

**CONTRIBUCIÓN DE LOS PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS A LA COMPETENCIA ACADÉMICA EN
MATEMÁTICAS**

**MARÍA CAROLINA FERNÁNDEZ DE CASTRO
DIANA CAROLINA LASTRE GÓMEZ
IVÁN ALBERTO MÁRQUEZ DÍAZ
NEOMI RUTH MEJÍA MANOTAS**

**UNIVERSIDAD DEL NORTE
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
BARRANQUILLA**

2016

**CONTRIBUCIÓN DE LOS PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS A LA COMPETENCIA ACADÉMICA EN
MATEMÁTICAS**

MARÍA CAROLINA FERNÁNDEZ DE CASTRO

DIANA CAROLINA LASTRE GÓMEZ

IVÁN ALBERTO MÁRQUEZ DÍAZ

NEOMI RUTH MEJÍA MANOTAS

**Trabajo de investigación para optar al título de
Magíster en Educación**

Directora

LUZ STELLA LÓPEZ SILVA

**UNIVERSIDAD DEL NORTE
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
BARRANQUILLA**

2016

NOTA de Aceptación

_____ Cuatro Cinco (4.5) _____

Evaluador (a):

Evelyn del Carmen Ariza Muñoz

Magister en Educación

Barranquilla, mayo 20 de 2016

RECONOCIMIENTOS

Los autores agradecen a:

Luz Stella López, nuestra tutora por orientarnos en cada momento de este proceso académico.

Melina Ávila Cantillo y Gina Camargo De Luque, quienes hicieron parte de este proyecto, por su valioso apoyo

Los docentes de la maestría en educación con énfasis en cognición por su compromiso y dedicación con nuestra formación académica.

Eivis Lara, director, y coordinador de la Institución Educativa Distrital el Concorde en Malambo, Atlántico.

Todos los estudiantes que participaron en este proyecto.

DEDICATORIA

Dedico esta tesis, trabajo arduo como pocos, a mi amada esposa Lorena Escobar por creer en mí y en los frutos que vendrán si este esfuerzo se viera coronado por el éxito y por brindarme su apoyo irrestricto e incondicional. También a mis dos pequeños hijos, Daniel Iván y Jesús Adrián, por comprender y soportar en silencio los muchos desplazamientos del tiempo que debí dedicar a ellos.

Iván Alberto

Dedico esta tesis a todas las personas que han contribuido significativamente a mi formación profesional: a mis padres José y Marina, a mi esposo Carlos Manuel, a mis hijos Carlos José, Joshua Aviuth y especialmente a Dios por mostrarme su fidelidad todos estos años, y por darme la vida para continuar alcanzando nuevas metas.

Neemi Ruth

Dedico esta tesis a Dios por permanecer siempre junto a mí y guiarme para culminar mis metas. A mis padres, Hedier y Diana, por su amor incondicional y su apoyo permanente, y a mi hermano, Eddi, por su cariño y amistad.

Diana Carolina

La presente tesis la dedico a mi madre Gloria de Fernández De Castro, por la confianza depositada y apoyo para continuar alcanzando mis metas profesionales, a mis compañeros de trabajo, quienes compartieron su conocimiento, alegrías y tristezas y en especial a Dios, por bendecirme siempre acompañándome en los momentos difíciles.

María Carolina

CONTENIDO

| | pág. |
|--|-------------|
| INTRODUCCIÓN | 1 |
| 2. JUSTIFICACIÓN | 4 |
| 3. MARCO TEÓRICO..... | 8 |
| 3.1 MARCO EPISTEMOLÓGICO | 8 |
| 3.2 MARCO CONCEPTUAL..... | 14 |
| 3.3 ESTADO DEL ARTE..... | 21 |
| 3.3.1 Procesos Metacognitivos de Resolución de Problemas en el Desarrollo de Habilidades Matemáticas | 21 |
| 3.3.2 Procesos Metacognitivos de Resolución de Problemas en el Desarrollo de Competencias Matemáticas comparadas entre diferentes sujetos..... | 37 |
| 3.3.3 Procesos Cognitivos y Metacognitivos de Resolución de Problemas en el Desarrollo de Habilidades Matemáticas | 60 |
| 3.3.4 Procesos Cognitivos y Metacognitivos de Resolución de Problemas en el Desarrollo de Competencias Matemáticas Comparadas entre Diferentes Sujetos | 100 |
| 3.3.5 Procesos Cognitivos de Resolución de Problemas en el Desarrollo de Habilidades Matemáticas | 127 |
| 3.3.6 Procesos Cognitivos de Resolución de Problemas en el Desarrollo de Habilidades Matemáticas Comparadas entre Diferentes Sujetos..... | 130 |
| 3.3.7 Síntesis general del Estado del Arte- pregunta problema | 133 |
| 4. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA | 139 |
| 5. OBJETIVOS | 142 |
| 5.1 OBJETIVO GENERAL..... | 142 |
| 5.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS..... | 142 |
| 6. HIPÓTESIS..... | 143 |

| | |
|---|-----|
| 7. METODOLOGÍA | 144 |
| 7.1 ENFOQUE | 144 |
| 7.2 DISEÑO | 144 |
| 7.3. POBLACIÓN Y MUESTRA | 145 |
| 7.4 DEFINICIÓN DE VARIABLES | 145 |
| 7.4.1 Variables predictoras..... | 145 |
| 7.4.2 Variable criterio | 149 |
| 7.5. CONTROL DE VARIABLES | 150 |
| 7.5.1. Variables controladas | 150 |
| 7.5.2 Variables no controladas | 151 |
| 7.6 TÉCNICAS | 151 |
| 7.7 INSTRUMENTOS | 151 |
| 7.8 PROCEDIMIENTO | 153 |
| 7.8.1 Consentimiento de participantes | 153 |
| 7.8.2 Entrenamiento a examinadores | 154 |
| 7.8.3 Recolección de información..... | 154 |
| 7.8.4 Digitación de datos recolectados..... | 154 |
| 7.8.5 Análisis de datos | 155 |
| 8. RESULTADOS..... | 156 |
| 8.1 ANÁLISIS DE LOS DATOS | 157 |
| 8.2 RESUMEN DE LOS RESULTADOS..... | 165 |
| 9. DISCUSIÓN | 166 |
| RECOMENDACIONES | 192 |
| BIBLIOGRAFÍA | 195 |
| ANEXOS | 210 |

LISTA DE TABLAS

| | pág. |
|--|-------------|
| Tabla 1. Variables controladas | 150 |
| Tabla 2. Variables no controladas | 151 |
| Tabla 3. Frecuencias y porcentajes del uso del proceso Explora | 157 |
| Tabla 4. Frecuencias y porcentajes del uso del proceso Comprende | 158 |
| Tabla 5. Frecuencias y porcentajes del uso del proceso Adquiere Nueva Información | 158 |
| Tabla 6. Frecuencias y porcentajes del uso del proceso Analiza..... | 159 |
| Tabla 7. Frecuencias y porcentajes del uso del proceso Planea | 159 |
| Tabla 8. Frecuencias y porcentajes del uso del proceso Monitoreo Local | 160 |
| Tabla 9. Frecuencias y porcentajes del uso del proceso Monitoreo Global | 160 |
| Tabla 10. Frecuencias y porcentajes del uso del proceso Implementa | 161 |
| Tabla 11. Frecuencias y porcentajes de la valoración del profesor de la competencia matemática de los estudiantes..... | 161 |
| Tabla 12. Frecuencias y porcentajes que tienen los estudiantes sobre la exactitud al resolver un problema matemático | 162 |
| Tabla 13. Medias y desviaciones en el uso de los procesos de resolución de problemas | 163 |
| Tabla 14. Medias y desviaciones de la valoración del profesor sobre la competencia matemática de sus estudiantes | 163 |
| Tabla 15. Coeficiente de correlación entre los procesos de resolución de problemas que utilizan los estudiantes y la valoración del profesor de su competencia matemática..... | 164 |

INTRODUCCIÓN

Este proyecto de investigación tiene como objetivo estudiar como los procesos cognitivos y metacognitivos de resolución de problemas contribuyen al desarrollo de la competencia académica en matemáticas, con el fin de demostrar cuan importantes son dichas funciones en el desarrollo del conocimiento matemático. En este sentido se desarrolló un estudio correlacional predictivo, dado que cuantifica las relaciones existentes entre las variables de investigación, a la vez que ofrece predicciones que surgen de las relaciones ya establecidas entre las variables. Por lo tanto, estudia la contribución de las variables predictoras, las cuales son los procesos cognitivos y metacognitivos de resolución de problemas relacionados con la competencia académica en matemáticas, que es la variable criterio.

En este trabajo investigativo se presenta un marco teórico amplio desde las perspectivas epistemológica, conceptual y del estado del arte, que sustenta lo anteriormente expresado. De esta forma, en el marco epistemológico se encuentra una síntesis histórica de los diferentes modelos que desde lo filosófico han aportado al constructo de resolución de problemas matemáticos, así como el génesis de los procesos de resolución de problemas. En el marco conceptual se presentan tres apartados: resolución de problemas matemáticos, procesos cognitivos y metacognitivos y la competencia académica en matemáticas. Igualmente, se plantea la importancia que tiene lograr que los alumnos aprendan matemáticas a partir de la resolución de problema. En el estado del arte se han agrupado diversos estudios científicos en siete categorías que organizan las investigaciones por separado y de manera

conjunta en cuanto a los procesos cognitivos y metacognitivos en la resolución de problemas en el desarrollo de las habilidades matemáticas; así como los procesos antes mencionados en la resolución de problemas en el desarrollo de la competencia matemática, acudiendo a la comparación entre diferentes sujetos.

Seguidamente, dentro de este estudio se presenta el planteamiento del problema, el objetivo general y los específicos, la hipótesis base y la metodología que ha seguido este enfoque, el diseño de la investigación, así como los resultados en cuanto al análisis de datos con su respectivo resumen.

Finalmente, dentro del cuerpo de este documento, se encuentra el apartado de discusión, en el cual se exponen, a manera de dialogo, las conclusiones a las que han llegado otros autores al utilizar las mismas variables abordadas durante este estudio y relacionadas a los resultados que hemos expuesto en esta investigación por cada uno de los procesos cognitivos y metacognitivos estudiados. Asimismo, el documento presenta algunas recomendaciones a tener en cuenta en posteriores investigaciones en esta línea a partir de la reflexión y análisis que puedan hacerse sobre los resultados de este estudio.

**1. CONTRIBUCIÓN DE LOS PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS A LA COMPETENCIA ACADÉMICA EN
MATEMÁTICAS**

2. JUSTIFICACIÓN

Este proyecto de investigación es relevante porque puede aportar explicaciones relacionadas con el bajo rendimiento en pruebas estandarizadas, en cuanto a la resolución de problemas matemáticos como sucede en el caso de las pruebas nacionales Saber del 2014 en 3°, 5° y 11° y en las pruebas internacionales PISA 2012, Serce 2006 (de acuerdo al segundo estudio regional comparativo y explicativo) y pruebas PISA 2014. A su vez, esta investigación puede explicar, en parte, las consecuencias de implementar estrategias de manera limitada en el aula, que favorezcan la identificación de los procesos de resolución de problemas matemáticos, (De La Cruz, Fernández y Martínez, 2006).

Resolver problemas de matemáticas es una de las herramientas fundamentales de las sociedades avanzadas, en cuyo aprendizaje la escuela invierte buena parte de su tiempo y esfuerzo. Tal es así que se podría considerar, junto a la lectura, una de las capacidades que la escuela ha tratado de universalizar. Sin embargo, con frecuencia se hacen públicos indicadores que señalan que los alumnos muestran un nivel en matemáticas y en particular en resolución de problemas preocupantemente bajo (por ejemplo: Informe PISA e INECSE, 2004).

¿Cuáles pueden ser los motivos de este preocupante bajo nivel de rendimiento? Uno de los motivos podría ser que, a pesar de que esta tarea parece relativamente sencilla desde el punto de vista cognitivo, los procesos cognitivos implicados en el proceso de resolución de problemas matemáticos son muchos y muy complejos. Otro motivo, estrechamente

relacionado con el anterior, podría ser que, a pesar de esta complejidad, la cultura de aula frecuentemente presenta los problemas de matemáticas de una manera estereotipada, limitando el proceso de resolución a sus aspectos estrictamente matemáticos, de manera que potencia el desarrollo de los procesos vinculados a los conocimientos estrictamente matemáticos a la vez que relega otros, relacionados con la aplicación de otros tipos de conocimiento y que en ocasiones son igualmente importantes. En esta revisión se señala la necesidad de alejar la práctica educativa de este enfoque de la enseñanza de la resolución de problemas, con base en una serie de modelos teóricos y de estudios empíricos que apuntan a la necesidad de presentar los problemas de matemáticas como una tarea de aplicación de conocimientos no sólo matemáticos, sino también sobre el mundo real y de sentido común, que son necesarios para una comprensión genuina de la situación descrita por el problema.

En la actualidad, en la enseñanza de las matemáticas es importante promover que los niños piensen matemáticamente en vez de repetir y ejercitarse automáticamente con las matemáticas, tal y como se hacía en la educación tradicional. Es necesario formar niños capaces de utilizar el razonamiento y la creatividad, niños preparados para solucionar problemas y a su vez aplicar las habilidades en diversos contextos. Al respecto Le Roy Hay (s.f.) expresa que se hace necesario replantear el rol de la memorización en la era actual de la información, ya que no dependemos de los recursos impresos o de la memoria debido al fácil acceso que se tiene a la información almacenada electrónicamente; de hecho, hoy en día se requiere de un alto nivel de habilidades de pensamiento para procesar de manera adecuada la información que tenemos.

En este sentido, es necesario que la educación y la enseñanza se contextualicen con la realidad y la actualidad. Lo enseñado en la escuela debe ir de acuerdo y en armonía con la vida fuera de esta. Se debe tener en cuenta que, los avances tecnológicos han llegado hasta tal punto que son parte inherente de la vida de los seres humanos, y estos deben estar preparados para procesar la información y manejar las tecnologías adecuadamente. Por lo anterior, se considera que se hace necesario replantear, tanto las habilidades matemáticas a enseñar, como la metodología utilizada. Actualmente, no se habla de memorización y cantidad de información, sino de resolución de problemas, análisis, creatividad y calidad de información. Es por esto que esta investigación es de gran importancia, ya que con esta se pretende determinar el grado de contribución de los procesos de resolución de problemas a la competencia académica en matemáticas

Este proyecto de investigación es pertinente, puesto que los beneficios que se derivan de éste responden a los principios teóricos de la Maestría en Educación con énfasis en Cognición, de la Universidad del Norte, al indagar cómo los procesos (cognitivos y metacognitivos) en la resolución de problemas responden a la competencia académica en matemáticas. A su vez, aborda un tema de interés en los procesos de enseñanza- aprendizaje para el Grupo de Cognición y Educación, en la Línea de Matemáticas y Ciencias.

Asimismo, se pretende promover una discusión al respecto, porque se considera que deben existir otros factores que contribuyan a la competencia académica de los niños y de las niñas. De este modo, se podría contribuir a detectar en dónde se debe trabajar y cuáles son

las falencias que se deben mejorar para lograr un rendimiento académico óptimo en los niños y las niñas.

Esta investigación es viable porque hace parte del proyecto de investigación: “Corazón, mente y cuerpo: Factores predictores de la competencia académica y social en la infancia temprana” (bajo el contrato 661-2009, código 1215-489-25366) financiado por: Universidad del Norte, Colciencias y la Universidad Concordia de Canadá.

3. MARCO TEÓRICO

3.1 MARCO EPISTEMOLÓGICO

Se pretende en primer lugar, realizar un recorrido respecto al origen de los procesos de resolución de problemas en la competencia académica y en segunda instancia abordar las concepciones respecto a la resolución de problemas matemáticos, desde los enfoques o modelos epistemológicos que se han desarrollado históricamente y, que han redundado en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Con relación a la primera intención, se hace necesario emprender un recorrido histórico que trae a la memoria la manera como las civilizaciones egipcia, babilónica y china, incluían en la instrucción de sus escribas, las matemáticas y, por tanto, los problemas matemáticos con textos que datan de esa época.

Se destacan las discusiones frente a la resolución de problemas matemáticos, tal como se observa en los ya conocidos Diálogos de Platón, en donde el filósofo griego Sócrates (469aC-399aC) provoca y estimula un diálogo con un esclavo de Meneón, a fin de que éste logre a través de preguntas capciosas y haciendo correcciones muy sutiles, la solución de un problema, que en este caso correspondía a la construcción de un cuadrado de área doble a la de un cuadrado dado. En este diálogo se observan diversas técnicas, estrategias, recursos que inducen al esclavo a la resolución del problema planteado. Por su parte, para Platón era indispensable saber matemáticas antes de aprender a filosofar. De ahí que en un cartel

colocado a la entrada de la Academia que había creado decía: “que no pase quien no sepa Geometría”, que se entendía como la matemática en esos tiempos. Asimismo, el matemático griego Pappus (\approx s. III aEC) trata un tema que llama *ἀναλυόμενος* (analyomenos) que según Polya, puede traducirse como “teorías del análisis” o “arte de resolver problemas” (Cruz, M. 2006, p. 8). Pappus podría ser considerado el precursor de los conceptos heurísticos al describir los métodos de resolución de problemas geométricos aplicando formas regresivas y progresivas de razonar implícitamente.

Por otra parte, durante el Medioevo, el filósofo, matemático y físico René Descartes (1596-1650) propuso un método para la resolución de problemas que llamó modelo de pensamiento productivo o consejos para resolver problemas con facilidad. “La utopía del proyecto de Descartes se sustenta en un plan conformado por tres fases: (I) reducir cualquier problema algebraico a la resolución de una ecuación simple; (II) reducir cualquier problema matemático a un problema algebraico; y fase (III) reducir cualquier problema a un problema matemático (Cruz, 2006, p.9). Con este método, Descartes intenta matematizar cualquier problema al reducirlo a ecuaciones algebraicas.

Asimismo, Dewey (1910,1933) desarrolló la teoría que procura secuenciar el proceso de resolución de problemas en un proceso de pensamiento que sigue cinco pasos: “existencia del problema (identificación), formulación de hipótesis de solución, desarrollo de la misma y deducción de sus propiedades, y comprobación de hipótesis” (Beltrán, 2005, p.13). Dewey considera que un proceso activo implica experimentación y resolución de problemas en donde el pensamiento está en marcha en la medida en la que exista un problema para resolver.

En este sentido, la interacción entre estudiante y maestro no se basan en la transmisión sino en la concepción de un maestro que es capaz de identificar las necesidades y capacidades de los estudiantes y le permite participar y colaborar, desarrollando en esta forma el concepto de aprendiz. Dewey fundamenta su pedagogía en la experiencia, así lo manifiesta en su libro *Experiencia y Educación: a partir de la experiencia, por la experiencia, para la experiencia* (Garcés, et al., p. 2)

Por otra parte, desde los modelos epistemológicos en la resolución de problemas matemáticos, a lo largo de la historia, en el desarrollo de la matemática, se han podido evidenciar diversas posturas en torno a la forma como se estructura y organiza el conocimiento matemático. Se pueden evidenciar concepciones respecto a su desarrollo que representan paradigmas notablemente influyentes en la enseñanza de las matemáticas. En esta línea, Lakatos (1978), distingue dos grandes grupos de teorías epistemológicas generales, que son patrones de la organización matemática: Las Euclídeas y las Cuasi – empíricas, las cuales han tenido marcada influencia en las prácticas metodológicas seguidas en las escuelas de formación y especialmente en la concepción y desarrollo de los problemas matemáticos. A continuación se describen éstos y algunos otros modelos modernistas, destacando el papel que juegan en la resolución de problemas matemáticos.

