$$

Ejemplo 2.21

Combine y simplifique:

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}$$

Solución: al factorizar los denominadores se obtiene $(x-2)\,(x+2)\ y\ (x+2)^2$. De esta manera el mínimo común múltiplo de los denominadores es $(x-2)\,(x+2)^2$. Al desarrollar el producto de las expresiones racionales por los factores faltantes en los denominadores para que tengan el denominador común se obtiene:

$$\frac{x}{x^2-4}=\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+2)}$$

$$\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{1(x-2)}{(x+2)^2(x-2)}$$

Entonces se usa (ii) para sumar y simplificar:

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)^2}+\frac{x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{x\,(x+2)+x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{x^2+2x+x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{x^2+3x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$

Las operaciones multiplicación y división entre expresiones racionales requieren del uso de las expresiones (iii) o (iv). Posteriormente se simplifica.

Ejemplo 2.22

Combine y Simplifique

$$\left(\frac{x}{5x^2+21x+4}\right)\left(\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x}\right)$$

Solución:

$$\left(\frac{x}{5x^2+21x+4}\right)\left(\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x}\right)=\frac{x\left(25x^2+10x+1\right)}{(5x^2+21x+4)\,(3x^2+x)}$$

$$\left(\frac{x}{5x^2+21x+4}\right)\left(\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x}\right)=\frac{x\left(25x^2+10x+1\right)}{(5x^2+21x+4)\,(3x^2+x)}$$

$$\left(\frac{x}{5x^2+21x+4}\right)\left(\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x}\right)=\frac{x(5x+1)(5x+1)}{(5x+1)\,(x+4)\,x(3x+1)}$$

$$\left(\frac{x}{5x^2+21x+4}\right)\left(\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x}\right)=\frac{5x+1}{(x+4)(3x+1)}$$

Ejemplo 2.23

Combine y simplifique

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}\div\frac{2x+5}{x+3}$$

Solución:

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}\div\frac{2x+5}{x+3}=\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}*\frac{x+3}{2x+5}$$

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}=\frac{(2x^2+9x+10)(x+3)}{(x^2+4x+3)(2x+5)}$$

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}=\frac{(2x+5)(x+2)(x+3)}{(x+3)(x+1)(2x+5)}$$

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}=\frac{x+2}{x+1}$$

Ejemplo 2.24

Simplifique:

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{x}{x+1}}{1+\frac{1}{x}}$$

Solución: primero se obtienen expresiones individuales para el numerador y el denominador:

$$\frac{1}{x}-\frac{x}{x+1}=\frac{1\,(x+1)}{x\,(x+1)}-\frac{x\times x}{(x+1)\,x}=\frac{x+1-x^2}{x\,(x+1)}=\frac{-x^2+x+1}{x\,(x+1)}$$

$$1+\frac{1}{x}=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$$

De esta manera:

$$\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x+1}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{\dfrac{-x^2+x+1}{x(x+1)}}{\dfrac{x+1}{x}}$$

Ahora se aplica (iv) a este cociente para obtener

$$\frac{\dfrac{-x^2+x+1}{x\,(x+1)}}{\dfrac{x+1}{x}}$$

$$=\frac{-x^2+x+1}{x(x+1)}\times\frac{x}{x+1}=\frac{-x^2+x+1}{(x+1)^2}$$

Ejemplo 2.25

Simplifique:

$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}$$

Solución: primero se encuentra el MCM de los denominadores y luego se suma:

$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y}\sqrt{x}}+\frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}=\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$$

Al racionalizar el denominador, el resultado final es:

$$\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}*\frac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}=\frac{x^2\sqrt{y}+y^2\sqrt{x}}{xy}$$

(3) Ejercicios de trabajo en clase

Simplifique la expresión racional.

38. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+6x+8}$

39. $\frac{v^4+4v^2+4}{4-v^4}$

40. $\frac{z^2-9}{z^3+27}$

41. $\frac{x^2-2xy-3y^2}{x^2-4xy+3y^2}$

42. $\frac{3x^2-7x-20}{2x^2-5x-12}$

43. $\frac{4y^2+20y+25}{2y^3+3y^2-5y}$

44. $\frac{w^3-9w}{w^3-6w^2+9w}$

45. $\frac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2}$

Determine el mínimo común múltiplo de los denominadores de las expresiones racionales y efectúe las operaciones indicadas:

46. $\frac{1}{x^2+x-2}\times\frac{4}{x+2}$

47. $\frac{5}{v^2+2v+1}\times\frac{v}{v^2-3v-4}$

48. $\frac{10}{b^3+b^2-6b}\times\frac{1}{b^3-6b^2}\times\frac{b}{b-2}$

49. $\frac{1}{x^2-10x+25} \times \frac{x}{x^2-25} \times \frac{1}{x^2+10x+25}$

50. $\frac{1}{c^2+c} \times \frac{c}{c^2+2c+1} \times \frac{1}{c^2-1}$

51. En un circuito que consta de tres resistencias R_1, R_2, R_3 , se utiliza un cable conductor para conectar las resistencias en paralelo. La resistencia equivalente del circuito es

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}$$

Simplifique la expresión.

52. En una lente, p representa la distancia entre el objeto y la lente y q representa la distancia entre la imagen y la lente; el valor de la longitud focal de la lente se puede calcular mediante la expresión:

$$\frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$$

Simplifique la expresión.

2.4. Fracciones parciales

La expresión racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ formada por los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se denomina fracción propia, si el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x)$. En caso contrario, la expresión racional se denomina fracción impropia.

Las fracciones impropias pueden ser expresadas como la suma de un polinomio y una fracción propia, es decir: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\{polinomio\}+\frac{N_1(x)}{Q(x)}$, por otra parte, las fracciones propias se pueden expresar como la suma de dos o más fracciones. Al proceso de determinar esas fracciones se le denomina descomposición en fracciones parciales.

2.4.1. Caso 1: factores lineales distintos en el denominador

La expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede expresar como una suma de fracciones con denominadores lineales si su denominador se puede descomponer en factores lineales distintos, en este caso la expresión racional se expresa como la suma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

Ecuación 26: Descomposición en fracciones parciales: factores lineales distintos

Ejemplo 2.26

Descomponga en fracciones parciales la expresión racional:

$$\frac{7x+3}{x^2+3x-4}$$

Solución: el denominador puede ser factorizado de la siguiente forma:

$$x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$$

Al descomponer en fracciones parciales según la ecuación 26 se obtiene:

$$\frac{7x+3}{x^2+3x-4}=\frac{7x+3}{(x+4)(x-1)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-1}$$

El siguiente paso es determinar los valores de A y B, multiplicando por $(x+4)(x-1)$ para obtener:

$$7x+3 = A\,(x-1) + B(x+4)$$

Luego de desarrollar los productos indicados y agrupar términos semejantes el resultado es:

$$7x + 3 = Ax - A + Bx + 4B$$

$$7x+3 = Ax + Bx - A + 4B$$

$$7x+3 = x\,(A + B) + (-A + 4B)$$

Igualando los coeficientes de x de ambos lados de la igualdad se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$A+B= 7$$

$$-A+4B= 3$$

Al resolver el sistema de ecuaciones surge los valores para A y para B, que son respectivamente 5 y 2, por lo que la fracción original al descomponerse en fracciones parciales se expresará:

$$\frac{7x+3}{x^2+3x-4}=\frac{5}{x+4}+\frac{2}{x-1}$$

Ejemplo 2.27

Descomponer en fracciones parciales la fracción:

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}$$

Solución: al factorizar el denominador resulta:

$$2x^3+3x^2-2x=x(2x^2+3x-2) =x(2x-1)(x+2)$$

Según lo explicado, la descomposición en fracciones parciales será

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}$$

Al multiplicar los dos lados de la ecuación por el mínimo común denominador se observa:

$$x^2+2x-1=A(2x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(2x-1)$$

Con,

$$A=\frac{1}{2},\qquad B=\frac{1}{5}\quad y\quad C=-\frac{1}{10}$$

Así:

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}=\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{5}}{2x-1}+\frac{-\frac{1}{10}}{x+2}$$

2.4.2. Caso 2: factores lineales repetidos en el denominador

Para expresiones racionales de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ si el denominador $Q(x)$ tiene un factor lineal repetido k veces de la forma $(a_1x+b_1)^k$, la descomposición en fracciones parciales contiene k términos y la descomposición en fracciones parciales será:

$$\frac{A_1}{a_{1x}+b_1}+\frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(a_1x+b_1)^k}$$

Donde $A_1,A_2,\ \ldots,A_k$son constantes
Ecuación 27: Descomposición en fracciones parciales: factores lineales repetidos

Ejemplo: descomponer en fracciones parciales.

$$\frac{5x^2-36x+48}{x(x-4)^2}$$

Solución: la descomposición de fracciones parciales en:

$$\frac{5x^2-36x+48}{x(x-4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-4)}+\frac{C}{(x-4)^2}$$

Al multiplicar los dos lados de la ecuación por el denominador común se advierte:

$$5x^2-36x+48=A(x-4)^2+Bx(x-4)+Cx$$

Desarrollando la diferencia de dos cantidades al cuadrado, el producto y simplificando se obtiene:

$$5x^2-36x+48=Ax^2+Bx^2-8Ax-4Bx+Cx+16A$$

Para determinar los valores de $A,\ B,\ C$ se igualan los coeficientes de $x^2,\ x$ y los términos independientes al lado derecho y al lado izquierdo del símbolo de igual, cuyo sistema es:

$$A{+}B{=}\ 5$$
$$-8A-4B+C=-36$$
$$16A=48$$

De las ecuaciones anteriores es posible despejar y obtener los valores de $A,\ B,\ C$

$$A=3$$
$$B=2$$
$$C=-4$$

Luego:

$$\frac{5x^2{-}36x{+}48}{x{(x{-}4)}^2}{=}\frac{3}{x}{+}\frac{2}{(x{-}4)}{-}\frac{4}{{(x{-}4)}^2}$$

Ejemplo 2.28

Descomponer en fracciones parciales.

$$\frac{x^4{-}2x^2{+}4x{+}1}{x^3{-}x^2{-}x{+}1}$$

Solución: se dividen los polinomios para obtener:

$$\frac{x^4{-}2x^2{+}4x{+}1}{x^3{-}x^2{-}x{+}1}{=}x{+}1{+}\frac{4x}{x^3{-}x^2{-}x{+}1}$$

Luego, factorizando el polinomio $Q\left(x\right){=}x^3{-}x^2{-}x{+}1$ resulta:

$$x^3{-}x^2{-}x{+}1={(x{-}1)}^2(x{+}1)$$

De tal forma que la descomposición de la expresión racional en fracciones parciales será:

$$\frac{4x}{{(x{-}1)}^2(x{+}1)}{=}\frac{A}{x{-}1}{+}\frac{B}{{(x{-}1)}^2}{+}\frac{C}{x{+}1}$$

$$\frac{4x}{{(x{-}1)}^2(x{+}1)}{=}\frac{A\left(x-1\right)\left(x+1\right)+B\left(x+1\right)+C{(x-1)}^2}{{(x{-}1)}^2(x{+}1)}$$

$$4x=A\left(x-1\right)\left(x+1\right)+B\left(x+1\right)+C{(x-1)}^2$$

$$4x{=}Ax^2{+}Cx^2{+}Bx{-}2Cx{-}A{+}B{+}C$$

Igualando los coeficientes de la variable y los términos independientes resulta un conjunto de ecuaciones:

$$A + C = 0$$
$$B - 2C = 4$$
$$-A + B + C = 0$$

Del cual se obtiene:

$$A= 1$$
$$B = 2$$
$$C = -1$$

De modo que:

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}=x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}$$

2.4.3. Caso 3: factores cuadráticos irreductibles, distintos en el denominador

Si en la expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$, el denominador $Q(x)$ tiene un factor cuadrático no repetido de la forma ax^2+bx+c, en donde, $b^2-4ac<0$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene un término de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Donde A y B son constantes.

Ejemplo 2.29

Descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{4x^2-8x+1}{x^3-x+6}$$

Se tiene que:

$$\frac{4x^2-8x+1}{x^3-x+6}=\frac{4x^2-8x+1}{(x+2)(x^2-2x+3)}$$

$$\frac{4x^2-8x+1}{x^3-x+6}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+3}$$

Multiplicando por el común denominador:

$$4x^2-8x+1 =A\left(x^2-2x+3\right)+Bx+C(x+2)$$

Luego de multiplicar y reducir términos semejantes se obtiene el sistema:

$$A+B= 4$$

$$-2A+2B+C=-8$$

$$3A+2C=1$$

De donde:

$$A=3, \quad B=1, \quad C=-4$$

Por tanto:

$$\frac{4x^2-8x+1}{x^3-x+6}=\frac{3}{x+2}+\frac{x-4}{x^2-2x+3}$$

Ejemplo 2.30

Descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}$$

Solución: la expresión racional se descompone así:

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

De donde se resulta:

$$A+B=2, \;\; C=-1, \;\; 4A=4 \qquad\qquad A=1, \;\; B=1 \;\; y \;\; C=-1$$

Por lo cual:

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}$$

2.4.4. Caso 4: factores cuadráticos irreductibles repetidos en el denominador

Si en la expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$, el denominador $Q(x)$ tiene un factor cuadrático repetido k veces de la forma $(ax^2+bx+c)^k$, donde $b^2-4ac<0$, la descomposición de la expresión racionales en fracciones parciales contiene k términos en la forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

Donde $A_1, \;\; A_{2,\ldots..}A_k \quad y \quad B_1, \, B_2 \, , \ldots.B_k$ son constantes.
Ecuación 28: Descomposición en fracciones parciales: factores cuadráticos irreductibles

Ejemplo 2.31

Descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x\left(x^2+1\right)^2}$$

Solución: la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Lo anterior debido a que se tiene un factor lineal en el denominador y un factor cuadrático. Note que los numeradores dependen del tipo de factor en el denominador.
Como $x(x^2+1)^2$ corresponde al común denominador de las fracciones, se realiza la suma indicada de las fracciones, y luego igualando coeficientes, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$A+B=0, \quad C=-1, \quad 2A+B+D=2, \quad C+E=-1, \quad A=1$$

Cuya solución es:

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=-1, \quad D=1 \quad y \quad E=0$$

Entonces:

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}$$

Ejercicios del capítulo: trabajo independiente

Ejercicios de la sección 2.1

1-6 Realice las operaciones y simplifique:

1. $(2x+3)(x-4)+4x(x-2)$
2. $(h+3)(p+5)(p-5)$
3. $\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{2ab}$
4. $\left(2x-4b^3\right)\left(4a^2+8ab^3+16b^6\right)$
5. $x^4(x+4)(3x-2)$
6. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

Ejercicios de la sección 2.2

7-12 Factorice completamente sobre los enteros:

7. $x^2 + 4x - 32$
8. $r^2 + 7r + 12$
9. $a^2t^2 - 3at - 18$
10. $2x^2 + x - 10$
11. $18x^2 + 9x - 2$
12. $2(3a - b)^2 + 3\,(3a - b) - 5$

13-17 Factorice completamente los polinomios como suma o diferencia de cubos:

13. $8(abc)^3 - 1$
14. $64 - h^3$
15. $(a + b)^3 - (c + d)^3$
16. $y^{10} - 8k^4y^3$
17. $54x^6 - 128y^3$

18-25 Aplique los casos de factorización para factorizar las siguientes expresiones:

19. $a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2$
20. $ax^2 - 4ax + 4a$
21. $3x^2 + 8x + 5$
22. $4x^2 - 4x + 1$
23. $x^2 - 16$
24. $r^2x^2 - r^2$
25. $8x^2 + 27y^3$
26. $4x^2 + 23x - 6$

Ejercicios de la sección 2.3

26-33 Realice las siguientes operaciones y simplifique al máximo:

26. $\frac{2x}{2x+5}+\frac{5}{2x+5}$

27. $\frac{x}{x+1}.\frac{1}{x}-1$

28. $\frac{2}{2-t}+\frac{5}{t-2}$

29. $\frac{h}{h+1}+\frac{1}{h^{2-1}}$

30. $\frac{9x^3}{2(x-2)^4}.\frac{4(x-2)^2}{18x^5}$

31. $\frac{2}{x}\div\left(\frac{2}{x}-1\right)+2$

32. $\frac{9x^3y^2}{(z-4)^3}\div\frac{12x^2y^3}{(z-4)}$

33. $(a-b)\div\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

34-38 Simplifique la siguiente expresión fraccionaria:

34. $\frac{\frac{1}{1+a+h}-\frac{1}{1+x}}{h}$

35. $\frac{\frac{1}{\sqrt{a+h}}-\frac{1}{\sqrt{a}}}{h}$

36. $\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$

37. $\frac{(x+h)^3-5(x+h)-\left(x^3-5x\right)}{h}$

38. $\sqrt{1+\left(\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\right)^2}$

39. Encuentre un polinomio $P(x)$ de grado 3 y con 1 como coeficiente principal, que cumpla con que $P(x)$ es divisible por $(x-2)\,, P\,(0)=6$ y $P\,(1)=-2$

40. Si $P\,(x)=2x^3-kx^2-8x+4k$, con k como número real. Verifique que $\frac{k}{2}$ es un cero de $P(x)$, factorice $P(x)$.

41-46 Racionalice el denominador y simplifique al máximo:

41. $\frac{1-x}{x-\sqrt{2x-1}}$

42. $\frac{-2x+4}{\sqrt{3x}+2\sqrt{x^2-1}}$

43. $\frac{4x^3-12x}{\sqrt{x}-\sqrt{x^2+x-3}}$

44. $\frac{ax^2-a^2x}{\sqrt{ax}-a}$

45. $\frac{1}{\sqrt{x}+5}$

46. $\frac{a\sqrt{2}-2\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}$

Ejercicios de la sección 2.4

46-52 Escriba la expresión racional como una suma de fracciones parciales:

47. $\frac{1}{(x-1)(x+4)}$

48. $\frac{2x+3}{(x-1)^2}$

49. $\frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$

50. $\frac{8x^3+5x^{2+x-1}}{x^2(x+1)}$

51. $\frac{3x^3+6x^2+3x+8}{(x^2+1)(3x^2+4)}$

52. $\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^5-x}$

Aplicación con tecnología

Desarrolle los siguientes ejercicios usando el programa www.symbolab.com. en el que podrá evidenciar los procesos desarrollados analíticamente.

53-56 Resuelva la adición o sustracción simplificando las siguientes expresiones algebraicas y calcule el valor dado para cada una de ellas:

53. $5+\frac{x}{x-8}$ $para\ x=1$

54. $\frac{1}{h+3}+\frac{6}{h-2}$ $para\ h=3$

55. $\frac{9}{3t-2}-\frac{1}{(3t-2)^2}$ $para\ t=-5$

56. $\frac{3}{b^2}+\frac{4}{bc}-\frac{5}{c^2}$ $para\ \ b=-2, c=-3$

57-59 Resuelva la multiplicación o división con su correspondiente simplificación de las siguientes expresiones:

58. $\dfrac{\frac{2x^2-3x-2}{x^2-1}}{\frac{2x^2+5x+2}{x^2+10x+2}}$

59. $\dfrac{\frac{g^3}{g+1}}{\frac{g}{g^2+2g+1}}$

60. $\left[\frac{t^2+2ts\ +s^2}{t^2-s^2}\right]\bullet\left[\frac{2t^2-ts\ +s^2}{t^2-ts-2s^2}\right]$

61-64 Calcule el valor de las siguientes expresiones

61. $\frac{1+(g+h)^{-1}}{1-(g+h)^{-1}}\left[1-\frac{\left(g^2+h^2\right)}{2gh}\right],\ g=\frac{1}{h+2}$

62. $\frac{t+1}{1+\sqrt{1+t}}+\frac{t-1}{1-\sqrt{1+t}},\ t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

63. $\left[\frac{\left(a^2+b^2\right)^{-1/3}+\left(a^2-b^2\right)^{-1/3}}{(a^2+b^2)^{-1/3}-(a^2-b^2)^{-1/3}}\right]^{-3},a=b\sqrt{\frac{s^3+t^3}{3}}$

64. $\frac{a^2-5x\sqrt{7}-\sqrt[3]{6+5}}{x+\sqrt{7}},\ x=\sqrt{11}-\sqrt[3]{5}$

Proyectos aplicados a las ciencias básicas

Cuando se trabaja con las expresiones algebraicas como los productos notables estos se representan como áreas de cuadrados y rectángulos.

Desarrolle las siguientes ideas que representan proyectos basados en los contenidos vistos en el capítulo.

- Visualizando una fórmula: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/dp1.html
- Puesta a cero en un cero: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/dp6.html
- Cuadrados y primos: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/fops1.html

Represente gráficamente la idea de proyecto visualizando una fórmula

Solución de los ejercicios de trabajo en clase

3. $\sqrt{5}x^2 + 10x - 3\sqrt{2}$ *para* $x = -1$
   Se obtiene -102.006

5. $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ *para* $x = -2$ Se obtiene 31

7. No es polinomio

9. Polinomio de grado 101 y coeficiente 26.

13. Eliminación de paréntesis, agrupación de términos semejantes y por último suma de elementos similares.

$$\left(3x^5 - 5x^2 + 4x - 7\right) + (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$$

$$= 3x^5 + x^3 - 8x^2 + 6x - 6$$

15. $6y^3 + y^2 - 2y - 7$

17. Factorizar el término común
$$2x(6x^2 + x + 3)$$

19. $(y + 3)(2y - z)$

21. Factorizar el máximo común denominador de cada grupo:

$$3t\,(5a + b) + s(5a + b)$$

   Factorizar el polinomio factorizando $(5a + b)$

$$(5a + b)(3t + s)$$

23. Aplicar la regla del binomio cuadrado $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

$$4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$$

25. Aplicar la regla del binomio cuadrado $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

$$x^8 - y^8 = \left(x^4 + y^4\right)\left(x^4 - y^4\right)$$

   Factorizar $\left(x^4 - y^4\right) = (x + y)\,(x - y)\left(x^2 + y^2\right)$

$$= (x + y)\,(x - y)\left(x^4 + y^4\right)\left(x^2 + y^2\right)$$

27. $(y+2)(y+5)$

29. Sea $u=y^2$
$$u^2+10u+21$$
Factorizar $u^2+10u+21$
$$(u+3)\,(u+7)$$
Sustituir en la ecuación $u=y^2$
$$\left(y^2+3\right)\left(y^2+7\right)$$

31. $\left(a^2+3\right)\left(\sqrt{6}a+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}a+\sqrt{5}\right)$

33. Falso

35. Falso porque $(r-1)\,(r-1)=r^2-2r+1$

39. $-\frac{v^2+2}{v^2-2}$

41. $\frac{x+y}{x-y}$

43. $\frac{2y+5}{y(y-1)}$

45. Aplicar regla del binomio al cuadrado $a^2-b^2=(a+b)\,(a-b)$
$$\frac{ab\,(a+b)}{(a+b)\,(a-b)}=\frac{ab\,(a+b)}{(a+b)\,(a-b)}=\frac{ab}{(a-b)}$$

47. El mínimo común múltiplo MCM $(v+1)^2\,(v-4)$

49. El mínimo común múltiplo MCM $(x-5)^2(x+5)^2$

51. Simplificando la expresión $\frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$

Solución de los ejercicios de trabajo independiente

1. $(2x+3)\,(x-4)+4x\,(x-2)=(2x+3)(x-4)$

3. Usar la regla de la potencia $a^m a^n=a^{m+n}$
$$\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{2ab}=3a^3b^2+ab^4$$

5. $x^4\,(x+4)\,(3x-2)=3x^6+10x^5-8x^4$

7. Considerar la forma $x^2 + bx + c$, encontrar dos números cuyo producto sea c y cuya suma sea b.

   En este caso -32 y la suma sea 4. Utilizando estos números es posible factorizar $(x-4)(x-8)$.