En cuanto al modelo clásico euclidianista, afirma que: “todo conocimiento matemático puede deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas (axiomas), formulados con términos perfectamente conocidos”. En este modelo se pretende trivializar

el conocimiento matemático en donde se otorga gran valor de verdad a los axiomas a través del uso de la razón en forma de intuición aritmética, geométrica o lógica (Lakatos, 1978).

A este enfoque epistemológico pertenecen dos tipos de modelos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: *El Teoricismo*, que se caracteriza por no tener en cuenta los procesos de la actividad matemática restando importancia epistemológica y didáctica al origen y desarrollo de los conocimientos matemáticos. En este modelo los problemas son ajenos a las teorías matemáticas, no siendo parte de su estructura, y por lo tanto, la resolución de problemas matemáticos, es considerada como actividad secundaria en el proceso enseñanza asumido en algunos planes educativos que favorecen este modelo.

En el *Tecnicismo*, al igual que en el *Teoricismo*, es considerada la resolución de problemas como una actividad trivial, dado que se hace énfasis en el uso de técnicas simples, dejando de lado la selección de técnicas adecuadas conducentes a la selección de verdaderas estrategias de resolución aplicables principalmente en problemas contextualizados (Pérez, 2001).

Por otra parte, se destacan los modelos modernistas en los cuales la resolución de problemas juega un papel importante en el desarrollo del conocimiento y estructura de la matemática, por lo que el estudio de los procesos de resolución constituye un elemento fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. De acuerdo a Pérez (2001), dentro de los modelos modernistas, se pueden distinguir el Cuasi – empirista, el procedimentalista y el constructivista, considerando además, que las teorías de Imre

Lakatos (1976), han establecido el punto de ruptura de los modelos euclideanistas con los modernistas, pues para Lakatos (1976), el origen y método de las matemáticas, e incluso su propia justificación, provienen de la “experiencia”, pero no en sentido empirista básico, sino en un sentido más sofisticado de “experiencia matemática” (Pérez, 2001), estableciendo de esta manera un modelo cuasi – empírico en el desarrollo del conocimiento matemático.

Según esta teoría, las matemáticas siguen un patrón muy distinto al de las teorías euclídeas, debido a que para el desarrollo de los conocimientos matemáticos, es necesario desarrollar conjeturas, pruebas y refutaciones. En este sentido, el contenido matemático no es tautológico, sino que, en su evolución, sigue un proceso heurístico en contraposición con las posturas de los modelos algorítmicos, en donde lo esencial son los procedimientos, como: conjeturar, probar tentativamente, contrastar, refutar, buscar contraejemplos, modificar un poco el problema original, cambiar las definiciones, entre otros.

Así mismo, Chevallard, Bosch y Gascón (1997) citados por Pérez (2001), reconocen la importancia del momento exploratorio en matemáticas, por lo tanto, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas queda identificada totalmente con la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas no triviales, es decir, de aquellos que requieren de actividades exploratorias libres y creativas.

Por otra parte, en el modelo procedimentalista desarrollado posteriormente, el proceso enseñanza aprendizaje se caracteriza, según Pérez (2001), en la utilización de sistemas estructurados de técnicas heurísticas, a diferencia de las técnicas algorítmicas utilizadas

muchas veces en problemas descontextualizados. Este modelo puede ser interpretado como una complementación del tecnicismo, pero desarrolla el trabajo de la técnica mucho más allá de los procedimientos simples. De acuerdo a Chevallard, Bosch y Gascón (1997), citados por Pérez (2001), este es un modelo que contribuye al modernismo en cuanto a que relaciona dos dimensiones de la actividad matemática: el *exploratorio* y el *trabajo de la técnica*.

En el procedimentalismo no se analiza el papel de las teorías matemáticas en el aprendizaje, ni su relación con la actividad de resolución de problemas. El procedimentalismo se centra en el problema didáctico de posibilitar el diseño, la utilización y el dominio de estrategias complejas de resolución de problemas.

En este sentido, en el procedimentalismo, la resolución de problemas se utiliza como una estrategia didáctica, encaminada a que el alumno llegue a dominar sistemas estructurados de procedimientos matemáticos que pueden cristalizarse o no, en un patrón de resolución en el sentido que lo interpreta Polya (1945, 1954 y 1962-65).

Por último, en el modelo constructivista, la resolución de problemas juega un papel tal, que el conocimiento que se desea que el alumno adquiera tiene que ser la herramienta más adecuada para resolver el problema propuesto al nivel de los conocimientos del alumno (en la construcción de este conocimiento radica el objetivo fundamental de toda la actividad).

El avance fundamental del constructivismo respecto a los modelos docentes unidimensionales consiste en que relaciona dos dimensiones diferentes de la actividad

matemática: el *momento exploratorio* con el *momento tecnológico* – teórico Chevallard, Bosch y Gascón (1997) (como se citó en Pérez, 2001), dando gran importancia al papel de la actividad de resolución de problemas, aunque solo sea como instrumento de la génesis de los conceptos. Sin embargo, ignora el trabajo de la técnica en el aprendizaje de la matemática en general y en la resolución de problemas en particular.

En este sentido el constructivismo está más cerca del *Teoricismo* que del *Tecnicismo*, aunque este se sustenta en una base psicológica más sólida, la de la psicología genética y también en un modelo epistemológico (la epistemología constructivista), mucho más elaborado que el euclidianismo.

3.2 MARCO CONCEPTUAL

Resolución de Problemas

A lo largo de la historia y en consecuencia de los constantes cambios en la educación, se ha percibido un especial énfasis en la manera como los alumnos aprenden las matemáticas y, en especial, que lo hagan a partir de la resolución de problemas. Sin embargo, dadas las múltiples interpretaciones del término Resolución de Problemas), este objetivo ha sido difícilmente puesto en práctica por parte de los docentes.

Según Stanic & Kilpatrick (1989), “Los problemas han ocupado un lugar central en el currículo matemático escolar desde la antigüedad, pero la resolución de problemas, no. Sólo

recientemente los que enseñan matemática han aceptado la idea de que el desarrollo de la habilidad para resolver problemas merece una atención especial.”

Es por esta razón que, la mayor parte del trabajo en cuanto a los procesos para la resolución de problemas matemáticos, ha recibido la influencia de los escritos de Polya, Kilpatrick y Sternberg, dado que los tres coinciden acerca del rol que los problemas juegan en la vida de aquellos que hacen matemática. Ellos plantean que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática realmente consiste en problemas y soluciones.

El matemático más conocido que sostiene esta idea de la actividad matemática es Polya, en el cual se ha fundamentado, en parte, esta investigación, con su trabajo a través del libro “*How to solve it*” (1954), en el cual introduce el término “heurística” para describir el arte de la resolución de problemas, concepto que desarrolla luego en “*Matemática y razonamiento plausible*” (1957) y “*Mathematical Discovery*” (1981).

Polya (1954) afirma:

“Para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. Los aspectos matemáticos son primero imaginados y luego probados, y casi todos los pasajes de este libro están destinados a mostrar que éste es el procedimiento normal. Si el aprendizaje de la matemática tiene algo que ver con el descubrimiento en matemática, a los estudiantes se les

debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel”.

Polya (1954) a su vez propuso un modelo de resolución de problemas que incluye las siguientes fases: Primero: Comprender el problema: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuáles son las condiciones?, ¿es posible satisfacerlas?, ¿son suficientes para determinar la incógnita, o no lo son? ¿Son irrelevantes, o contradictorias?, etc. Segundo: Diseñar un plan: ¿se conoce un problema relacionado?, ¿se puede replantear el problema?, ¿se puede convertir en un problema más simple?, ¿se pueden introducir elementos auxiliares?, etc. Tercero: Ponerlo en práctica: aplicar el plan, controlar cada paso, comprobar que son correctos, probar que son correctos, etc. Cuarto: Examinar la solución: ¿se puede chequear el resultado?, ¿el argumento?, ¿podría haberse resuelto de otra manera?, ¿se pueden usar el resultado o el método para otros problemas?, etc.

Siguiendo la misma línea, Sternberg (1985), postula un modelo jerárquico con tres niveles de generalidad, que constituyen su modelo componencial; cuyos componentes son: meta componentes, componentes de ejecución y los componentes de adquisición del conocimiento.

A su vez plantea la teoría trídica la cual sugiere que la conducta inteligente es producto de: aplicar estrategias de pensamiento (inteligencia lógico-analítica), manejar nuevos problemas con creatividad y rapidez (inteligencia creativa) y adaptar el contexto al seleccionar y modificar nuestro entorno (inteligencia práctica).

A pesar de la importancia de llevar a los niños a la resolución de problemas matemáticos, muchos investigadores del área (Schöenfeld, 1985; Gascón, 2001; Peralta, 2005) manifiestan una enorme dificultad en cuanto a la utilización de estrategias complejas de resolución de problemas.

En este sentido, Schöenfeld (1985) explicita que, esta ausencia de articulación entre los conocimientos, herencia de la práctica tradicional, descompone el saber matemático en pequeñas porciones y asigna a los estudiantes un papel pasivo en la construcción y utilización de los métodos de resolución de problemas. Dichas consideraciones anteriores dan pie a la propuesta que se realiza en este trabajo: determinar el grado de contribución de los procesos de resolución de problemas a la competencia académica en matemáticas, explorando el desarrollo de procesos cognitivos y metacognitivos que puedan acompañar la construcción del conocimiento, la integración de saberes y la utilización por parte de los docentes en todos los niveles.

Cognición y metacognición

Las estrategias cognitivas, como señala Beltrán (1995), son una especie de reglas o procedimientos intencionales que permiten al sujeto tomar las decisiones oportunas de cara a conformar las acciones que caracterizan el sistema cognitivo. Las dos tareas cognitivas más elementales conciernen a la adquisición y al procesamiento de la información. A su vez plantea que las estrategias metacognitivas son aquellas que intervienen en la regulación y

control de la actividad cognitiva del individuo, optimizando los recursos cognitivos disponibles.

Flavell (1976), plantea que “la metacognición es el conocimiento sobre los propios procesos y productos cognitivos y también el conocimiento sobre las propiedades de la información, sobre los datos relevantes para el aprendizaje o cualquier cosa relacionada con procesos y productos cognitivos”. Otros autores, relacionan la metacognición con el conocimiento sobre las capacidades cognitivas y la regulación de las mismas (Baker, 1985) y sostienen que existe una dimensión metacognitiva en todas las estrategias (Paris, Lipson & Wixson, 1983).

Todo lo anterior significa que es de gran importancia proporcionar a los alumnos métodos de enseñanza y medios en donde se desarrollen los procesos cognitivos y metacognitivos para la resolución de problemas matemáticos.

Procesos de Resolución de Problemas

Los procesos cognitivos y metacognitivos son utilizados por los estudiantes para resolver problemas matemáticos. Los procesos cognitivos son: *Comprensión, Adquisición de Nueva Información e Implementación*. Los procesos metacognitivos son: *Exploración, Monitoreo Local, Planeación, Monitoreo Local y Monitoreo Global*.

El proceso de *Exploración* consiste es la búsqueda estructurada para conocer la respuesta, *Comprensión* se refiere al esfuerzo del estudiante por aprehender la naturaleza

del problema. Este proceso incluye el reconocimiento de los elementos del problema donde se espera que el estudiante haga un recuento de los datos que consideró en su cabeza, el replanteamiento del problema donde se espera conocer si el niño cambia la pregunta y la replantea en sus propias palabras y la repetición de aclaración del problema donde se espera averiguar la razón por la que el niño pide repetición de la pregunta.

El proceso de **Análisis**, consiste en el esfuerzo que hace el estudiante por examinar los elementos del problema. Incluye dividir por partes, donde se espera conocer si el niño analiza el problema planteado acortándolo, seleccionar perspectivas donde se espera conocer si el niño analizó los datos seleccionando el tipo de operación aritmética a realizar.

El proceso de **Planeación**, incluye las decisiones que se toman acerca del procedimiento para resolver el problema.

La **Implementación**, es el momento cuando el estudiante realiza el plan pensado, ejecutando las estrategias planteadas.

El **Monitoreo Local** hace referencia al momento en el que el niño, cuando soluciona el problema, se involucra en actividades de toma de decisiones y autorregulación, es decir, si el niño chequea o verifica lo que está haciendo, o expresando en otras palabras, monitorea el progreso de la estrategia.

Finalmente, el **Monitoreo Global** hace referencia a la regulación del proceso, es decir si el niño chequea o verifica lo que hace, si evalúa los resultados o verifica los cálculos. Este

proceso se observa cuando el sujeto hace corrección al evaluar los resultados, si la estrategia no fue la adecuada, y si se debe buscar estrategias alternativas o se ve la necesidad de repensar el proceso, es decir, si el sujeto utiliza una estrategia diferente para corregirlo (López, 1992).

Competencia matemática

Ser competente, más que poseer un conocimiento, es saber utilizarlo de manera adecuada y flexible en nuevas situaciones (Torredo, 1999, p.67). Esta idea es la que llega al campo de la educación para designar aquellos logros del proceso relacionados con el desarrollo de ciertas capacidades generales (competencias básicas) en donde se puede diferenciar del aprendizaje de los contenidos curriculares.

La competencia matemática consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad y para resolver problemas relacionado con la vida cotidiana y con el mundo laboral. (Según: Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre) por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria (B.O.E. del 8 de diciembre) y Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre) por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación secundaria obligatoria (B.O.E. de 5 de enero de 2007).

3.3 ESTADO DEL ARTE

Se presenta una revisión de investigaciones que articulan la relación entre los procesos de resolución de problemas en el orden cognitivo y metacognitivo, a la competencia académica en matemáticas, entendiéndose que esta competencia hace referencia a las habilidades esperadas en los estudiantes y a como estos procesos hacen una diferencia en la competencia académica en matemáticas cuando se compara entre estudiantes del mismo grado. En este orden de ideas, el estado del arte se ha organizado en seis (6) Macro Categorías a partir de los procesos *Cognitivos* y *Metacognitivos* que, a su vez, contienen los componentes de la competencia académica en matemáticas.

3.3.1 Procesos Metacognitivos de Resolución de Problemas en el Desarrollo de Habilidades Matemáticas

Un buen número de investigadores a través de diversos tipos de estudios determinaron el efecto que tiene en el desempeño de los estudiantes la aplicación de estrategias en donde se desarrollan diversos procesos metacognitivos durante la resolución de problemas matemáticos. En este sentido, uno de los intereses de las investigaciones, se ha centrado en establecer una relación general de como los procesos (identificados por otros autores como episodios) metacognitivos de *Análisis, Exploración, Planeación, Monitoreo Local y Monitoreo Global* inciden en las habilidades aritméticas de resolución de problemas y, en consecuencia, en el desarrollo de su competencia académica.

Algunas investigaciones revisan la relación entre los procesos metacognitivos y las habilidades matemáticas, las cuales muestran sus resultados de forma conjunta, sin discriminar la relación específica con cada uno de los procesos estudiados, tales como: Yildirim & Ersozlu (2013); Rott (2013); Abdullah, Zacaria & Halim (2012); Van der Stel, Veenman, Deelen & Haenen (2010) y Lee, Teo & Bergin (2009). A continuación se detallan estas investigaciones, cuyos resultados muestran la relación positiva entre las variables de empleadas en el estudio:

El estudio de Yildirim & Ersozlu (2013), analizaron la existencia de una relación entre el conocimiento metacognitivo al resolver problemas matemáticos y, los tipos de problemas rutinarios y no rutinarios en noventa y siete (97) estudiantes del primer año en una universidad de Turquía. Para la recolección de datos se utilizaron dos (2) instrumentos: un Inventario de Conciencia Metacognitiva (BFE) y el Test de tipos de Problemas Matemáticos (MPT). El BFE desarrollado por Schraw y Dennison (1994), evalúan dos dimensiones: la conciencia de la cognición y la disposición de la cognición, en donde esta última está conformada de cinco (5) procesos: la *Planeación*, el *Monitoreo* y *eliminación de errores* (entendido como un *Monitoreo Local*), la evaluación (entendida como un *Monitoreo Global*), y la gestión del conocimiento (Akin, 2006, p.159-160). El MPT, diseñado por Yildirim (2000) fue utilizado para evaluar el tipo de problemas matemáticos (rutinarios y no rutinarios) que el estudiante puede resolver.

Se realizó una correlación de Pearson y análisis de regresión múltiple, en la cual encontraron una relación positiva entre la conciencia metacognitiva y la resolución de los

tipos de problemas matemáticos ($r = 0,673$, $p < 0,01$). Además, los resultados de la regresión indicaron que la conciencia metacognitiva pronostica significativamente el desempeño en la Resolución de Problemas y los dos (2) predictores explicaron el 45% de la varianza total.

Estos resultados no discriminan la contribución de los diferentes procesos (*Planeación*, *Monitoreo Local* y *Monitoreo Global*) estipulados en el Inventario de Conciencia Metacognitiva BFE sobre el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos y en las competencias en aritmética. Tampoco incluye en su estudio, procesos metacognitivos de *Exploración* y *Análisis* que son pertinentes en la presente investigación. Utilizaron un protocolo de entrevista flexible para identificar los procesos cognitivos y metacognitivos que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas, mientras que el estudio de Yildirim & Ersozlu (2013) se basaron en el Inventario de Conciencia Metacognitiva BFE, el cual correspondió a un cuestionario que responde el estudiante después de resolver los problemas.

Por otra parte, Rott (2013) en su estudio cuantitativo de corte correlacional, muestra la relación entre el control en los procesos de resolución de problemas (control ejercido a través de tres procesos definidos por el autor: *Planificación*, *Monitoreo* y *Reflexión*) y los resultados de éstos en niños con mayor o menor éxito en la resolución, para lo cual seleccionó una muestra de cuarenta y cinco (45) niños de quinto (5) grado de primaria con edades entre diez (10) y doce (12) años de una escuela en Hannover, al Norte de Alemania, los cuales trabajaron del uno (1) a tres (3) problemas matemáticos. Para determinar el éxito de los estudiantes en la resolución de dichos problemas, Rott (2013) realizó una clasificación en

cuatro (4) categorías: 1) cuando no se trabajó en el problema, 2) cuando se resolvió en parte o hubo defectos notables en la solución, 3) cuando se resolvió el problema en gran parte y 4) cuando se resolvió correctamente y se dieron razones apropiadas. Rott (2013) utilizó el marco para el *Análisis* de sesiones de resolución de problemas en video empleado por Schoenfeld (1985, capítulo 9) el cual contempló los episodios de: Analizar el problema (de una manera coherente y estructurada), el estudio de los aspectos del problema (de una manera mucho menos estructurada que en el *Análisis*); la *Planificación* de la totalidad o parte de una solución; la aplicación de un plan, verificación de una solución y, otros agregados por el autor.

De igual manera, este estudio para la categorización de las actividades metacognitivas, tuvo en cuenta el marco de Cohors-Fresenborg y Kaune (2007b), una adaptación al marco de Schoenfeld (1985), el cual es un sistema de categorización, de las que comprende tres (3) categorías - de *Planificación* (P), *Monitoreo* (entendido como *Monitoreo Local*) (M) y la reflexión (entendido como *Monitoreo Global*) (R); las cuales comprenden subcategorías como M1: control del cálculo, M8: *Monitoreo*, y algunas subcategorías como; P1: Foco de atención; P1a: en un solo paso, P1b: en múltiples pasos. Esta investigación, por otra parte, toma como referencia un estudio de Schoenfeld de donde resulta que el 60% de los estudiantes universitarios de la muestra presentan un comportamiento que se denominó “búsqueda inútil” debido a que el grupo de estudiantes toman una dirección de solución de manera insistente, sin reflexionar en ella.