9. $a^2t^2 - 3at - 18 = (at-6)(at+3)$

11. $18x^2 + 9x - 2 = (6x-1)(3x+2)$

13. $8(abc)^3 - 1 = (2abc-1)\left(4a^2b^2c^2 + 2abc + 1\right)$

15. $(a+b)^3 - (c+d)^3 = ((a+b)-(c+d))\left((a+b)^2 + (a+b)(c+d) + (c+d)^2\right)$

17. $54x^6 - 128y^3 = 2\left(3x^2 - 4y\right)\left(9x^4 + 12x^2y + 16y^2\right)$

19. $ax^2 - 4ax + 4a = a(x+2)^2$

21. $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

23. $r^2x^2 - r^2 = r(x+1)(x-1)$

25. $4x^2 + 23x - 6 = (x+6)(4x-1)$

27. $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x} - 1 = -\frac{x}{x+1}$

29. $\frac{h}{h+1} + \frac{1}{h^{2-1}} = \frac{h}{h+1} + \frac{1}{h}$

31. $\frac{2}{x} \div \left(\frac{2}{x} - 1\right) + 2 = \frac{2}{2-x} + 2$

33. $(a-b) \div \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = -ab$

35. $\frac{\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}}}{h} = \frac{\left(a-\sqrt{a+h}\right)(a+h)}{a^2h + ah^2}$

37. $\frac{(x+h)^3 - 5(x+h) - \left(x^3 - 5x\right)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 - 5$

41. $\frac{1-x}{x-\sqrt{2x-1}} = -\frac{x+\sqrt{2x-1}}{x-1}$

43. $\frac{4x^3 - 12x}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2+x-3}} = -4x\left(\sqrt{x} - \sqrt{x^2+x-3}\right)$

47. $\frac{1}{(x+1)(x-4)} = \frac{1}{5(x+1)} + \frac{4}{5(x-1)}$

49. $\frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1}$

51. $\frac{3x}{3x^2+4} + \frac{2}{x^2+1}$

TRES

ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

En las matemáticas es donde el espíritu encuentra los elementos que más ansía: la continuidad y la perseverancia.
Anatole France

En matemáticas las ecuaciones son igualdades entre expresiones algebraicas. Por ejemplo:

$$\sqrt{x+1} = 2,\ x^2 - 1 = (x+1)(x-1), \quad x|x-1| = 8$$

Corresponden a ecuaciones en la variable x.
La solución de una ecuación es un valor numérico que, sustituido en el lugar de la variable, hace que la ecuación se convierta en una identidad. Cuando se pide resolver una ecuación, se está pidiendo determinar la o las soluciones de la ecuación.

Ejemplo 3.1

2 es la solución de la ecuación $8x + 9 = 5x + 3$, porque $8(-2) + 9 = 5(-2) + 3$

Se dice que dos ecuaciones son equivalentes si las dos ecuaciones tienen las mismas soluciones. Ejemplo:

$$3x - 1 = 0, \quad 3x = 1, \quad y \quad x = \frac{1}{3}$$

Las operaciones descritas a continuación producen ecuaciones equivalentes:

Tabla 3.1. Operaciones que producen ecuaciones equivalentes

∘ Sumar o restar en el lado de una ecuación el mismo número real.
∘ Multiplicar o dividir cada lado de una ecuación por el mismo número real diferente de cero

Ejemplo 3.2

Resuelva $10x + 15 = 0$.

Solución. La siguiente lista muestra las ecuaciones equivalentes que se forman para llegar a la solución.

$$
\begin{aligned}
&10x + 15 = 0.\\
&10x + 15 - 15 = 0 - 15\\
&10x = -15\\
&x = -\frac{15}{10}\\
&x = -\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

3.1. Ecuaciones lineales

Toda ecuación de la forma $ax + b = 0$ con $a \neq 0$ se denomina ecuación lineal y tiene exactamente una solución: $x = -\frac{b}{a}$

Ejemplo 3.3

Resuelva $2x - 7 = 5x + 6$
Solución. Se reagrupan los términos semejantes en cada uno de los lados de la ecuación y usando las operaciones que producen ecuaciones equivalentes se determina la solución.

$$
\begin{aligned}
&2x - 7 = 5x + 6\\
&2x - 7 - 5x = 5x + 6 - 5x\\
&-3x - 7 + 7 = 6 + 7\\
&-3x = 13\\
&-\frac{1}{3}(-3x) = -\frac{1}{3}(13)\\
&x = -\frac{13}{3}
\end{aligned}
$$

Es decir, que la solución para la ecuación es $x = -\frac{13}{3}$.

Ejemplo 3.4

Resuelva

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}=\frac{2}{x^2-4x}$$

Solución. Como parte del proceso de solución de este tipo de ecuaciones, se multiplica ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador para eliminar los denominadores y resolver la ecuación de manera semejante al ejemplo anterior.

$$\begin{aligned} x\,(x-4)\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}\right] &= x(x-4)\left[\frac{2}{x^2-4x}\right] \\ (x-4)+x &= 2 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Sustituyendo $x=3$, se verifica que este valor satisface la ecuación original.

Ejemplo 3.5

Resolver la ecuación $\frac{3x}{x-2}=1+\frac{6}{x-2}$
Solución:

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x-2} &= 1+\frac{6}{x-2} \\ \left(\frac{3x}{x-2}\right)(x-2) &= \left[1+\left(\frac{6}{x-2}\right)\right](x-2) \\ 3x &= (x-2)+6 \\ 3x &= x+4 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

A pesar de obtener la solución $x=2$, si este valor de x es sustituido en el lado izquierdo de la ecuación inicial resulta:

$$\frac{3(2)}{(2)-2}=\frac{6}{0}$$

El resultado de una división entre 0 no es válido, por tanto, a pesar de haber obtenido $x=2$ como solución de la ecuación final, se dice que este valor no satisface la ecuación inicial y por tanto esta no tiene solución.

3.1.1. Indicaciones para resolver problemas aplicados

- Leer de forma detallada el problema y determinar cuál es la cantidad que debe hallarse
- Seleccionar una letra para nombrar a la variable desconocida. Pueden usarse las letras conocidas en otros contextos como A para el área o V para el volumen.
- De ser necesario se realiza un diagrama y en él se usan las letras seleccionadas en el ítem anterior.
- Elaborar un listado de variables y valores obtenidos en el problema.
- Después de elaborar la lista, determinar la ecuación que relaciona las variables del problema.
- Resolver la ecuación y dar solución a las preguntas del problema.
- Comprobar las soluciones obtenidas y contrastar con las condiciones iniciales la viabilidad de las respuestas.

Ejemplo 3.6

En un curso de matemáticas básicas, un estudiante tiene calificaciones de parciales de 56 y 68. ¿Cuál ha de ser la nota en el examen final para que el promedio sea 70?

Solución:

Leer el problema. Se ha de determinar la nota del examen final,
$x =$ Calificación del examen final.
Para este problema no se hace necesario el uso de un diagrama
A partir de la lectura del problema se conocen los valores 56 y 68 que son las notas de los primeros exámenes. La ecuación que relaciona a x es la calificación promedio de 64, 78 y x. Entonces:

$$\text{calificación promedio} = \frac{56 + 68 + x}{3}$$

Como la calificación promedio debe ser 70, se emplea la ecuación:

$$\frac{56 + 68 + x}{3} = 70$$

Se resuelve la ecuación formulada en la directriz 5:

$$\begin{aligned} 56 + 68 + x &= 70 * 3 \\ 124 + x &= 210 \\ x &= 86 \end{aligned}$$

Prueba: si las tres calificaciones de examen son 64, 78, 98 entonces el promedio es:

$$\frac{56+68+86}{3}=\frac{210}{3}=70$$

Luego al respuesta al problema será que la nota del examen final es 86.

Ejemplo 3.7

En un almacén se ha anunciado un descuento de 20 % para toda la ropa masculina. Si el precio de una camisa es de U$28, ¿cuál era su precio inicial?
Solución: la cantidad desconocida es el precio inicial de venta, entonces:

$$x=\text{precio inicial de venta}$$

Luego:

$$0{,}20x=\text{descuento del } 20\,\% \text{ en el precio inicial de venta } 28=\text{precio final con descuento}$$

El precio inicial de venta se determina como sigue:
$(\textit{precio inicial de venta})-(\textit{descuento})=\textit{precio con descuento}$, traduciendo la última ecuación a símbolos y luego resolviendo:

$$\begin{aligned} x-0{,}20x&=28\\ 0{,}80x&=28\\ x&=\frac{28}{0{,}80}=35 \end{aligned}$$

El precio inicial de la camisa fue de U$35.

Prueba: si la camisa costaba inicialmente U$35 y tiene un 20 % de descuento sobre ese precio, entonces el descuento es $(0{,}20)\,(35)=7$ y el precio de la venta con descuento se obtiene al restar $35-7$, es decir U$28.

(1) Ejercicios de trabajo en clase

Demuestre que la ecuación es una identidad.

1. $(4x-39)^2-16x^2=9-24x$

2. $(3x-4)\,(2x+1)+5x=6x^2-4$

¿Cuál es el valor que debe tomar c para que a sea una solución de la ecuación dada?

3. $4x+1+2c=5c-3x+6a=-2$

4. $3x - 2 + 6c = 2c - 5x + 1a = 4$

La ecuación se utiliza en la aplicación indicada. Despeje la variable indicada.

5. $I = Prt$ despeje P (interés simple)

6. $C = 2\pi r$ despeje r (circunferencia de un círculo)

7. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ despeje h (volumen del cono)

8. $A = \frac{1}{2}bh$ despeje h (área del triángulo)

9. $F = g\frac{mM}{d^2}$ despeje m (Ley de Newton de gravitación)

10. $R = \frac{V}{I}$ despeje I (Ley de Ohm en teoría eléctrica)

11. Las temperaturas en grados Celsius (T_c) y en grados Fahrenheit (T_F) se relacionan mediante la ecuación:
$$T_c = \frac{3}{5}(T_F - 32)$$
Halle la temperatura Fahrenheit correspondiente a: $16°C$, $120°C$ y $-5°C$.

3.2. Ecuaciones cuadráticas

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, se denomina ecuación cuadrática y puede tener:

- Dos soluciones iguales
- Dos soluciones distintas
- Dos soluciones complejas

3.2.1. Métodos para dar solución a una ecuación cuadrática

Para solucionar una ecuación cuadrática es posible usar los siguientes métodos:

- Factorización
- Raíz cuadrada
- Completando el cuadrado
- Por fórmula general

3.2.1.1. Factorizando

Para usar este método de solución de estas ecuaciones, se emplea el siguiente teorema:

Teorema del factor cero	Si p y q son expresiones algebraicas, entonces: $pq = 0$ si y solo si $p = 0$ o $q = 0$

El teorema del factor cero se puede extender a cualquier número de expresiones algebraicas, es decir,

$$pqr = 0 \text{ Si y solo si } p = 0 \text{ o } q = 0 \text{ o } r = 0$$

Se deduce que si ax^2+bx+c se puede escribir como un producto de dos polinomios de primer grado, entonces se pueden hallar soluciones al igualar a 0 cada uno de los factores, como se ilustra en los siguientes ejemplos. Esta técnica se conoce como método de factorización.

Ejemplo 3.8

Resuelva $2x^2+5x-3=0$.

Solución. Al factorizar el lado derecho de la ecuación resulta:

$$(x+3)(2x-1)=0$$

Al igualar cada factor de la ecuación a cero y resolver, se obtienen las dos soluciones

$$(x+3)=0 \quad (2x-1)=0$$
$$x=-3 \text{ y } x=\frac{1}{2}$$

Las soluciones de la ecuación $2x^2+5x-3=0$ son las mismas obtenidas con el proceso anterior y pueden verificarse por sustitución.

(2) Ejercicios de trabajo en clase

Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando factorización:

12. $x^2-16=0$
13. $y^2-17y+16=0$
14. $2x^2+x-1=0$
15. $8t^2-22t+15=0$
16. $x^6-2x^4-x^2-4$
17. $2x^5+x^4-2x-1$
18. $5t^3-30t+45$

3.2.1.2. Usando la raíz cuadrada

Si la ecuación cuadrática tiene la forma $x^2 = d$, para $d \geq 0$ sus soluciones son:

$$x = \sqrt{d} \text{ o } x = -\sqrt{d}$$

Ejemplo 3.9

Usando la raíz cuadrada resolver las ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 = 6$

b) $(y-3)^2 = 5$.

Solución:

a) Multiplicando ambos lados $2x^2 = 6$ por $\frac{1}{2}$ se obtiene la forma especial (8):

$$\frac{1}{2}\left(2x^2\right) = \frac{1}{2}(6)$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

Entonces, las soluciones son $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$

b) Para $x = y - 3$ y $d = 5$, la expresión $(y-3)^2 = 5$ se puede ver como un caso especial de una variable al cuadrado; luego se procede a simplificar la ecuación extrayendo raíz cuadrada en ambos lados:

$$(y-3)^2 = 5$$
$$y - 3 = \pm 5$$

Produce:

$$y - 3 = \sqrt{5} \quad y \quad y = 3 - \sqrt{5}$$

Resolviendo cada una de estas ecuaciones, se encuentra que:

$$y = 3 + \sqrt{5} \quad y \quad y = 3 - \sqrt{5}$$

Entonces, las soluciones son: $3 + \sqrt{5}$ y $3 - \sqrt{5}$

(3) Ejercicios de trabajo en clase

Emplee la raíz cuadrada como en los ejemplos anteriores para resolver las ecuaciones:

19. $x^2 = 17$

20. $(v+5)^2 = 5$

21. $3(t+1)^2 = 9$

22. $2y^2 = 100$

23. $5(w-1)^2 = 4$

24. $4(s-3)^2 = 5$

Determine el valor de x

25. $x^2 - b^2 = 0$

26. $(x-a)^2 = b^2$

27. $x^2 + 2dx + d^2 = 0$

28. $(x+c)^2 = d^2$

3.2.1.3. Completando el cuadrado

Si en una ecuación cuadrática igualada a cero uno de los miembros de la ecuación es un trinomio de la forma

$$x^2 + Bx + C$$

Puede emplearse el método de completar un cuadrado con el fin de solucionar la ecuación.

$$x^2 + Bx + C = 0$$

Transponiendo el término independiente

$$x^2 + Bx = -C$$

Se suma el término $(B/2)^2$ a los dos lados de la ecuación:

$$x^2 + Bx + \left(\frac{B}{2}\right)^2 = -C + \left(\frac{B}{2}\right)^2$$

De tal forma que el lado izquierdo de la ecuación corresponde a un cuadrado:

$$\left(x + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C$$

Por último se emplea el método de la raíz, que ya fue explicado.

Ejemplo 3.10

Resuelva $x^2 + 5x + 6 = 0$ completando el cuadrado:
Solución: se reescribe la ecuación

$$x^2 + 5x = -6$$

Se suma el término $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ a los dos lados de la ecuación

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Simplificando:

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Se extrae la raíz cuadrada:

$$x + \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}$$

Las soluciones son entonces:

$$x = 3 \qquad x = 2$$

Ejemplo 3.11

Resuelva $2x^2 + 2x - 1 = 0$ usando el método de completar el cuadrado.

Solución: como el coeficiente de x^2 es 2 , se dividen los dos lados de la ecuación para obtener:

$$x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$$

Organizando la ecuación resulta:

$$x^2 + x = \frac{1}{2}$$

Y se suma el término $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ a los dos lados de la ecuación:

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Entonces, se obtiene:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Se extrae raíz cuadrada:

$$x + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Las soluciones son entonces: $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

(4) Ejercicios de trabajo en clase

Resuelva las siguientes ecuaciones mediante la utilización de completando el cuadrado.

1. $u^2 + 2u - 1 = 0$
2. $2k^2 + 5k + 3 = 0$
3. $v^2 + 3v - 2 = 0$
4. $4b^2 - 4b - 35 = 0$

3.2.1.4. Por fórmula general

Si es utilizado el método de completar el cuadrado para la expresión de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, se inicia con la división de los dos lados de la ecuación entre a, se obtiene:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Luego se completa el cuadrado y se despeja x:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
x + \frac{b}{2a} &= \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}
\end{aligned}$$

Si $a > 0$, entonces $\sqrt{4a^2} = |2a| = 2a$ y el resultado es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3.3. Soluciones de una ecuación cuadrática

Si $a \neq 0$, entonces las soluciones x_1 y x_2 de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ecuación 29: Soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

El discriminante: las soluciones x_1 y x_2 de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son definidas por la cantidad subradical $b^2 - 4ac$, denominada discriminante y puede tener tres opciones diferentes que se explican en la siguiente tabla:

Tabla 3.2. Discriminante y su interpretación

Discriminante	Soluciones
$\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$	Dos soluciones reales diferentes
$\boldsymbol{b^2 - 4a = 0}$	Soluciones reales pero iguales
$\boldsymbol{b^2 - 4ac < 0}$	No hay soluciones reales

Ejemplo 3.12

Resuelva $3x^2 - 2x - 4 = 0$
Solución: en este caso, $a = 3$, $b = -2$, $c = -4$, el discriminante positivo $b^2 - 4ac = 52$ nos permite ver que la ecuación tiene dos soluciones reales. De la fórmula obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-4)}}{2\,(3)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{6} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3} \end{aligned}$$

Entonces, las soluciones son $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{13}$ y $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{13}$

Ejemplo 3.13

Resuelva $3x^2 - x + 2 = 0$
Solución: como el discriminante-

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\,(3)\,(2) = -23$$

Es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales.

Ejemplo 3.14

Resuelva $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$
Solución: la ecuación se puede ver como una ecuación cuadrática si se realiza una pequeña modificación:

$$\left(x^2\right)^2 - 2\left(x^2\right) - 2 = 0$$

Se usa la fórmula cuadrática para despejar x^2

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Entonces,

$$x^2 = 1 + \sqrt{3} \text{ o } x^2 = 1 - \sqrt{3}$$

Ahora, la ecuación cuadrática $x^2 = 1 - \sqrt{3}$ no tiene soluciones reales, ya que $1 - \sqrt{3} < 0$ pero de $x^2 = 1 + \sqrt{3}$ se obtienen dos soluciones reales, $-\sqrt{1+\sqrt{3}}$ y $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ de la ecuación original.

(5) Ejercicios de trabajo en clase

Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando la fórmula cuadrática:

33. $3x^2 - 7x + 2 = 0$
34. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
35. $9z^2 + 30z + 25 = 0$
36. $1 + 2w - 6w^2 = 0$

Ejemplo 3.15

Si un rectángulo tiene un área de 138 cm^2, si el largo es x centímetros mayor más que el triple del ancho, determine las dimensiones del rectángulo.

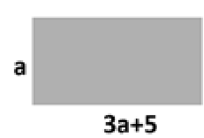


Figura 3.1. Dimensiones de un rectángulo en términos de la variable a

Solución: en la ilustración 22 se muestra un esquema del rectángulo en el que:

$$a = \text{ ancho del rectángulo en centímetros.}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 3a+5 &= \text{ longitud del rectángulo en centímetros} \\ a(3a+5) &= 138 \end{aligned}$$

Se reescribe esta ecuación:

$$3a^2+5a-138=0$$

De la fórmula cuadrática, $a=-\frac{23}{3}$ o $a=6$. Debido a que el ancho del rectángulo, no puede ser de signo negativo, se descarta esta solución en la ecuación, de tal forma que las dimensiones son: largo 23 centímetros y ancho 6 centímetros.

Ya que el ancho de un rectángulo debe ser positivo, se descarta $a=-\frac{23}{3}$. En consecuencia, las dimensiones del rectángulo son 6 cm y 23 cm.

Ejemplo 3.16

Pedro es un comerciante de bebidas alcohólicas y ha invertido US$800 en un lote de botellas de champaña. Si el costo de cada botella hubiera sido US$4 mayor, Pedro hubiera adquirido un lote 10 unidades menor por el mismo dinero. ¿De qué cantidad es el lote de botellas de champaña?

$$(\text{costo por botella})\,(\text{número de botellas})=800$$

Para la compra real se define:

$$x=\text{número de botellas compradas}$$

Entonces:

$$\frac{800}{x}=\text{costo por botella}$$

Al precio más alto:

$$\begin{aligned} x-10 &= \text{número de botellas compradas} \\ \frac{800}{x}+4 &= \text{costo por botella} \end{aligned}$$

De tal forma que:

$$\left(\frac{800}{x}+4\right)(x-10)=800$$

Con el cual se despeja x como sigue:

$$\begin{aligned} (800+4x)\,(x-10) &= 800x \\ 4x^2-40x-8000 &= 0 \\ x^2-10x-2000 &= 0 \\ x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{8100}}{2} &= \frac{10\pm 90}{2} \\ x=50 \text{ o } x &= -40 \end{aligned}$$

Como el tamaño del lote no puede ser negativo, se descarta la solución $x = -40$, de tal forma que el tamaño del lote es de 50 botellas.

Ejemplo 3.17

Un cohete a escala es lanzado hacia arriba. Después de t segundos, la expresión que permite calcular la altura (medida en pies) en función del tiempo, a la cual se encuentra el cohete es: $h= -16t^2+120t$ ¿Cuánto tiempo después de su lanzamiento estará el cohete a 180 pies de altura?
Solución: usando $h= -16t^2+120t$:

$$180 = -16t^2+120t$$

$$-16t^2 - 120t+180 = 0$$

$$-4t^2 - 30t+45 = 0$$

Al aplicar la fórmula cuadrática con los valores $a= -4$, $b= -30$ y $c= 45$:

$$t = \frac{-(-30)\pm\sqrt{(-30)^2 - 4(-4)(45)}}{2(4)}$$

$$= \frac{30\pm\sqrt{180}}{8} = \frac{30 \pm 6\sqrt{5}}{8} = \frac{15 \pm 3\sqrt{5}}{4}$$

De tal forma que hay dos instantes de tiempo en los que el cohete está a una altura de 180 pies sobre el suelo:

$$t = \frac{15 - 3\sqrt{5}}{4}= 2{,}07s$$

$$t = \frac{15 + 3\sqrt{5}}{4}= 5{,}43s$$

Valores de tiempo que corresponden a el recorrido de ascenso del cohete en el primer caso y al recorrido de descenso en el segundo caso.

(6) Ejercicios de trabajo en clase

37. Al ser sumados dos números se obtiene 22, y al ser sumados los cuadrados de los números se obtiene 274. ¿Cuáles son los números?

38. La medida de la base de un triángulo es 3 centímetros mayor que la medida de su altura. Al calcular el área del triángulo se obtiene como resultado 119 centímetros cuadrados. Determine las medidas de la base y de la altura.

39. Al realizar un recorrido ecoturístico de 35 kilómetros de distancia José hace el recorrido medio kilómetro por hora más rápido que Pablo. Si José gasta una hora y cuarenta minutos menos que Pablo, determine los tiempos que emplean José y Pablo en completar el trayecto.

40. Para un proyecto escolar, la profesora Clara ha creado una huerta, el terreno donde se ejecuta el proyecto tiene un perímetro de 76 metros y un área de 360 metros cuadrados. ¿Cuáles son las medidas del terreno?

41. Un campo de béisbol fue trazado sobre un terreno que mide 90 pies por cada lado. ¿Cuál es la distancia que existe entre la primera base y la tercera base en este terreno?

42. Si un lote de terreno tiene una diagonal que mide 100 pies ¿cuál es el área del campo?

3.4. Otros tipos de ecuaciones

Estas ecuaciones contienen ecuaciones con radicales, ecuaciones polinómicas y ecuaciones racionales.

Las ecuaciones anteriormente desarrolladas eran trasformadas para poder ser factorizables; en el caso de las ecuaciones con raíces se deben efectuar otros algoritmos matemáticos.

Ejemplo 3.18

Resuelva la siguiente ecuación: $x - 4\sqrt{x+3} + 6 = 0$

Para desarrollar esta ecuación se parte de lo siguiente:

$x + 6 = 4\sqrt{x+3}$	Despejar el término que contiene el radical.
$(x+6)^2 = \left(4\sqrt{x+3}\right)^2$	Elevar los dos lados de la ecuación al cuadrado.
$16\,(x+3) = 16x + 48$ $x^2 + 12x + 36 = 16x + 48$	Se resuelve el cuadrado al lado izquierdo y se aplican las propiedades de las potencias al lado derecho.
$x^2 - 4x - 12 = 0$	Se organiza la ecuación cuadrática obtenida
$x_1 = 6\ y\ x_2 = -2$	Se obtienen las soluciones para la ecuación cuadrática.

Para determinar el conjunto solución, se deben evaluar los valores de 6 y -2, en la ecuación original,

$$x = 6, 6 - 4\sqrt{6+3} + 6 = 0,\ 6 - 12 + 6 = 0$$

Esto indica que $x = 6$ si es solución para la ecuación, de forma similar si se evalúa para $x = -2$, también satisface las condiciones. Por tanto, el conjunto de soluciones es $S = \{-2, 6\}$. Para solucionar ecuaciones donde el grado del polinomio sea mayor que dos, se requiere factorizar los polinomios, esto se puede evidenciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.19

Resuelva la ecuación $x^3+6x^2+11x+6=0$

Para resolver la ecuación se factoriza el polinomio, y se obtiene lo siguiente:

$$x^3+6x^2+11x+6 \ =0$$

$$(x+2)\,(x+3)\,(x+1)=0$$

La expresión se hace cero si algún factor se vuelve cero, cada uno de los factores se iguala a cero, y se obtiene como soluciones $x=-2, x=-3$ y $x=-1$, de allí que el conjunto solución sea:

$$S=\{-2,-3-1\}\,.$$

Ejemplo 3.20

Resuelva la ecuación $\frac{1}{x}=\frac{3}{x-2}$

Para resolver ecuaciones con fracciones racionales, se realiza primero una inspección de aquellos números reales que anulan cada uno de los denominadores, en este caso $x=0$ y $x=2$, estos valores posteriormente se deben tener en cuenta para descartarlos del conjunto solución de la ecuación.
Luego se multiplican los dos lados de la ecuación por $x(x-2)$ y se obtiene:

$$\frac{x(x-2)}{x}=\frac{3x(x-2)}{x-2}$$

Al lado izquierdo se cancela el factor x y en el lado derecho se cancela el factor $x-2$, esto da una trasformación a una ecuación lineal $x-2=3x$, es decir,$-2x-2=0$, cuya solución es $x=-1$, obtenemos $S=\{-1\}$.

Ejercicios del capítulo: trabajo independiente

Ejercicios de la sección 3.1

1-7 Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $-2x+5=0$
2. $x\,(x+1)-x^2=-3x-8$
3. $\frac{2}{3}x-5=\frac{1}{4}x+2$
4. $(3x-4)^2=(9x-2)\,(x-3)$

5. $\frac{3x-5}{2} = \frac{2-7x}{3}$

6. $\frac{3x+5}{2x-3} + 7 = \frac{x-2}{2x-3} - 5$

7. $(2x+3)^2 - x\,(3x+7) = x^2 - 6x + 13$

8-10 Plantee y resuelva los siguientes problemas:

8. Un estudiante de un curso de matemáticas tiene notas de 72 y 65 en dos parciales; en talleres tiene promedio 90 y la ponderación de los talleres es de un 20 %, y los tres parciales el 80 % restante. ¿Qué nota debe en el tercer corte del examen para aprobar la asignatura?

9. A las diez de la mañana una persona inicia una caminata con una velocidad constante de 8.5 km/h, al cabo de 12 minutos sale del mismo lugar un segundo atleta y corre a una velocidad contante de 13km/h por la misma ruta del primero. ¿A qué hora alcanzará el segundo atleta al primero?

10. Dos personas que se encuentran a 400 m de distancia empiezan a caminar uno en dirección del otro y en línea recta. Si la primera camina a una velocidad de 1.5 m/s y la segunda camina a una velocidad de 2 m/s. ¿Después de cuánto tiempo se encuentran? ¿Cuánta distancia ha caminado la segunda persona?

Ejercicios de la sección 3.2

11-16 Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando los métodos vistos en el capítulo para resolver ecuaciones cuadráticas.

11. $35x^2 - 69x + 28 = 0$

12. $3x\,(x+2) - 5(x+1)^2 = x - 2$

13. $2h^2 - 5h - 2$

14. $(x-3)^2 - 24 = x(x(x-1)$

15. $(z+2)^3 - 5(z-1)^2 = z^3 + 13z + 10$

16. $x^2 - 3x + 1 = 0$

17-21 Construya una ecuación cuadrática cuyas raíces sean:

17. $x_1 = \frac{m}{n}$, $x_2 = \frac{n}{m}$ $(m, n \neq 0)$

18. $x_1 = a^2 + b^2$, $x_2 = a^2 - b^2$

19. $x_1 = \frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}$, $x_2 = \frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$

20. $x_1 = \sqrt{3} - 1$, $x_2 = 3 + \sqrt{3}$

21. $x_1 = 2a - a\sqrt{3}$, $x_2 = 2a - a\sqrt{3}$

22-25 Plantee y resuelva los siguientes problemas:

22. Un proveedor desea construir una caja sin tapa para trasportar su mercancía, donde el largo de la base de la lámina que se use sea el doble del ancho. Si en cada esquina se cortan cuadrados de 3 cm de lado, ¿qué tamaño de lámina debe comprar para tener un volumen de 60 cm^3 de volumen?

23. Un terreno rectangular, cuyas dimensiones son de 26×38 metros es cercado por un muro de ancho uniforme. Se sabe que el área del muro es 250 m^2, ¿cuál es la altura del muro?

24. Un objeto es lanzado hacia arriba con velocidad de 60 m/s. La altura en metros denotada s, después de t segundos, se refleja en la expresión $s = -4{,}9 + 60t$. ¿Cuándo estará el objeto a 100 metros sobre la superficie? ¿Cuándo tocará la superficie?

25. Dos supervisores salen de la oficina a las ocho de la mañana con sus radioteléfonos correspondientes. El primero se dirige hacia el norte con una velocidad de 3 km/h y el segundo se dirige al oeste con una velocidad de 4km/h. ¿Cuánto tiempo pueden hacer uso de los radioteléfonos, si el alcance es de 2km?

Ejercicios sección 3.4

26-36 Resuelva e indique el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

26. $1 - x(2 - x) = (x - 1)^2$

27. $(2x + 1)(3 - x) = 3$

28. $x + \sqrt{2 - x^2} = 0$

29. $1 - 2\sqrt{2 - x} = 2x + 1$

30. $-5 + \sqrt{x^2 + 1} = -x$

31. $\sqrt{1 - 2x} + \sqrt{-x} = 5$

32. $\frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = \frac{1 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

33. $\frac{2}{k^2} = \frac{3}{4 - k^2} - \frac{1}{k}$

34. $x^2\left(x^2 + x\right) = x^3\left(x - x^2\right)$

35. $4\sqrt{x + 3} = x + 6$

36. $1+\sqrt{1-5x}=x$

37-43 Resuelva e indique el conjunto solución de las siguientes ecuaciones, donde debe realizar pasos que involucren conceptos algebraicos vistos en lo capítulos 1 y 2.

37. $\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{x}\right)^{-2}=25$

38. $\left(\frac{-2}{x}\right)^{-1}+\frac{-x}{4}=-1$

39. $\frac{x+2}{1+2(x+2)}=\frac{3}{7}$

40. $\frac{x^4-4x^3}{x^2}=0$

41. $\frac{x^2-9}{x+3}=x-3$

42. $8x^2+6x-5\sqrt{8x^2+6x+9}+3=0$

43. $5\left(x^2-3x+4\right)^2+30x\left(x^2-3x+4\right)$-100=0

44. Resuelva la siguiente ecuación: $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^{10}=7-5\left(x-\frac{1}{2}\right)^{5}$usando el cambio de variable

$$v=\left(x-\frac{1}{2}\right)^5.$$

Aplicación con tecnología

Desarrolle los siguientes ejercicios usando el programa www.symbolab.com y www.wolframalpha.com donde podrá evidenciar los procesos desarrollados analíticamente.

45-48 Encuentre para qué valor de h las siguientes ecuaciones tienen dos raíces reales diferentes.

45. $x^2-8x-5h=0$

46. $2x^2-3x+3-2h=0$

47. $(3h+1)\,x^2+x-4=0$

48. $(h+3)\,x^2-2hx+h+6=0$

49-51 Resuelva las siguientes ecuaciones, teniendo en cuenta que a,b,c son números dados.

49. $\frac{(a+x)(2x+a-b)+(x-b)^2}{(a+x)^2-(x-b)(a+b)} = \frac{7}{8}$

50. $\frac{2a+b-x}{2b-a+x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x-b}{x-b}$

51. $\frac{x-b}{x+b} + \frac{x+c}{x-c} + \frac{x+a}{x-a} = 10$

52-55 Encuentre para qué valor de t las siguientes ecuaciones tienen dos raíces reales diferentes con signos iguales.

52. $x^2 + (t-5)\,x + \left(t^2 + t + \frac{1}{4}\right) = 0$

53. $x^2 + 2tx + 4t - 3$

54. $x^2 - tx + 3t - 5 = 0$

55. $(t+2)\,x^2 + 6tx + 4t - 1 = 0$

Proyectos aplicados a las ciencias básicas

Las ecuaciones han sido aplicadas para resolver problemas a lo largo de la historia. A continuación presentamos algunas ideas de proyectos que pueden complementar lo visto en el capítulo.

- Ecuaciones a lo largo de las edades: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/dp2.html
- En busca de patrones: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/fops10.html
- Trabajar hacia atrás: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/fops8.html
- Trabajando al revés: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/fops13.html

La información referente a los proyectos formulados anteriormente se encuentra en el siguiente enlace: http://www.stewartmath.com/media/8_inside_discovery.php#

Solución de los ejercicios de trabajo en clase

5. $P = \frac{I}{rt}$

7. $h = -\frac{1}{3}\left(\pi r^2\right)$

9. $m = \frac{Fd^2}{gM}$

13. $(y-1)(y-16)$

15. $(4t-5)(2t-3)$

17. $(x+1)(x-1)(2x+1)\left(x^2+1\right)$

19. $v=-5+\sqrt{5}$; $v=-5-\sqrt{5}$
$v\approx -2{,}7639; v = \; -7{,}236067$

21. $y=5\sqrt{5}$; $y=-5\sqrt{5}$
$y\approx 7{,}071067$; $y=-7{,}071067$

23. $s=3+\frac{\sqrt{5}}{2}; s = \; 3-\frac{\sqrt{5}}{2}$
$s\approx 4{,}118033; s=1{,}881966$

25. $x=a+b$; $x=a-b$

27. $x=-c+d; x=-c-d$

29. $k=-\frac{3}{2}$; $k=-\frac{3}{2}$

31. $b=\frac{7}{2}$; $b=-\frac{5}{2}$

33. $x=2$; $x=\frac{1}{3}$

35. $w=\frac{\sqrt{7}-1}{6}$; $w=\frac{\sqrt{7}+1}{6}$

Solución de los ejercicios de trabajo independiente

1. $x=\frac{5}{2}$

3. $x=-2$

5. $x=\frac{19}{23}$

7. $x=\frac{4}{11}$

11. $x=\frac{7}{5}$; $\frac{4}{7}$

13. $h=\frac{5+\sqrt{41}}{4}$; $h=\frac{5-\sqrt{41}}{4}$

15. $z=\frac{-9+\sqrt{109}}{2}$; $z=\frac{-9-\sqrt{109}}{2}$

17. $mnx^2-\left(m^2+n^2\right)x+mn=0$

19. t^2-kt+1

21. $x^2-4ax-a^2=0$

27. $x=0; x=\frac{5}{2}$

29. $x = -2$

31. $x = -4$

33. $k = -1; k = -2 + 2\sqrt{3};\ k = -2 - 2\sqrt{3}\ k \approx -1; k \approx 1{,}4641\ ; k \approx -5{,}46410$

35. $x = -2; x = 6$

37. $vx = -\frac{21}{\sqrt{2}};\ \frac{21}{\sqrt{2}}$

39. $vx = 1$

41. $x \neq -3$

43. $x = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}};\ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}}$

CUATRO

FUNCIONES

No te preocupes por tus problemas con las matemáticas, los míos son todavía mayores.

Albert Einstein

El ser humano busca continuamente las causas de los fenómenos naturales y los factores que pueden variar en ellas, un ejemplo son los cambios climáticos. Huracanes, terremotos, inundaciones, sequías extremas con intensidades y frecuencias cada día más devastadoras. Es posible tomar dos variables: una donde se haga referencia a los cambios climáticos y la otra que se refiera a las intensidades y frecuencias. En este caso las variables son cualitativas. Este ejemplo se puede evidenciar en un diagrama de conjuntos o diagramas de Venn, donde se relacionan los elementos de la izquierda con los de la derecha.

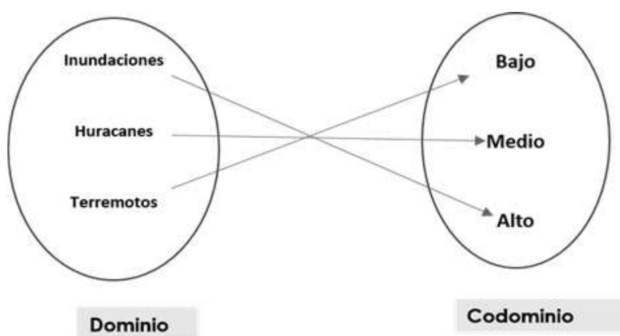


Figura 4.1. Diagrama de relación de una función.

Esta relación recibe el nombre de función si, para cada variable independiente existe un solo valor para la variable dependiente. Así se observa cómo cambia la variable independiente con respecto a la variable dependiente, como el ejemplo del cambio climático y sus consecuencias.

Las variables que se presentan en el desarrollo del capítulo son cuantitativas, por lo cual, se utilizan los números reales para cuantificarlas entre ellas. El vínculo estará ligado por una ecuación algebraica, que establece la relación de una variable con respecto a la otra.

Sea B el conjunto formado por los valores de la variable independiente (que también recibe el nombre de dominio) y C el conjunto formado por los valores de la variable dependiente (llamado codominio), donde exista una relación entre B y C es posible afirmar que es una función, si f asigna a cada elemento $x \in B$ un único elemento $y \in C$ llamado $f(x)$ o imagen de x *bajo* f.

Ejemplo 4.1

Para la función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Determinar la imagen de 4 y todas las preimágenes de 81.

Solución:

Primero se debe tener en cuenta que la relación $f(x) = x^2$ es uno a uno, por lo cual todo número real se relaciona con un único número real. La imagen de 4 se calcula sustituyendo el valor de $x = 4$ en la función, $f(4) = 16$. Las preimágenes de 16 son todos los valores de x tal que $f(x) = 16$. Estos son los números reales cuyo cuadrado corresponde a 16.
Al resolver la ecuación:

$$x^2 = 81$$

Esta solución en $\mathbb{R}$ son $x = 9$ *y* $x = -9$, por lo cual las preimágenes de 81 son 9 y -9.
El dominio de una función puede determinarse analíticamente teniendo en cuenta que al conjunto de los reales se le debe restar aquellos x que generen las siguientes situaciones para las imágenes de la función:

- Divisores cero
- Cantidades subradicales negativas para raíces de índice par

Las funciones polinómicas tienen como dominio el conjunto de los números reales. En el caso de las funciones racionales se debe proceder como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.2

Sea $f(x) = \frac{3x}{x+4}$ determine su dominio.

Solución:

Se iguala el denominador a cero y se resuelve la ecuación obtenida. El ejemplo $x+4 = 0$ tiene como solución $x = -4$. Esto quiere decir que $f(-4)$ no está definido ya que la sustitución de x por -4 da como resultado $f(-4) = -\frac{12}{0}$. Según lo anterior el dominio corresponde al conjunto de los números reales menos el valor -4.

La anterior conclusión se escribe de la siguiente forma: $\mathbb{R}-\{-4\}$.

Ejemplo 4.3

Sea $f(x) = \frac{5x+3}{x^2-5x+6}$ determine su dominio.

Solución:

De forma similar al ejemplo anterior se iguala el denominador a cero y se resuelve la ecuación resultante para obtener: $x^2 - 5x + 6 = 0$ cuyas soluciones son $x = 3,\ x = 2$.
De tal forma que el dominio de la función es entonces: $\mathbb{R}-\{3,2\}$

Ejemplo 4.4

Sea $f(x) = \frac{\sqrt{x+9}}{x-4}$. Determine el dominio de f.

Solución:

Para esta función se combinan dos de las situaciones presentadas anteriormente ya que es necesario que $x+9\geq 0$, para que dé una solución real debido al índice par en la raíz. También se necesita que el denominador $x-4\neq 0$. Por lo cual $x\geq -9$ y $x\neq 4$; por tanto, el dominio de la función corresponde al conjunto $(\mathbb{R}-\{3,2\}) \cup x \geq -9$, expresión equivalente a $\mathbb{R}-\{3,2\}$

Ejemplo 4.5

El perímetro de un rectángulo es 100 metros. Si se define b como la base y h como la altura determine una función para la base en función de la altura y encuentre su dominio.

Solución:

El perímetro del rectángulo es 100 m, entonces $2b+2h= 100$; luego, $b=\frac{100-2h}{2}$, simplificando se obtiene $b= 20-h$. De tal forma que la base en función de la altura es: $b(h) = 20-h$.
Dado que la altura debe ser mayor que cero, es decir, $h\geq 0$, por ser una longitud, no podría tomar valores negativos. El dominio de la función es [0;20].

4.1. Representación gráfica de funciones

Una función $f(x)$ se representa mediante el conjunto de puntos en el plano cartesiano de la forma $(x, f(x))$, donde x pertenece al dominio de la función y $f(x)$ es su imagen bajo f y por tanto pertenece al codominio. A continuación se presentan diferentes figuras; solo una corresponde a la función real de variable real.

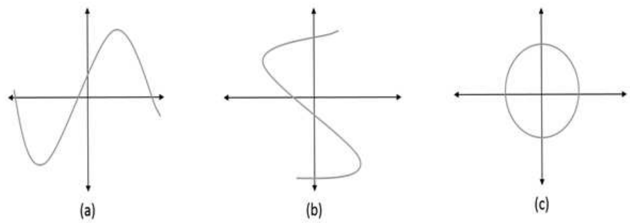
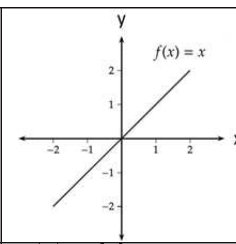
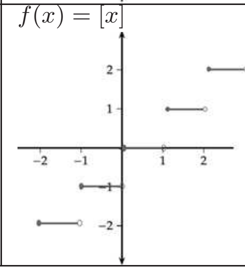
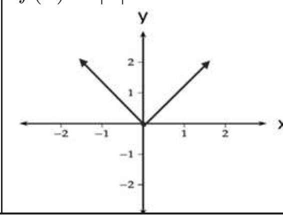


Figura 4.2. Graficas: a) Es función b) No es función c) No es función.

4.2. Función identidad, parte entera y valor absoluto

Tabla 4.1. Funciones identidad, parte entera y valor absoluto

Función identidad. $f(x) = x$ es una función en donde la imagen y preimagen son iguales. Su dominio es $\mathbb{R}$, y su rango $(-\infty, \infty)$, su representación es una recta que pasa por el punto $(0, 0)$ del plano formando un ángulo de 45° con el eje x.	
Función parte entera. $f(x) = [x]$ Esta función asigna a x, el mayor entero que es menor o igual a x, el dominio son los $\mathbb{R}$, pero su rango son los $\mathbb{Z}$. La figura tiene forma de escalera, su característica es relacionar a todo número no entero con el entero inmediato a la izquierda en la recta numérica; si es un número entero se le asigna el mismo número.	$f(x) = [x]$ 

Función valor absoluto. $F(x) = \|x\|$ corresponde a una función real, su imagen es el valor absoluto de la preimagen. Su dominio es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, y su rango $[0, \infty^{+})$.	$f(x) = \|x\|$ 

4.3. Operaciones con funciones

Con las funciones es posible sumar, restar, multiplicar, dividir y hallar funciones compuestas aplicando propiedades de expresiones algebraicas.

Ejemplo 4.6

Sea $f\,(x) = \frac{x}{x^2-9}$ y $g\,(x) = \frac{x+3}{x}$, cuyos dominios $\mathbb{R}-\{-3, 3\}$ y $\mathbb{R}-\{0\}$; determinar el dominio y el criterio para las funciones $f+g, f-g$ y $f.g$.

Solución.

El dominio correspondiente para las funciones: $f+g, f-g$ y $f.g$. es la intersección de los dominios D_f y D_g. Obtenemos $\mathbb{R}-\{-3, 0, 3\}$.

- $f+g$ es $f+g\,(x) = f\,(x) + g\,(x)$

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-9} + \frac{x+3}{x} &= \frac{x^2+x^3+3x^2-9x-27}{x(x^2-9)}\\ &= \frac{x^3+4x^2-9x-27}{x(x^2-9)}\\ &= \frac{x^3+4x^2-9x-27}{x(x-3)(x+3)}\end{aligned}$$

- $f-g\ es\ f-g(x) = f(x) - g(x)$

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-9} - \frac{x+3}{x} &= \frac{x^2-x^3-3x^2+9x+27}{x(x^2-9)}\\ &= \frac{-x^3-2x^2+9x+27}{x(x^2-9)}\\ &= \frac{-x^3-2x^2+9x+27}{x(x-3)(x+3)}\end{aligned}$$

- $f.g\ es\ f.g(x) = f(x).g(x)$

$$\frac{x}{x^2-9}.\frac{x+3}{x}=\frac{x(x+3)}{x(x^2-9)}=\frac{x(x+3)}{x(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x-3}$$

El dominio para esta función es $\mathbb{R}-\{3\}$

Para el caso de la división el dominio sale de la división de los dominios de cada función eliminando los valores que anulan el divisor.

Ejemplo 4.7

Sean $f(x)=3x^2-2x+1$ y $g(x)=\sqrt{x+2}$ funciones reales, de variable real. Calcule $f\circ g$ y $g\circ f$. Determine si son iguales.

Solución:

La imagen de x bajo g es $\sqrt{x+2}$, entonces se sustituye la variable x en la función f por la expresión $\sqrt{x+2}$ y se simplifica. El resultado es:

$$(f\circ g)(x)=3\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2\sqrt{x+2}+1$$

$$(f\circ g)(x)=3(x+2)-2\sqrt{x+2}+1$$

$$(f\circ g)(x)=3x+7-\sqrt{x+2}$$

Para calcular $(g\circ f)(x)$ se tiene que la imagen de x bajo f es $f(x)=3x^2-2x+1$, entonces se sustituye la variable x en la función g por la expresión $3x^2-2x+1$ y se obtiene:

$$(g\circ f)(x)=\sqrt{\left(3x^2-2x+1\right)+2}$$

$$(g\circ f)(x)=\sqrt{3x^2-2x+3}$$

De lo anterior es posible afirmar que: $(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$

4.4. Función lineal

Esta función es de gran utilidad en los métodos estadísticos. Se le denomina la recta del mejor ajuste, que ayuda a estudiar los comportamientos de las variables en problemas específicos.

Una función $y=f(x)$ es lineal, si el incremento o la disminución en la variable dependiente es directamente proporcional a la diferencia en la variable independiente. En este caso se puede afirmar que las variables se relacionan linealmente.

Para $y = f(x)$; $y_1 = f(x_1)$ entonces $y - y_1 = m(x - x_1)$, donde m es la constante de proporcionalidad. Se puede reescribir como $y = mx + y_1 - mx_1$, si $b = y_1 - mx_1$, y obtener $f(x) = mx + b$ que corresponde a la forma como se expresa comúnmente la función lineal.

Ejemplo 4.8

La tabla indica los puntos de ebullición de algunas sustancias en las escalas de temperatura Fahrenheit F y Celsius C.

Tabla 4.2. Puntos de ebullición para diferentes sustancias

Sustancia	**C**	**F**
Hidrógeno	-252.8	-423.04
Oxígeno	-183	-297.4
Agua	100	212
Metano	-161.5	-258.7

Verificar que las variables F y C están relacionadas linealmente y que F se expresa en función de C.

Solución

Para verificar que las dos variables están relacionadas se toman dos valores respectivamente, $F_1 = 212$ y $F_2 = -297{,}4$ y $C_1 = 100$ y $C_2 = -183$. Se aplica:

$$F_1 - F_2 = m\,(C_1 - C_2) \Rightarrow 212 - (-297{,}4) = m\,(100 - (-183)) \Rightarrow m = \frac{509{,}4}{283} = 1{,}8$$

y $b = F_1 - mC_1 = 212 - 1{,}8 \times 100 = 32$, por tanto se obtiene $F\,(C) = 1{,}8\,C + 32$: es la función que expresa a F en función de C.

$m = 1{,}8$ indica que un incremento en un grado en la escala Celsius equivale a aumentar 1,8 grados en la escala Fahrenheit. Podemos decir que el valor de m determina una razón de crecimiento o decrecimiento entre variables y b es la interseccion con el eje y.

Ejemplo 4.9

Si F y C representan las escalas de temperatura Fahrenheit y Celsius, exprese C en función de F.