Los resultados de este estudio exponen que, la mayoría de los procesos fallidos de resolución de problemas en los estudiantes, se basaron en el comportamiento descrito por Schoenfeld (“búsqueda inútil”), el cual se caracteriza en el uso de una gran cantidad de episodios únicamente de *Exploración* o en algunos casos, del uso conjunto de la *Exploración* y el *Análisis*, sin considerar otros procesos como el de *Planificación* y *Monitoreo* durante la resolución del problema, mientras que, en aquellos que realizaron intentos de manera exitosa, se observó que utilizaron gran cantidad de actividades de autorregulación.

Por lo anterior, con el fin de comprobar si este tipo de comportamiento en los procesos está interrelacionado con el éxito o fracaso en la solución, se utilizó una prueba de Chi cuadrado, la cual mostró una correlación significativa ($p < 0,001$) entre el comportamiento de los solucionadores al emplear distintos procesos en la solución de problemas y su éxito.

Esta investigación no determina en qué medida los episodios de metacognición planteados en su marco de referencia (como los de *Planificación y Monitoreo*), influyen en los resultados de resolución de problemas, sino más bien la influencia de las actividades metacognitivas en el proceso de resolución de problemas, vistas de manera general como un proceso de control y regulación.

El estudio de Rott (2013) es importante porque demuestra una relación de incidencia positiva entre los procesos evidenciados en el marco de Cohors-Fresenborg y Kaune (2007b) (*Planificación, Monitoreo, reflexión*); sin embargo, los resultados del estudio revelan una incidencia negativa sobre el desempeño de los estudiantes en la resolución de tareas o

problemas matemáticos, cuando en éstos solo, se acude a procesos de *Exploración* o de *Exploración* y *Análisis* únicamente (dejando de lado procesos como el de *Planificación* y *Monitoreo Local* y *Monitoreo Global*). Otros aspectos que marcan diferencia con respecto al estudio en curso son la edad y grado de escolaridad de los sujetos, dado que Rott (2013) emplea sujetos entre 10 y 12 años, de 5° de primaria, mientras que estos sujetos se encuentran en edades alrededor de los siete años y en 2° grado de primaria.

Abdullah, Zacaria & Halim (2012), se propusieron determinar el efecto de un enfoque didáctico implementando una estrategia para el desarrollo del pensamiento cognitivo y metacognitivo, a través de la representación visual, sobre el rendimiento y la *Comprensión* conceptual en la resolución de problemas matemáticos de palabras, en ciento noventa y tres (193) niños de cinco (5) escuelas de primaria. Compararon los efectos de la estrategia en dos grupos, uno experimental con noventa y seis (96) estudiantes y el otro de control con noventa y siete (97), en donde este último recibió un enfoque tradicional de enseñanza de resolución de problemas matemáticos, basado en el uso de libros de texto para la comprensión de ejercicios con procedimientos que involucran la memorización de tablas y fórmulas matemáticas. El grupo experimental siguió los pasos asociados a los diferentes procesos metacognitivos de *Planear*, *Monitorear* y *Evaluar*.

Los resultados de Abdullah, Zacaria & Halim (2012), mostraron que existe un efecto principal del enfoque didáctico en el rendimiento de los niños ($F(1,191) = 59.18, p < 0.01, \eta^2 = 0.24$), y en la Comprensión conceptual ($F(1,191) = 88.17, p < 0.01, \eta^2 = 0.32$), determinado por la aplicación de pruebas de logro y de comprensión conceptual

respectivamente. Se demostró que el enfoque en donde se evidencian los procesos metacognitivos de **Planear**, **Monitorear** y **Evaluar** contribuyó al *puntaje de rendimiento* en un 27,3% y a la **Comprensión de Conceptos** en un 31,6%. En esta investigación utilizaron una representación visual que permitió a los estudiantes interpretar y comprender la información obtenida a través de los subprocesos metacognitivos: **Planear**, **Monitorear** y **Evaluar**; pero no revisó profundamente dentro de los procesos metacognitivos de **Exploración y Análisis**.

Van der Stel, Veenman, Deelen & Haenen (2010), realizaron un estudio cuantitativo de corte transversal en donde investigaron en qué medida se desarrollan las habilidades metacognitivas entre la edad de trece (13) y quince (15) años, evaluaron la existencia de diferencias en el desarrollo de diversos componentes de habilidad metacognitiva y la relación existente entre éstas y la capacidad intelectual como predictores del rendimiento en las matemáticas, para lo cual participaron veintinueve (29) estudiantes de segundo año (13 a 14 años; 11 niños y 18 niñas) y treinta (30) estudiantes de tercer año (14 a 15 años; 12 niños y 18 niñas) de educación secundaria, seleccionados de tres niveles diferentes de dos escuelas suburbanas en los Países Bajos. Para la evaluación de las competencias metacognitivas se utilizó un Protocolo de Pensamiento en Voz Alta en el uso de las habilidades metacognitivas de acuerdo con el procedimiento de Veenman, dividiéndolas en cuatro (4) sub-escalas: Orientación (comprendiendo procesos de **Exploración** y **Comprensión**); **Planificación** y Orden Sistemático (comprendiendo procesos de **Planificación**); **Evaluación** (comprendiendo procesos de **Monitoreo Global**) y Elaboración; siendo estos procesos identificados a través de actividades de dominio general (Brown, 1978; Sternberg, 1990 y

Veenman, et al., 1997) y de dominio específico para las matemáticas (De Corte y Verschaffel, 1980; Gagne', Yekovich & Yekovich, 1993; Schoenfeld, 1983). Los participantes realizaron tareas de matemáticas cada año, en donde aprendieron a resolver problemas matemáticos en una sesión de veinte (20) minutos, posteriormente, al segundo año, se presentaron cinco (5) problemas y al tercer año seis (6) problemas. En estas sesiones los estudiantes resolvieron los problemas iniciales, a manera de práctica durante los primeros veinte (20) minutos y otros tantos, durante treinta (30) minutos, a manera de evaluación como post – test, para verificar los resultados de aprendizaje.

En este estudio, se realizó una valoración de cada sub-escala de habilidades metacognitivas, en un proceso de dos (2) pasos: una valoración cuantitativa, obtenida de contar la frecuencia de las actividades metacognitivas en cada sub-escala (por ejemplo, si un estudiante durante el proceso de resolución del problema verifica los cálculos en cinco (5) ocasiones obtiene entonces una puntuación cuantitativa en la sub-escala de evaluación de cinco (5), y una valoración referida a la calidad de las habilidades metacognitivas, en la cual se describieron criterios que debían cumplir para obtener un determinado valor. Estos criterios fueron formulados en una escala de cinco puntos (de 0 a 4). Por ejemplo, un estudiante recibió un puntaje mayor al realizar una orientación profunda (por ejemplo, cuando el sujeto realiza un bosquejo del problema para representarlo) que cuando realiza una orientación superficial (por ejemplo, cuando el sujeto realiza una lectura parcial del enunciado del problema). Los autores, para evaluar el crecimiento de las habilidades metacognitivas en esos dos años, realizaron un *Manova* de los puntajes de metacognición con la edad. Los resultados de éste revelaron un efecto significativo de la edad en las

habilidades metacognitivas tanto en lo cuantitativo [$F(4, 54) = 13,84, p < 0,001, \eta^2 = 0,51$] como en la calidad [$F(4, 54) = 4,90, p < 0,005, \eta^2 = 0,27$]. Así, en el tercer (3) año los estudiantes tenían medias más altas en metacognición que cuando estaban en su segundo (2) año. De esta manera, a excepción de la cantidad de actividades de Orientación (en donde se vislumbran los procesos de *Exploración* y *Comprensión* del problema), los resultados de los test univariantes mostraron un aumento en la calidad de todos los componentes de habilidades metacognitivas desde el segundo año (*Planeación* ($M = 1.83, SD = 0.80$) y *Evaluación* ($M = 1.14, SD = 0.88$)) al tercer año (*Planeación* ($M = 2.73, SD = 1.11$) y *Evaluación* ($M = 1.93, SD = 1.14$)) y un aumento en cuanto a la cantidad de episodios metacognitivos desde el segundo año (*Planeación* ($M = 5.31, SD = 2.42$) y *Evaluación* ($M = 2.62, SD = 2.47$)) al tercer año (*Planeación* ($M = 8.83, SD = 3.98$) y *Evaluación* ($M = 7.07, SD = 4.30$)), entendida la evaluación como actividades de *Monitoreo Local* y *Monitoreo Global*. Por otra parte, los resultados mostraron correlación significativa entre la cantidad y calidad de las habilidades metacognitivas y el *rendimiento en matemáticas*, a excepción del segundo año (donde no hubo contribución de la cantidad de habilidades metacognitivas en el desempeño en matemáticas); las correlaciones semi-parciales dieron cuenta de esto: para el desempeño en matemáticas en el segundo año ($r = 0.21$: para puntaje de la calidad de la metacognición y $r = 0.00$: para puntaje cuantitativo de la metacognición) y para el desempeño en matemáticas en el tercer año ($r = 0.65, p < 0.01$: para puntaje de la calidad de la metacognición y $r = 0.33, p < 0.05$: para puntaje cuantitativo de la metacognición).

Sin embargo, en el estudio de Van der Stel et al. (2010), se muestra el crecimiento de habilidades metacognitivas de manera general, pero no fue posible deducir los procesos de

Planificación, de *Monitoreo Local y Global* y de *Exploración* en la solución de problemas matemáticos y la influencia discriminada de estos en el desempeño de las competencias en matemáticas o en el rendimiento de los estudiantes. Adicionalmente, el marco presentado no dio muestra del proceso de *Análisis* en la solución de problemas matemáticos.

Lee, Teo & Bergin (2009), realizaron un estudio de enfoque cuantitativo y corte correlacional cuyo objetivo fue el de establecer la relación entre la metacognición y la resolución de problemas cotidianos. Es decir, conocer si la regulación de la cognición y el conocimiento de la cognición se encontraban relacionados con la solución de problemas cotidianos; y si los diversos componentes de la metacognición se diferenciaban mejor en estudiantes con desempeño sobresaliente en problemas que requieren toma de decisiones.

El estudio se llevó a cabo con una muestra de doscientos cincuenta y cuatro (254) estudiantes de quinto (5) grado de una escuela de China, quienes resolvieron un cuestionario en un total de ocho (8) clases, con sesiones de treinta (30) minutos. Se aplicó un instrumento denominado MAI (Inventario de conciencia Metacognitiva), el cual consta de dos (2) categorías de metacognición representadas en el conocimiento y la regulación, en donde el primero mide el conocimiento declarativo (conocimiento sobre uno mismo y las estrategias), conocimiento procedimental (conocimiento sobre el uso de la estrategia), y el conocimiento condicional (cuándo y por qué utilizar las estrategias). El componente de regulación comprende procesos de *Planificación*, *gestión de la información*, *seguimiento (entendido como el Monitoreo Local)*, *Depuración* y *Evaluación (entendidos como el Monitoreo Global)*, medidos en una escala de cinco (5) puntos.

El procedimiento contempló la realización de la lectura del problema de toma de decisión cotidiana, antes de seleccionar una de las cuatro (4) opciones propuestas, seleccionar su respuesta e informar sobre su proceso de metacognición. Las opciones se encontraban ordenadas jerárquicamente (de la A-D) de acuerdo al “nivel de habilidad en toma de decisiones”, donde cada opción (de la A- D) se encontraba asociada a cada nivel (del nivel 1 al 4). Los resultados mostraron que todas las medias, a excepción de los estudiantes del “Nivel 1” es decir, aquellos con baja toma de decisiones, estudiantes que consideran sólo una alternativa, que no tienen criterios de toma de decisiones y, no son capaces de justificar su decisión, fueron significativamente diferentes ($p < 0,001$), sugiriendo además que, en el nivel más alto (según la clasificación de los autores) de toma de decisiones “Nivel 4” de la escala (el participante es capaz de comparar y medir las opciones, seleccionar alternativas y justificar su decisión), el conocimiento de la cognición y la regulación de cognición se diferenciaron en su uso por los participantes. El nivel cuatro (4) obtuvo el porcentaje más alto entre los cuatro (4) niveles ($\eta^2 = 0,518$, $p < 0,001$), lo que sugirió que la varianza compartida en el conocimiento de la cognición y la regulación de la cognición aumentó al 52%.

En síntesis, se puede afirmar que los estudiantes que tomaron una mejor decisión en el problema dado, son los que mejor discriminan entre los diversos componentes de la metacognición. El estudio realizado permitió establecer la relación entre la resolución de problemas cotidianos y la metacognición, estableciéndose que los estudiantes que toman mejores decisiones en la solución del problema son los que mejor evidencian sus procesos

metacognitivos. Sin embargo, los resultados no discriminan correlación entre los procesos de **Planificación**, gestión de información, **Monitoreo** y evaluación, explicados en el componente de regulación del instrumento MAI utilizado, con el desempeño de los estudiantes. Por otra parte, este estudio no muestra la relación de los procesos de **Análisis** y **Exploración** en la resolución de problemas matemáticos con el desarrollo de habilidades matemáticas de los estudiantes.

Las investigaciones anteriormente expuestas revisan la relación entre los procesos *metacognitivos* y las *habilidades matemáticas*, muestran además la relación positiva entre estas variables. Sin embargo, los estudios agrupados en esta sesión no muestran de manera completa todos los procesos metacognitivos, como se referencia a continuación:

- Algunos autores no tienen en cuenta los procesos metacognitivos de **Exploración** y **Análisis** en la resolución de problemas matemáticos en relación al desarrollo de habilidades matemáticas en los estudiantes (Abdullah, Zacaria & Halim, 2012; Lee, Teo y Bergin, 2009; Yildirim & Ersozlu, 2013). Por su parte, Rott (2013), tuvo en cuenta los procesos **de Análisis** y **Exploración** de manera especial, considerándolos como procesos de “búsqueda inútil” cuando solo se recurre a ellos, en el proceso de resolución de problemas por parte de los estudiantes.
- Otros autores no revelan los procesos metacognitivos **de Análisis** y **Monitoreo Local** en su relación con el desarrollo de habilidades matemáticas en los estudiantes (Van der Stel, et al., 2010). Sus estudios comprenden de manera preponderante la identificación de

procesos metacognitivos de *Exploración, Planificación y Monitoreo Global* en su relación con el aprendizaje en matemáticas.

Por otra parte, algunas investigaciones que examinan la relación entre los procesos metacognitivos y las habilidades matemáticas, expresan sus resultados de forma particular, discriminando la relación específica de algunos de los procesos metacognitivos estudiados, con el desarrollo de dichas habilidades (Van der Stel & Veenman, 2008). A continuación se detallan estas investigaciones, las cuales reflejan una relación positiva entre estas variables.

Van der Stel & Veenman (2008), en su estudio se propusieron establecer la relación entre la capacidad intelectual y la habilidad Metacognitiva como predictores de rendimiento de aprendizaje en estudiantes jóvenes (edad media de 12 años, 8 meses), además de las habilidades metacognitivas de dominio general (es decir, independientes del dominio) vs. Dominio específico en treinta y dos (32) estudiantes (12 niños, 20 niñas) de primer año de secundaria de una escuela urbana en los Países Bajos, aplicando un protocolo de pensamiento en voz alta mientras realizaban dos tareas diferentes que representaban los dos dominios diferentes: una tarea de texto en el estudio de la historia y una tarea de resolución de problemas de matemáticas.

Los estudiantes resolvieron, a manera de preparación inicial, cinco (5) problemas de matemáticas (en temas de distancia, fracción, área de superficie, problemas porcentuales), para posteriormente y, a manera de evaluación, cinco problemas más, pensando en voz alta. En cuanto a las habilidades metacognitivas revisadas, se dividieron en cuatro (4) sub-escalas

para cada dominio (general y específico): Orientación, **Planificación** y Orden Sistemático, **Evaluación** y Elaboración. Cada una de las subescalas de cada uno de los dominios, comprende una serie de actividades que sirven de criterios de valoración, no solo de la cantidad, sino de la calidad de las habilidades metacognitivas empleadas. De esta manera, en el dominio general, se distinguen actividades metacognitivas como: en Orientación: activación de conocimientos previos, establecimiento de metas (vista la activación de conocimientos previos como un proceso de **Exploración**), en **Planificación** y Orden Sistemático: establecimiento de sub-metas y administración del tiempo (vistas como actividades en el proceso de **Planeación**), en Evaluación: expresión de no comprensión, comentar sus propias actividades (vistas estas como actividades en el proceso de **Monitoreo Local**), y en Elaboración: Recapitular y sacar conclusiones, relacionar la respuesta a la pregunta o problema. Para el dominio específico de la matemática, los autores distinguen actividades metacognitivas, en Orientación: estimación de la respuesta, hacer un bosquejo del problema con el fin de representar el problema (vista como una actividad en el proceso de **Comprensión**); en **Planificación** y Orden Sistemático: el diseño de un plan de acción paso a paso en lugar de trabajar por ensayo y error, anotar los cálculos de una manera ordenada (vistas como actividades en el proceso de **Planeación**); en Evaluación: monitorear el plan de acción, comprobación de una respuesta al recalcular (vistas como actividades en el proceso de **Monitoreo Local**); y en Elaboración: parafraseo del problema y sacar conclusiones al referirse al enunciado del problema.

Para la valoración de las habilidades metacognitivas de esta investigación, se utilizaron criterios de cantidad (frecuencia de actividades metacognitivas de cada sub-escala) y de

calidad. Para determinar la calidad de cada sub-escala de habilidad Metacognitiva, se utilizó un conjunto de criterios de cumplimiento para valorarse en una escala de cinco (5) puntos (variando de 0 a 4) y para la valoración del rendimiento de los estudiantes, se tuvo en cuenta los resultados del post-test.

Van der Stel & Veenman (2008), mostraron en el estudio una correlación significativa entre habilidad metacognitiva y la medida de aprendizaje en matemáticas ($r = 0.72$, $p < 0.01$). Además, utilizaron correlaciones semi-parciales para calcular las contribuciones únicas e independientes de la habilidad metacognitiva al aprendizaje en matemáticas. Se emplearon técnicas de regresión analítica para examinar las proporciones de varianza única y compartida de la medida del aprendizaje distribuida en las habilidades metacognitivas y en la capacidad intelectual. De esta manera, la contribución única expresada en porcentaje de varianza de las competencias metacognitivas, a la medida del aprendizaje fue de 10,9 y, la contribución compartida de la capacidad intelectual y las habilidades metacognitivas a la medida del aprendizaje fue de 41,0 de un total de 67,1.

Los resultados presentados por Van der Stel & Veenman (2008), se basaron en un *Análisis* de componentes principales (ACP), los cuales mostraron que todas las medidas de varianza de las habilidades metacognitivas en matemáticas y en historia están cargadas sustancialmente en el componente de las habilidades metacognitivas generales (con un eigenvalor total de 3,35 y proporción de varianza de 0,42); de esta manera, la carga arrojada para cada una de las subescalas de metacognición en matemáticas en el componente de dominio general son : en Orientación (que comprende procesos de *Exploración*): 0.65; en

Planificación y Orden Sistemático (la cual comprende procesos de *Planificación*): 0.76; en Evaluación (la que comprende procesos de *Monitoreo Local*): 0.58; aunque, según los autores, estos resultados no son considerablemente altos. Por otra parte, el PCA arrojó para el segundo componente de *Análisis*, interpretado por los autores como el componente de habilidades metacognitivas de dominio específico, cargas positivas para historia y cargas negativas para matemáticas, con eigenvalores (para ambas tareas: de historia y matemáticas) de 1,71 y una proporción de varianza de 0.21, los cuales dan indicio de un desarrollo inicial de estas habilidades a la edad de 12 años. De esta manera, la carga arrojada a través del PCA para cada una de las subescalas de metacognición en el componente de dominio específico de matemáticas fue: en Orientación (comprendiendo actividades del proceso de *Comprensión*): - 0.48; en *Planificación* y Orden Sistemático (vistas como actividades del proceso de *Planificación*): - 0.32; en *Evaluación* (vistas como actividades del proceso de *Monitoreo Local*): - 0.67.