Solución

Para expresar C en función de F se busca la función inversa de $F\,(C) = 1{,}8\,C + 32$, encontrada en el ejemplo anterior. Esto se logra despejando C, de donde se obtiene:

$$F = 1{,}8\,C + 32$$

$$
\begin{aligned}
F - 32 &= 1{,}8\,C \\
\frac{F-32}{1{,}8} &= C \\
C &= \frac{F}{1{,}8} - \frac{32}{1{,}8} \\
C &= \frac{5}{9}F - \frac{160}{9} \\
C &= \frac{5}{9}(F-32)
\end{aligned}
$$

4.5. Representación de la función lineal

Cuando se representa la función lineal es importante tener en cuenta lo siguiente:

Si $x_1 < x_2$ teniendo presente las propiedades de las desigualdades se tiene que $mx_1 + b < mx_2 + b$ si $m > 0$, esto indica que la función lineal es creciente.

Si $mx_1 + b > mx_2 + b$ si $m < 0$ la función lineal es decreciente.

Y por último cuando la pendiente $m = 0$, se puede concluir que la función es constante, esto se puede evidenciar en la figura 4.3 que representa la pendiente.

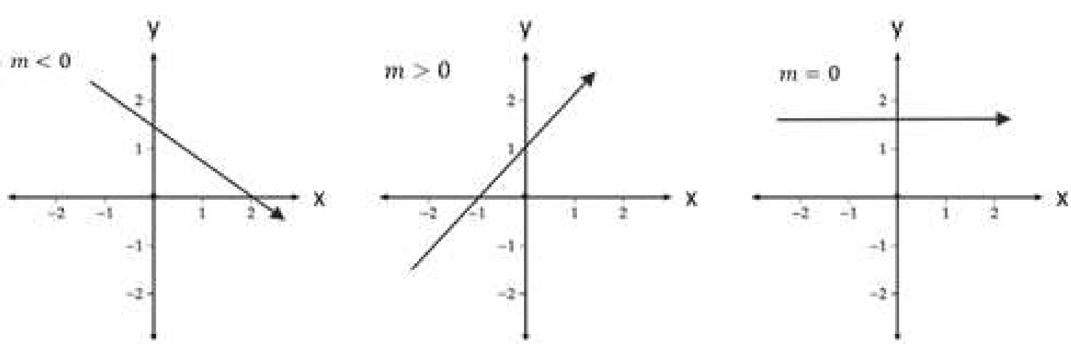


Figura 4.3. Funciones lineales decrecientes, creciente y constante

4.5.1. Ecuación de la recta

Ejemplo 4.10

Dadas las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4x - 6y &= 2 \\ x &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}y \end{aligned}$$

Verificar si representan la misma recta.

Solución:

Se puede notar que las ecuaciones son equivalentes al transformar una de ellas en la otra. Al iniciar con la ecuación $4x - 6y = 2$ y despejar x resulta:

$$4x = 2 + 6y$$

$$x = \frac{2 + 6y}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y$$

La última expresión es igual a la segunda ecuación con lo cual se ha demostrado su equivalencia.

Ejemplo 4.11

a. Si una recta tiene pendiente 4 y su punto de intersección sobre el eje y es $(0, -5)$ ¿Cuál será su ecuación?

   Como $m = 4$ y $b = -5$, de la forma de punto-intersección de la ecuación se obtiene lo siguiente: $y = 4x - 5$.

b. Sea la ecuación de la recta $-6y + 10x = 8$ determine el punto de intersección con el eje y y el valor de la pendiente de la recta.

Se escribe la ecuación de la forma $y = mx + b$, es decir, se despeja y

$$-6y + 10x = 8$$

$$-6y = 8 - 10x$$

$$y = \frac{8 - 10x}{-6}$$

$$y = -\frac{4}{3} + \frac{5}{3}x$$

De tal forma que la pendiente de la recta es $m = \frac{5}{3}$ y la intersección con el eje $y\ es\ b = -\frac{4}{3}$. Al relacionar una ecuación de la forma $ax + by = c$ con un conjunto de puntos, los cuales satisfacen la ecuación es posible afirmar que si a, b y c son números reales, tales que a y b no son cero a la vez, entonces el conjunto $\{(x, y) : ax + by = c\}$ tiene como gráfica una recta. A la ecuación $ax + by = c$ se le llama ecuación de la recta.

Ejemplo 4.12

Determine la intersección de las rectas:

$$\begin{aligned} 10x - 2y &= 2 \\ -4x + y &= 5 \end{aligned}$$

Solución:

La intersección es una pareja ordenada que corresponde a un punto del plano donde las rectas se cortan. Para buscar el punto de corte de las rectas se multiplica la segunda ecuación por 2 y se suma con la primera para obtener:

$$10x - 2y - 8x + 2y = 2 + 10$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

Este resultado de x será sustituido en la primera ecuación y da como resultado:

$$60 - 2y = 2$$

$$-2y = 2 - 60$$

$$-2y = -58$$

$$y = \frac{-58}{-2}$$

$$y = 29$$

De donde es posible concluir que el punto de intersección es (6,29).

Ejemplo 4.13

Determine el punto donde se cortan las rectas con ecuaciones $4x + 6y = 5$ $y - 2x - 3y = 1$

Solución:

Al despejar la variable y de la ecuación $4x + 6y = 5$, se puede evidenciar $y = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{6}$, y al realizar el mismo procedimiento para la ecuación $-2x - 3y = 1$ obtenemos: $y = \frac{-2}{3}x - \frac{1}{3}$. Por tanto se puede observar que las dos rectas tienen la misma pendiente y diferente intersección. Se concluye que las rectas son paralelas.

Ejemplo 4.14

¿Son perpendiculares las rectas $\frac{5}{4}x + y = -10$ y $y = \frac{4}{5}x + 8$?

Solución:

Para resolver este problema se debe determinar la pendiente de ambas rectas y calcular el producto $m_1.m_2$. Para la primera ecuación se reescribe $y = -\frac{5}{4}x - 10$, donde $m_1 = -\frac{5}{4}$ y para la segunda recta la $m_2 = \frac{4}{5}$, calculamos $m_1.m_2 = -\frac{5}{4}.\frac{4}{4} = -1$, esto nos lleva a deducir que las dos rectas son perpendiculares.

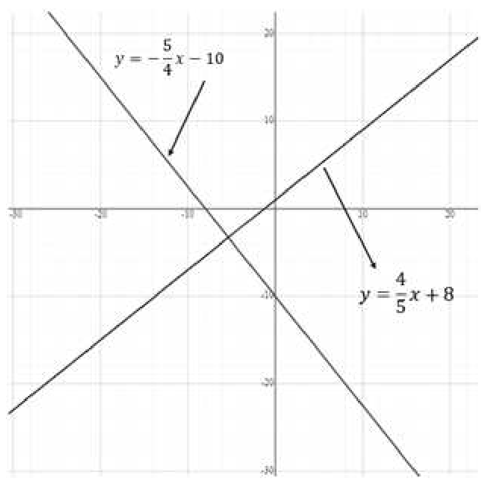


Figura 4.4. Rectas perpendiculares

(1) Ejercicios de trabajo en clase

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por P y Q

1. $P\,(2, 2)\,, Q(-10, 0)$
2. $P\,(-1, -4)\,, Q(6, 0)$
3. $P\,(1, 2)\,, Q(3, 3)$

Para los puntos 4, 5 y 6 determine una ecuación de la recta que cumpla las condiciones indicadas:

4. Pasa por $(-1,-2)$ y $(4,3)$
5. Pendiente 3; intersección en y es -2
6. Intersección $en\ x\ es\ -8$; intersección en y es 6

4.5.2. Modelado de la función lineal

Ejemplo 4.15

Un deportista que hace habitualmente una hora de ejercicio quema 210 calorías usando una máquina caminadora con una velocidad de 20 kilómetros por hora, si va a 60 kilómetros por hora, este deportista quema 370 calorías. Las calorías quemadas por hora son representadas por la letra C y la velocidad es representada con V.

Determine.

a) La función $C\ (v)$ que describa la situación

b) Si la velocidad del deportista es de 8 kilómetros por hora ¿Cuál será la cantidad de calorias quemadas?

Solución:

Para encontrar la función lineal $C(v)$ que se ajusta a los datos debemos encontrar la pendiente de la función. Para este proceso se necesitan dos puntos: (20,210) y (60,370), y obtenemos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

$$m = \frac{370 - 210}{60 - 20} = \frac{160}{40} = 40$$

El valor 40 representa la razón de crecimiento.
Como ya obtuvimos la pendiente entonces vamos a utilizar la ecuación. Punto pendiente. $y - y_1 = m(x - x_{1)}$. Aplicando esta ecuación obtenemos:
(Recordemos que para utilizar la ecuación necesitamos por lo menos un punto y el valor de la pendiente).

$$y - 210 = 40(x - 20)$$

$$y - 210 = 40x - 80$$

$$y = 40x - 80 + 210$$

$$y = 40x + 130$$

4.6. Función cuadrática

Esta función es muy generosa ya que nos facilita modelar situaciones problema en la geometría, crecimiento y decrecimientos, lanzamiento de objetos y problemas que requieran maximizar o minimizar gastos entre otros.

Se define formalmente de la siguiente manera:

Sea f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, f es una función cuadrática si existen constantes $a, b\ y\ c \in \mathbb{R}\ con\ a \neq 0$ y $f(x) = ax^2 + bx + c.$

La gráfica de la función cuadrática se llama parábola, $f(x) = x^2$, que posee vértice y un eje simétrico; también puede ser cóncava o convexa.

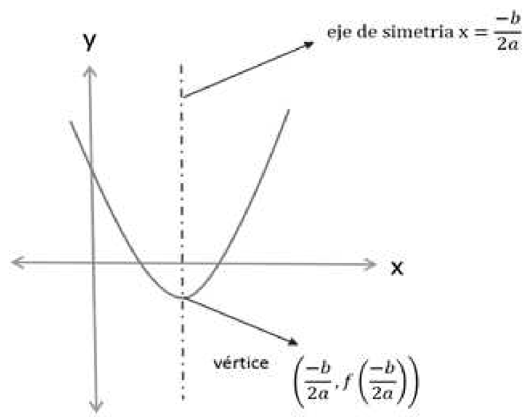


Figura 4.5. Eje de simetría y vértice en una parábola

Ejemplo 4.16

Exprese la función $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$ en forma normal y trace su gráfica.

Para expresar la función en forma normal se debe factorizar y completar cuadrados.

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 15$$
$$f(x) = 3\left(x^2 - 4x\right) + 15$$

$$f(x) \ = 3\left(x^2 - 4x + 4\right) + 15 - (3)\,.(4) f(x) \ = 3(x-2)^2 + 3$$

La forma normal es: $f(x) = 3(x-2)^2 + 3$

Para trazar la gráfica se desplazan 2 unidades a la derecha, se alarga en 3 y se desplazan 3 unidades hacia arriba. El vértice de la parábola está dado por $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Al hacer el reemplazo se obtiene $V(2,3)$ y la parábola abre hacia arriba y su punto de intersección con el eje y es $f(0) = 15$.

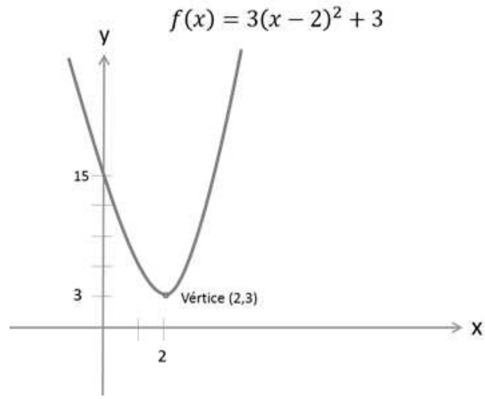


Figura 4.6. Vértice de la parábola $3(x-2)^2 + 3$

4.7. Máximos y mínimos de una función cuadrática

La función cuadrática tiene vértice (h, k) y tiene un valor mínimo si la gráfica abre hacia arriba, por el contrario, la función tiene un valor máximo ubicado en el vértice si su gráfica abre hacia abajo.

Sea f una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x-h)2 + k$ el valor máximo o el valor mínimo de la función se encuentra ubicado en $x = h$.

Si el coeficiente del término cuadrático es mayor que cero, es decir $a > 0$, entonces el valor mínimo de la función cuadrática será $f(h) = k$; por otra parte, si el coeficiente del término cuadrático es menor que cero, es decir $a < 0$, entonces el valor máximo de la función cuadrática será $f(h) = k$.

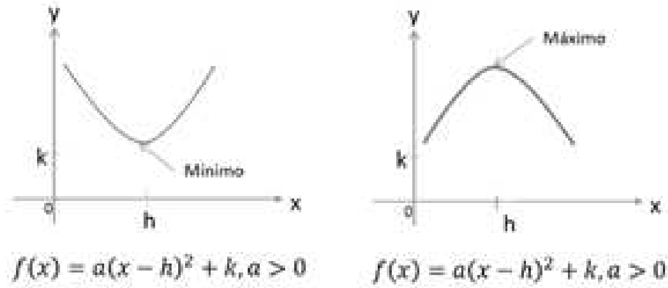


Figura 4.7. Valores máximos y mínimos de una parábola

Ejemplo 4.17

Dada la función cuadrática $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$

a) Escriba la función en forma normal

b) Determine las coordenadas del vértice y los puntos de intersección con los ejes x y y

c) Elabore la gráfica

d) Identifique el valor mínimo o máximo de f

a) Para expresar la función en forma normal se debe factorizar y completar cuadrados.

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x^2 + 12x - 5 \\ &= \ 6\left(x^2 + 2x\right) - 5 \\ &= 6\left(x^2 + 2x + 1\right) - 5 - (6{,}1) \\ &= 6(x+1)^2 - 11 \end{aligned}$$

La forma normal es $f(x) = 6(x+1)^2 - 11$

b) El vértice es $(-1, -11)$ y la parábola abre hacia arriba, el punto de intersección con el eje y es $f(0) = -5$, es decir $(0, 5)$, y los puntos que se intersecan en x, se obtienen al hacer $f(x) = 0$. Se debe resolver la expresión utilizando la fórmula de la ecuación cuadrática.

En este caso, con $a{=}\ 6,\ \ b{=}\ 12,\ \ c{=}\ -5$, el discriminante es positivo $b^2{-}4ac{=}\ 264$ y la ecuación tiene dos soluciones reales. De la forma cuadrática:

$$x{=}\frac{-12{\pm}\sqrt{(12)^2{-}4(6)(-5)}}{2\,(6)}$$

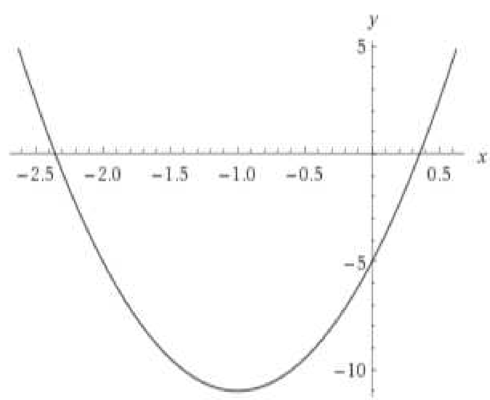
$$x=\frac{-12\pm\sqrt{264}}{12}$$

$$x=\frac{-12\pm 2\sqrt{66}}{12}$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{66}}{6}$$

Entonces, las intersecciones con el eje x son:

$$\left(\frac{-6-\sqrt{66}}{6},\ 0\right) \quad \left(\frac{-6+\sqrt{66}}{6},0\right)$$



c) Como el coeficiente principal es positivo, f tiene un valor mínimo, que es:

$$f(-1)=-11$$

Ejemplo 4.18

Dada la función cuadrática $f\,(x)=-2x^2{+}6x{+}1$

a) Escriba la función en forma normal.

b) Determine las coordenadas del vértice y los puntos de intersección con los ejes x y y.

c) Elabore su gráfica.

d) Identifique el valor mínimo o máximo de f.

a) Para poder expresar la función en forma normal se debe factorizar y completar cuadrados.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2+6x+1 \\ &= -2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+1-(-2.\frac{9}{4}) \\ &= -2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{2} \end{aligned}$$

La forma normal es: $f(x) = -2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$

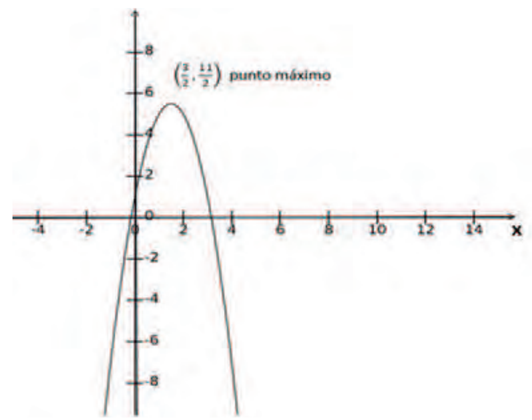


Figura 4.8. Punto máximo de la parábola $f(x) = -2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$

b) El vértice es: $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$; la parábola abre hacia abajo y el punto de intersección con el eje y es $f(0) = 1$, es decir $(0,1)$. Los puntos de intersección con el eje x se obtienen al establecer $f(x) = 0$. Para determinar los valores de x que satisfacen esta ecuación se utiliza la fórmula de la ecuación cuadrática.

En este caso, $a= -2$, $b= 6$, $c= 1$, el discriminante es positivo $b^2-4ac= 44$ y la ecuación tiene dos soluciones reales. De la fórmula cuadrática se tiene:

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4(-2)(1)}}{2\,(-2)}$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{44}}{-4}$$

$$x=\frac{-6\pm 2\sqrt{11}}{-4}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{-2}$$

Entonces, las intersecciones con el eje x se encuentran en los puntos:

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}\right) \quad y \quad \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$$

(2) Ejercicios en clase

Realice el siguiente procedimiento: escriba la función en forma normal, determine las coordenadas del vértice y los puntos de intersección con los ejes x y y, elabore la gráfica e identifique el valor mínimo o máximo de f.

1. $k(x) = 3x^2 - 12x + 13$
2. $g(x) = 2x^2 + 8x + 11$
3. $j(x) = 1 - x - x^2$
4. $f(x) = 5x^2 + 12x - 3$

Encuentre el dominio y el rango en las siguientes funciones:

5. $f(x) = -8x + 5x + 12$
6. $h(x) = 14 - 10x + 2x^2$
7. $k(x) = -9x^2 + 5x + 2$

Determine la función cuadrática cuya gráfica tiene vértice en (1,22) y para la que el punto (4,16) pertenece a la gráfica.

4.7.1. Modelado de la función cuadrática

Ejemplo 4.19

Gloria es propietaria de una fábrica de pantalones para dama, el costo $C(n)$, que se genera por la elaboración de los pantalones se puede calcular mediante la expresion:

$$C(n) = n(50 - 0{,}2n)$$

En esta expresión, el factor $(50 - 0{,}2n)$ representa el precio por pantalón expresado en dólares.

a) Calcule el costo generado al fabricar 30 pantalones

b) ¿Qué cantidad de pantalones deben elaborarse para que se genere un costo de U$960?

Solución:

a) Para determinar el costo generado por 30 pantalones evaluamos la función para $n = 30$

$$\begin{aligned} C(n) &= n(50 - 0{,}2n) \\ C(30) &= 30(50 - 0{,}2(30)) \\ C(30) &= 30[50 - 6] \\ C(30) &= 30(44) \\ C(30) &= 1320 \end{aligned}$$

En este caso el costo es de $1320 dólares.

b) Se quiere determinar el número pantalones que se deben fabricar para generar costos por U$960 dólares, para lo cual se hace $C(n) = 960$ y despejar n.

$$\begin{aligned} C(n) &= n(50 - 0{,}2n) \\ 960 &= n(50 - 0{,}2n) \\ 960 &= 50n - 0{,}2n^2 \\ 0{,}2n^2 - 50n + 960 &= 0 \end{aligned}$$

Para desarrollar esta ecuación se usa la fórmula cuadrática.

Donde $a = 0{,}2, b = 50$ y $c = 480$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n = \frac{-(50) \pm \sqrt{(50)^2 - 4(0{,}2)(480)}}{2(0{,}2)}$$

Realizando los cálculos obtenemos:

$$= \frac{-(-50) \pm \sqrt{2500-}}{0{,}4} = \frac{-(-50) \pm \sqrt{2500 - 2116}}{0{,}4}$$

$$= \frac{50 \pm \sqrt{384}}{0{,}4} = \frac{50 \pm 46}{0{,}4}$$

$$n = \frac{50 + 46}{0{,}4} = 240 \ o \ n = \frac{50 - 46}{0{,}4} = 10$$

Se debe tener en cuenta que las dos soluciones son válidas, ya que son positivas y en consecuencia se genera un costo de U$960, cuando se fabrican 240 pantalones para dama o 10 pantalones para dama.

Ejemplo 4.20

Se quiere construir una caja con base cuadrada sin tapa a partir de una lámina cuadrada de acero, cortando en cada esquina cuadrados de 2 cm de lado, y doblando para formar la caja. ¿Qué dimensiones debe tener la lámina para que la caja tenga un volumen de 32 cm^3?

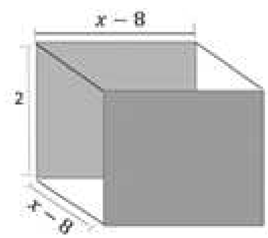


Figura 4.9. Representación de una caja de base cuadrada sin tapa

Solución

Según la figura 32, si x representa la longitud del lado de la lámina, $x - 8$ será la longitud de cada lado de la base. El volumen de la caja se calcula con la ecuación $2(x-8)^2 = 32$, Al igualar a cero la ecuación cuadrática se obtiene $2x^2 - 32x + 96 = 0$. En este caso, $a = 2$, $b = -32$, $c = 96$, el discriminante es positivo $b^2 - 4ac = 256$ y la ecuación dada tiene dos soluciones. De la forma cuadrática:

$$t = \frac{-(-32) \pm \sqrt{256}}{2.(2)} = \frac{32 \pm 16}{4}$$

Los resultados de los tiempos son $x_1 = \frac{32+16}{4} = 12$ y $x_2 = \frac{32-16}{4} = 4$

x no puede ser 4 ya que se deben cortar cuadrados en cada esquina de lado 4. Por lo anterior, las dimensiones que debe tener la lámina de acero son 12×12 cm^2.

Ejemplo 4.21

Un atleta en una competencia de tiro con arco realiza el disparo de una flecha hacia arriba, desde una altura de 1 metro sobre el piso. La altura (h) representada en metros, en función del tiempo t expresado en segundos, está dada por la siguiente ecuación:

$$h = -2t^2 + 160t + 100$$

Halle el tiempo trascurrido de la flecha cuando alcance una altura de 1100 metros

Solución:

Para resolver se halla el valor de t, para una $h = 1100$. Esto se realiza sustituyendo h por 1100 en la ecuación cuadrática inicial.

$$1100 = 2t^2 + 160t + 100$$

Al igualar a cero la ecuación cuadrática $2t^2 - 160t - 1000 = 0$, con $a = -2$, $b = -160$, $c = -1000$, el discriminante es positivo $b^2 - 4ac = 48400$ y la ecuación dada tiene dos soluciones. De la forma cuadrática:

$$t = \frac{-(-160) \pm \sqrt{25600 + 8000}}{2.\,(2)} = \frac{-(-160) \pm \sqrt{33600}}{2.\,(2)} = \frac{160 \pm 40\sqrt{21}}{4}$$

Los resultados de los tiempos son $t_1 = 40 + 10\sqrt{21} \approx 85{,}8$ y $t_2 = 40 - 10\sqrt{21} \approx -5{,}8$. Por tanto, la solución del problema es $t_1 = 85{,}8$ segundos; es el tiempo que dura el proyectil cuando sube para estar a 1100 metros de altura. Ya que t_2 no es posible asumirlo porque el tiempo nunca es negativo.

4.8. Función exponencial base *a*

La función exponencial tiene la forma $f(x) = a^x$, en esta expresión se considera $a \neq 1$ y $a > 0$. Como en las expresiones algebraicas a se denomina base y x se denomina exponente. El dominio de la función exponencial es el conjunto de los números reales.

Para analizar la forma de la gráfica en la función exponencial, se toma $a = 2$ $(a > 0)$ y el luego se toma $a = \frac{1}{2}\,(0 < a < 1)$. A continuación se representan las funciones en la figura 4.10.

$f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $f(x) = a^x$

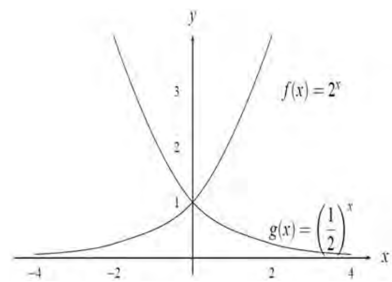


Figura 4.10. Representación de la función exponencial

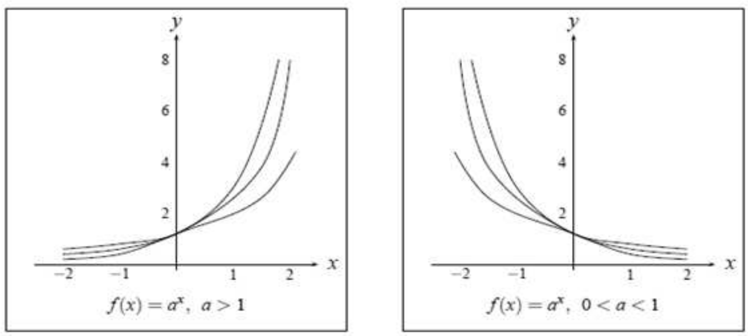


Figura 4.11. Representación de propiedades de la función exponencial

Propiedades de las funciones exponenciales.

1. $a^0 = 1$, para $a > 0$
2. $f(x) = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $a > 0$
3. La gráfica de $f(x) = a^x > 0$ para cualquier $a > 0$ es continua.
4. Si $x_1 > x_2 \Rightarrow \begin{cases} a^{x_1} & > a^{x_2} \text{ si } a < 1 \\ a^{x_1} & < a^{x_2} \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases}$
5. Para $a > 1$ la función $f(x) = a^x$ es creciente y para $0 < a < 1$ la función es decreciente.

Ejemplo 4.22

Ordene en forma ascendente los siguientes números

a) $2^{-2}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{0,4}, 2^{\sqrt{2}}$ la función $y = 2^x$, para $x \in \mathbb{R}$, crece por tanto $2^{-2}, 2^{0,4}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\sqrt{2}}$

b) $4^{\frac{1}{2}}, 2^3, (0{,}5)^{-2}, 0{,}125^2, (0{,}25)^{\sqrt{3}}$ cada número se puede representar como potencia de 2 y obtenemos:

$$(0{,}125)^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 2^{-6},\ (0{,}25)^{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3}} = 2^{-2\sqrt{3}},\ 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2,\ \ (0{,}5)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2,\ 2^3$$

Ejemplo 4.23

Simplifique las siguientes expresiones:

a. $3^x{,}3^{x+5} = 3^{2x+5}$

b. $2^x + (1/2)^{-x} = 2^x + 2^x = 2{,}2^x = 2^{x+1}$

c.

$$\begin{aligned}
\frac{1+3^x}{2^x} + \frac{1}{6^x} &= \frac{1+3^x}{2^x} + \frac{1}{2^x{,}3^x} \\
&= \frac{1+3^x}{2^x}.\frac{3^x}{3^x} + \frac{1}{2^x{,}3^x} \\
&= \frac{(1+3^x)\,.\,(3^x+1)}{(2^x{,}3^x)} \\
&= \frac{3^x+9^x+1}{6^x}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.24

Hallar el conjunto de todos los números reales x tales que $27^{x-1} = 9^{x+2}$

$$\begin{aligned}
27^{x-1} &= 9^{x+2} \\
&\Rightarrow \left(3^3\right)^{x-1} = \left(3^2\right)^{x+2} \\
&\Rightarrow 3^{3x-3} = 3^{2x+4} \\
&\Rightarrow 3x-3 = 2x+4 \\
&\Rightarrow x = 7
\end{aligned}$$

El conjunto solución tiene como único elemento a 7, es decir, el conjunto solución es $\{7\}$.

4.9. Función exponencial base e

Para poder entender el número e observe la siguiente expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Si se dan valores a n, cada vez más grandes se obtiene:

Tabla 4.3. Valores de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

n	1	100	1000	100000	1000000	10000000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.7048	2.7169	2.71826	2.71828	2.71828

Podemos evidenciar de la tabla anterior que a medida que los valores de n son más grandes se van acercando a 3, pero nunca serán mayores a este valor, lo cual se aproxima a un número irracional que conocemos como $e = 2{,}71828182\ldots$ La función exponencial es más conocida como $f(x) = e^x$.

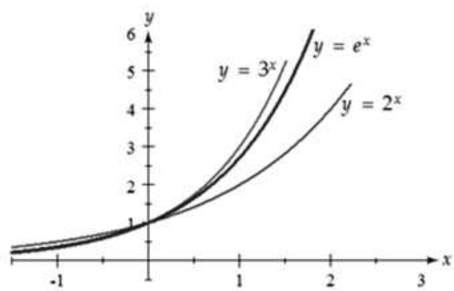


Figura 4.12. Función Exponencial e^x

Ejemplo 4.25

Factorizar sobre los números reales:

a.

$$\begin{aligned}3e^{2x} - 75e^{2y} &= 3\left(e^{2x} - 25e^{y}\right)\\ &= 3\left[\left(e^{x}\right)^2 - \left(5e^{y}\right)^2\right]\\ &= 3\left(e^{x} + 5e^{y}\right)\left(e^{x} - 5e^{y}\right)\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}e^{2x} - e^{x} - 6 &= \left(e^{x}\right)^2 - e^{x} - 6\\ &= \left(e^{x} - 3\right)\left(e^{x} + 2\right)\end{aligned}$$

Ejemplo 4.26

Efectuar las operaciones indicadas

a.

$$\begin{aligned} e^x\left(3e^{-x}\right) + e^{-x} &= 3e^0 + e^{-x} \\ &= \frac{3e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = \frac{3e^x+1}{e^x} \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \frac{2e^{2x}-2}{2e^x}.\frac{e^{2x}}{e^x+1} &= \frac{2\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)}{2e^x}.\frac{\left(e^x\right)^2}{e^x+1} \\ &= e^x\left(e^x-1\right) \end{aligned}$$

(3) Ejercicios de trabajo en clase

Dada la siguiente función $f(x) = 8^x$,halle:

1. $f\left(-\frac{1}{8}\right)$
2. $f(10)/f(5)$
3. $f(2).f(6)$

Elabore las gráficas en un mismo sistema de ejes para las siguientes funciones y analice su comportamiento:

4. $f(x) = 2^x, g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
5. $f(x) = (6/4)^x,\ g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
6. $f(x) = 5^x,\ g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

Simplifique las siguientes expresiones:

7. $10^5.10^7,10$
8. $2^x\left(5,2^{-x}\right) + 2^x$
9. $(6^x/10^x) + \left(\frac{1}{2}\right)^x$
10. $e^2.e^{2x}$
11. $\frac{x}{e^x} + ye^{-x}$

Factorice para los números reales:

12. $2^x + 2^{3x}$
13. $e^x + e^{x+y}$
14. $(2e)^x + e^{2x}$
15. $4e^{3a} - 36e^{3a}$

4.10. Función logaritmo (Base a)

Puesto que la función $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ es inyectiva, entonces existe su inversa $f^{-1}(x)$, esta función recibe el nombre de función logaritmo en base a y se denota $f^{-1}(x) = log_a x$. El dominio de esta función es $(0, \infty)$

La función $y = log_a x \ \ con\ a = e$, es decir, la función inversa de $k(x) = e^x$ se llama función logaritmo natural y se denota por $f(x) = ln(x)$, es decir, $\ln(x) = log_e x$ por tanto $y = ln(x)$ que equivale a $x = e^y$.

Para las parejas de funciones y sus inversas son simétricas respecto a la recta $y = x$.

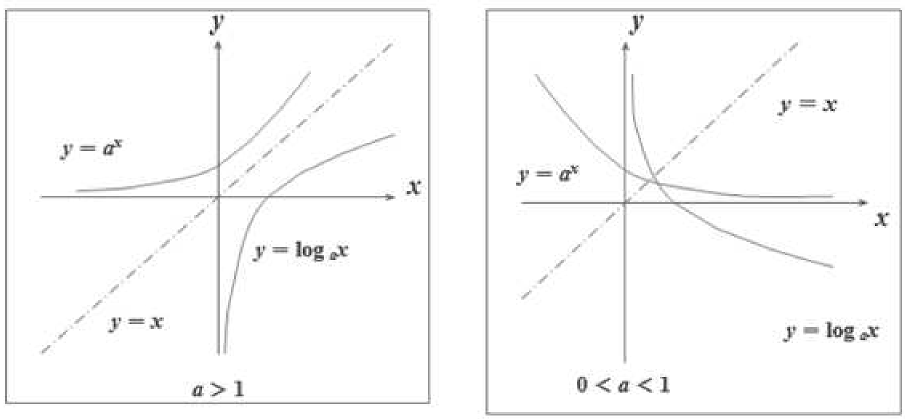


Figura 4.13. Función logaritmo

Basados en la figura 4.13 se puede deducir lo siguiente:

a. $loga\ \ 1 = 0$ cuando $a \neq 1$.

b. El dominio de la función logarítmica en base a es $(0, \infty)$ y su rango son los números reales.

c. Si $a > 1, f(x) = log_a x$ la función logaritmo es creciente y si $0 < a < 1$ la función logaritmo es decreciente.

d. Para la función $f(x) = log_a x$, si $a > 1$ las imágenes de la función tienden a $+\infty$ para valores muy grandes de x.

e. Para la función $f(x) = log_a x$, si $0 < a < 1$, los valores de las imágenes tienden a $-\infty$ cuando x tiende a cero. Es posible afirmar que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical de $f(x) = log_a x$.

Ejemplo 4.27

1. $Si\ x = 25 \Rightarrow log_2 x = log_2 2^5 = 5$
2. $Si\ log_3 x = 4 \Rightarrow x = 34$
3. $Si\ log_{\frac{1}{2}} x = -3 \Longrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
4. $Si\ x = 6^{-3} \Rightarrow log_6 x = log_6 6^{-3} = -3$
5. $log_7 7^3 = 3$
6. $5^{log_5 2} = 2$

4.10.1. Propiedades

Tabla 4.4. Propiedades de los logaritmos

Propiedades	**Ejemplos**
1. $\boldsymbol{log_a xy = log_a x + log_a y}$ $\boldsymbol{si\ x > 0\ y\ y > 0}$	a. $log_3 125 = log_3 (5)\ (5)(5) = log_3 5 + log_3 5 + log_3 5$ b. $log_2 10 + log_2 8 + log_2 20 = log_2 1600$ c. Hallar el valor de x $log_{10} x = log_{10} 5 + log_{10} 4 + log_{10} 5$ $log_{10} x = log_{10} 5 + log_{10} 4 + log_{10} 5$ $= log_{10} (5)\ (4)(5) = log_{10} 100$ $x = 10^2$
2. $\boldsymbol{log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y}$ $\boldsymbol{si\ x > 0\ y\ y > 0}$	a. $log \frac{15}{5} = log 15 - log 5$ b. $log \frac{abc}{xyz} = logabc - logxy$ c. $loga + logb + logc - logx - logy$

3. $a^x = b^{xlog_b a}$ $a^x = e^{xlna}$	a. Pasar 3^x a base 5 entonces $3^x = 5^{xlog_5 3}$ b. Pasar 6^x a base e entonces $6^x = e^{xln6}$
4. $log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$, es decir $log_b x = (log_a x)(log_b a)$	a. $log_2 x = \frac{log_1 0x}{log_{10} 2} = \frac{logx}{log2}$ b. $log_5 7 = \frac{log_7 7}{log_7 5} = \frac{1}{log_7 5}$

4.10.2. Ecuaciones con logaritmos

Ejemplo 4.28

Halle el valor de x para cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $2^x = 5^x$

$$ln2^x = ln5^x$$

$$xln2 = xln5$$

$$x\,(ln5 - ln2) = 0$$

$$xln\left(\frac{5}{2}\right) = 0$$

$$x = 0$$

2. $3^x = 27$

$$log_3 3^x \;=\; log_3 27$$

$$x = log_3 3^3$$

$$x = 3$$

3. $log\,(x-15)\ + logx\ = 2$. En primer lugar $\ x > 0\ y\ x - 15 > 0,$ es decir, $\ x > 15$

$$log\,(x-15)\ + logx\ = 2$$

$$log\,(x-15)\;x = 2$$

$$(x-15)\,x = 10^2$$

$$x^2 - 15x - 100 = 0$$
$$(x-20)(x+5) = 0$$
$$x = 20 \text{ ó } x = -5$$

Como debe ser mayor de 15 el valor que satisface la ecuación es $x = 20$

4. $log_2 x \ + log_{1/2} x \ + log_4 x \ + log_{\sqrt{2}} x \ = 15/2$
   Debemos pasar la expresión a base 2:

$$log_{1/2} x = log_{2^{-1}} x = -log_2 x$$
$$log_{\sqrt{2}} x = log_{2^{1/2}} x = \frac{1}{1/2} log_2 x = 2 log_2 x$$
$$log_4 x = log_{2^2} x = 1/2 log_2 x \text{ de esta forma:}$$
$$log_2 x - log_2 x + \frac{1}{2 log_2 x} + 2 log_2 x = (5/2) log_2 x$$

   Entonces:

$$(5/2) log_2 x = 15/2$$
$$log_2 x = 3 \text{ y así } x = 2^3 = 8$$

Ejemplo 4.29

Resolver la ecuación $\sqrt{logx} = log\sqrt{x}$

Podemos decir que $\sqrt{logx} = 1/2 logx$

$$logx \ \geq 0 \ y \ x > 0 \ \Rightarrow x \geq 1$$

Para eliminar la raíz de la ecuación elevamos al cuadrado a ambos lados:

$$logx \ = 1/4 log^2 x$$
$$logx \ - \left(\frac{1}{4}\right) log^2 x = 0 = (logx \ ) \left(1 - \frac{1}{4} logx \ \right) = 0$$
$$logx \ = 0 \text{ o } \ 1 - \frac{1}{4} logx \ = 0$$
$$x = 1 \text{ o } \ 1 = \frac{1}{4} logx \ \Leftrightarrow logx \ = 4 \Leftrightarrow x = 10^4$$

Los dos valores de x son mayores o iguales a 1, por tanto satisfacen la ecuación.

(4) Ejercicios de trabajo en clase

Escribir las siguientes igualdades en forma logarítmica:

1. $2^{\sqrt{5}} = x$
2. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$
3. $10^x = 0{,}01$

Escribir las siguientes expresiones en forma exponencial:

4. $log_2 64 \ = 6$
5. $log_5 125 = 3$
6. $log_e 1 = 0$

Usando la definición de logaritmos hallar el valor de x:

7. $x = log_3 27$
8. $log_4 x = \frac{2}{3}$
9. $x = log_5 x = 0$

Encuentre las bases de los siguientes logaritmos:

10. $log_a 36 = 2$
11. $log_h 2 = 0{,}5$
12. $log x = -0{,}02$

Resuelva las siguientes ecuaciones:

13. $5^x = 125$
14. $log_2 (x-5) = 3$
15. $ln (x-3) = 3$
16. $x^{logx} \ = \frac{100}{x}$
17. $5^{2-log_5 x} \ = 81x$
18. $x^{\frac{logx+7}{4}} = 10^{logx+1}$

4.11. Modelado de las funciones exponencial y logarítmica

Ejemplo 4.30

La población mundial en 2015 era de 7350 millones de personas y la tasa de crecimiento estimada anual es de 1,18 %. Si la población tiene crecimiento exponencial. ¿Cuándo se duplicará la población mundial?

Para iniciar se debe duplicar la población correspondiente a 2015, es decir, 14700 habitantes.

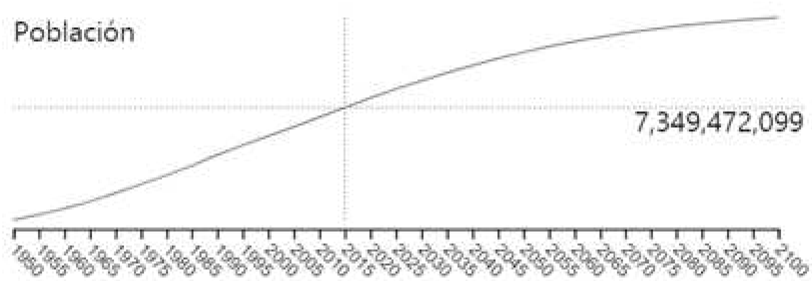


Figura 4.14. Población mundial 1950-2100
Fuente:https://www.populationpyramid.net/es/mundo/2015/

$$14698 = 7349e^{0,0118t}$$
$$2 = e^{0,0118t}$$

Utilizando los logaritmos se obtiene:

$$ln2 = 0{,}0118t \Leftrightarrow t = \frac{ln5}{0{,}0118} \approx 58{,}7$$

Si la población mantiene esta tasa de crecimiento, entonces es posible inferir que pasados 58.7 años podremos ver duplicada la población mundial.

Ejercicios del capítulo. Trabajo independiente

Ejercicios de la sección 4.1-4.3

1-3 Dadas las siguientes funciones calcule $f(2)$ y $f(5)$. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 7$

1. $f(x) = 3x + 5$
2. $f(x) = \frac{3x-4}{2}$
3. $f(x) = 5x^2 - 3x + 8$

4-6 Para las siguientes funciones calcule la imagen de $x = 2$ y las preimágenes de 10.

4. $f(x) = x^2 - 2x + 4$
5. $f(x) = \sqrt{\frac{3x}{x+1}}$
6. $f(x) = \left|x^2 - 32\right|$

7-12 Determine los dominios reales para las siguientes funciones:

7. $f(x) = \frac{x}{3x-5} - \frac{5}{x-1}$
8. $f(x) = \sqrt{5-2x} + \sqrt{3x+11}$
9. $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{10-3x}}$
10. $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$
11. $f(x) = x^{-4} + 2x^{-2} - 3$
12. $f(x) = \sqrt[3]{4x-1} + \sqrt{x+1}$
13. Si $f(x) = 9x + \frac{9}{x}$, calcule $f\left(\frac{1}{x}\right)$ y $f\left(x^2\right)$. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 30$
14. Considere $f(x) = \frac{x}{x+1}$ y $g(x) = \frac{2x-1}{x}$. Determine el dominio y criterios para
$$f+g, f-g, f.g, \frac{f}{g}, f \circ g \text{ y } \ g \circ f.$$

15-17 Encuentre el punto de corte de las gráficas de f y g.

15. $f(x) = \sqrt{2x+4}$ y $g(x) = x$
16. $f(x) = \frac{4x+1}{x}$ y $g(x) = 3x + 2$
17. $f(x) = 5x^2 + 8x - 10$ y $g(x) = 2 + x^3$

18-20 Plantee y resuelva los siguientes problemas:

18. El volumen de un cilindro circular recto es de 10 cm^3 y el radio de la base es r, considere las variables: h, altura en cm y S en cm^2 área total del cilindro. Encuentre $h(r)\, y\ S(r)$, y halle el dominio.

19. Un trapecio está inscrito en un semicírculo de radio 2, de manera que su base mayor es su diámetro. Exprese el área del trapecio en función de su altura h.

20. Exprese el área de un triángulo isósceles que se ha inscrito en un círculo de radio 5, en términos de la base b del triángulo.

Ejercicios de la sección 4.4
21-24 Determine las ecuaciones de las rectas que cumplan cada una de las siguientes condiciones:

21. Contiene los puntos $(2, 7)$ y $(1, -1)$

22. Pasa por el punto $(2, 5)$ e interseca al eje x en $(0, -4)$

23. Interseca al eje x en $(3, 0)$ e interseca al eje y en $(0, -6)$

24. Pasa por la intersección en el eje y de $2x + 3y = 2$ y es perpendicular a esta recta.

25. Determine el valor de k para las rectas $5x + 5y - 3 = 0$ y $y = -3kx + 1$ sean paralelas o sean perpendiculares.

26-30 Clasifique las siguientes restas en crecientes, decrecientes, constantes o verticales:

26. $3x - 2y = 5$

27. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

28. $2y - 8x = 3(4 + 5x) - 8$

29. $10x - 5y = 4x - 6y + 2$

30. $\frac{4x}{3} + \frac{7y}{6} = 11x + 7y + 1$

31-34 Encuentre el punto de intersección de las rectas:

31. $8x - 3y = 7\ y - 9x + 3y = 0$

32. $\frac{2x}{5} + \frac{3y}{2} = 6\ y\ 4x + 15y = 7$

33. $12x - 5y = -6\ y\ y = 4x + 100$

34. $\frac{5x}{6} + \frac{4y}{3} = 1\ y\ 5x + 8y = -6$

35-38 Plantee y resuelva los siguientes problemas:

35. Si la longitud de una varilla está relacionada linealmente con la temperatura, y se sabe que la longitud es de 108,75 cm a 25℃ y de 109,08 cm a 36℃. ¿Cuál es la longitud a x℃?

36. Los carros se han depreciado cada vez más. Suponga que uno que compró hace dos años con un costo de $35 000 000; si el valor empieza a disminuir a razón de $100 000 anuales, escriba el valor V en pesos del carro en el año t después de haber sido comprado. ¿Cuál es el valor actual? ¿Cuánto tiempo tardará en valer $500 000 ?

De acuerdo con la ley de Hooke[1] desarrolle los siguientes ejercicios.

37. Un resorte de 10 cm de longitud inicial se cuelga de una viga; si se pone un peso de 2 kg el resorte se estira 5 cm. Determine cuánto medirá con peso de 3,7 kg, si el largo del alambre que forma el resorte es de 35 cm. Determine el máximo peso que teóricamente puede soportar.

38. Si la longitud de un resorte l en función del peso w está dado por la función

    $l\,(w) = 0{,}8x + 3{,}6$. ¿Cuál es la longitud del resorte? ¿Cuánto estira por kilo?

39-40 Determine si las siguientes tablas corresponden a una función lineal; de ser así, encuentre la fórmula.

39.

x	-2	5	8
$f(x)$	9	-5	-11

40.

x	2	6	10
$f(x)$	-8	3	11

41. Suponga que la gráfica de la población mundial en los últimos años es una recta. ¿Cómo está variando la población si la pendiente de esa gráfica es positiva? ¿y si es negativa? ¿Qué significaría que la pendiente de esa recta sea cero?

Ejercicios de la sección 4.5
42-46 Determine los valores máximo o mínimo de cada una de las siguientes funciones.

42. $f\,(x) = x^2 + x + 1$

43. $f\,(t) = 100 - 49t - 7t^2$

44. $f\,(s) = s^2 - 12s + 16$

45. $f\,(x) = 13x^2 - \frac{2}{7}x - 6\frac{3}{7}$

46. $g\,(x) = 100x^2 - 1500x$

[1] Recordemos que la relación de estiramiento y la fuerza es la magnitud de la fuerza del resorte que es igual al peso de la masa suspendida, cuando el sistema está en posición de equilibrio.

47. $h(a) = 2a(a-4) + 7$

48. Determine una función cuadrática para la cual el vértice de su gráfica es (1,-2) y que contiene al punto (4,16).

49-51 Plantee y resuelva los siguientes problemas:

49. Sebastián desea construir una cerca rectangular para sus 5 caballos. Compró 1200 metros para el corral, con la condición de que uno de sus lados mida 600 metros.

    a. Plantee la función que expresa el área del corral en función del ancho x del corral.

    b. Calcule las dimensiones del corral que encierre el área máxima.

50. Dos estudiantes de ingeniería civil de la Universidad Católica de Colombia quieren construir un canal con una lámina de aluminio que tiene forma rectangular de 50 pulgadas de ancho.

    a. Encuentre la función que plantea el área de sección transversal del canal de aguas residuales en función de x.

    b. ¿Cuál es la máxima área de la sección transversal del canal?

51. Un equipo de fútbol juega la final de un torneo local en el estadio El Campín que tiene una capacidad para 36.343 aficionados. Con un precio promedio de \$60.000, la asistencia promedio por partidos es 20.000. Se han realizado encuestas y estas cocluyen que con una rebaja del 7 % en las boletas, la asistencia a los partidos sube en un 15 %.

    a. Encuentre la función del ingreso en función del precio de la boleta.

    b. Calcule el precio que genera el máximo ingreso por ventas de boletas

    c. ¿Cuál es el precio de venta de boletería que genera cero ingresos?

Ejercicios de la sección 4.6
51- 61 Grafique la función y exprese el dominio, rango y asíntotas.

51. $f(x) = -3^x$

52. $g(x) = 2^x - 4$

53. $h(x) = 2^{x-6}$

54. $f(t) = 1 - 5^{-x}$

55. $k(x) = 8 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

56. $f(x) = -e^x$

57. $y = 1 - e^x$

58. $f(x) = e^{x-3} + 4$

59. $g(x) = -e^{x-3} - 2$

60. $f(x) = -e^{-x}$

61. Si $f(x) = 10^x$ demuestre que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 10^x \left(\frac{10^h - 1}{h}\right)$

63-64 Plantee y resuelva los siguientes problemas:

63. La empresa Petroleum Company contrata a un ingeniero especializado en perforaciones con un excelente salario, y le propone dos formas de pago:

64. Un millón de dólares pagaderos mes vencido (30 días)

65. 2^n centavos en el día n en periodos de tiempo de un mes (30 días)

    ¿Cuál de las dos formas de pago le favorece más?