Los resultados mostrados en esta investigación son significativos debido a que permiten inferir que los procesos metacognitivos de *Exploración*, *Planificación* y *Monitoreo Local*, y cognitivo como el de *Comprensión* tienen una relación con el aprendizaje en las matemáticas al desarrollar habilidades en los estudiantes (edad promedio de 12 años) para la resolución de tareas y problemas matemáticos, aunque con una fuerza de incidencia mínima con relación a sus capacidades intelectuales. Adicionalmente, no distingue los procesos de *Monitoreo Global* y de *Análisis* en las subescalas trabajadas de metacognición.

Los artículos anteriormente citados evidencian la relación entre los procesos metacognitivos y las habilidades matemáticas en forma específica, en los siguientes procesos:

- ***Exploración, Planificación y Monitoreo Global:*** Van der Stel & Veenman (2008).

Sin embargo, los autores no profundizan, excluyen o no distinguen cómo los procesos a continuación descritos hacen una contribución a la resolución de problemas:

- ***Monitoreo Local y Análisis:*** Van der Stel & Veenman (2008).

3.3.2 Procesos Metacognitivos de Resolución de Problemas en el Desarrollo de Competencias Matemáticas comparadas entre diferentes sujetos

Algunas investigaciones exponen como fue el desempeño de los individuos en comparación con otros, en cuanto al desarrollo o alcance de las habilidades aritméticas bajo unos mismos niveles de formación y condiciones sociales relativamente homogéneas, durante los procesos de resolución de problemas, cuando se aplica una estrategia didáctica o metodológica de formación que implica la toma de conciencia de los procesos metacognitivos que subyacen, evidenciables a través de diversos protocolos o procedimientos.

De esta manera, algunas investigaciones se enfocaron en establecer la relación de incidencia de los procesos metacognitivos (o como procesos de autorregulación) durante los procesos de resolución de problemas matemáticos como consecuencia de aplicación de una estrategia didáctica con enfoque metacognitivo a un grupo de estudiantes, estableciendo las

diferencias en desempeño en cuanto a la resolución de problemas y de habilidades aritméticas con otros grupos de estudiantes.

Algunas investigaciones analizaron la relación entre los procesos metacognitivos y las competencias matemáticas, en donde mostraron los resultados de forma conjunta, sin discriminar la relación específica con cada uno de los procesos estudiados en los diferentes sujetos, las cuales se describen a continuación:

García, Cueli, Rodríguez, Krawec y González (2015), realizaron un estudio para analizar las diferencias en el conocimiento y habilidades metacognitivas con quinientos veinticuatro (524) estudiantes de los grados quinto (5°) y sexto (6°) de doce (12) escuelas de primaria del noreste de España, con edades de diez (10) a trece (13) años ($M=10.99$, $SD=0.716$), de los cuales 49.6% fueron mujeres ($n=260$). Los estudiantes fueron organizados en tres (3) grupos de acuerdo al nivel del uso del enfoque profundo de aprendizaje (241 = bajo; 152 = medio; 131 = alto). Asimismo, se les evaluó su conocimiento metacognitivo a través de un cuestionario de Estrategias de Aprendizaje (LSKQ: Núñez, et al., 2011) y las habilidades metacognitivas se evaluaron con el proceso de Triple Tarea en Matemática (TTPM: García, et al., in press) durante la resolución de dos (2) problemas matemáticos. La principal característica del protocolo de Triple Tarea está relacionado con el diseño de un sistema de categorías basadas en la autorregulación del aprendizaje (SRL) en la fase de **Planeación**, ejecución y evaluación. En total se propusieron ocho (8) categorías y subprocesos. Dentro de las categorías, se revisó la **Planeación** (que incluye los subprocesos identificación del

problema, definición y representación y la *Exploración* de posibles estrategias); la ejecución que incluye la acción basada en la estrategia; la evaluación que busca los efectos de solución.

Los resultados del estudio de García et al. (2015), en cuanto a conocimiento metacognitivo muestra que, la media del grupo en general, en la escala de LSKQ (Núñez, et al., 2011), indican un conocimiento metacognitivo moderado, pero no alto entre los estudiantes ($M = 5.527$; $SD = 1.870$). El análisis descriptivo mostró, además, que esta variable reunió las condiciones de normalidad (curtosis = -234, asimetría = -.017). También se observó estadísticas significativamente diferentes en el conocimiento metacognitivo entre los grupos con diferentes uso de enfoque de profundidad de aprendizaje (UDAL) [$F(2,523) = 17.463$, $p \leq .001$] con un efecto medio en el tamaño ($\eta^2 = .063$). En ese sentido, el incremento del nivel de UDAL relacionado con el incremento de conocimiento metacognitivo (bajo UDAL: $M = 5.037$, $SD = 1.919$; medio UDAL: $M = 5.793$, $SD = 1.714$; alto UDAL: $M = 6.122$, $SD = 1.723$). En cuanto a los resultados en habilidades metacognitivas, los procesos por variables en los diferentes grupos mostraron diferencias estadísticamente significativas, en la lectura [$\chi^2(2) = 8.215$, $p = 0.016$], escritura [$\chi^2(2) = 7.170$, $p = 0.028$], y la revisión (vista como *Monitoreo Local y Global*) de [$\chi^2(2) = 17.951$, $p \leq 0.001$]. Se observó, que los estudiantes con baja UDAL pasaban más tiempo leyendo que el resto de los grupos, mientras que el grupo de alto UDAL escribieron y revisaron con más frecuencia que aquellos con baja y media UDAL.

El estudio de García et al. (2015), a diferencia de la presente investigación, realizó un análisis en cuanto al conocimiento metacognitivo en los estudiantes en forma general sin

detalle de los procesos inmersos en ese proceso, asimismo, en cuanto a las habilidades metacognitivas realizó una descripción de sus resultados en ocho categorías que miden otros aspectos de las habilidades como la escritura, la lectura y el cálculo, variables que no entran dentro de los procesos de *Análisis* de la presente investigación. Otra diferencia importante corresponde a los estudiantes de quinto (5°) y sexto (6°) grado entre diez (10) y trece (13) años, los cuales fueron analizados en su conocimiento y habilidades metacognitivas agrupados en tres niveles, de acuerdo al uso de la profundidad del enfoque de aprendizaje que a su vez se convierte en otra diferencia. Puesto que el estudio actual no busca medir este aspecto dentro de los factores que inciden en la competencia académica en matemáticas.

Mandaci y Kendir (2013), realizaron un estudio cuantitativo, mediante el cual se propusieron a identificar el efecto de las estrategias metacognitivas utilizadas para la resolución de problemas matemáticos, en los logros de los estudiantes y establecer diferencias significativas en el rendimiento de dos (2) grupos, sometiendo, uno de ellos, a un esquema que promueve desarrollar procesos de orden metacognitivo en la resolución de problemas, mientras que el otro fue sometido a un enfoque tradicional. Por lo anterior, la pregunta general que se hacen los autores es "¿Hay diferencias significativas en el rendimiento, las habilidades metacognitivas y la actitud entre los estudiantes que se les enseña a resolver problemas matemáticos a través de estrategias metacognitivas con los que se les enseña a través de los métodos tradicionales?"

Al inicio de su investigación aplicaron una prueba de rendimiento previa, a dos (2) grupos de quinto grado (5°) de primaria en una escuela de Turquía, un grupo control con treinta y

seis (39) estudiantes y otro experimental con treinta y nueve (39), con el objeto de verificar condiciones similares en el rendimiento. Posteriormente con el grupo experimental, se realizó un trabajo en clases de geometría para mejorar sus habilidades metacognitivas mientras que al grupo control se les enseñó de la manera tradicional. El grupo experimental resolvió los problemas de matemáticas bajo la guía del maestro, siguiendo varias etapas del proceso metacognitivo que comprendió: lectura cuidadosa del problema, indicación de los aspectos más importantes del problema (considerado como una actividad del proceso de *Exploración*), explicación del problema con las propias palabras (entendida como actividad del proceso de *Comprensión*), pensar sobre el tema con el que está relacionado el problema (entendida como una actividad del proceso de *Exploración*), escritura de la información que se proporciona y lo que se solicita, resumen del problema y predicción de la solución sin necesidad de llevar a cabo cualquier procedimiento (entendidas como actividades del proceso de *Análisis*), dibujo de una figura o esquema relacionado con el problema, definición del objetivo antes de la planificación de su solución, enumeración de los procedimientos para la resolución del problema (entendido como actividad del proceso de *Planificación*), ejecución de los procedimientos (entendido como el proceso cognitivo de *Implementación*), control en cada etapa de resolución del problema (considerado como un *Monitoreo Local*) y la evaluación o control después del proceso de resolución del problema (visto como un proceso de *Monitoreo Global*).

Por otra parte, en esta investigación se tomaron los logros de una unidad específica para el desarrollo de las clases y para el diseño de la prueba de rendimiento. Los resultados encontrados después de aplicada nuevamente la prueba de rendimiento a los dos (2) grupos,

mostraron que existe una diferencia significativa en el rendimiento entre éstos, encontrándose, para el grupo sometido a experimentación, una puntuación media de 82,43; mientras que para el grupo control un resultado de 67,50; en donde el posible puntaje superior e inferior en la prueba de rendimiento fue de cien (100) y cero (0) puntos respectivamente. Encontrándose además, según resultados de la prueba t, una diferencia significativa (6,974t) entre los grupos, de acuerdo al nivel aceptado de significación (0,05). Se puede inferir que los procesos metacognitivos que emplearon los estudiantes del grupo experimental a nivel de *Exploración, Análisis, Planeación, control* (vista como *Monitoreo Local*) y evaluación (vista como *Monitoreo Global*) y de los procesos cognitivos de *Comprensión e Implementación* en los procesos de resolución de problemas incidieron directa y positivamente un mejor rendimiento en los estudiantes que lo utilizaron, por encima de aquellos que no siguen estos procesos.

La importancia de esta investigación se muestra en la relación positiva entre la implementación de un grupo de estudiantes de quinto (5°) año, de una estrategia de resolución de problemas matemáticos con enfoque metacognitivo que fomenta procesos cognitivos de *Comprensión e implementación*, y los procesos metacognitivos de *Exploración, Análisis, Planeación, Monitoreo Local y Monitoreo Global*, con el desempeño en la resolución de dichos problemas, comparándolos con otro grupo que sigue un enfoque tradicional para la resolución de dichos problemas. Sin embargo, no presentaron resultados que discriminen cómo los procesos cognitivos y metacognitivos del enfoque asumido en esta investigación, contribuyen al buen desempeño en la resolución de problemas matemáticos.

De igual forma, Montague, Krawec, Enders, & Dietz (2013), en su investigación seleccionaron al azar mil cincuenta y nueve (1.059) estudiantes de séptimo grado (7°) a los cuales se les midió los efectos de una intervención para resolver problemas matemáticos y el rendimiento matemático de los estudiantes. La intervención, *Solve it!*, es una intervención instruccional de estrategia cognitiva basada en la investigación que fue realizada para mejorar el rendimiento de los estudiantes de octavo grado (8°) con y sin discapacidades de aprendizaje para resolver problemas matemáticos. *Solve it!* incorpora los siguientes procesos cognitivos y actividades: lectura (lectura, relectura, identificando la información irrelevante), parafraseando (poner el problema en propias palabras sin cambiar el significado del problema), y organización visual (transformar información problema a una representación que muestra las relaciones entre las partes del problema), hipótesis (realizar un plan para resolver el problema, es decidir, sobre el tipo y orden de operaciones), estimación (predecir el resultado), informática (llevando a cabo las operaciones básicas necesarias para solución) y comprobación (revisar la exactitud de los procesos, procedimientos y cómputo). A su vez, los solucionadores de problemas deben utilizar estrategias metacognitivas como, *plantearse preguntas, recordar lo que saben, detectar, corregir y Monitorear el proceso*. Estas estrategias ayudan a resolver problemas, acceder al conocimiento estratégico, guiar sus aplicaciones y regular el uso de estrategias para el desempeño en la resolución de los problemas.

El propósito de este estudio fue determinar si la efectividad de la intervención podría ser replicada con estudiantes más jóvenes. Cuarenta (40) escuelas de educación media en un distrito escolar urbano se incluyeron en el estudio, junto con un profesor de matemáticas de

séptimo grado (7°) de cada escuela. Los profesores implementaron el programa *Solve it!* en las clases de matemáticas. Posteriormente se evaluó el rendimiento en la resolución de problemas mediante la aplicación de una prueba preliminar y luego mensualmente en el transcurso de la intervención de ocho (8) meses. Los estudiantes que recibieron la intervención (n = 644) incluidos en el currículo del distrito mostraron una tasa significativamente mayor de crecimiento sobre las medidas basadas en el plan de estudios, que los estudiantes en el grupo de comparación (n= 415) que recibieron solamente el currículo del distrito. En general, los resultados del presente estudio, así como los del estudio previo con los estudiantes de octavo grado (8°), indican que la intervención fue efectiva en los grupos de habilidad y es un programa apropiado para utilizar en las aulas inclusivas con estudiantes de diversa capacidad matemática.

En esta investigación utilizaron un instrumento para estudiar el rendimiento en la resolución de problemas matemáticos haciendo énfasis en el uso de procesos cognitivos y metacognitivos, pero no revisaron profundamente estos procesos, sino que únicamente hicieron énfasis en los procesos metacognitivos de ***Exploración, Planeación y Monitoreo Local***.

Asimismo, Iriarte (2011), realizó un estudio sobre la influencia de la implementación de estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en el desarrollo de la competencia resolución en problemas matemáticos, en estudiantes de quinto grado (5°) de básica primaria de la Institución Educativa Normal Superior de Sincelejo. El diseño metodológico utilizado fue cuasi-experimental con cuatro grupos; la intervención se realizó en cuatro (4) fases,

poniendo en práctica la instrucción directa, el modelado metacognitivo, la práctica guiada y el aprendizaje cooperativo.

En este estudio, Iriarte (2011), utilizó dos (2) grupos experimentales que fueron intervenidos con la estrategia didáctica con enfoque metacognitivo, y dos grupos control sin intervención. A uno de los grupos experimental y de control se le aplicó pre-test y post-test y, a los otros, solo el post-test. Iriarte (2011), denominó la variable independiente como intervención con estrategias didácticas con enfoque metacognitivo, enfatizando en la autoconciencia del conocimiento cognitivo, el uso de estrategias o procesos cognitivos durante la solución de problemas matemáticos contextualizados y el control de estrategias para la regulación y el *Monitoreo* sobre los procesos, estando a menudo, asociadas con la conciencia, la evaluación y la regulación de estos (Tárraga, 2008). Por otra parte, la variable dependiente del estudio es la Competencia Resolución de Problemas.

Para comprobar que el grupo control no presenta diferencias estadísticamente significativas, se realizó una prueba de signos bilateral ($P = 0.648$), corroborando que no hay diferencias entre la aplicación de la prueba diagnóstica y el post-test. El análisis de los resultados obtenidos mediante la prueba de signos mostró que, los estudiantes del grupo control no avanzaron en el desarrollo de la competencia resolución de problemas matemáticos. Respecto a los indicadores de desempeño que evalúa la prueba se consideró que persisten las dificultades con respecto a esta competencia. Por otra parte, el grupo experimental sí presentó diferencias estadísticamente significativas. La eficacia de esta intervención quedó corroborada al realizar la misma prueba de los signos bilateral ($Z = -$

2.157, $P = 0.031$), tras lo cual puede decirse que el efecto del entrenamiento contribuye al desarrollo de habilidades para resolver problemas matemáticos.

Asimismo, realizaron prueba U de Mann-Whitney a los Grupos experimental A y grupo de control B, con el fin de establecer si existen o no diferencias significativas entre los grupos comparados. Para estos grupos, los efectos resultaron estadísticamente significativos ($Z = -2.457$, $P = 0.014$), como $P < 0.05$ lo cual indicó la aceptación de la hipótesis alternativa; es decir, el programa sí tuvo incidencia en el desarrollo de la competencia para resolver problemas matemáticos contextualizados. Estos resultados mostraron que el tratamiento basado en estrategias didácticas metacognitivas proporciona resultados positivos en lo que respecta al desarrollo de la competencia en resolución de problemas. Por último, el estudio realizó la comparación entre los resultados del post-test de los grupos C (experimental) y D (control), aplicando la prueba de Mann-Whitney, evidenciando diferencias altamente significativas ($Z = -3.295$, $P = 0.001$) con respecto a la comparación de estos dos grupos, lo que corroboró el cumplimiento de la hipótesis general alternativa de esta investigación, las estrategias didácticas con enfoque metacognitivo sí inciden en el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas matemáticos.

Este estudio abordó una serie de estrategias didácticas metacognitivas que, de acuerdo a los resultados, evidenció una mejora en la resolución de problema matemáticos contextualizados. Sin embargo, no presentaron en forma detallada cuáles fueron los procesos metacognitivos que contribuyeron a esta incidencia positiva en la resolución de problemas. Este aspecto es una diferencia sustancial con la presente investigación porque, lo que se

pretende es poder dar resultados particulares sobre como los procesos de resolución de problemas contribuyen en la competencia académica.

Por su parte, Sáiz y Román (2011) realizaron una investigación cuyo propósito fue el de *Analizar* si el entrenamiento metacognitivo mejora la capacidad de resolución de problemas en niños y niñas por medio de un programa de compensación educativa. En el estudio participaron veinticinco (25) sujetos de edades comprendidas entre cinco (5) y siete (7) años (media: 6 años y 5 meses); trece (13) niños en el Grupo Experimental (GE: 7 niños y 6 niñas); y doce (12) en el Grupo Control (GC: 7 niñas y 5 niños) escolarizados en primer (1) Ciclo de Educación Primaria en un centro público que implementó un “Programa de Educación Compensatoria”; la asignación de los sujetos a los grupos no se realizó de forma aleatoria, sino en función de la disponibilidad del profesorado a aplicar en sus aulas el programa de entrenamiento metacognitivo. El diseño del estudio fue cuasi-experimental de grupo control no equivalente. La variable independiente fue el programa de entrenamiento, la variable dependiente las respuestas a la *Escala para observar estrategias de resolución de problemas* y las covariables el CIV (Capacidad Intelectual Verbal) y CIM (Escala Intelectual Manipulativa) de los niños y niñas.

El estudio fue aplicado en el Programa de Entrenamiento Metacognitivo para Niños Pequeños (Sáiz y Román, 1996) (definición operativa de la variable independiente) conformado por veintinueve (29) unidades, en las que se resuelven problemas cognitivos y sociales. Utilizaron una metodología de resolución de problemas basada en el entrenamiento metacognitivo de Meichenbaum y Goodman (1969): 1-Definición del problema o tarea; 2-

Búsqueda de estrategias de resolución (vista como *Planificación*); 3-Monitorización del proceso de resolución (supervisión visto como *Monitoreo Local*); 4-Evaluación y autocorrección (vista como *Monitoreo Global*).

Utilizaron la escala para observar estrategias de Resolución de Problemas (Sáiz, 1995) (definición operativa de la variable dependiente) (fiabilidad-consistencia interna $\alpha = .89$). Para evaluar: estrategias de entrada de información (atención, *Comprensión* y motivación); estrategias de procesamiento de información (forma de responder, forma de resolver-metacognición, forma de resolver-razonamiento) y estrategias de salida de información. Asimismo, en el estudio aplicaron WPPSI-Escala de Inteligencia de Wechsler para niños de preescolar y primaria (Wechsler, 1993) para evaluar el CIV y el CIM (definición operativa de las covariables dentro del estudio).