66. El profesor de matemáticas deja una tarea a su grupo de estudiantes, solicita que se elabore la gráfica de la función exponencial $f(x) = 2^x$, para x entre 0 y 10, e indica usar una escala de 10 unidades por cada centímetro de papel. ¿Cuáles serían las dimensiones mínimas de la hoja en la que se entregue la tarea?

65-72 Resuelva las ecuaciones exponenciales:

65. $e^{-8x} = 9$

66. $3^{2x-1} = 5$

67. $3e^x = 10$

68. $10 + 5^{3x} = 6$

69. $5^{x/100} = 2$

70. $e^{2x+1} = 200$

71. $2^{3x+1} = 3^{x-2}$

72. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 50$

Ejercicios de la sección 4.7
73-80 De la ecuación logarítmica despeje x:

73. $lnx = 20$

74. $log\,(x-4) = 3$

75. $ln\,(3+x) \;= 2$

76. $log_2\left(x^2-x-2\right)=2$

77. $log_3\,(x+15)-log_3\,(x-1)=2$

78. $\sqrt{x^{log\sqrt{x}}}=10$

79. $x+log\,(1+2^x) \;= xlog5 \;+log6$

80. $log^{-1}x=2+log^{-1}x$

81-83 Plantee y resuelva los siguientes problemas[2]:

81. La dificultad de usar el ratón para hacer clic en un ícono en la pantalla de un computador depende de la distancia del objetivo y de su tamaño. De acuerdo con la ley de Fitts, el índice de dificultad está dado por:

$$ID=\frac{log\left(\frac{2A}{W}\right)}{log2}$$

Donde W representa el ancho del objetivo y A es la distancia al centro del objetivo. Compare la dificultad de hacer clic en un ícono de 5 mm en uno de 10 mm de ancho y suponga que el ratón está a 100 mm del ícono.

82. Tome logaritmos para demostrar que la ecuación $x^{\frac{1}{logx}} \;=5$ no tiene solución. ¿Para qué valores de k tiene solución la ecuación $x^{\frac{1}{logx}} \;=k$?

83. Analice y resuelva cómo se transforman ecuaciones con logaritmos en ecuaciones lineales y cuadráticas, usando las siguientes sugerencias:

    a. $(x-1)^{log(x-1)} \;=100(x-1)$ sugerencia (tome log de cada lado)
    b. $log_2x \;+log_4x \;+log_8x \;=11$ sugerencia (cambie todos los log a base 2)
    c. $4^x-2^{x+1}=3$ sugerencia (escriba como cuadrática en 2^x)

Aplicación con tecnología

Desarrolle los siguientes ejercicios usando el programa www.symbolab.com, donde podrá evidenciar los procesos desarrollados analíticamente.

84-86 Determine la ecuación de la recta que cumple con las condiciones dadas y elabore la gráfica.

[2] Los problemas 81-83 fueron tomados del libro de *Precálculo* de Stewart.

84. Pasa por $(1,\ 7)$ y tiene pendiente $\frac{2}{3}$

85. La recta contiene el punto $(1,\ 26)$ y es paralela a la recta $x + 2y = 6$

86. La recta es perpendicular a la recta $2x + 5y + 8 = 0$ y contiene al punto $(-1,\ -2)$

87-89 Dadas las siguientes funciones cuadráticas determine dominio, rango, vértice, valores de las intersecciones con los ejes y el máximo o mínimo de forma analítica y gráfica para cada una de las funciones que se presentan a continuación:

87. $f(x) = -2x^2 - 2{,}6x + 1{,}8$

88. $f(x) = 1{,}5x^2 + 3{,}7x - 0{,}8$

89. $f(x) = -\sqrt{5}x^2 - x + 2$

90-92 Haga las dos gráficas de la familia de las funciones para c= 0,15, 0,50, 1, 5 y describa el comportamiento de las gráficas analizando el rango de las funciones y su crecimiento o decrecimiento.

90. $f(x) = c5^x$

91. $f(x) = 5^{cx}$

92. Elabore las gráficas de forma simultánea de las funciones $f(x) = 1 + ln(1 + x)$ y $h(x) = \sqrt{x}$ y describa su comportamiento.

Proyectos aplicados a las ciencias básicas

Desarrolle las siguientes ideas que representan proyectos basados en los contenidos vistos en el capítulo

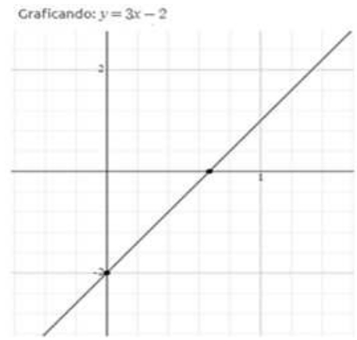
- El mejor ajuste contra el ajuste exacto: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/dp13.html
- Relaciones y funciones: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/dp4.html
- Explosión exponencial: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/dp7.html
- Diseñando una montaña rusa: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/dp18.html

Solución de los ejercicios de trabajo en clase

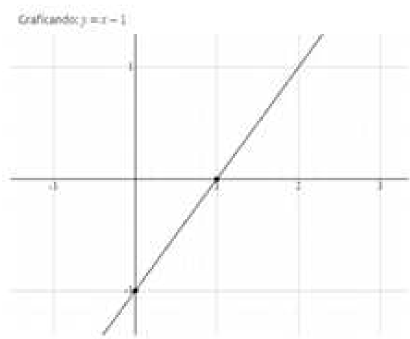
1. $m = \frac{1}{6}$

3. $m = \frac{1}{2}$

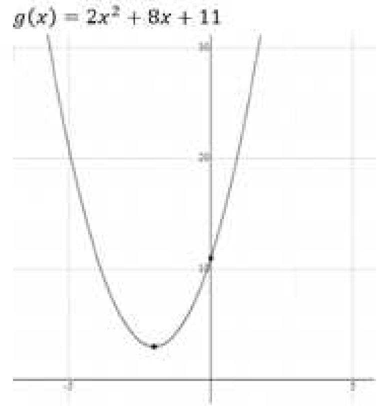
5. $y = 3x - 2$



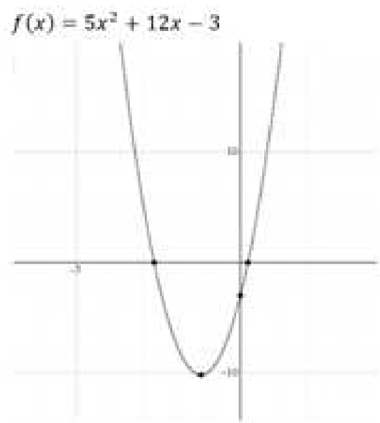
7. Use la fórmula de la pendiente y la ecuación general de la recta $y = mx + b$ para encontrar $y = x - 1$



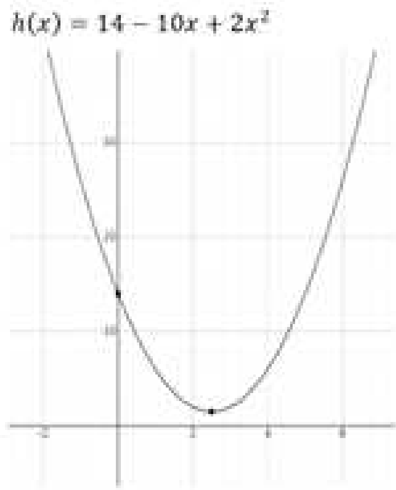
9. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[3, \infty)$; intersección con eje x: no tiene. Intersección con eje y: $(0, 11)$; vértice:$(-2, 3)$,



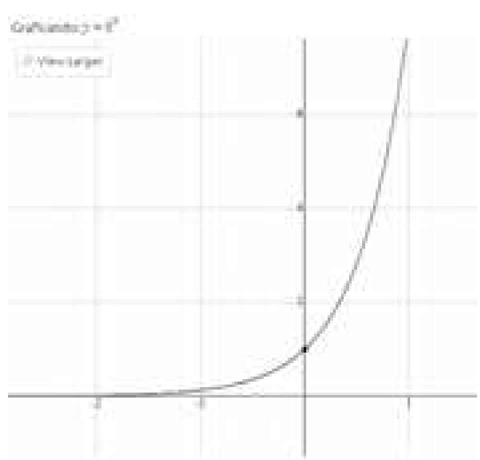
11. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[-\frac{51}{5}, \infty)$;
intersección con eje x: $\left(\dfrac{\sqrt{51}-6}{5}, 0\right)$, $\left(-\dfrac{6+\sqrt{51}}{5}, 0\right)$
Intersección con eje y: $(0, -3)$; vértice: $(-\frac{6}{5}, -\frac{51}{5})$.



13. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[\frac{3}{2}, \infty)$;
Intersección con eje x: no tiene.
Intersección con eje y: $(0, 14)$; vértice: $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$.

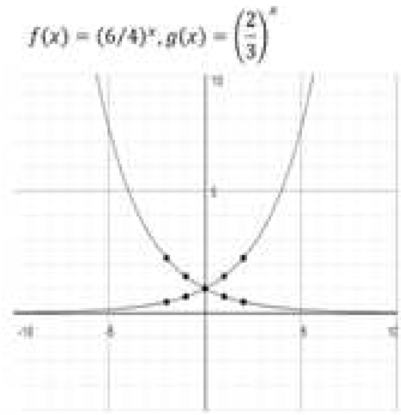


15. $f(x) = 8^x$, $f\left(-\dfrac{1}{8}\right) = 8^{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{8}}} = 0{,}77111\ldots$



17. $f(x) = 8^x, f(2) \cdot f(6) = 8^8 = 16777216$

19.



21. Aplicar las leyes de los exponentes:

$$a^b.a^c = a^{b+c}$$
$$10^5.10^7{,}10 = 10^{13}$$

23. $\left(\dfrac{6^x}{10^x}\right) + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{3^x}{5^x} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

25. $\frac{x}{e^x} + ye^{-x} = \frac{x+y}{e^x}$

27. Aplicar las leyes de los exponentes $a^b.a^c{=}a^{b+c}$:

$$e^x + e^x e^y \ factorizando\ e^x\ ,\ e^x\left(e^y + 1\right)$$

29. $4e^{3a} - 36e^{3a} = -32^{3a}$

31. $log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{64}\right) = 3$

33. $2^6 = 64$

35. $e^0 = 1$

37. $x = 4^{\frac{2}{3}},\ x \approx 2{,}51984209\ldots$

39. $a = 6$

41. $x = \frac{1}{10^{\frac{1}{100}}},\ x \cong 0{,}97723722\ldots$

43. $x = 13$

45. $x = 10$, $x = 0{,}01$

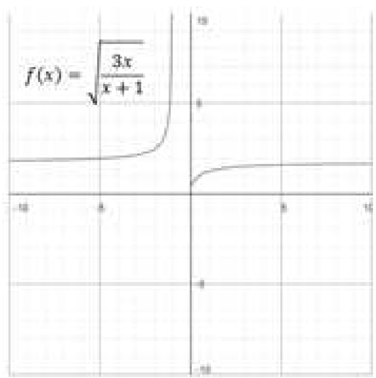
47. $x = 0{,}0001$, $x = 10$

Solución de los ejercicios de trabajo independiente

1. $f(2) = 11, f(5) = 20,\ x = 2/3$

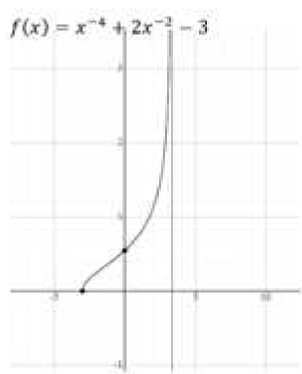
3. $f(2) = 22, f(5) = 118,\ x = \frac{-3\pm\sqrt{29}}{10}$

5. $f(2) = \frac{\sqrt{6}}{2},\ x = -\frac{100}{97}$

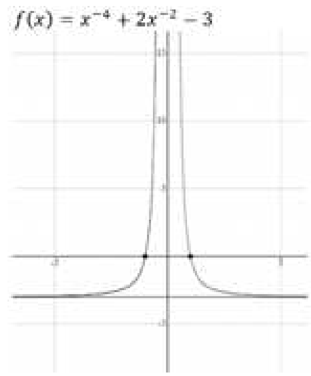


7. Dominio: $(-\infty, 1) \cup \left(1, \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$

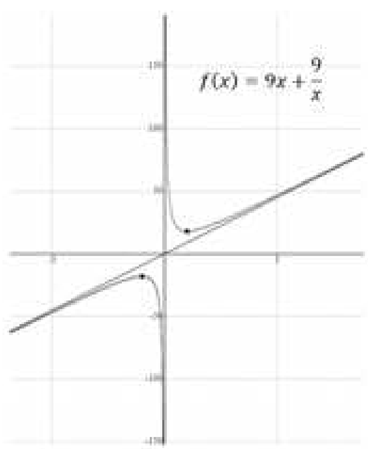
9. Dominio: $\left[-3,\ \frac{10}{3}\right)$



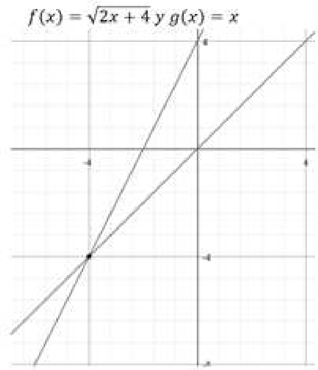
11. Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



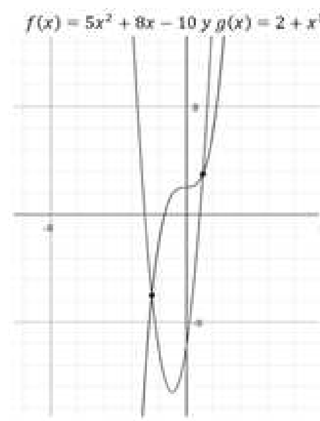
13. $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{9}{x} + 9x, f\left(x^2\right) = 9x^2 + \frac{9}{x^2},\ x = 3, x = \frac{1}{3}$



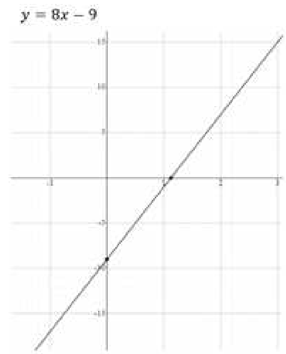
15. $x = -4$



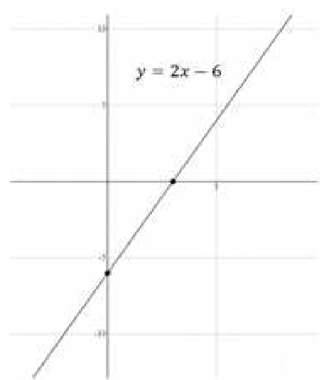
17. $x = 6; 1; -2$



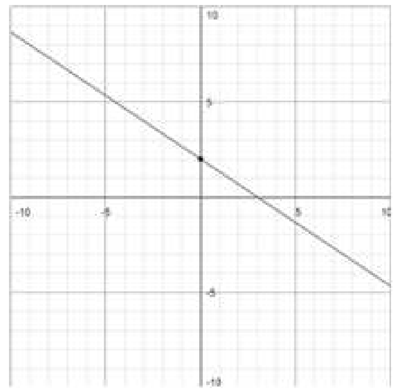
21. $y = 8x - 9$



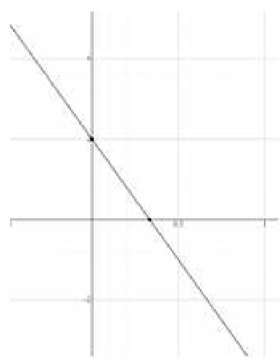
23.



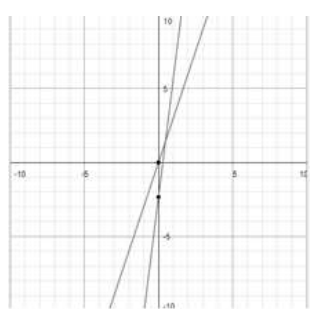
27. $y = -\frac{2x}{3} + 2$, decreciente con pendiente negativa



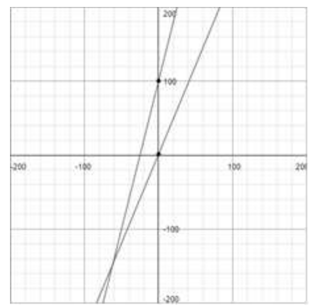
29. $y = -6x + 2$



31. $x = \frac{7}{15}$

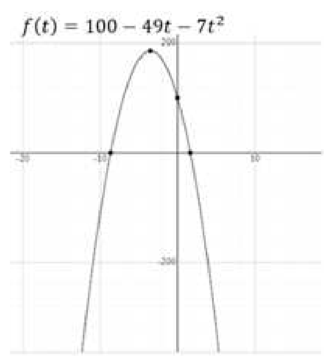


33. $x = -\frac{247}{4}$



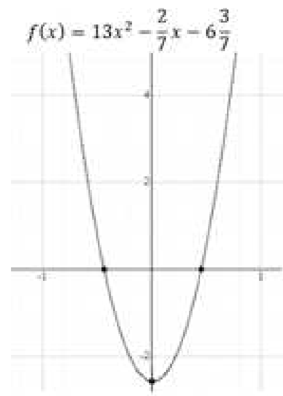
39. La tabla de valores no corresponde a una función lineal.

43. Máximo: $\left(-\frac{7}{2}, \frac{743}{4}\right)$



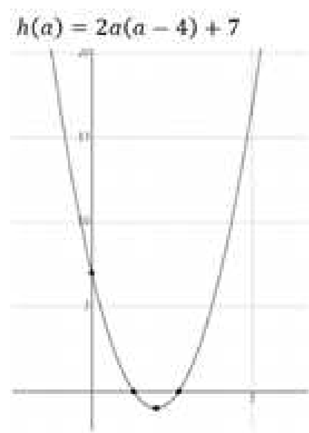
45. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $\left[-\dfrac{1639}{637}, \infty\right)$; intersección x: $\left(\dfrac{1+\sqrt{1639}}{91}, 0\right)$

$$\text{Intersección } y\text{: } \left(\frac{1-\sqrt{1639}}{91}, 0\right);\ \text{Mínimo: } \left(\frac{1}{91}, -\frac{1639}{637}\right)$$



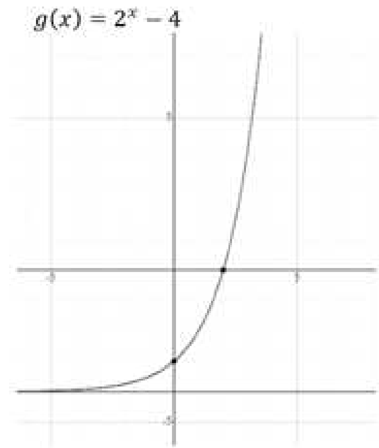
47. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[-1, \infty)$; intersección x: $\left(\frac{\sqrt{2}+4}{2}, 0\right)$

$$\text{Intersección } y\text{: } \left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}, 0\right);\ \text{Mínimo: } (2, -1)$$



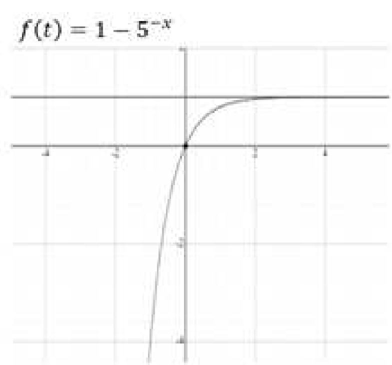
53. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(-4, \infty)$; asíntota $H{:}y = -4$;

$$\text{interseccion } x\text{: } (2, 0);\ \text{intersección } y\text{: } (0, -3)$$



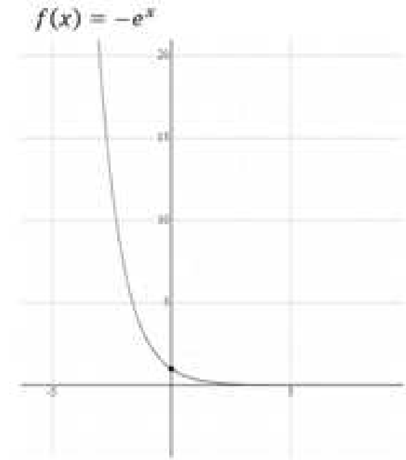
55. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(-\infty, 1)$; asíntota $H{:}y = 1$;

intersección $x{:}\,(0,0)$; intersección y: $(0,0)$



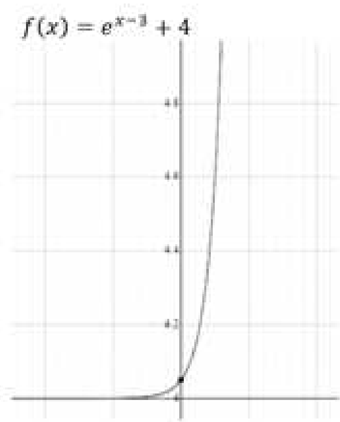
57. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(0, 1)$; asíntota $H{:}y = 0$;

Intersección y: $(0, 1)$



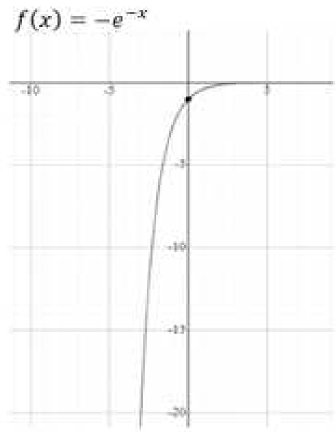
59. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(4, 1)$; asíntota $H{:}y = 4$;

$$\text{Intersección } y\text{: } \left(0, \frac{1}{e^3} + 4\right)$$



61. Dominio: $(-\infty, \infty)\,; rango : (-\infty, 0)$; asíntota $H{:}y = 0$;

$$\text{Intersección } y\text{: } (0, -1)$$



65. $x = -\frac{ln(3)}{4}; x = -0{,}27465\ldots$

67. $x = -\frac{ln(9)}{8}; x = -0{,}27465307\ldots$

69. $x = \frac{100ln(2)}{ln(5)}; x = 43{,}06766\ldots$

71. $x = -\frac{ln(18)}{ln\frac{8}{3}}$

73. $x = e^{20}; x = 4854\ldots$

75. $x = e^2 - 3; x = 4{,}3890\ldots$

77. $x = 3$

79. $x = 1$

CINCO

TRIGONOMETRÍA

La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras, y el otro el número áureo. El primero puede compararse a una medida de oro, y el segundo a una piedra preciosa.
Johannes Kepler

La trigonometría es una rama de las matemáticas que se encarga del trabajo con triángulos y las razones que es posible establecer entre las medidas de sus lados; en primera instancia se relaciona con los triángulos rectángulos, pero también con cualquier triángulo y con sus aplicaciones en diferentes contextos en campos como la física, la ingeniería, la astronomía, entre otros.

5.1. Sistema de medición de ángulos

Uno de los elementos de los triángulos son sus tres ángulos; para medirlos se usan principalmente tres sistemas que tienen como unidades de medida el radián, el grado sexagesimal y el grado centesimal.

En el primer caso la circunferencia se considera dividida en 2π radianes, en el segundo la circunferencia se considera dividida en trescientos sesenta grados y cada uno de ellos a su vez en sesenta minutos y cada minuto en sesenta segundos; en el último caso se considera a la circunferencia dividida en cuatrocientos grados.

Los dos primeros sistemas de unidades son los de mayor uso y difusión aunque en los cursos de matemáticas se ha privilegiado el uso del sistema de medición en radianes.

5.2. Conversión entre los sistemas sexagesimal y radial

Para realizar conversiones entre medidas en los sistemas mencionados, se utiliza la siguiente expresión que corresponde al factor unitario (un factor cuyo valor es 1) y que parte de la igualdad de la medida de un ángulo de una vuelta en los sistemas en cuestión:

$\frac{180^o}{\pi Rad}$	$\frac{\pi Rad}{180^o}$

Tabla 5.1. Factor unitario para conversión entre sistemas de medición de ángulos

Ejemplo 5.1

Convertir $\frac{\pi}{3}Rad$ a grados.

Para realizar la conversión se multiplica la expresión inicial por el factor unitario (ya que al multiplicar cualquier expresión por el factor unitario, su valor no se altera) y posteriormente se realiza la simplificación de la expresión. Nótese cómo los factores Rad y π se reducen a un factor 1 y la expresion da como resultado una medida en grados.

$$\frac{\pi}{3}Rad.\left(\frac{180^o}{\pi Rad}\right) = 60^o$$

Ejemplo 5.2

Convertir 45^o a radianes

Para realizar la conversión se multiplica la expresión inicial por el factor unitario y posteriormente se realiza la simplificación de la expresión. Nótese cómo la unidad de medida en grados sexagesimales desaparece y la expresión da como resultado una medida en radianes y con el factor π.

$$45^o.\left(\frac{\pi Rad}{180^o}\right) = \frac{\pi}{4}Rad$$

Ejercicios de trabajo en clase

Exprese las medidas de los siguientes ángulos en radianes:

1. 15^o
2. 60^o

3. 150^o
4. 210^o
5. 30^o
6. 45^o
7. 135^o
8. 300^o
9. 25^o

Exprese las medidas de los siguientes ángulos en grados:

10. $\frac{7\pi}{2} Rad$
11. $\frac{\pi}{5} Rad$
12. $\frac{5\pi}{2} Rad$
13. $\frac{3\pi}{4} Rad$
14. $\frac{\pi}{6} Rad$
15. $\frac{3\pi}{5} Rad$
16. $\frac{\pi}{3} Rad$
17. $\frac{\pi}{4} Rad$

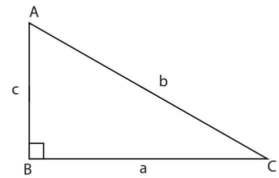
5.3. Razones trigonométricas

Son razones matemáticas establecidas para un triángulo rectángulo según las siguientes expresiones:

Tabla 5.2. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

$Seno \sphericalangle \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	$Cosecante \sphericalangle \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$
$Coseno \sphericalangle \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	$Secante \sphericalangle \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$
$Tangente \sphericalangle \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$	$Cotangente \sphericalangle \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$

En un triángulo rectángulo ABC como el que se muestra a continuación



Se destacan los ángulos $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ y los lados $a,\ b,\ c$. El ángulo $\sphericalangle B$ es recto y los ángulos $\sphericalangle A$ $\sphericalangle C$ son agudos, los lados a, c son los catetos y el lado b es la hipotenusa.

Las razones trigonométricas para el $\sphericalangle A$ serán las siguientes:

Tabla 5.3. Razones trigonométricas para el ángulo A del triángulo de referencia

$Sen\sphericalangle A = \frac{a}{b}$	$Cos\sphericalangle A = \frac{c}{b}$	$Tan\sphericalangle A = \frac{a}{c}$
$Csc\sphericalangle A = \frac{b}{a}$	$Sec\sphericalangle A = \frac{b}{c}$	$Cot\sphericalangle A = \frac{c}{a}$

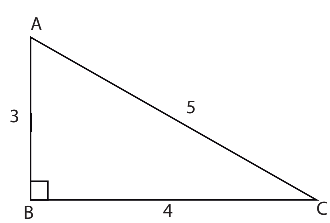
Las razones trigonométricas para el $\sphericalangle C$ serán las siguientes:

Tabla 5.4. Razones trigonométricas para el ángulo C del triángulo de referencia

$Sen\sphericalangle C = \frac{c}{b}$	$Cos\sphericalangle C = \frac{a}{b}$	$Tan\sphericalangle C = \frac{c}{a}$
$Csc\sphericalangle C = \frac{b}{c}$	$Sec\sphericalangle C = \frac{b}{a}$	$Cot\sphericalangle C = \frac{a}{c}$

Ejemplo 5.3

Calcule el valor de las razones trigonométricas para el ángulo $\sphericalangle A$ del siguiente triángulo:



$Sen\sphericalangle A = \frac{4}{5}$

$Cos\sphericalangle A = \frac{3}{5}$

$Tan\sphericalangle A = \frac{4}{3}$

$Sec\sphericalangle A = \frac{5}{3}$

$Csc\sphericalangle A = \frac{5}{4}$

$Cot\sphericalangle A = \frac{3}{4}$

Mediante el uso de una calculadora científica y las teclas de las funciones trigonométricas que se muestran en la figura 5.1 es posible saber el valor de los ángulos sobre los cuales se calculan

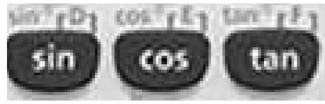


Figura 5.1. Teclas de las funciones trigonométricas en la calculadora fx 570 ES PLUS

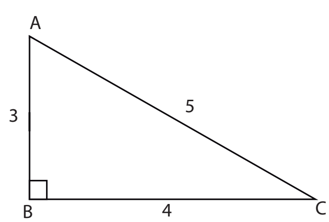
Las razones trigonométricas, haciendo uso de las funciones inversas, marcadas en la calculadora con sin^{-1} cos^{-1} tan^{-1} según la siguiente secuencia:

Figura 5.2. Combinación de teclas para determinar el valor de un ángulo

Para el que la razón trigonométrica seno es 0,5. Tomado de fx 570 ES PLUS User's Guide.

En ella la razón trigonométrica seno tiene un valor de 0,5 y el ángulo que se determina en el triángulo por la ubicación de los catetos y la hipotenusa tiene un valor de 30^o.

En el caso del triángulo del ejemplo, los valores de las tres primeras razones trigonométricas nos permiten calcular el valor del ángulo $\sphericalangle A$



$Sen\sphericalangle A = \frac{4}{5}$ $\quad$ $\sphericalangle A = 53{,}13^o$

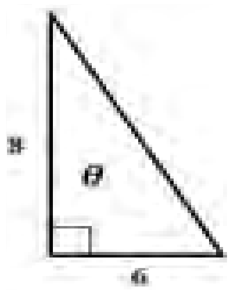
$Cos\sphericalangle A = \frac{3}{5}$ $\quad$ $\sphericalangle A = 53{,}13^o$

$Tan\sphericalangle A = \frac{4}{3}$ $\quad$ $\sphericalangle A = 53{,}13^o$

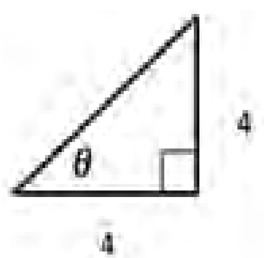
De lo anterior, se concluye que para un mismo ángulo y con el uso de la calculadora es posible usar tres diferentes razones trigonométricas para determinar su valor.

Ejercicios de trabajo en clase
Determinar los valores de las razones trigonométricas del ángulo θ en los siguientes triángulos:

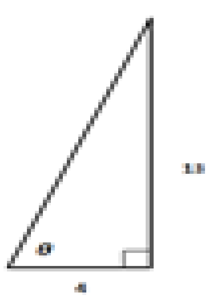
18.



19.



20.

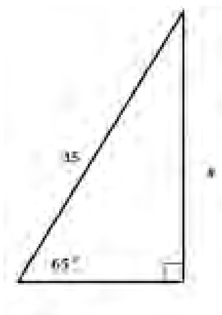


5.4. Solución de triángulos rectángulos

La solución de triángulos rectángulos es un proceso que consiste en determinar las medidas de los tres lados y los tres ángulos de un triángulo rectángulo. Se parte de representar la información en un gráfico (si el ejercicio no los proporciona) para relacionar las medidas de los ángulos y los lados; posteriormente se determina de la lista de razones trigonométricas, aquella que contenga los valores suministrados y a la incógnita, se sustituyen y se determina el valor de la incógnita por medio de procesos algebraicos. Importante recordar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180^o.

Ejemplo 5.4

Determinar el valor de x en el siguiente triángulo



Los valores suministrados son los de la hipotenusa (15 unidades) y el ángulo agudo (65^o) y es necesario determinar el valor del cateto opuesto al ángulo agudo (x). Los valores suministrados se relacionan mediante la razón trigonométrica seno, de tal forma que:

$sen65^o = \frac{x}{15}$

De donde se obtiene:

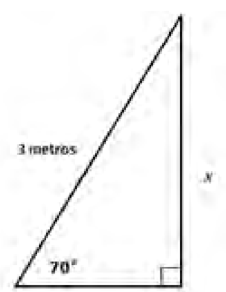
$x = 15\ sen\ 65^o$

Usando calculadora se obtiene la medida de x

$x = 13,59$ unidades

Ejemplo 5.5

Una escalera tiene una longitud de 3 metros y se encuentra recargada contra una pared de tal forma que su extremo superior coincide con el punto más alto de la pared y su extremo inferior forma un ángulo de 70^o con el piso. ¿Cuál es la altura de la pared?



Los datos que proporciona el problema son los de la hipotenusa (3 metros) y el ángulo agudo (70^o) y se pide determinar el valor del cateto x. Usando la razón trigonométrica seno:

$sen70 = \frac{x}{3}$

Se obtiene

$x = 3\ sen\ 70^o$

Usando calculadora se obtiene la medida de x

$x = 2,81$ metros

Nota: para la solución de algunos triángulos es necesario tener en cuenta lo siguiente:

I. La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a 180^o

II. La suma de los cuadrados de los catetos es igual a la hipotenusa, es decir,

$$\boldsymbol{a^2 + c^2 = b^2}$$

Ecuación 30: ecuación basada en el teorema de Pitágoras

Esta expresión del teorema de Pitágoras (en la que el lado b representa la hipotenusa, que es el lado más largo y los lados a y c representan las medidas de los catetos) puede ser usada para calcular las medidas de cada uno de los catetos de la siguiente forma

$$\boldsymbol{a = \sqrt{b^2 - c^2}}$$

$$\boldsymbol{c = \sqrt{b^2 - a^2}}$$

III. Para determinar la medida de cualquier cateto en un triángulo rectángulo, siempre se resta bajo la raíz cuadrada al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del cateto. Por otra parte, el teorema de Pitágoras se puede usar para calcular el valor de la hipotenusa, que para la fórmula, como ya se mencionó, se ha denominado b mediante la expresion:

$$\boldsymbol{b = \sqrt{a^2 + c^2}}$$

En cuyo caso se suman bajo la raíz cuadrada los cuadrados de los catetos.

Ejercicios de trabajo en clase

Resolver los triángulos rectángulos ABC, con el ángulo recto en $\sphericalangle C$ e hipotenusa c.

21. $a = 4{,}001$; $b = 1{,}072$
22. $\sphericalangle A = 86^O, a = 12$
23. $b = 0{,}4360$, $c = 10$
24. $\sphericalangle B = 20^O$; $b = 19{,}6$
25. $c = 50{,}11$; $\sphericalangle B = 2^o$
26. Desde una garita ubicada en una colina, un vigía de un batallón observa un intruso irrumpiendo en las instalaciones de la unidad militar. Si el ángulo de depresión con que observa la situación es 15^o, determine la distancia entre el vigía y el intruso si el vigía se ubica a 1350 msnm y el intruso a 1240 msnm.
27. Desde un punto a 30 metros de la base de un edificio se observa el punto más alto de la construcción con un ángulo de elevación de 75^o. ¿Cuál es la altura del edificio desde el nivel del suelo si el instrumento para medir el ángulo de elevación se encuentra a una altura de 75 centímetros del suelo?

5.5. Razones trigonométricas para ángulos especiales 30°, 45° *y* 60°

A continuación se muestran los valores de las razones trigonométricas para ángulos de 30°, 45° y 60°, información que resulta muy útil al momento de resolver ejercicios que impliquen sus valores exactos. Consérvela para futuros ejercicios.

Tabla 5.5. Valores de las funciones trigonométricas para ángulos de **30°, 45° *y* 60°**

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Cosecante	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
Secante	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
Cotangente	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

5.6. Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas son ecuaciones que se satisfacen para cualquier valor definido de la variable y son usadas como punto de partida para la sustitución en expresiones algebraicas que necesitan ser simplificadas.

Tabla 5.6. Identidades trigonométricas

$cscx=\frac{1}{senx}$	$secx = \frac{1}{cosx}$	$tanx = \frac{senx}{cosx}$
$cotx=\frac{cosx}{tanx}$	$senx = \frac{1}{cscx}$	$cosx = \frac{1}{secx}$
$tanx=\frac{1}{cotx}$	$cotx = \frac{1}{tanx}$	
$sen^2x+cos^2x= 1$	$1 + tan^2x = sec^2x$	$1 + cotx^2x = csc^2x$
$sen(-x) = -senx$	$cos\,(-x) = cosx$	$tan\,(-x) = -tanx$
$sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =cosx$	$cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = senx$	$tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cotx$

5.7. Suma y resta de ángulos

Tabla 5.7. Identidades trigonométricas para la suma y resta de ángulos

$sen\,(x + y) = senxcosy + cosxsenx$	$sen\,(x - y) = senxcosy - cosxseny$
$cos\,(x + y) = cosxcosy - senxseny$	$cos\,(x - y) = cosxcosy + senxseny$
$tan\,(x + y) = \frac{tanx+tany}{1-tanxtany}$	$tan\,(x - y) = \frac{tanx-tany}{1+tanxtany}$

5.8. Identidades de productos

Tabla 5.8. Identidades trigonométricas para el producto

$sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos(2x))$	$cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos(2x))$
$senxcosx = \frac{1}{2}sin(2x)$	$senxseny = \frac{1}{2}(cos(x-y) - cos(x+y))$
$senxcosy = \frac{1}{2}(sen(x-y) + sen(x+y))$	$cosxcosy = \frac{1}{2}(cos(x-y) + cos(x+y))$

5.9. Ángulo doble

Tabla 5.9. Identidades trigonométricas para el ángulo doble

$sen(2x) = 2senxcosx$	$cos(2x) = cos^2 x - sen^2 x$
$cos(2x) = 2cos^2 x - 1$	$tan(2x) = \frac{2tanx}{1-tan^2 x}$

5.10. Demostraciones de identidades trigonométricas

La demostración de identidades trigonométricas es un buen ejercicio que puede realizarse partiendo de un lado de la ecuación inicial y por medio de sustituciones y operaciones obtener una expresión igual a la de lado opuesto; también es viable trabajar simultáneamente y realizar operaciones en ambos lados de la ecuación (que no necesariamente deben ser iguales) para obtener la misma expresión en ambos lados de la ecuación.

Ejemplo 5.6

Determine si $\frac{1+sec^2 x}{1+tan^2 x} = 1 + cos^2\ x$ es una identidad trigonométrica

$\frac{1+\mathrm{sec}^2\mathrm{x}}{1+tan^2 x}$	$=$	$1 + cos^2 x$	Expresión inicial
$\frac{1+sec^2 x}{sec^2 x}$	$=$	$1 + cos^2 x$	Sustitución del denominador en el lado izquierdo de la ecuación usando identidad pitagórica
$\frac{1}{sec^2 x} + \frac{sec^2 x}{sec^2 x}$	$=$	$1 + cos^2 x$	Descomposición de la fracción en dos del mismo denominador
$cos^2 x + 1$	$=$	$1 + cos^2 x$	Simplificación de la segunda fracción
$1 + cos^2 x$	$=$	$1 + cos^2 x$	Conmutatividad de la suma

Ejemplo 5.7

Determine si $\frac{1+cosx}{cosx} = \frac{\tan^2 x}{secx-1}$ es una identidad trigonométrica

$\frac{1+cosx}{cosx}$	$=$	$\frac{tan^2 x}{secx-1}$	Expresión inicial
$\frac{1}{cosx} + \frac{cosx}{cosx}$	$=$	$\frac{sec^2 x-1}{secx-1}$	Descomposición de la fracción en dos del mismo denominador en el lado izquierdo y sustitución por identidad trigonométrica pitagórica en el lado derecho
$secx + 1$	$=$	$\frac{(secx+1)(secx-1)}{secx-1}$	Simplificación de la segunda fracción en el lado izquierdo y factorización del numerador en el lado derecho
$secx + 1$	$=$	$secx + 1$	Simplificación de la fracción en el lado derecho

Ejercicios de trabajo en clase

Determinar si las siguientes expresiones son identidades trigonométricas

28. $\frac{2tanx}{1+\tan^2 x} = sen2x$
29. $\frac{1+\cos(3x)}{sen(3x)} + \frac{sen(3x)}{1+\cos(3x)} = 2csc3$
30. $\frac{cotx-tanx}{senx+cosx} = cscx - secx$
31. $\frac{\sec^2 x}{2-\sec^2 x} = \sec(2x)$
32. $\frac{2}{tanx+cotx} = sen(2x)$
33. $\frac{cotx-cosx}{\cos^3 x} = \frac{cscx}{1+senx}$

5.11. Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es una expresión que representa la igualdad de dos expresiones trigonométricas. Resolverla es determinar los valores de la variable en la ecuación para que se cumpla la igualdad. No es posible unificar un método en la solución de una ecuación trigonométrica, pero se puede resolver una gran cantidad, mediante de sustitución de las funciones trigonométricas hasta una sola (seno o coseno) para finalmente solucionar usando las propiedades de los números reales, la factorización, la multiplicación por uno, y los axiomas de igualdad. En los siguientes ejemplos se presentan algunas de las estrategias de solución:

Ejemplo 5.8

Resolver la ecuación $4\ senx - 2 = 0$

$4senx - 2 = 0$	Ecuación inicial
$4senx = 2$	Transposición de términos
$senx = \frac{1}{2}$	Transposición de términos y simplificación de la fracción
$x = arcsen\frac{1}{2}$	Función inversa de seno. En las calculadoras aparece como sin^{-1}.
x $= 30^o x = 180^o$	Valores de x para los que la función seno tiene un valor de $\frac{1}{2}$

Ejemplo 5.9

Resolver la ecuación $2cos^2x = cosx$

<table>
<tr><td colspan="2">$2cos^2x = cosx$</td><td>Ecuación inicial</td></tr>
<tr><td colspan="2">$2cos^2x - cosx = 0$</td><td>Transposición de términos</td></tr>
<tr><td colspan="2">$cosx\,(2cosx - 1) = 0$</td><td>Factorización</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$cosx = 0$</td><td>$2cosx - 1 = 0$</td><td rowspan="2">Igualar cada factor a cero y despejar la función trigonométrica</td></tr>
<tr><td>$cosx = \frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>$x = arccos0$</td><td>$x = arcos\frac{1}{2}$</td><td>Función inversa de coseno. En las calculadoras aparece como cos^{-1}.</td></tr>
<tr><td>$x = 90^o$</td><td>$x = 60^o$
$x = 300^o$</td><td>Valores de x para los que la función coseno tiene un valor de cero o un medio.</td></tr>
</table>

Ejemplo 5.10

Resolver la ecuación $senx + cosx = 0$

$senx + cosx = 0$	Ecuación inicial
$\sqrt{1 - cos^2x} + cosx = 0$	Sustitución de $senx$ por $\sqrt{1 - cos^2x}$ obtenido de la identidad trigonométrica $sen^2x + cos^2x = 1$
$cosx = -\sqrt{1 - cos^2x}$	Transposición de términos
$(cosx)^2 = (-\sqrt{1 - cos^2x})^2$	Elevar al cuadrado a ambos miembros de la ecuación
$cos^2x = 1 - cos^2x$	Transposición de términos
$2cos^2x = 1$	Reducción de términos semejantes
$cos^2x = \frac{1}{2}$	Transposición de términos
$cosx = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	Transposición de términos
$x = arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	Función inversa de coseno. En las calculadoras aparece como cos^{-1}.
$x = 45^o$ $x = 135^o$ $x = 225^o$	Valores de x para los que la función coseno tiene un valor de $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ejemplo 5.11

Resolver la ecuación $2tan^2x - 3tanx + 1 = 0$

$2tan^2x - 3tanx+1 = 0$	Ecuación inicial
$tanx=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}$	Se interpreta la ecuación inicial como una ecuación cuadrática cuya variable es $tanx$ y los valores de a, b y c son en su orden 2, -3 y 1, que se sustituyen en la expresión $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$tanx= 1$ $tanx= 1/2$	Simplificación de la expresión anterior
$x=arctan 1$ $x=arctan\left(\frac{1}{2}\right)$	Función inversa de tangente. En las calculadoras aparece como tan^{-1}.
$x=45^o$ $x=26{,}56^o$	Valores de x para los que la función tangente tiene un valor de 1 o de $\frac{1}{2}$.

Ejercicios de trabajo en clase

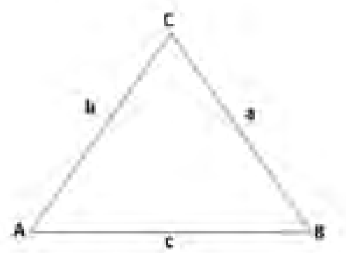
Resolver las siguientes ecuaciones:

34. $3\cot^2 x - 1 = 0$
35. $4\cos^3 x - cosx = 0$
36. $4sen^2x - 1 = 0$
37. $3cosxsenx + 3senx = 0$
38. $sen^2x - senx = 0$
39. $1 + \tan^2 x \ = \sec^2 x$
40. $\cos^2 x + cosx - 2 = 0$
41. $\cos^2 x - sen^2 x = 0$
42. $tanx(secx - \sqrt{2}) = 0$

5.12. Ley de los senos

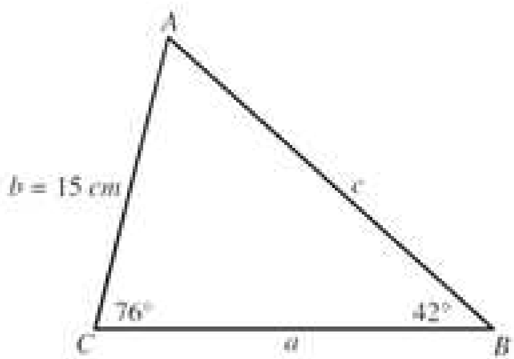
Para todo triángulo con ángulos A, B, C y lados con longitudes a, b, c, se cumplen las siguientes relaciones: un triángulo tiene tres ángulos y tres lados. Para resolver problemas relativos a triángulos oblicuángulos es necesario conocer dos ángulos y un lado no contenido entre ellos. Es posible usar la ley de los senos para resolver problemas relativos a triángulos oblicuángulos cuando se conocen dos ángulos.

Tabla 5.10. Ley de los senos y su triángulo de referencia

	$\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b} = \frac{senC}{c}$

Ejemplo 5.12

Para el triángulo ABC se conoce que $b = 15$, $\sphericalangle B = 42°$, $\sphericalangle C = 76°$. Determine la medida de los ángulos y los lados faltantes:



Solución:

Como se sabe la medida de dos lados y teniendo en cuenta que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, es decir, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, sustituyendo los datos conocidos del problema,

$$\angle A + 42° + 76° = 180°$$

$$\angle A + 118° = 180°$$

$$\angle A = 180° - 118° = 62°$$

De tal forma que la medida del ángulo A es 62 grados.

$$\angle A = 62°$$

Para determinar las medidas de los lados a y c se parte de la expresión:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Como las medidas que se desea calcular son las de los lados a y c, en primer lugar se tomarán el primero y el segundo de la expresión anterior y posteriormente en otro proceso se tomarán el primero y el último términos.

$$\frac{a}{sen62°} = \frac{b}{sen42°}$$

Por lo que sustituyendo procedemos a despejar:

$$a = \frac{bsen62°}{sen42°} = 19{,}79$$

Ahora encontremos el lado restante:

$$\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC}$$

$$\frac{19{,}79}{sen62°} = \frac{c}{sen76°}$$

Despejando c:

$$c = \frac{(19{,}79cm)(sen76°cm)}{sen62°} = 21{,}75\ cm$$

De tal forma que el lado c mide 21,75 cm.

Ejercicios de trabajo en clase

Determine usando la ley de los senos la medida del ángulo o lado indicado:

43. $a = 3,\ b = 4,\ \sphericalangle A = 37{,}5^o,\ \sphericalangle B =?$

44. $b = 2,\ c = 3{,}5,\ \sphericalangle C = 70^o,\ \sphericalangle B =?$

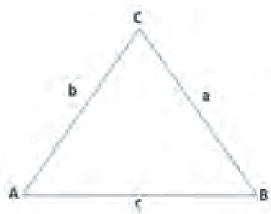
45. $a = 7,\ \sphericalangle B = 22{,}5^o,\ \sphericalangle A = 78{,}75^o,\ b =?$

46. $\sphericalangle B = 123{,}75^o,\ \sphericalangle C = 45^o,\ b = 12{,}8,\ c =?$

5.13. Ley de los cosenos

Para todo triángulo con ángulos A, B, C y lados con longitudes a, b, c, se cumplen las siguientes relaciones: la ley de los cosenos en algunos textos se conoce como una generalización del teorema de Pitágoras, se aplica a todo triángulo oblicuángulo, pero es necesario tener en cuenta que puede ser utilizada en situaciones en las que se conoce la medida de todos los lados del triángulo o en los casos en los que se conoce la medida de dos lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos.