Los resultados de este estudio indicaron las diferencias significativas entre el grupo experimental (13 niños) y el grupo control (12 niños) en estrategias de autorregulación (tipo de razonamiento) ($p \leq .001$) y en estrategias de autoevaluación ($p \leq .01$). Asimismo, el *Análisis* intragrupo del grupo experimental detectó diferencias significativas en el tipo de razonamiento ($p \leq .01$). La evidencia experimental indicó que los programas de entrenamiento metacognitivo parecen efectivos, en edades tempranas, para ayudar al desarrollo de las estrategias de autorregulación y autoevaluación.

La aplicación del programa de entrenamiento metacognitivo mostró resultados positivos en cuanto a los procesos de *Monitoreo Local* y *Global*, sin dar detalles en sus resultados del

proceso de *Planeación*. El estudio tampoco incluye los procesos de *Análisis y Exploración*. No obstante, este estudio es un referente importante puesto que abarca un ciclo de edad similar al que cobija la presente investigación y pone de manifiesto la eficacia del desarrollo de estos procesos desde temprana edad.

Por otra parte, Méndez y Peña (2011) en su estudio cuasi-experimental con la participación de setenta y ocho (78) estudiantes entre los diez (10) y trece (13) años de edad, buscaron determinar como la ejecución de estrategias metacognitivas de *Planeación y evaluación* (vista como *Monitoreo Global*) dadas en un programa de entrenamiento en operaciones con fracción, mejoran los niveles de rendimiento en los estudiantes. Los resultados de este estudio fueron los siguientes:

- a. En el rendimiento antes y después de la intervención se evidenciaron diferencias significativas a favor del grupo experimental (GE). El puntaje mínimo a obtener fue de treinta (30) puntos y el máximo de ciento cincuenta (150); el rendimiento promedio para el GE fue de 84,79 puntos, con $SD = 10,650$; para el GC (grupo control) promedio fue de 77,21 puntos con $SD = 8,832$.
- b. En conocimiento previo la Prueba Pre-test el promedio para el GE fue de 8,97 con una $SD = 3,787$ y para el GC de 8,95 puntos con $SD = 3,316$, ninguno de los grupos presentaron diferencias significativas en cuanto al conocimiento previo.
- c. El programa de entrenamiento con procesos metacognitivos estableció la práctica guiada y el modelamiento docente sobre el uso de dichos procesos. Así se pudo observar que

durante las tres (3) primeras sesiones aproximadamente al 85% del GE-(33 estudiantes) se les hizo extraño el proceso de *Planificación*

- d. El 74% (29 estudiantes) se les dificultó el proceso de evaluación (visto como *Monitoreo Local*), e identificaron las dificultades, pero les costó modificar su plan inicial para mejorar su entendimiento y resultados. Al finalizar la intervención, en el Post-test, el GE alcanzó un rendimiento de 19,33 puntos con $SD=2,069$ y el GC fue de 9,10 puntos $SD=1,586$.

Este estudio es un referente importante para la investigación actual porque demostraron cómo los procesos metacognitivos: la *Planificación*, supervisión (entendida como *Monitoreo Local*) y evaluación (entendida como *Monitoreo Global*) inciden de manera positiva en el aprendizaje de operaciones matemáticas y en el rendimiento en esta área. Es decir, se evidencia una pertinencia en estos procesos para mejorar los tópicos matemáticos como lo han anotado (Panaoura y Philippou; 2007; Dahl, 2003; Teong, 2003; Desoete y otros, 2001). Asimismo, las edades de los participantes, aunque no entran dentro del ciclo de edad del estudio actual, si pertenece al nivel de básica primaria. Otra diferencia es que este estudio no incluye otros procesos metacognitivos como el *Análisis y la Exploración*.

Por otra parte, Jacobse & Harskamp (2009), en su estudio cuasi-experimental con cuarenta y nueve (49) estudiantes de quinto (5) año de primaria, con una edad promedio de once (11) años, pretendieron mejorar las habilidades metacognitivas y de resolución de problemas matemáticos en estudiantes a través del uso de un programa informático con ayudas metacognitivas. Los grupos (Experimental y Control) no mostraron diferencias en el

pre-test, pero en el post-test se encontró una diferencia significativa ($t(45) = -1,73; p = 0,05$), lo que puede atribuirse a la intervención realizada que conlleva a un efecto de mediano tamaño de Cohen $d = 0,51$. El estudio evaluó si el efecto de la intervención era independiente de la competencia matemática de los estudiantes, con un análisis de covarianza. Los resultados confirmaron que la intervención tiene un efecto significativo en el rendimiento en matemáticas ($F(1,42) = 7,23, p = 0,01$). Se evaluó el uso de las ayudas (entendidas como proceso metacognitivos) del programa de entrenamiento y las relaciones entre el uso de éstas y el rendimiento matemático. En “Hacer un *plan*” (visto como el proceso de *Planificación*), los estudiantes la utilizaron en un 60%, y en un 58% utilizaron modelos de respuesta a los problemas.

En esta investigación se evaluó la relación entre el uso de los procesos metacognitivos y los problemas escritos. Las correlaciones revelaron que el rendimiento en la resolución de problemas de matemáticas en el GE se relacionó directamente con el uso de los procesos metacognitivos en general ($r = 0,47, p = 0,03$). Asimismo, se encontró una relación indirecta entre rendimiento en matemática y la aplicación de las habilidades metacognitivas, que a su vez son mejoradas por los procesos metacognitivos en un ambiente de aprendizaje computarizado.

En este estudio, la estrategia de entrenamiento que potencia los procesos metacognitivos como la orientación (vista como *Exploración y Análisis*), *Planificación*, evaluación y reflexión (vista como *Monitoreo Local y Global*) al utilizar un programa informático, hace una diferencia sustancial con el estudio actual puesto que en este caso es el niño mismo que

sin ayudas informáticas utiliza, desarrolla, muestra y describe sus procesos en las respuestas dadas al aplicar la Entrevista Flexible.

Como se observa en los artículos anteriormente expuestos, en su mayoría los autores como García et al. (2015); Montague et al. (2013); Iriarte (2011); Sáiz y Román (2011); Méndez y Peña (2011), dan relevancia a ciertos procesos metacognitivos para explicar cómo estos hacen una contribución a los procesos de resolución de problemas y al mejor rendimiento de los estudiantes. Estos procesos son: **Planeación. Monitoreo Local y Global;** mientras, que otros autores como Mandaci & Kendir (2013); Jacobse & Harskamp (2009), investigaron además de los procesos mencionados, cómo el **Análisis y la Exploración** tienen un efecto positivo en el rendimiento y desempeño de los estudiantes en la resolución de los problemas matemáticos. Las estrategias utilizadas en estos estudios van desde la implementación de programas informáticos, programas de entrenamiento metacognitivos, y estrategias didácticas metacognitivas incluidas en los procesos curriculares dentro de las aulas.

Continuando con el análisis, se ha considerado pertinente agrupar las siguientes investigaciones que revisan la relación entre estos procesos metacognitivos y las competencias matemáticas debido a que muestran sus resultados de forma particular y discriminando la relación específica de algunos de los procesos con el desempeño en la resolución de problemas y de otras habilidades aritméticas, estableciendo comparaciones entre diferentes sujetos de estudio como Jimena, Korzeniowski & Esposito (2014);

Rodríguez, Llobet y Zorrilla, (2012); Soresi y Zimmerman (2004). A continuación se detallan estas investigaciones, las cuales encuentran una relación positiva entre estas variables.

Jimena, Korzeniowski & Esposito (2014), realizaron una investigación en dos (2) escuelas de gestión pública de la ciudad de Mendoza (Argentina), con el fin de analizar la relación existente entre la resolución de problemas matemáticos y las funciones ejecutivas de *Planificación* y organización (vista como procesos de *Análisis*). La muestra estuvo conformada por ciento cuarenta y tres (143) escolares de tercero (3°) a quinto (5°) de educación básica primaria, de ambos sexos (51% varones y 49% niñas), con edades comprendidas entre los ocho (8) a once (11) años de edad, ($M = 9,59$ años; $DS = 0,82$). Los escolares fueron evaluados de forma individual en tres sesiones de treinta (30) minutos.

En la primera sesión se administró el Test REY; en la segunda, el Test Laberintos de Porteus (1999) y en la última sesión se desarrolló el Sub-test Batería de Problemas Aplicados, Woodcock - Muñoz (2005).. Este estudio mostró una asociación significativa ($r = 0,225$, $p < 0,01$) entre la capacidad de los niños para elaborar un plan de trabajo y su habilidad para resolver un problema matemático. En este estudio mostraron una asociación significativa ($r = 0,292$, $p < 0,01$) entre la capacidad de los niños para resolver problemas matemáticos y su habilidad para organizarlos (visto como *Análisis*). En ese sentido, los niños con una estrategia de organización (vista como el proceso de *Análisis*) parcialmente estructurada y conceptualizada, presentaron un rendimiento significativamente mayor ($F = 7.632$, $p = 0.001$, $f = 0.41$) en la resolución de problemas matemáticos en comparación con los niños con estrategias pobres de organización.

En cuanto a la **Planificación** las puntuaciones de los niños oscilaron entre 1,5 y 9,00 siendo la media del grupo 6,06 (DS = 1,82), y respecto a la función de organización (**vista como Análisis**), los niños utilizaron con mayor frecuencia estrategias pobres de organización (Mo=67). Asimismo, en la capacidad de resolución de problemas matemáticos las puntuaciones se ubicaron entre diecisiete (17) y treinta y un (31) puntos ($X = 24,70$; DS = 2,73). A su vez los resultados indicaron una asociación de nivel significativo ($\rho: 0.292, p < 0,01$) entre la función de organización (vista como **Análisis**) y la resolución de problemas matemáticos.

En esta investigación se detalló la contribución que hacen los procesos metacognitivos de **Planeación y Análisis** en la resolución de problemas matemáticos y en el desempeño académico del estudiante. Sin embargo, no incluyó otros procesos como **la Exploración, el Monitoreo Local y Global** aun con pleno conocimiento de que, aunque el **Análisis y la Planificación** son importantes, no son los únicos procesos que pueden contribuir a un efecto positivo en la resolución de problemas matemáticos; por lo tanto, se hace necesario indagar y detallar en el presente estudio, la contribución que hacen los otros procesos para de esta forma valorar con mayor precisión los aportes de la **Planificación y Análisis** al ver todos los procesos en su conjunto.

Por su parte, el estudio de Rodríguez, Llobet y Zorrilla (2012), estableció comparaciones entre los sujetos que presentan mayor y menor desempeño en las matemáticas y en los que se despliegan de manera particular algunas conductas metacognitivas (entendidas como procesos) del interés de los autores. Por lo anterior, se propusieron profundizar en la relación

existente entre diferentes factores de relación conductual y de metacognición de niños de educación infantil en su tercer (3^{er}) curso, con diferentes niveles de rendimiento en las matemáticas. Este estudio fue realizado con sesenta y seis (66) estudiantes (29 niñas y 37 niños, edad media = 5 años y 10 meses) de la provincia de Castellón, España; los cuales se organizaron en dos grupos, uno de buen nivel en matemáticas y el otro de bajo rendimiento al ser evaluados por sus maestros a través de un cuestionario TEDI-MATH (Van Nieuwenhoven, Noël y Grégoire, 2005), para la valoración de competencias matemáticas adquiridas. Se utilizó métodos de carácter ecológico, recogiendo información de los niños en su contexto escolar. El instrumento utilizado para evaluar el funcionamiento cognitivo es el cuestionario BRIEF (Behavior Rating Inventory of Executive Function: Gioia, Isquith, Guy y Kenworthy (2000)), aplicado por los profesores el cual recogió, entre otras, las variables de metacognición, **Planificación**/organización y **Monitorización** (entendida como **Monitoreo**).

Los resultados mostraron la importancia del factor de autorregulación cognitiva en el desempeño de las tareas. Se demostró que los estudiantes con bajo nivel en matemáticas, tuvieron problemas en conductas metacognitivas ($t = 6.928$) comparado con otros índices. Dentro de éstas, la variable más crítica es la de **Planificación**/organización ($t = 6.861$), además del **Monitoreo** (entendida en este estudio como monitorización). El análisis estadístico mostró que los dos grupos presentaron diferencias estadísticas significativas en todas las variables analizadas, presentándose más los procesos de **Planificación**/organización y de **Monitoreo** en el grupo de mayor nivel (**Planificación**: $M = 11.71$, $SD = 2.77$;

Monitoreo: $M = 12.86$, $SD = 2.713$) que en el grupo de menor nivel en matemáticas (*Planificación*: $M = 18.29$, $SD = 4.656$; *Monitoreo*: $M = 18.84$, $SD = 4.306$).

En el estudio de Rodríguez, Llobet y Zorrilla (2012), se abordaron dos (2) procesos metacognitivos, *la Planificación y el Monitoreo* en general; sin distinguirlo del *Monitoreo Local y Global* y, sin incluir otros procesos metacognitivos como *el Análisis y la Exploración*, de los cuales, la presente investigación sí pretende dar resultados particulares. No obstante, estos dos procesos estudiados muestran una incidencia significativa entre el alto o bajo nivel de rendimiento en matemáticas. Por otra parte, también se presentan diferencias significativas en los instrumentos utilizados en estas investigaciones como pruebas y test estandarizados que valoran la competencia matemática adquirida con respecto al proyecto de investigación en curso, que indaga los procesos por medio de una entrevista semiestructurada.

Los estudios anteriormente mencionados presentan características comunes frente a procesos metacognitivos que contribuyen a la competencia académica en matemáticas estableciendo comparaciones en su rendimiento con otros niños del mismo grado. En este grupo de investigaciones los autores Jimena, Korzeniowski & Esposito (2014); Rodríguez, Llobet y Zorrilla (2012), coincidieron en la contribución que hace el proceso de *Planificación* en la resolución de problemas matemáticos en niños escolares. Sin embargo, si bien en el primer estudio se incluye *el Análisis* y en el segundo el *Monitoreo Local y Global*, dejan por fuera el proceso de *Exploración* y su contribución a la resolución de problemas a la competencia académica.

Soresi y Zimmerman (2004), en su estudio longitudinal investigaron las relaciones entre las estrategias de autorregulación (vistas como *Monitoreo Local y Global*) utilizadas por un grupo de estudiantes italianos durante los últimos años de la escuela secundaria y su rendimiento académico posterior al proseguir estudios superiores. El estudio se realizó en dos fases: la primera fase se inició en septiembre 1999 con el quinto (5°) y último año de la escuela secundaria (Año escolar 1999-2000). La segunda fase se llevó a cabo tres (3) años después de la primera reunión de datos, en octubre de 2002. En la primera fase participaron ochenta y un (81) estudiantes y, en la segunda fase participaron un total de cuarenta y nueve (49) estudiantes, lo que equivale al 60,5% de los participantes iniciales.

Los resultados de la primera fase con ochenta y un (81) participantes fueron los siguientes: en cuanto a la estrategia de organización (vista como *Planeación*) y transformación se encontró que esta fue predictiva en las tres áreas temáticas. Esta estrategia representó el 23% de la variación en el grado de matemáticas, el 73% de la varianza en la calificación de Italia, y el 83% de la varianza en temas técnicos. Esto sugiere que la capacidad de procesar y reorganizar la información contribuye sustancialmente al rendimiento escolar.

Por otra parte, la estrategia de auto-consecuencias demostró ser el mejor predictor de intenciones de los estudiantes para continuar su educación superior. Es decir, los estudiantes que implementaron creativamente un estímulo de recompensa o castigo para el éxito o el fracaso lograron continuar con su educación superior. Los participantes en este estudio representan el grupo de triunfadores; el promedio de calificaciones del grupo fue de 7.18,

con una $DS = 0.069$, mientras que la media fue de 7.16. Estos valores son superiores a un grado satisfactorio (que es 6,00), y más de la nota media dada a los estudiantes de secundaria italianos. Es importante aclarar que los estudiantes Italianos fueron auto-seleccionados, es decir que ellos participaron voluntariamente en el estudio. Estos estudiantes sabían que podían usar la información recientemente adquirida para tomar mejores decisiones. Esta participación autoselectiva de la muestra, permitió observar que la frecuencia media de la estrategia de auto regulación entre los estudiantes italianos más antiguos de le escuela secundaria fue mucho mayor ($M=1:93$) que la de los estudiantes estadounidenses de secundaria de décimo grado ($M=0:68$) informada por Zimmerman y Martínez (1986), utilizando en ambos casos el SRLIS (Self-Regulated Learning Interview Schedule) de los autores ante mencionados.

Estos resultados plantearon más preguntas que respuestas; debido a que se esperaba que a mayor utilización de estrategias de SRLIS (Self - Regulation Learning Interview Schedule; Zimmerman y Martínez-Pons (1986)), se obtuvieron más predictores significativos de resultados de rendimiento académico y capacidad de recuperación (resiliencia). Sin embargo, este estudio reveló, con la muestra de alto rendimiento de los estudiantes de secundaria y universitarios, que el uso de *la estrategia de organización (entiéndase **Planificación**)* - transformación y de la estrategia de auto-consecuencia, fue altamente predictivo del rendimiento académico y resiliencia, así como fue altamente predictivo de sus calificaciones de secundaria en matemáticas y estudios técnicos posteriores.

Los resultados en la segunda fase con cuarenta y nueve (49) participantes fueron los siguientes: el análisis de regresión múltiple se llevó a cabo con el fin de verificar la predicción potencial de las estrategias de autorregulación (*Monitoreo Local*) con los siguientes aspectos: a) las calificaciones que se obtienen en el grado de la escuela secundaria, b) el número de exámenes realizados en dos (2) años académicos en la universidad y, c) el promedio de dos (2) años de grado universitario. En cuanto a los resultados para la graduación en la escuela secundaria, sólo la estrategia de auto-consecuencias fue predictiva (representando el 88% de la varianza). Por el contrario, para el número de exámenes universitarios adoptados y el promedio de calificaciones, la estrategia de organización (visto como *Planeación*) y transformación fue un predictor significativo, representando hasta un 83% de la varianza.

Esta estrategia también pronosticó más del 80% de la varianza del éxito posterior de los estudiantes durante los dos (2) primeros años de carrera universitaria medido a través de los exámenes que pasaron el promedio de la clase de acuerdo a lo estipulado en el reglamento. Estas son claras evidencias longitudinales de la capacidad de recuperación por parte de los estudiantes.

Este estudio se asemeja a la investigación en curso sobre como los procesos de *Planificación* y *Monitoreo Local* tienen una incidencia positiva en el rendimiento escolar en matemáticas. Al mismo tiempo, y a diferencia del proyecto, éste estudio aborda como predictor importante la auto-consecuencia, lo que permite a los estudiantes incrementar las

posibilidades de éxito y resiliencia en su formación superior. Por otra parte, no incluye dentro de los procesos metacognitivos: el *Análisis*, la *Exploración*, ni el *Monitoreo Global*.

3.3.3 Procesos Cognitivos y Metacognitivos de Resolución de Problemas en el Desarrollo de Habilidades Matemáticas

Muchos autores en sus investigaciones han considerado implementar métodos y estrategias de resolución de problemas matemáticos con enfoque metacognitivo, adaptando algunos de los marcos generales (por ejemplo de Schoenfeld, Cohors, Mateos entre otros), en donde se evidencian procesos de orden cognitivo y metacognitivo en la resolución de problemas, para determinar, de esta manera, la incidencia de estos procesos en el desempeño de la competencia de resolución de problemas u otras habilidades aritméticas en diversos niveles de escolaridad o de educación superior. Estudios en donde se aplica a un grupo experimental una estrategia didáctica con enfoque metacognitivo, han llevado a sugerir que procesos cognitivos como la *Comprensión e Implementación* y de algunos metacognitivos, como el de *Planificación, Monitoreo Local y Monitoreo Global*, tengan una incidencia significativa en el rendimiento de los estudiantes. Otros estudios también muestran, aunque en menor cantidad, los efectos de los procesos de *Análisis y Exploración* en el desempeño o desarrollo de habilidades matemáticas en los estudiantes.

Troncoso (2013) y Teong (2003), revisan la relación de los procesos cognitivos y metacognitivos con las habilidades matemáticas de manera conjunta, sin discriminar la relación específica con cada uno de los procesos estudiados.

Por el contrario, otras investigaciones se han centrado en determinar la presencia e incidencia, de manera discriminada, de procesos cognitivos y metacognitivos de resolución de problemas en el desarrollo de las habilidades matemáticas, como es el caso de Mokos & Kafoussi. (2013); Karatas y Baki (2013); Buitrago y García (2012); Salmerón, Gutiérrez, Fernández y Salmerón (2010); Erbas & Okur (2010); Dermitzaky, Leondari & Goudas (2009); Veenman, Kok y Blöte (2005); Pugalee (2004); Pifarré y Sanuy (2001).

A continuación se detallan estas investigaciones, partiendo de aquellas que presentan sus resultados en conjunto y, posteriormente las que muestran en forma detallada la relación positiva entre las variables de estudio.

Dentro de las investigaciones con resultados conjuntos está la de Troncoso (2013), el cual realizó un estudio cuasi-experimental en donde establece las implicaciones que tiene la incorporación de estrategias metacognitivas en la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas relacionados con situaciones reales. El estudio se realizó con estudiantes de una escuela rural de sexto (6) grado, fundamentado en las estrategias metacognitivas establecidas por Mateos (2001) entre las que se resalta: a) identificar y definir los problemas (vista como el proceso de *Exploración*), b) *Planificar* y secuenciar las acciones necesarias para resolverlos (visto como la *Planificación*) y, c) supervisar, comprobar, revisar y evaluar la marcha de los planes (visto como el *Monitoreo Local*) y su efectividad. Estas estrategias se ponen a prueba en cuatro (4) momentos cuando se trabajan las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división).

Los resultados de este estudio se presentan de acuerdo a las operaciones aritméticas que a continuación se detallan:

- En la Suma, el 40% de los estudiantes en el pre-test presentan un porcentaje de éxito del 60%, el resto de los estudiantes mantuvo un porcentaje alto, entre el 80 y 100%. En el post-test, el 60% de los estudiantes lograron un porcentaje de éxito del 100%, el resto de los estudiantes lograron un 60% de éxito, una vez que aplicaron las estrategias metacognitivas antes señaladas.
- En la Resta, 60% de los estudiantes en el pre-test presentaban un resultado éxito entre 0% a 33%. Al aplicar los procesos metacognitivos antes mencionados el 80% de los estudiantes llegaron a un 100% del éxito en la resolución de los problemas, y en el 20% restante se logró solo el 67%.
- En la Multiplicación el 100% de los estudiantes demostraron un incremento significativo en el rendimiento académico al aplicar las estrategias metacognitivas para la resolución de problemas, lo que permitió que se elevara el porcentaje nivel de éxito (encontrado entre 0% y 50%) en el pre-test a un 75% en el post-test en el 60% de los estudiantes, y a un 100%(post-test) en el 40% de estudiantes restantes.
- En la División el porcentaje de éxito inicial ubicaba al 80% de los estudiantes entre 0 y 50% en el pre-test. En el post-test con la implementación de las estrategias metacognitivas el 80% de los estudiantes presentaron un nivel de éxito del 75%, y el 20% restante el 100% de éxito.

Estos resultados confirman que existe una correspondencia entre el grado de **Comprensión** de la pregunta y el éxito en la resolución de problemas que conlleva a un mejor desempeño en el área de matemáticas.

Esta investigación muestra en forma específica los resultados por cada proceso metacognitivo en la resolución de problemas cotidianos, pero no aborda todos los procesos cognitivos a excepción de la **Comprensión** a la que le da relevancia en el éxito en la resolución de problemas. En este sentido, una de las diferencias importante de este estudio con la presente investigación es que los resultados se presentan en forma detallada, tanto en los procesos cognitivos y metacognitivos que intervienen en la resolución de problemas matemáticos y, al mismo tiempo, se observa la contribución que estos procesos de resolución tienen en la competencia académica en matemáticas y no solo en las habilidades aritméticas en operaciones básicas. Por otra parte, la población que participó en este proyecto de investigación corresponde al sexto grado (6°) y se ubica en el área rural, a diferencia del presente estudio cuya población es urbana y corresponde a niños en tercer (3er) año de primaria.

Por su parte, Teong (2003), en su investigación examinó el grado en que el entrenamiento metacognitivo, promueve conductas metacognitivas de los estudiantes para resolver problemas de palabras en el entorno computarizado WordMath, para lo cual siguió un diseño de dos (2) fases: una *cuasi experimental* en donde se realizó un estudio cuantitativo que permitió examinar el efecto de entrenamiento metacognitivo en el desempeño de resolución de problemas matemáticos verbales en tres (3) momentos: antes, inmediatamente después y

en un periodo prolongado posterior al entrenamiento; y otra de un *estudio de caso*, que permitió complementar cómo las decisiones metacognitivas influyeron en el desempeño de solución de problemas, utilizando para esto, un protocolo de pensamiento en voz alta para obtener información cualitativa. En el estudio participaron estudiantes de cuatro cursos pertenecientes a dos escuelas de sexto de primaria (edades de 11 a 12 años), en un periodo de ocho (8) semanas, los cuales se asignaron a grupos control (C) y a grupos de tratamiento (T), los que a su vez se clasificaron en estudiantes de “alto logro” (HA) y en estudiantes de “bajo logro” (LA), en función de los resultados de exámenes de matemáticas de fin de año. La intervención utilizó la estrategia Metacognitiva denominada CRIME (Teong 2003), acrónimo de los estados de resolución de problemas de palabras: Lectura cuidadosa, Recordar posibles estrategias, **Implementar** posibles estrategias, **Monitorear** y *Evaluar (visto como Monitoreo Global)*. En este estudio los estudiantes resolvieron problemas de palabras (relacionados a números y fracciones) en el entorno WordMath con la estrategia Metacognitiva CRIME.

Se tomaron los resultados del pre-test, del post-test y del post-test subsiguiente para el análisis estadístico, pero como los grupos fueron diferentes en los puntajes del pre-test, el autor realizó un ajuste de la información para los puntajes del post-test y el post-test subsiguiente, tomando los puntajes del pre-test como la covarianza. El análisis de covarianza de doble forma con el pre-test como una covarianza, indicó que el entrenamiento metacognitivo tenía una influencia significativa en el desempeño de la solución de problemas de palabra ($F = 7.812$ $p < 0,05$), pero que no había interacción significativa entre el entrenamiento metacognitivo y el logro en matemáticas ($F = 1.96$, $p > 0,05$). En el estudio de

casos, el cual comprendió el *Análisis* de sucesos progresivos de cognición y metacognición en la resolución de problemas, se analizaron cuatro (4) parejas de estudiantes, dos del grupo de tratamiento y dos en el grupo control (parejas con altos y bajos logros); esto permitió revelar los comportamientos descritos por Teong (2000), medidos con relación al tiempo de dedicación en los procesos de: *lectura (cognitivo)*; *Análisis (metacognitivas)*; *Exploración (cognitiva o metacognitiva)*; *Planificación (metacognitivas)*; *Implementación (cognitiva o metacognitiva)*; y *Verificación (cognitiva o metacognitiva)*.

El análisis de porcentajes de tiempo utilizado en la resolución de problemas para cada pareja mostró que los estudiantes del grupo de tratamiento con “logros inferiores”, dedican más tiempo a las conductas metacognitivas en comparación a los de “logro inferior” del grupo de control. De esa manera, se mostró por ejemplo, que la pareja de estudiantes S3 y S4 (grupo tratamiento/logros inferiores) dedican el 73,3% y el 95,9% de su tiempo a actividades metacognitivas durante el post-test y post-test posterior respectivamente, en comparación con la pareja S7 y S8 (grupo de control/ logros inferiores) que dedicaron solo el 47,6% de su tiempo a actividades metacognitivas durante el post-test.

Esta investigación, a pesar de mostrar una relación significativa entre el empleo de una estrategia con enfoque metacognitivo en la resolución de problemas matemáticos y el desempeño en la resolución de dichos problemas, no permitió concluir que la estrategia empleada, tuviera una relación significativa con el logro en matemáticas, puesto que la media en el grupo de estudiantes con logros bajos en matemáticas del grupo tratamiento, no logró superar significativamente la media del grupo tratamiento con alto logro.

Por otra parte, esta investigación muestra diferencias con relación al estudio en curso en cuanto al tipo de diseño, dado que emplea un diseño mixto (cuasi experimental y estudio de caso), a diferencia del diseño de la presente investigación (no experimental); en cuanto a las edades de los sujetos, porque emplea niños de sexto grado entre once (11) y doce (12) años y en cuanto a la técnica, debido a que utiliza un protocolo de pensamiento en voz alta, a diferencia del nuestro que emplea una entrevista semiestructurada. Sin embargo, este estudio aborda dentro de su marco de trabajo procesos cognitivos y metacognitivos similares en su definición a la presente investigación, estos son: los procesos de: **Análisis** (*metacognitivo*); **Exploración** (*cognitiva o metacognitiva*); **Planificación** (*metacognitivas*); **Implementación** (*cognitiva o metacognitiva*); y **Verificación** (*cognitiva o metacognitiva*); en los que el autor determina los tiempos de dedicación de cada uno de esos procesos pero sin determinar detalladamente la forma de incidencia de cada uno de esos procesos en el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos. En este sentido, la variable tiempo que dedica un sujeto a las actividades cognitivas y metacognitivas y que según el estudio de Teong (2003), inciden respecto al logro o desempeño en matemáticas, no es considerado en la presente investigación.

Las investigaciones de Troncoso (2013) y Teong (2003), indagaron sobre la contribución de los procesos cognitivos y metacognitivos en la resolución de problemas. En los procesos cognitivos no se tiene en cuenta la **Comprensión** y la **Adquisición de Nueva información**, esto en el caso de Teong a diferencia de Troncoso que incluye la **Comprensión** sin proveer datos cuantitativos de su influencia. Por su parte, Teong (2003) consideró la **Implementación** y **Exploración** como un proceso tanto cognitivo como metacognitivo sin

dejar claro los límites entre esos procesos. A su vez, Troncoso (2013), investigó sobre los procesos metacognitivos de **Planificación**, **Exploración** y **Monitoreo Local**, lo mismo hizo Teong (2003), incluyendo también en este caso el proceso de **Análisis**.

Continuando con las investigaciones que discriminan en sus resultados las variables metacognitivas, Mokos & Kafoussi (2013), investigaron el surgimiento espontáneo de las funciones metacognitivas de control y seguimiento (vistas como **Monitoreo Local**), durante la solución de los diferentes tipos de problemas de matemáticos con niños y niñas de quinto (5°) grado de primaria de una escuela pública en Atenas (Grecia). La muestra fue de veinte (20) estudiantes (10 niños y 10 niñas en edad promedio de 10 años). Utilizaron el método de "**pensar en voz alta**". Los estudiantes resolvieron tres (3) tipos de problemas: abiertos, problemas auténticos y problemas complejos. Los resultados del estudio presentan una comparación por separado de acuerdo a cada tipo de problemas que los estudiantes resolvieron:

a) **Problema Abierto**: revela una fuerte acción de control metacognitivo (**Monitoreo Local**), en el nivel de meta en relación con el conocimiento de los procedimientos en el 83,9% de los estudiantes. Por otra parte, según el cuestionario MAI, (Inventario de *habilidades metacognitivas* desarrollado por Schraw y Dennison (1994), ajustado en las Estrategias de Gestión de Información), el proceso dominante que realizaron los estudiantes es evidente cuando son "**conscientes**" de lo que hacen, por tanto *centran su atención en la información importante*". Asimismo, para la estrategia de depuración (vista como **Comprensión** - aclaración), los estudiantes "*se detienen y vuelven a leer cuando se*

confunden". Los resultados para el tipo de problemas de composición abierta son los siguientes: el 22% utilizó estrategias de gestión de información (**Comprensión-reconocimiento de datos**); el 37,7% emplearon estrategias de depuración (**Comprensión-aclaración**); el 13,3% utilizó estrategias de **Planificación**; el 15,5% utilizó el Control (**Monitoreo Local**) en la **Comprensión**, y el 1.3% empleó la Evaluación (**Monitoreo Global**).

b) **Problemas auténticos**: se evidenció una fuerte acción del proceso de **Monitoreo Local** en el nivel de objetos relativos a la información de estrategias de gestión (vista como **Comprensión**) en el 48,1% de los estudiantes. Sin embargo, de acuerdo con el cuestionario MAI el proceso dominante fue el proceso de **Análisis** cuando los estudiantes intentaron "*romper, quebrar o partir el problema en pasos más pequeños (divide en partes)*". Por otra parte, el 18,1% monitoreó y evaluó las estrategias de gestión de información para lograr su nivel de objetivos. El 11,7% de los estudiantes emplearon estrategias de depuración (**Comprensión-aclaración**); el 7,8% utilizó la **Planeación** y, el 14,3% monitoreó la **Comprensión** en general.

c) **Problemas complejos**: se muestra una fuerte acción del **Monitoreo** metacognitivo en el nivel de meta relativo al conocimiento procedimental en el 87,3% de los estudiantes. Así que, los estudiantes revelaron el mismo comportamiento metacognitivo que se demostró en la solución del problema de composición abierta. El 26% de los estudiantes utilizó la gestión de estrategias de información (**Comprensión-reconocimiento de datos**); el 22, 2% empleó estrategias de depuración (**Comprensión-aclaración**). El 14.8% de estudiantes utilizaron la

Planeación; el 22,2 empleó el *Monitoreo Local* en la *Comprensión*; el 14,8% utilizaron la Evaluación (*Monitoreo Global*).

Este estudio mantiene similitudes con la presente investigación en la medida que se ocupa de los efectos de los procesos cognitivos y metacognitivos como la *Comprensión*, *Planeación*, *Monitoreo Local* y *Monitoreo Global* en la resolución de problemas matemáticos de distinto tipo. Incluye, además, procesos similares a la *Exploración* recurriendo a situaciones de conocimiento y procedimiento previos para resolver el problema y, el *Análisis* al dividir en partes más pequeñas el problema. Así mismo, aunque el rango de edad es relativamente superior a los niños que incluye ésta investigación, la población se logró ubicar en el nivel de básica primaria.

Karatas y Baki (2013) realizaron un estudio cuasi-cuasi experimental con cincuenta y tres (53) estudiantes (GE=27 y GC=26), de séptimo grado en una escuela de Turquía sobre los efectos de ambientes de aprendizaje para lograr habilidades en la resolución de problemas matemáticos. Este estudio se apoyó en las fases de resolución de problemas de Polya (1945), evaluándose el éxito en la resolución de problemas a lo largo del estudio.

A los estudiantes del GE se les concentró en un ambiente de aprendizaje estructurado y se les entregó nueve (9) problemas teniendo en cuenta las fases heurísticas de resolución de problemas enfocado en el mejoramiento de las habilidades de Resolución de Problemas de Polya (1945), implementando el Proyecto de Conexiones Matemáticas (CMP) modelo instruccional que comprendió los siguientes procesos : 1) *Presentar* (explicación,

entendimiento y levantar el interés en la situación problema): 2) *Explorar* (el estudiante investiga y trata de encontrar posibles soluciones en grupo o individualmente, el maestro observa a los estudiantes, da orientaciones e intenta formar la base para la discusión); y 3) *Resumen* (los estudiantes discuten sus soluciones y comparten las estrategias que utilizaron para buscar una solución. Finalmente, los estudiantes decidieron el camino más apropiado para resolver el problema con la ayuda de su profesor, apreciando todas las propuestas dadas por sus pares y viendo los caminos para mejorar sus propias estrategias). Al GC se le aplicó el currículo existente de matemáticas cuyo objetivo es el de desarrollar en resolución de problemas de los estudiantes, razonamiento, habilidades comunicacionales por medio del enfoque basado en actividades (MEB, 2006) de acuerdo con los ejemplos del libro del profesor.

Los resultados del estudio mostraron que no hubo diferencias significativas entre el GE y GC en los puntajes obtenidos de los problemas en la primera aplicación $t(51) = .836$, $p > .05$); en la segunda aplicación fueron encontradas diferencias entre los puntajes de los estudiantes ($t(51)=3.011$, $p > .05$). Es decir, en la primera aplicación el puntaje promedio del GE fue $X = 8.942$; y el GC fue $X = 8.482$. Sin embargo, el desempeño al finalizar el estudio en el GE fue de $X = 10.012$ y el promedio del GC fue de $X = 8.197$. Los resultados muestran que mientras que el GE tuvo un incremento en la resolución exitosa de problemas y el GC tuvo un decrecimiento, observándose diferencias estadísticas significativas ($F(1-50) = 47.597$, $p < .05$). Por tanto, se demostró que la resolución de problemas basado en el método de instrucción aumenta las posibilidades de éxito en la solución de problemas en los estudiantes.

Asimismo, los puntajes promedio de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas fueron calculados y evaluados con la ayuda de un t-test independiente a fin de compararlos con las Fases de Resolución de problemas de Polya (1945):

A. *Fase de Entendimiento del problema (o de **Comprensión**)*: en la primera aplicación no se observan diferencias significativas entre los puntajes de los estudiantes del GC y el GE para lograr el entendimiento del problema ($t(51) = .175, p > .05$). Tampoco se encontraron diferencias significativas entre los grupos en la segunda fase de aplicación ($t(51) = 1.925, p > .05$). Sin embargo, comparando los resultados del puntaje promedio de la primera aplicación del GE ($X = 2.756$) y del GC ($X = 2.775$) respecto al promedio de puntajes en la tercera aplicación en el GE fue ($X = 2.951$) y el GC ($X = 2.722$), los hallazgos muestran que el GE presenta progreso y diferencias significativas en el entendimiento del problema ($F(1 - 50) = 14.955, p < .05$) lo que indica que el éxito de los estudiantes relacionado con el entendimiento del problema ha sido incrementado positivamente a lo largo del estudio. En cuanto a la **Comprensión**: el puntaje promedio de los estudiantes del GE fue de $X = 2.756$ en la primera fase de aplicación y en la segunda fue de $X = 2.878$: mientras que el GC en la primera aplicación fue de $X = 2.775$ y en la segunda aplicación fue $X = 2.731$, notándose una pequeña pérdida del puntaje en la segunda aplicación.

B. *Fase de **Planeación***: no se observan diferencias significativas en los puntajes entre el GE y GC en la primera aplicación ($t(51) = 0.987, p > .05$). Sin embargo, en los promedios del puntaje de los estudiantes del GE y GC comienzan a aparecer diferencias en las otras

fases del estudio ($t(51) = 2.864, p < .05$). En ese sentido, el GE registró en la primera aplicación un puntaje de $X = 2.384$ y en la tercera aplicación de $X = 2.676$ observándose un incremento sustancial y, para el GC se observa un decrecimiento en el puntaje entre los resultados de la primera aplicación ($X = 2.224$) y la tercera aplicación ($X = 2.197$).