Tabla 5.11. Ley de los cosenos y su triángulo de referencia

	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$

Ejemplo 5.13

Para el triángulo ABC se sabe que a= 13, $\sphericalangle B = 55°$, $c = 19$. Determine la medida de los ángulos y de los lados faltantes.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$	Expresión que relaciona los valores conocidos y permite calcular la medida del lado b
$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2accosB}$	Despejando el valor del lado desconocido
$b = \sqrt{13^2 + 19^2 - 2\,(13)\,(19)\,cos55^O}$	Sustitución de los valores conocidos
$b = 15{,}70$	Resultado de la operación
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$	Expresión que relaciona los valores conocidos y permite calcular la medida del ángulo $\sphericalangle A$
$cos\sphericalangle A = -\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$	Despejando el valor del ángulo desconocido
$cos\sphericalangle A = -\frac{13^2-15{,}70^2-19^2}{2(15{,}70)(19)}$	Sustitución de los valores conocidos
$cos\sphericalangle A = 0{,}73$	Resultado de la operación
$\sphericalangle A = 42{,}69^o$	Valor del ángulo para el que el coseno es 0.73

5.14. Funciones trigonométricas

Son funciones que tienen como dominio el conjunto de los valores de la medida de un ángulo y como rango el conjunto de los valores de las razones trigonométricas. Reciben los mismos nombres de las razones trigonométricas y se acostumbra a manejar como variable a x.

Las características de las funciones trigonométricas se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 5.12. Funciones trigonométricas y sus características

Función trigonométrica	Características
$Senx$	Dominio: $\mathbb{R}$ Rango: $[-1,1]$ Cortes con el eje x: $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ Cortes con el eje y: $(0,0)$ Periodicidad: periódica con periodo 2π
$Cosx$	Dominio: $\mathbb{R}$ Rango: $[-1,1]$ Cortes con el eje x: $\frac{\pi}{2}+k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ Cortes con el eje y: $(0,1)$ Periodicidad: periódica con periodo 2π
$Tanx$	Dominio: $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}$ Rango: $\mathbb{R}$ Cortes con el eje x: $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ Cortes con el eje y: $(0,0)$ Periodicidad: periódica con periodo π
$Cscx$	Dominio: $\mathbb{R}-\{k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$ Rango: $\mathbb{R}-(-1,1)$ Cortes con el eje x: no corta el eje x Cortes con el eje y: no corta el eje y Periodicidad: periódica con periodo 2π
$Secx$	Dominio: $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}$ Rango: $\mathbb{R}-(-1,1)$ Cortes con el eje x: no corta el eje x Cortes con el eje y: $(0,1)$ Periodicidad: periódica con periodo 2π
$Cotx$	Dominio: $\mathbb{R}-\{k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$ Rango: $\mathbb{R}$ Cortes con el eje x: $\left((2k+1)\frac{\pi}{2},0\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$ Cortes con el eje y: no corta al eje y Periodicidad: periódica con periodo π

5.15. Gráficas de las funciones trigonométricas

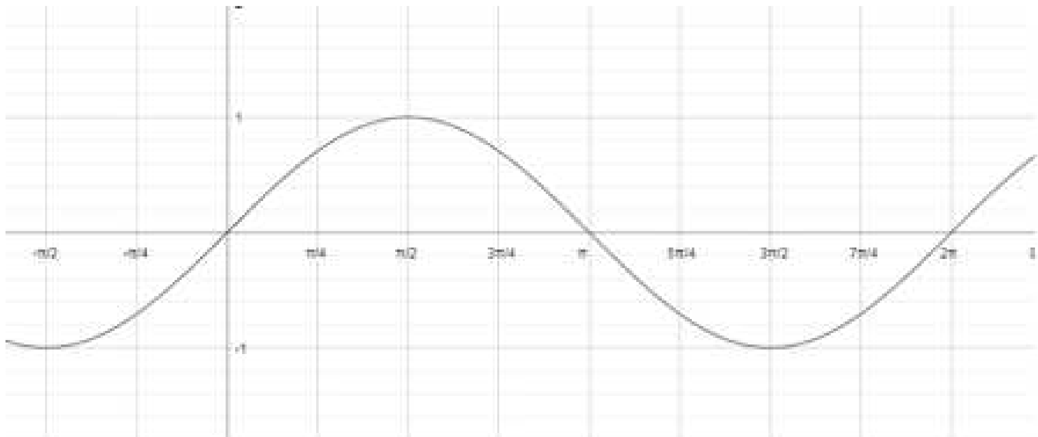


Figura 5.3. Gráfica de la función $y \ = \ Sen \ x$

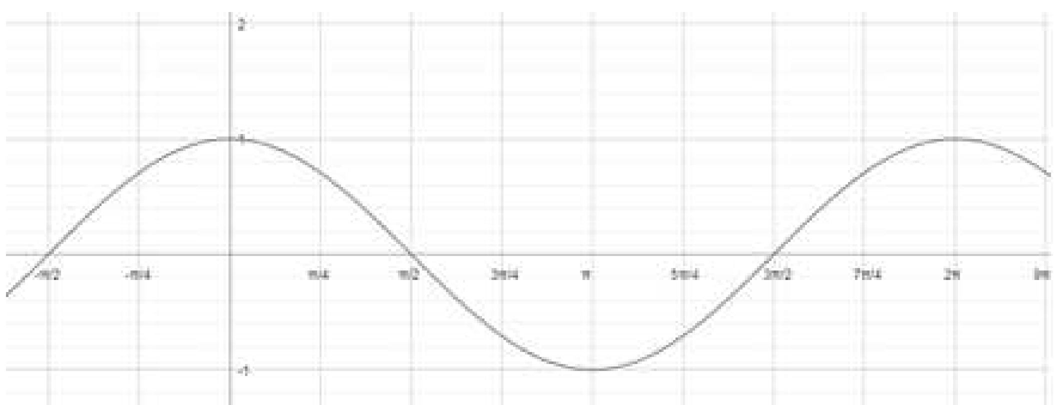


Figura 5.4. Gráfica de la función $y = \ Cosx$

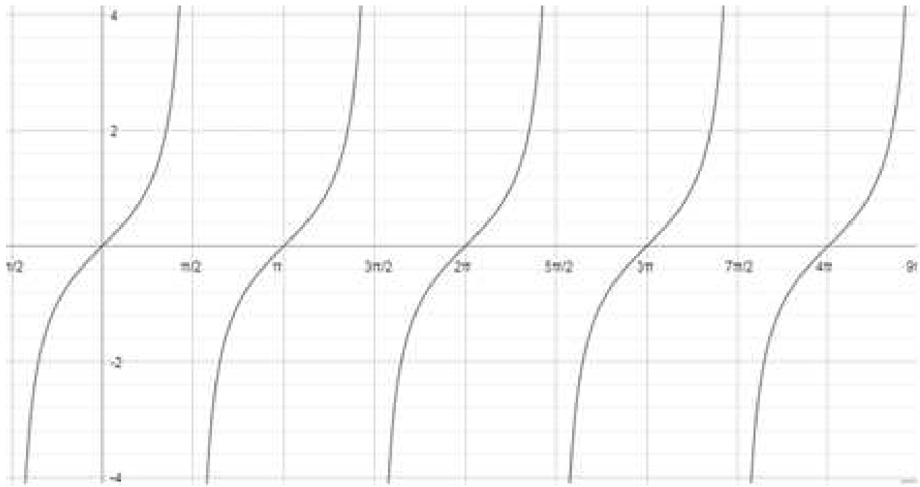


Figura 5.5. Gráfica de la función $y = tanx$

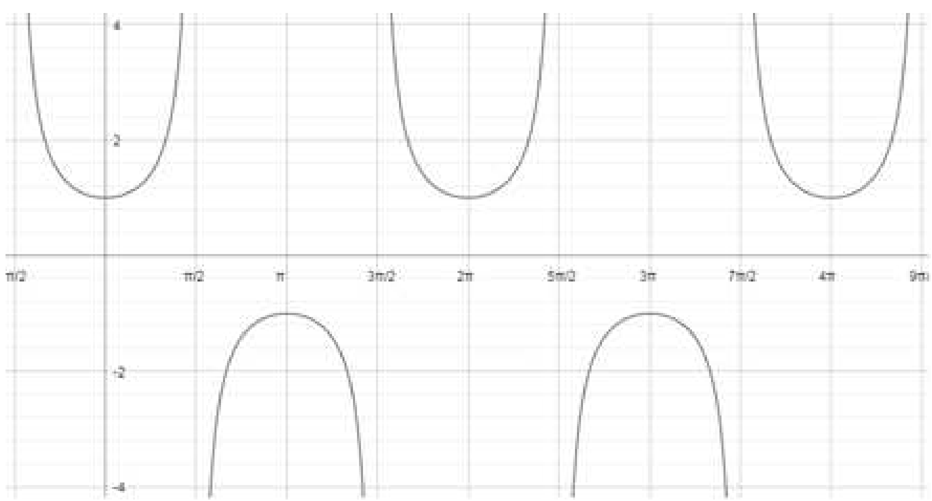


Figura 5.6. Gráfica de la función $y = Secx$

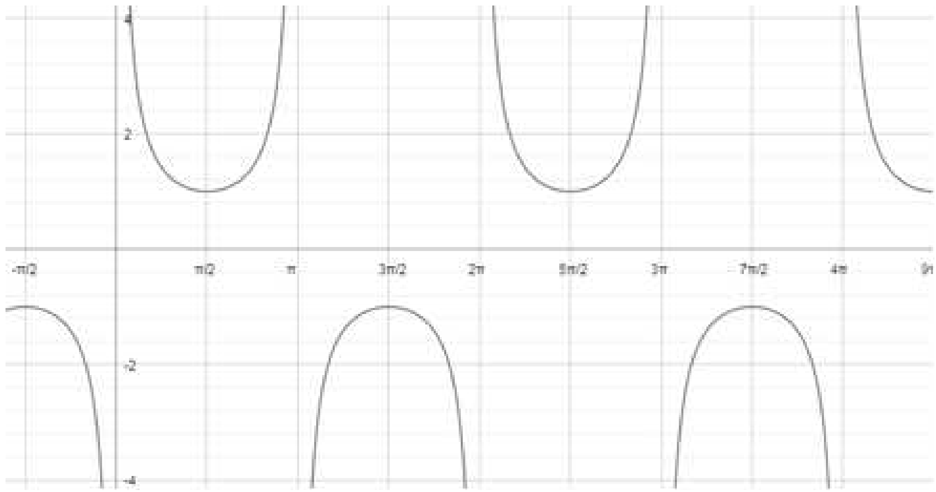


Figura 5.7. Gráfica de la función $y = cscx$

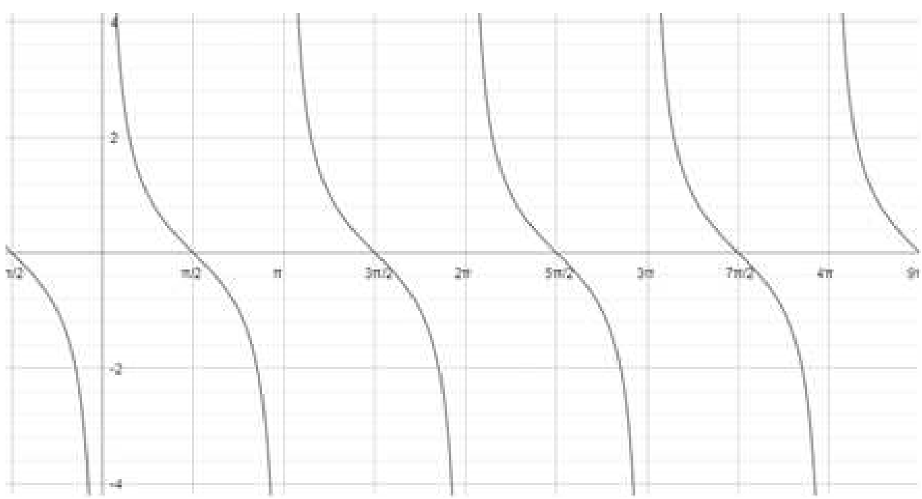


Figura 5.8. Gráfica de la función $y = cotx$

Ejercicios del capítulo: trabajo independiente

1-3 Escriba la expresión en términos de senos y cosenos:

1. $\frac{1}{1+tan^2x}$
2. $tanxsenxcosx$
3. $\frac{cot(A+B)sec(A+B)}{1+cot^2(A+B)}$

4-8 Demuestre que las siguientes proposiciones son identidades:

4. $senxcosx\,(tanx + cotx) = 1$
5. $\frac{sec^2x-1}{tanxsenx} = secx$
6. $\frac{1+tan^2x}{sec^2x} = 1$
7. $\frac{1}{sec^2x} - \frac{1}{cosx} = -senxtanx$
8. $\frac{2sen^2A-cos^2A}{sen^2A+senAcosA} = 1 - cotA$

9-12 Si $f\left(x\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Determine:

9. $senx$
10. $\cos\left(\pi + x\right)$
11. $Tanx$
12. $Sec(x - \pi)$

13-20 Encuentre el dominio de las siguientes funciones:

13. $f\left(x\right) = \frac{log\left(16-x^2\right)}{\sqrt{senx}}$
14. $f\left(x\right) = \sqrt{senx} + \sqrt{16 - x^2}$
15. $f\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{senx}} + \sqrt[3]{senx}$
16. $f\left(x\right) = \log\left(sen\frac{\pi}{x}\right)$
17. $f\left(x\right) = \sqrt{sen\left(\sqrt{x}\right)}$
18. $f\left(x\right) = \frac{cosx}{senx-3}$
19. $f\left(x\right) = \frac{\sqrt{x}}{sen\pi x}$

20. $f(x) = \log[cos(logx)]$

21-23 Determine la compuesta $f \circ g$ para cada par de funciones f y g:

21. $f(x) = -2senx; g(x) = 3x - \pi$
22. $f(x) = 6x; g(x) = cos\left[\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right]$
23. $f(x) = tanx; g(x) = -x$

24-34 Halle el conjunto de números reales para los cuales se cumple la igualdad en un intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

24. $tan2x = 1$
25. $cscxtanx = \sqrt{2}$
26. $sen^2x - cosx + 1 = 0$
27. $1 + cot^2x + 2csc^2x = 4$
28. $\frac{\left(tan^2x\right)}{(secx+1)} = 1$
29. $2cos^2x - 2sen^4x = \sqrt{3}$
30. $sen4x + 4sen^3xcosx = 0$
31. $\left(tanx + \sqrt{3}\right)^2 = 0$
32. $\frac{tan4x}{tanx} = 1$
33. $\frac{2}{1-tan^2x} + \frac{1-tan^2x}{2} = 2$
34. $sen^6x + cos^6x = \frac{7}{16}$

5.15.1. Aplicación con tecnología

Represente la gráfica en el intervalo, determine si es función uno a uno y halle el rango de la función en el intervalo dado.

35. $y = |senx|; x \in [-2\pi, 2\pi]$
36. $y = cos|x|; x \in [-2\pi, 2\pi]$
37. $y = [[senx]]; x \in [0, 2\pi]$
38. $f(x) = \begin{cases} e^x & si\ x \leq 0 \\ \cos x & si\ x > 0 \end{cases}$

39. $f(x)=\begin{cases} lnx & si\ x>0 \\ \text{sen}x & si\ x\leq 0 \end{cases}$

40. $f(x)=\begin{cases} |cscx| & si\ x\ \epsilon\ (-\pi,0) \\ 2\text{csc}x & si\ x\ \epsilon\ (0,\pi) \end{cases}$

Represente gráficamente en el mismo plano las siguientes funciones y determine el dominio y el rango para cada una de ellas:

41. $y=senx,\ y=sen2x$ y $y=\frac{senx}{2}$

42. $y=cos3x, y=cosx, y=\frac{cosx}{3}$

43. $y=cosx$ y $y=sen(\frac{\pi}{2},-x)$

Determine el periodo, la amplitud, el cambio de fase y trace la gráfica de la función definida:

1. $f(x)=1/2\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)$
2. $f(x)=\sqrt{5}sen\left(\frac{x}{4}\right)$
3. $f(x)=2cos\,(2x)$
4. $f(x)=\sqrt{tanx}$

Proyectos aplicados a las ciencias básicas

Desarrolle las siguientes ideas que representan proyectos basados en los contenidos vistos en el capítulo

- Relaciones familiares en un triángulo: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/fops9.html
- Modelos depredador-presa: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/dp8.html
- El problema del puente de Königsberg: http://www.stewartmath.com/dp_fops_samples/fops6.html

1. ¿En cuál silla del paraninfo debo sentarme para obtener un ángulo de visión máximo?

Para el desarrollo de este proyecto debe calcular las siguientes medidas:

1. Altura de la pantalla del paraninfo
2. Distancia del suelo a la pantalla
3. Número de filas de sillas

4. Distancia de la primera fila con respecto a la pantalla

5. Distancia entre filas

6. Inclinación de la zona de asientos

Tenga en cuenta que el valor x distancia sobre el plano a la que una persona se sienta está dado por $0 \leq x \leq 60$. Plantee y resuelva en qué fila se puede sentar una persona para obtener el valor máximo de θ(Sugerencia: teorema de Pitágoras y ley de los senos). Use para el desarrollo el *software* Geogebra.

Solución de los ejercicios de trabajo en clase

1. $\frac{\pi}{12}$
3. $\frac{5\pi}{6}$
5. $\frac{\pi}{6}$
7. $\frac{3\pi}{4}$
9. $\frac{5\pi}{36}$
11. 36^o
13. 135^o
15. 108^o
17. 45^o
19. $sen\theta = cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ tan\theta = cot\theta = 1,\ csc\theta = sec\theta = \sqrt{2}$
21. $c = 4{,}14,\ \sphericalangle A = 75^o,\ \sphericalangle B = 15^o$
23. $a = 9{,}99,\ \sphericalangle A = 87{,}5^o,\ \sphericalangle B = 2{,}5^o$
25. $\sphericalangle A = 88^o,\ a = 50{,}08,\ b = 1{,}74$
27. 112,71 metros
35. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$
37. $0,\ \pi$.
39. $\frac{3\pi}{2}$
41. $\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$
43. $\sphericalangle B = 54{,}3^o$

45. $b = 2{,}7$

47. $\sphericalangle A = 52{,}8^o$

49. $a = 3{,}01$

51. $c = 5{,}9$

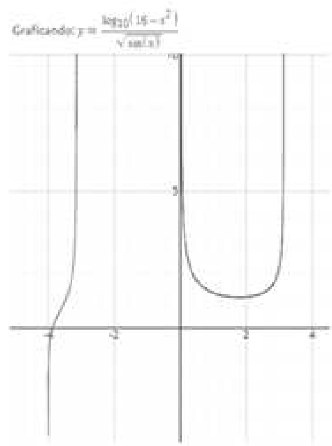
Solución de los ejercicios de trabajo independiente

1. $cos^2 x$

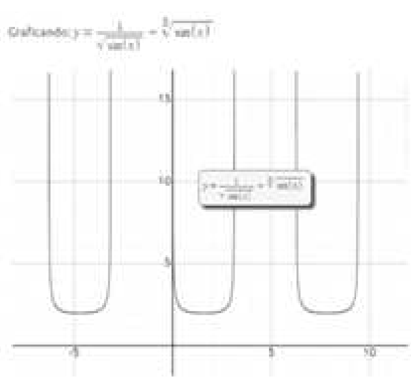
3. $\frac{1-senx}{cosx}$

5. $\frac{1}{sen^2 x}$

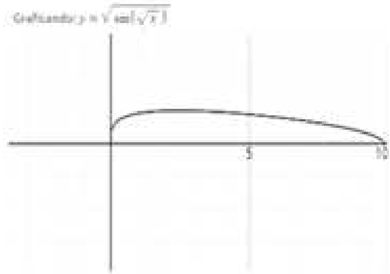
13. $Dominio : x \in \mathbb{R}: -4 < x < -\pi$ ó $0 < x < \pi$



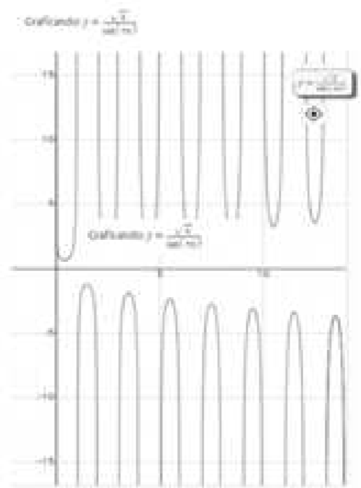
15. $Dominio : x \in \mathbb{R}: 0 < x - 2\pi n < \pi,\ n \in \mathbb{Z}$



17. $Dominio: \left(0 < x \leq \pi^2\right),\ n \epsilon \mathbb{Z}$



19. $Dominio: (n \geq 0, 0 < x - 2\pi n, n \epsilon \mathbb{Z}$



21. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = sen(\frac{\pi}{2} - 3x)$

23. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -2sen(3x - \pi)$

25. $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}$

27. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

29. $\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$

31. $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$

33. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

35. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

BIBLIOGRAFÍA

Acevedo, B., Ospina, O. y Luis, S. (2000). *Matemáticas fundamentales para ingenieros*. Manizales: Universidad Nacional.

Marilyn, R. (1982). *Precalculo: algebra, trigonometría y geometría analítica*. San Francisco, California: Holden Day.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo.* Mexico: Cengage Learning.

Swokowskl, E. w. y Jeffery, A. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Cengage Learning.

Thomas, J. B. (2010). *Cálculo de una variable.* México: Pearson Educación.

Wisniewski, P. M. y Gutiérrez, A. (2004). *Introducción a las matemáticas universitarias.* México: McGrawHill.

Zill, D. & Dewar, J. (2012). *Precálculo con avances de cálculo.* México: Mcgraw-Hill.

http://www.stewartmath.com/media/8_inside_focus.php#

http://www.wolframalpha.com

https://es.symbolab.com

https://www.mathway.com

UNIVERSIDAD CATÓLICA de Colombia
Vigilada Mineducación

Editado por la Universidad Católica de Colombia en diciembre de 2018, impreso en papel propalibros de 75 g., en tipografía Times New Roman, tamaño 11 pts.

Publicación digital
Hipertexto Ltda.

Impreso por:
Xpress Estudio Gráfico y Digital S.A.

Sapientia aedificavit sibi domum

Bogotá, D. C., Colombia.

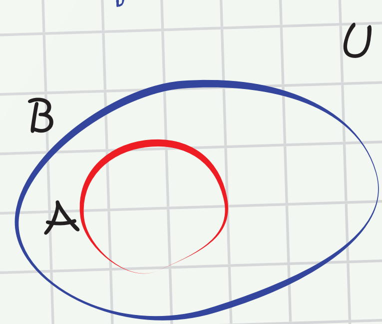
COLECCIÓN CB CIENCIAS BÁSICAS

Apuntes de matemática básica

Al ingresar a la universidad es necesario el manejo de puntos clave de las matemáticas como teoría de los números, álgebra, ecuaciones, funciones y trigonometría. El presente texto desarrolla estos temas y los presenta de forma clara, concreta y ampliada por medio de ejemplos y ejercicios en diferentes contextos. Adicionalmente indica cuáles son las herramientas disponibles en la web para el manejo de las aplicaciones de las matemáticas.

Esta obra ha sido diseñada a partir de la labor desarrollada por el equipo del Departamento de Ciencias Básicas mediante los aportes de los profesores de las asignaturas correspondientes al primer curso de matemáticas. La autora retoma los temas acordados en estos documentos y los plasma en esta publicación que se presenta como apoyo al trabajo presencial en los cursos de matemática.

Es necesario recordar al lector que las matemáticas requieren de trabajo constante; por tal razón se recomienda tener siempre a mano lápiz y papel para reforzar los temas abordados, desarrollar los ejercicios o simplemente tomar notas que considere oportunas para posteriores consultas. Por tratarse de un libro de trabajo puede escribir en él, resaltar, señalar, reseñar... Cada vez que lo haga, le dará sentido al libro mismo.



9 789585 456402