C. *Fase de Desarrollo del plan (entendido como un proceso de **Implementación**):* se presentan diferencias significativas en el desarrollo del plan ($F(1-50) = 42.699, p < .05$) de acuerdo con el promedio de puntajes de los estudiantes del GC en la primera aplicación ($X = 2.384$), y en la tercera aplicación ($X = 2.197$) observándose un decrecimiento. Por otra parte, el GE en su primera aplicación obtuvo un promedio de $X = 2.225$ y en la tercera aplicación se observó un incremento a $X = 2.676$. Estos resultados demostraron que en un ambiente de aprendizaje basado en la resolución exitosa de problemas tiene un efecto positivo relacionado con el desarrollo de un plan. En cuanto al llevar a cabo el plan, no se lograron diferencias significativas entre los grupos en la primera aplicación ($t(51) = 1.482, p > .05$), pero en la segunda aplicación se evidenciaron diferencias significativas en los puntajes entre los estudiantes del GC y GE ($t(51) = 3.010, p < .05$). Es decir, en la primera aplicación el GE presentó un puntaje promedio de $X = 2.224$ y el GC de $X = 1.948$; en la tercera aplicación el puntaje del GE presentó un incremento a $X = 2.461$ y el GC un decrecimiento a $X = 1.910$ respecto a los puntajes obtenidos en la primera aplicación. Por lo tanto, los estudiantes del GE a quienes se les enseñó a resolver problemas basados en un ambiente de aprendizaje presentaron diferencias significativas en la fase de “llevar a cabo” ($F(1-50) = 17.380, p < .05$), lo cual permite concluir que, los ambientes de aprendizaje tienen una influencia positiva en el

éxito de los estudiantes del GE al implementar el plan, en comparación con el grupo control.

D. *Fase Mirar Atrás (entendida como un Monitoreo Global)*: no se observan en la primera aplicación diferencias significativas entre el GE y GC ($t(50) = 1.120, p > .05$), sin embargo en la segunda aplicación las diferencias entre los grupos son claras ($t(51) = 3.464, p < .05$). En ese sentido, el puntaje promedio del GE en la primera aplicación fue $X = 1.717$ y en la tercera aplicación $X = 1.826$, y para el GC en la primera aplicación fue $X = 1.564$ y en la tercera aplicación fue $X = 1.342$. Estos datos permitieron observar diferencias significativas entre los grupos en la fase de “*mirar atrás*” ($F(1-50) = 24.233, p < .05$), lo que demostró que se incrementa el éxito en los estudiantes en la solución de problemas basado en un ambiente de aprendizaje.

Este estudio guarda similitudes en cuanto al análisis de procesos cognitivos y metacognitivos que aborda la presente investigación. Asimismo, este estudio presenta argumentos de cómo estos procesos son predictores del éxito de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos. Una diferencia importante de este estudio frente a la presente investigación es que el estudio de Karatas y Baki (2013), desarrolla su modelo instruccional básicamente en las fases de Polya (1945), mientras que la investigación actual además de considerar a Polya incluye los aportes de otros modelos como los de Schoenfeld (1983-1985); Lawaon y Rice (1987); Arts y Amour (1990); López (1992-2012).

Por su parte, Buitrago y García (2012), realizaron un estudio con veinte (20) estudiantes entre dieciséis (16) y veintiún (21) años de edad en una institución de educación media, para el cual asumieron como supuesto la existencia de una relación entre los procesos de regulación *metacognitiva* presente en la resolución de problemas matemáticos y el desempeño académico.

Buitrago y García (2012) analizaron el proceso de regulación a través de procesos metacognitivos como *la Planeación, control (Monitoreo Local) y evaluación (Monitoreo Global)* en la comprobación, revisión de las estrategias planeadas puestas en marcha para verificar su efectividad. Los resultados de esta investigación fueron abordados desde dos procesos, el conocimiento metacognitivo y la regulación *metacognitiva*. Solo se centra este análisis en la regulación metacognitiva por aportar elementos afines a la presente investigación, que se sustentan en tres procesos esenciales *Planeación, Monitoreo y Evaluación*. Para el proceso de *Planeación* se destacan los siguientes pasos: a) Identificación y definición del problema; b) Representaciones mentales del problema; y c) *Planeando* como actuar frente al problema.

Los resultados de esta investigación mostraron que el 80% de los estudiantes utilizaron el proceso de *Planeación* como una estrategia para resolver el problema, sin embargo no en esa misma proporción los resultados o solución del problema fueron correctos. Esto se debe a que los estudiantes presentaron dificultad en la *Comprensión* del problema, lo que influyó directamente en la *Planeación*. En cuanto a los resultados del *Monitoreo Local*, el 60% de los estudiantes del grupo de trabajo evidenciaron en sus respuestas procesos de control y

verificación que les permitieron identificar el error y desembocar en algunos estudiantes la solución correcta del problema y en otros a replantear nuevas ideas conducentes a su solución. Sin embargo, algunos estudiantes, por su conocimiento procedimental, lograron el éxito en la solución correcta en cinco (5) de los seis (6) problemas y no realizaron ningún intento por encontrar otros caminos para la resolución. En el proceso de *Monitoreo Global*, los estudiantes experimentaron mayormente la sensación errónea de éxito que una sensación acertada de éxito. En todos los estudiantes se observó dificultad para evaluar el proceso y no mostraron interés en revisar todos los pasos, menos aun cuando tenían la certeza de su éxito.

Esta investigación se desarrolló con un grupo de estudiantes cuyo nivel escolar y rango de edades es superior a la población del proyecto de investigación presente y solo aborda tres (3) procesos metacognitivos importantes como son: la *Planeación, el Monitoreo Local y Global* donde ponen en evidencia el impacto positivo que tienen estos procesos en los estudiantes que lograron la solución exitosa de los problemas matemáticos. Asimismo, se comprobó la complementariedad entre el *Monitoreo Local y Global* y la correspondencia entre los otros procesos metacognitivos y cognitivos como la *Comprensión* en la medida que los estudiantes implementan conscientemente las acciones de *Monitoreo* que les permiten identificar, verificar, aclarar y planificar correctamente la solución del problema. Aunque no incluye otros procesos cognitivos y metacognitivos como el *Análisis y la Exploración, la Implementación y la Adquisición de Nueva Información*, se resalta el impacto directo positivo entre desempeño académico en matemáticas y los procesos metacognitivos estudiados, en donde la *Planeación* se hace más relevante en estudiantes

con mayor dificultad en el área de matemáticas al requerir más tiempo para identificar el problema, mientras que las acciones de *Monitoreo* se desarrollan con mayor frecuencia en estudiantes con mejor desempeño.

Continuando con el estudio cuasi experimental de Martínez, Negrete y Sierra (2011), cuyo propósito fue el desarrollo de habilidades metacognitivas en dieciocho (18) niños y niñas entre los nueve (9) y once (11) años de edad de una escuela rural en el municipio de Montería (Colombia). En este caso se diseñó, implementó y evaluó una propuesta de mediación basada en la enseñanza de estrategias heurísticas en la solución de problemas matemáticos sustentada en la teoría de Polya (1945): comprender el problema (proceso de comprensión), idear un plan (entiéndase como *Planeación*), ejecutar ese plan (entiéndase como *Implementación*) y mirar hacia atrás (entiéndase como *Monitoreo Global*); y la estrategia directiva de cinco pasos de Shoenfeld (1978): *Análisis, Diseño, Exploración, Realización y Verificación* (entiéndase como *Monitoreo Local y Global*). La propuesta de mediación de este estudio comprende cuatro fases: descubrimiento dirigido, andamiaje, aprendizaje cooperativo y por último, autorregulación en un contexto cotidiano de clases en el área de las matemáticas.

En este estudio utilizaron una metodología no paramétrica del test de Wilcoxon (1945), y el test de U-Mann Whitney (1947). El estudio contrasta las hipótesis que los investigadores se plantearon, realizando unas medidas en el comportamiento de cada habilidad metacognitiva con sus respectivos heurísticos antes y después de la aplicación de la

estrategia. Las subvariables que se evaluaron con sus respectivos heurísticos se describen a continuación:

1) *Toma de Conciencia*, evaluó las siguientes estrategias heurísticas como el interés de los estudiantes en la realización del problema, la comprensión del problema, división del problema en partes para encontrar la solución y el saber (sumar, restar, multiplicar, etc.), siendo estas condiciones necesarias para resolver el problema. La comprobación estadística de la subvariable “Toma de conciencia” a través de la prueba U Mann Whitney, utilizando un nivel de significancia del 5% (Alfa) tuvo un p-valor de 0,039 siendo menor que el nivel de significancia, lo que indicó el rechazo de la hipótesis nula de que las proporciones de estudiantes que eligieron categorías bajas en el grupo control es menor que las proporciones de estudiantes que eligieron categorías bajas del grupo experimental al finalizar la intervención, por lo tanto, la propuesta de mediación tuvo un efecto positivo en la variable antes mencionada.

2) *Planificación de la Tarea*, evaluó las siguientes estrategias heurísticas: la realización de un plan (cómo piensa el estudiante) para resolver el problema, el estudiante se detiene a pensar cómo va a encontrar la respuesta, el estudiante tiene en cuenta las posibles dificultades que se presentan cuando resuelve el problema, si el estudiante identifica las ayudas disponibles para resolver un problema, el estudiante escoge la mejor entre diferentes formas de resolver un problema. Los resultados, en cuanto a la variable *Planificación* de la tarea luego de realizar la prueba de comprobación de la hipótesis, evidenció un p-valor de 0,047 claramente inferior al valor del alfa (5%), rechazando la hipótesis nula, descartando con ello,

que la proporción de estudiantes que escogieron las categorías bajas es menor en el grupo control que en el grupo experimental después de la implementación de la estrategia, quedando en claro la efectividad de la estrategia en la *Planificación* de la tarea.

3) *Control Ejecutivo de la Tarea*, evaluó las siguientes estrategias heurísticas: saber si al presentarse una dificultad para resolver el problema el estudiante intenta mejorar buscando las ayudas necesarias (profesor, compañeros, padres, libros, etc.), hace constantes correcciones mientras resuelve el problema, sabe para qué realiza ciertas operaciones cuando busca la solución de un problema, cambia de estrategia en caso de que no resulta lo que planeo. Los resultados de comprobación estadística de la hipótesis de la subvariable *Control Ejecutivo* de la tarea arrojó un p-valor de 0,027 siendo este resultado menor que el nivel de significancia (alfa), lo que mostró, que las proporciones de estudiantes que escogieron categorías bajas son mayores en el grupo no tratado frente al que si se trató; de esta forma quedó demostrado el efecto positivo de la aplicación de la estrategia de intervención.

4) *Evaluación de la Tarea*, midió y verificó las siguientes estrategias heurísticas: el estudiante explica si logra resolver el problema completamente, evalúa si los pasos para resolver un problema le sirvieron para encontrar la solución correcta, explica que acciones o pasos de un problema le han resultado difíciles de resolver, explica cómo podría mejorar la próxima vez su plan para resolver un problema, es consciente de cómo su grado de interés le ayuda o dificulta encontrar la solución de un problema. Los resultados de la prueba en esta última subvariable evidencia un p-valor de 0,019 siendo menor que el nivel de significancia antes mencionado. Por lo tanto, estos resultados rechazan la hipótesis nula de que las

proporciones de estudiantes que eligieron categorías bajas del grupo control son menor o igual que las proporciones de estudiantes que escogieron las categorías bajas del grupo experimental. Los resultados antes expuestos demuestran el efecto positivo que presenta la estrategia en la variable evaluación de la tarea.

Asimismo, el estudio antes mencionado realiza la comparación estadística de la hipótesis general referida al constructo “Habilidades Metacognitivas” que obtiene un resultado p-valor de 0,038 siendo menor que el nivel de significancia congruente con los resultados mostrados en las subvariables antes descritas. Estos resultados rechazan la hipótesis nula y confirman el hecho de que, los niños y niñas que son sujeto de intervención con el programa de resolución de problemas basado en estrategias heurísticas, evidencian diferencias significativas en el dominio de sus habilidades metacognitivas comparados con los niños y niñas que no fueron intervenidos.

Como se puede apreciar, el estudio de Martínez, Negrete y Sierra (2011), guarda similitudes importantes en cuanto a utilización de estrategias heurísticas basadas en los estudios de Polya (1945- 1957) y Scheonfeld (1983-1985), utilizadas también para determinar los procesos cognitivos y metacognitivos abordados en la presente investigación. Los resultados del estudio antes descrito presenta suficientes argumentos de cómo la utilización de estos procesos contribuye no solo al desarrollo cognitivo y metacognitivo de los estudiantes, sino también, a lograr el éxito en la resolución de problemas matemáticos. Por otra parte, una diferencia significativa de este estudio, frente a la presente investigación, es que describe los resultados antes y después de una propuesta de intervención lo que le

permite precisar cómo estaban los estudiantes antes y cuanto lograron avanzar en el desarrollo de las habilidades, mientras que en la investigación actual se busca evidenciar la contribución de los procesos cognitivos y metacognitivos de resolución de problemas a la competencia académica en matemáticas sin tener en cuenta si los estudiantes han sido intervenidos ni sus resultados iniciales frente a los resultados que administra esta investigación, así como busca determinar el efecto de esa contribución de los procesos de resolución de problemas en el desarrollo de la competencia académica en matemáticas en general.

Por su parte, en el estudio explicativo de Salmerón, Gutiérrez y Fernández (2010), realizaron un análisis de las relaciones entre el aprendizaje autorregulado (visto como *Monitoreo Local*), las creencias de la autoeficacia y el desempeño en tareas de resolución de problemas aritméticos. El estudio se realizó con doscientos ochenta y seis (286) niños y niñas de seis (6) años de edad, que cursaban el primer grado de educación primaria en centros educativos de Cádiz y Granada (España).

Este estudio evaluó las estrategias de aprendizajes contextualizadas de acuerdo a la escala ESEAC, (Bernad, 2000), la cual valora el nivel de pensamiento estratégico en tres niveles, 1 = bajo, 2 = medio y 3 = alto. Las variables que conforman la escala son: a) *Comprensión y Planificación* de la tarea; b) representación de lenguajes icónicos; c) inferencias; d) hipótesis de actuación (*Planeación* de acción y ejecución); e) lagunas típicas; f) Autorregulación de la ejecución (entendido como *Monitoreo Local*); h) *Metacognición*; i) Transfer (generalizar, transferir lo aprendido). Los resultados del factor I “aprendizaje

autorregulado” explica el 53,29% de la varianza y el factor II “creencias de autoeficacia” un 25,14%, es decir, al juntarlos se explica el 88,24% de la varianza total. Este estudio presentó los siguientes resultados:

En cuanto a la relación de dependencia entre el aprendizaje autorregulado, creencias de autoeficacia y desempeño, el análisis de correlación a través de Tau-b de Kendall muestra una relación dependiente significativa entre el desempeño y el aprendizaje autorregulado (($r = .686$, $p < 0.01$). Sin embargo, no se observa una relación significativa entre el aprendizaje autorregulado y las creencias de autoeficacia ($r = 0.117$, $p < 0.05$). Tampoco se observa una relación significativa entre las creencias de autoeficacia y el desempeño ($r = 0,111$, $p < 0.05$).

En cuanto a los elementos diferenciadores de esta investigación y del presente estudio se encontró que ésta aborda otra variable como es la *creencia de autoeficacia*. Se utilizó una muestra con niños en edades relativamente menores a la población del proyecto de investigación actual y que se ubica en un contexto europeo, dejando de lado, además, procesos importantes como el *Monitoreo Global*, la *Exploración*, el *Análisis*, la *Implementación* y la *Adquisición de Nueva Información*.

Asimismo, Erbas & Okur (2010), en su estudio, se plantearon como propósito, investigar las estrategias para resolver problemas, los episodios en la resolución de problemas y la metacognición en cinco (5) estudiantes de primer año de una escuela secundaria de Turquía y explorar la interacción de estos procesos en la eficiencia de la resolución de problemas

matemáticos. Se empleó un diseño de estudio de caso para obtener una comprensión en profundidad de las estrategias de los estudiantes para resolver problemas, episodios de resolución de problemas, metacogniciones y significados para los participantes, los cuales trabajaron en diez problemas seleccionados. Los datos fueron recogidos a través de entrevistas clínicas y un cuestionario de auto-monitoreo.

Para cada problema, los episodios cognitivos y metacognitivos de resolución de problemas de los participantes fueron codificados según el marco cognitivo-metacognitivo desarrollado por Artzt y Armour-Thomas (1992). Las razones de los fracasos en la resolución de problemas en cada participante se analizaron para cada episodio. Por otro lado, el sistema de codificación desarrollado por Pappas et al. (2003), se utilizó para observar los principales componentes de la metacognición y examinar así los comportamientos y las verbalizaciones de los niños en cada problema. Los episodios cognitivos y metacognitivos observados en los participantes, acorde con el marco seguido son: Leer, *Comprender*, *Analizar*, *Planear*, *Explorar*, *Implementar* y *Verificar*.

Los resultados mostraron que para el total de cinco (5) estudiantes, resolviendo cada uno diez (10) problemas, los procesos encontrados con su frecuencia referida al número de problemas resueltos fueron: lectura del problema (52/50), *Comprensión* (51/50), *Análisis* (51/47), *Planificación* (49/46), *Exploración* (cognitivo) (12/10), *Exploración* (metacognitivo)(9/8), *Implementación* (cognitivo) (57/48), *Implementación* (metacognitivo) (7/7), *Verificación* (cognitivo) (1/1), *Verificación* (metacognitivo) (6/6). Los resultados, en cuanto a las razones principales para encontrar una respuesta correcta en

los problemas, muestran que el episodio de “lectura” fue la principal razón de fracaso en solo un caso, la “**Comprensión**” fue la razón en cuatro (4) casos; sin embargo, el episodio de “**Análisis**” en siete (7) casos condujo a episodios de “**Planeación**” o “**Implementación** (cognitiva) inapropiados. Así mismo, mientras que los participantes fallaron en la “**Exploración** (cognitiva)” en tres (3) casos, los errores en la **Implementación** (cognitiva) condujeron a resultados incorrectos o parcialmente correctos en tres (3) casos. También se encontró que los participantes encontraron la respuesta correcta en sus primeros intentos en veinticinco (25) casos (de un total de 50 casos), en donde en todos estos casos se presentaron de manera continua los episodios de lectura, **Comprensión**, **Análisis** y de aplicación (entendida como la **Implementación**) (como conductas cognitivas).

A diferencia de la investigación en curso, Erbas & Okur (2010), realizaron un estudio de caso en el que observan las frecuencias de utilización de episodios cognitivos y metacognitivos como la **Comprensión**, la **Exploración**, la **Implementación** y la verificación (entendida como un **Monitoreo** general), pero analizando las razones por las cuales algunos sujetos no presentan buen desempeño en la resolución de problemas. En este sentido, este estudio es de gran relevancia, porque tiene en cuenta casi todos los procesos que se abordan en el estudio actual, dejando solo a un lado, el proceso de adquisición de nueva información. Sin embargo, por su naturaleza cualitativa, no establece relaciones discriminadas de la incidencia de los episodios de resolución de problemas en el desempeño de los estudiantes al resolver los problemas matemáticos. Por otra parte, como técnica para la recolección de datos (relacionada a los procesos), de manera similar al estudio en curso, se utilizó la entrevista (en

este caso la entrevista clínica), sin embargo, fue complementada con un cuestionario de auto monitoreo.

En el caso de Dermitzaky, Leondari y Goudas (2009), se propusieron investigar la relación entre el comportamiento estratégico de los alumnos durante la resolución de problemas, su desempeño en tareas y el auto-concepto de dominio específico; para lo cual se llevó a cabo un diseño cuantitativo correlacional con una muestra de ciento sesenta y siete (167) estudiantes de primer grado (82 alumnos ($M = 6$ años 10 meses, $SD = 0,28$ años) y segundo grado (85 alumnos ($M = 7$ años 9 meses, $SD = 0,27$ años)) de escuelas públicas en Grecia, examinados individualmente en tareas de armado de cubos y en el auto-concepto académico en matemáticas. El estudio también exploró diversos procesos metacognitivos y cognitivos en los estudiantes y cuáles eran las relaciones de estas categorías en el rendimiento y el auto-concepto. El comportamiento estratégico de los alumnos durante la resolución de problemas fue examinado por medio de la observación directa haciendo uso de videos. Por lo tanto, los investigadores utilizaron los instrumentos Self-description Questionnaire-IA (SDQ-IA, Marsh, Craven, y Debus, 1991) para determinar el autoconcepto de dominio específico en matemáticas; doce (12) tareas de ensamble de cubos y el instrumento denominado “Strategic Behaviour Observation Scale (SBOS)”, con el fin de evaluar doce (12) comportamientos estratégicos diferentes durante el compromiso del niño con la tarea en cuestión. Estos doce (12) comportamientos se encuentran relacionados con los procesos cognitivos de *Comprensión*, *Análisis* e *Implementación*, así mismo con los procesos metacognitivos de: *Planificación* y *Monitoreo Local*. Finalmente, las conductas en cada

proceso fueron evaluadas por los observadores bajo ciertos criterios, no solo por su frecuencia de presentación, sino también por su calidad.

La estadística descriptiva de este estudio mostró una mayor presencia de los procesos de **Implementación** ($M = 3.10$, $SD = 0.44$) y en los procesos de **Análisis** ($M = 2.96$, $SD = 0.56$); y en menor grado procesos de **Comprensión** ($M = 2.72$, $SD = 0.53$). En cuanto a los procesos metacognitivos, los de mayor empleo fueron los de **Planeación** ($M = 3.23$, $SD = 0.48$) y **Monitoreo Local** ($M = 3.22$, $SD = 0.44$). El otro elemento de **Monitoreo Local**, es decir, de estrategia remedial ($M = 2.0$, $SD = 0.74$) fue de menor presencia en este estudio. Por otra parte, las correlaciones de Pearson mostraron que existen mayores relaciones de los procesos cognitivos de **Análisis** ($r = 0.65$, $p < 0.05$) y de **Comprensión** ($r = 0.62$, $p < 0.05$) con el desempeño de la tarea problema. También muestran que el “aprendizaje de los errores” ($r = 0.59$, $p < 0.05$) y la **Planificación** ($r = 0.56$, $p < 0.05$) se relacionan más significativamente con el desempeño de la tarea problema que en los demás procesos metacognitivos. El **Monitoreo Local** ($r = 0.36$, $p < 0.05$) muestra la menor relación con el desempeño en la tarea problema. En conclusión, los coeficientes de correlación de Pearson mostraron que los diferentes procesos y sus factores subyacentes fueron diferencialmente relacionados con el rendimiento en la tarea y el autoconcepto en matemáticas.

En este estudio se evidenció la contribución de todos los procesos cognitivos y metacognitivos que son afines a la investigación en curso, exceptuando los procesos de **Adquisición de Nueva Información** y de **Exploración** que fueron excluidos dentro de los procesos antes mencionados. Otra diferencia significativa con el presente estudio es el

método utilizado para evidenciar el comportamiento de los estudiantes durante la resolución de problemas, en donde el investigador se vale de la observación directa en lugar de utilizar un instrumento de auto informe y, como parte de los mecanismos de confiabilidad de los datos se grabaron en videos los comportamientos que fueron posteriormente analizados por dos observadores independientes.

En el caso del estudio de Veenman, Kok & Blöte (2005), de corte cuantitativo correlacional, se propusieron, además de establecer la medida en que se asocian las habilidades metacognitivas y la inteligencia, investigar el impacto de ayudas sobre la ejecución de las habilidades metacognitivas en el desempeño del aprendizaje (consistente en dos aspectos: el número de problemas resueltos correctamente y el puntaje promedio de curso en matemáticas al finalizar el año escolar). En este caso, la población objeto del estudio estuvo compuesta por cuarenta y un (41) estudiante de secundaria con edades de doce (12) y trece (13) años, habitantes de la ciudad de Delft en los Países Bajos, a quienes inicialmente se les administró el test de inteligencia de papel y lápiz (GIT). Posteriormente, a través de sesiones individuales, resolvieron seis (6) problemas (de Henfi (1990), adaptados por Veenman, et al., 2000), bajo el protocolo de pensamiento en voz alta, de los cuales los primeros tres (3) se resolvieron sin ayuda metacognitiva y los siguientes con la ayuda respectiva, las cuales fueron explicadas y presentadas en papel mientras los estudiantes resolvían sus tres problemas. Algunas de estas ayudas son por ejemplo: trate de decir en sus propias palabras lo que necesita saber (*Exploración*), ¿Qué números necesita con el fin de resolver el problema? (*Comprensión*), ¿Qué medidas de acción tiene que tomar con el fin de resolver este problema? (*Análisis y Planeación*). La evaluación de las categorías

metacognitivas se hizo a través de Observación Sistemática durante los procesos de resolución de problemas (Veenman, et al., 2000), en donde para cada problema el experimentador simultáneamente anotó el tema de comportamiento metacognitivo (SO) en la presencia de quince (15) actividades a nivel de **Comprensión, Análisis, Planeación, Implementación, Monitoreo Local y Monitoreo Global**.

En el análisis estadístico descriptivo de los resultados de este estudio se observó que cinco (5) de las seis (6) actividades *metacognitivas* fueron mejoradas después de utilizar las ayudas metacognitivas, así: en actividades de **Comprensión**, en cuanto a la selección de la información relevante (Sin ayuda: $M = 1.11$, $SD = 0.56$; con ayuda: $M = 1.67$, $SD = 1.43$, significancia de la diferencia: $p < 0.001$); en cuanto al parafraseo de lo que se pidió (Sin ayuda: $M = 0.05$, $SD = 0.16$; con ayuda: $M = 0.27$, $SD = 0.37$, significancia de la diferencia: $p < 0.001$); en la actividad de **Planeación**, en el diseño de un plan de acción antes de realizar el cálculo (Sin ayuda: $M = 0.95$, $SD = 0.35$; con ayuda: $M = 1.28$, $SD = 0.42$, significancia de la diferencia: $p < 0.001$); en la actividad de **Monitoreo Local**, en el seguimiento del proceso en curso (Sin ayuda: $M = 0.92$, $SD = 0.66$; con ayuda: $M = 1.25$, $SD = 0.66$, significancia de la diferencia: $p < 0.001$) y en la actividad **Monitoreo Global**, en el control de la respuesta (Sin ayuda: $M = 0.53$, $SD = 0.65$; con ayuda: $M = 0.73$, $SD = 0.68$, significancia de la diferencia: $p < 0.04$).

Las correlaciones encontradas en este estudio entre el desempeño sin ayuda metacognitiva ($r = 0,48$; $p < 0.01$) y desempeño con ayuda metacognitiva ($r = 0.61$; $p < 0.01$) mostraron cómo los procesos metacognitivos descritos contribuyen al desempeño en la

solución de problemas, pero también en el desempeño general en matemáticas en pruebas de final de curso (GPA) ($r = 0.40$; $p < 0.01$). Los resultados de semicorrelaciones parciales (Nunnally, 1967) indicaron contribución única de la metacognición a los resultados del aprendizaje, tanto en el desempeño sin ayuda metacognitiva ($r = 0.47$; $p < 0.01$), como en el desempeño con ayuda metacognitiva ($r = 0.48$; $p < 0.01$) y en la calificación promedio en matemáticas (GPA) ($r = 0.30$; $p < 0.05$), independiente de la capacidad intelectual, es decir, que la metacognición tiene su propia virtud en la predicción del aprendizaje, independientemente de la capacidad intelectual de los jóvenes.

Esta investigación proporcionó resultados de correlación positiva de procesos cognitivos y metacognitivos como la *Comprensión*, *Planeación*, *Monitoreo Local* y *Monitoreo Global*, muy importantes para este estudio. Sin embargo, se hace necesario indagar en qué medida correlacionan otros procesos como el de *Implementación*, *Exploración* y *Análisis* en el desempeño de los estudiantes en matemáticas. Otro aspecto a destacar en este estudio, es la utilización del protocolo de pensamiento de voz alta para indagar los procesos, mientras que este estudio, a través de la entrevista flexible, aborda no solo el protocolo, sino que incluye la inferencia del entrevistador a partir de las observaciones durante el proceso de resolución de problemas y durante el momento en que el niño responde a la entrevista.

Por otra parte, en un estudio exploratorio, Pugalee (2004), investigó el impacto de la escritura durante la solución de problemas matemáticos, en el cual se realizó un análisis a veinte (20) estudiantes de noveno grado, (11 mujeres, 9 varones) acerca de las descripciones escritas y verbales en los procesos que llevaban a cabo mientras resolvían problemas de

álgebra. Los estudiantes se dividieron en dos grupos similares en condiciones de habilidades lingüísticas y de matemáticas. El estudio se basó en el marco de Garofalo y Lester (1985), quienes identificaron un marco metacognitivo de cuatro categorías de actividades o comportamientos involucrados en la realización de una tarea matemática: Orientación (que comprende procesos de *Comprensión*, *Exploración* y *Análisis*), Organización (entendida como las actividades de *Planeación*), la Ejecución (vista como procesos de *Implementación y de Monitoreo Local*) y Verificación (que comprende de manera conjunta procesos de *Monitoreo Local y Global*). Se siguieron protocolos verbales y escritos como herramientas para comparar los procesos de resolución de los problemas matemáticos planteados.

El estudio comprendió el uso de dos métodos; en el primero, los estudiantes en un diario escribieron los detalles de sus procesos, justificando y razonando en forma verbal y escrita los problemas, cada uno con los siguientes niveles de dificultad: alta, mediana y baja. El segundo método, comprendió la resolución de los problemas pensando en voz alta, para lo cual se realizaron grabaciones en video de todos los estudiantes. Como resultado los estudiantes que escribieron sobre su proceso en la resolución de problemas produjeron treinta y dos (32) respuestas correctas de un total de sesenta (60), mientras que el pensar en voz alta, produjo solo veinte (20) soluciones correctas en los estudiantes.

Los resultados de este estudio, mostraron también que el número total de conductas de orientación fue significativamente mayor para los estudiantes que proporcionan descripciones escritas ($z = 4,470$, $p < 0,05$). En esta parte, los comportamientos de lectura y re-lectura fueron más evidentes en los estudiantes que describieron el procedimiento de la

resolución de problemas a través de la escritura (frecuencia = 25), lo que indicó que el problema se volvió a leer más de dos (2) veces en el grupo que escribe los procesos que en el grupo de "pensamiento en voz alta".

En la *Fase de Organización*, no hubo diferencia significativa en el número total de respuestas entre los dos métodos de presentación de informes ($z = 0,579$, $p > 0,28$). En esta parte, para la identificación de objetivos y sub objetivos, el grupo de protocolo de escritura tuvo el doble de frecuencia (frecuencia = 22) que el grupo de pensamiento en voz alta (frecuencia = 11); para la categoría de construcción de planes globales presentaron una mayor frecuencia de los enunciados para el grupo de pensamiento en voz alta (frecuencia = 60) que para el de redacción (frecuencia = 35). Para la fase de ejecución que, incluyó conductas metacognitivas, como la realización de las metas locales, realización de cálculos, monitoreo de las metas y la reorientación de los planes, hubo una diferencia significativa en la proporción de comportamientos de ejecución con aproximadamente 35% más por las descripciones escritas ($z = 3,680$, $p < 0,05$). Por otra parte, Pugalee (2004), destacó que los estudiantes que escribieron sus descripciones de los procesos (frecuencia = 31), mientras resolvían los problemas, produjeron más del doble de procesos de vigilancia (entendida como un *Monitoreo Local*), que los estudiantes que participaron bajo el protocolo de pensamiento en voz alta (frecuencia = 14). Asimismo, para la fase de verificación (donde se aprecia el proceso de *Monitoreo Global*) que incluyó evaluación de las decisiones y los resultados, presentaron el menor número de celdas de datos entre las cuatro fases.

Este estudio presentó resultados respecto a los procesos metacognitivos que aborda el presente proyecto de investigación y provee información importante, como lo son las frecuencias en el uso de esos procesos metacognitivos a través del método de descripción de los procesos en forma escrita o de pensamiento en voz alta. Asimismo, aborda consecuentemente los procesos cognitivos de *Comprensión e Implementación* dejando de lado el proceso de *Adquisición de Nueva Información*.

Asimismo, en un estudio de Ge & Land (2003), realizado con estudiantes de pregrado, examinaron los efectos de las preguntas generadoras y las interacciones en el andamiaje con los compañeros, en los procesos de resolución de problemas, la representación de problemas mal estructurados, en el desarrollo de soluciones, en la justificación de lo que hacen o implementan, en el monitoreo y la evaluación. El diseño de la investigación se enmarcó en los criterios metodológicos del paradigma cuantitativo y cualitativo en un diseño cuasi-experimental en donde participaron ciento diecisiete (117) estudiantes de pregrado seleccionados al azar para el curso introductorio de información en ciencias y tecnología. De esta muestra, diecinueve (19) estudiantes participaron en los estudios de casos comparativos. El curso contenía dos sesiones de lectura y una sesión de laboratorio por semana. Cada tres clases las sesiones eran enseñadas por profesores diferentes. Las tres sesiones de clases compartían un currículo común y un texto central con aproximadamente cincuenta (50) estudiante en casa sesión. Para el diagnóstico, quince (15) estudiantes participaron en el condición IQ (preguntas individual) y dieciséis (16) participaron en el condición IC (control Individual) que fueron seleccionados al azar de la clase A; trece (13) grupos compuestos por cuarenta y ocho (48) participantes en la clase B fueron asignados a la condición PQ (pregunta

por pares) mientras que once (11) grupos, de un total de treinta y ocho (38) estudiantes de la clase C, fueron asignados para la condición PC (por pares de control). Estos grupos fueron preexistentes y previamente formados por los profesores del curso para el proyecto de clase.

Los resultados de este estudio están resumidos en la estadística descriptiva para los cuatro (4) procesos en la solución de problemas (variable dependiente) y dos factores (a) individual versus colaborativo y (b) pregunta generadora versus pregunta no generadora.

En cuanto a los efectos de la pregunta generadora los resultados en dos vías de *Manova* revelaron un efecto significativo principal para la pregunta generadora, $F(4,48) = 17,371$, $p < .001$, $\eta^2 = .591$, lo cual apoya la hipótesis de que los estudiantes que recibieron preguntas generadoras tendrían un desempeño significativamente mejor que aquellos que no recibieron las preguntas generadoras. Además, un efecto univariado de la prueba inter-sujetos reveló un efecto significativo de la pregunta generadora en todos los cuatro procesos de resolución de problemas - en la representación $F(1, 51) = 51.051$, $p < .001$, $MSE = 2.227$, $\eta^2 = 0,500$; generar soluciones, $F(1, 51) = 21.429$, $p < .001$, $MSE = 0,960$, $\eta^2 = .296$; en la justificación, $F(1, 51) = 32.929$, $p < .001$, $MSE = 1.424$, $\eta^2 = .392$; y el **Monitoreo** y la evaluación, $F(1, 51) = 21.336$, $p < .001$, $MSE = 3,658$, $\eta^2 = .295$.

Asimismo, Ge & Land (2003), contemplaron diversos estudios de casos, de los cuales ocho (8) fueron seleccionados por la profundidad cualitativa, con base en las nuevas perspectivas sobre el rendimiento en la resolución de problemas en participantes con diferentes condiciones para complementar los hallazgos cualitativos. En general, los casos

en la condición de pregunta generadora (IQ y PQ) mostraron altos puntajes brutos sobre aquellos casos en condición de preguntas no generadoras (IC y PC) en los cuatro (4) procesos de resolución de problemas. 1) Representación del problema, 2) Desarrollo de la solución, 3) Haciendo la justificación, 4) *Monitoreando* y evaluando). Los casos con la condición de colaboración de pares sin la pregunta generadora (PC) no mostraron avances sobre la condición individual (IQ e IC) ni en ninguno de los procesos de solución de problemas. La condición PQ mostró un mejor desempeño en la representación de problemas y la generación de soluciones como se detalla a continuación:

1) *Proceso de Representación del problema* en un puntaje total de cero (0) a diez (10) puntos, para los casos uno (1) y dos (2) en la condición de la pregunta individual tuvo un puntaje de tres (3) en ambos casos; para la condición del Control individual en el caso tres (3) y cuatro (4) lograron un puntaje de uno (1) y dos (2) respectivamente; para la condición de pregunta por pares en los casos cinco (5) y seis (6) lograron un puntaje de ocho (8) para ambos; y para la condición control de pares en los casos siete (7) y ocho (8) para este primer proceso los resultados logrados fueron dos (2) y uno (1) respectivamente.

2) *Proceso de Desarrollo de la Solución del problema* en un puntaje total de cero (0) a ocho (8), para la condición de pregunta individual en los casos uno (1) y dos (2) los resultados estuvieron en siete (7) y seis (6) respectivamente, para la condición Control individual en los casos tres (3) y cuatro (4) los puntajes estuvieron en seis (6) y cinco (5) respectivamente; para la condición Pregunta por pares en los casos cinco (5) y seis (6) el puntaje fue de 8 en

los dos casos; para la condición Control por pares para los casos 7 y 8 los resultados fueron 6 en ambos casos.

3) *Proceso Haciendo la Justificación* en un puntaje entre cero (0) y siete (7) puntos, para la condición de pregunta individual en los casos uno (1) y dos (2) los resultados estuvieron en seis (6) en ambos casos; para la condición *Control Individual* en los casos tres (3) y cuatro (4) los puntajes estuvieron en cuatro (4) y cinco (5) respectivamente; para la condición Pregunta por pares en los casos cinco (5) y seis (6) el puntaje fue de seis (6) en los dos casos; y para la condición Control por pares para los casos siete (7) y ocho (8) los resultados fueron uno (1) y cuatro (4) respectivamente.

4) *Proceso Monitoreando y Evaluando* en un puntaje entre cero (0) y siete (7) puntos, para la condición de pregunta individual en los casos uno (1) y dos (2) los resultados obtenidos fueron de cuatro (4) y siete (7) respectivamente; para la condición Control individual en los casos tres (3) y cuatro (4) los puntajes estuvieron en dos (2) y tres (3) respectivamente; para la condición Pregunta por pares, en los casos cinco (5) y seis (6) el puntaje fue de tres (3) y siete (7) respectivamente; y para la condición Control por pares para los casos siete (7) y ocho (8) los resultados fueron uno (1) y tres (3) respectivamente.

En concordancia con los resultados de Ge & Land (2003), se concluye que los hallazgos cualitativos, indicaron algunos efectos positivos en la interacción con los compañeros facilitando el pensamiento cognitivo y las habilidades metacognitivas. Asimismo, el estudio sugiere que los procesos de interacción con los compañeros en sí

mismos deben ser guiados y monitoreados con diversas estrategias, incluyendo las preguntas generadoras con el fin de maximizar sus beneficios. En cuanto a los resultados con enfoque cuantitativos, revelaron que los efectos de las preguntas generadoras tuvieron un efecto de significancia positiva en el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas, pero no se mostró efectos significativos en la interacción con los compañeros para resolver dichos problemas.

Este estudio presenta una aproximación con la investigación actual en cuanto aborda, dentro de la categorías de procesos para la solución de problemas, aspectos como desarrollo para la solución que puede ser visto como el proceso de *Implementación*; asimismo, los procesos de *Monitoreo* y evaluación que se asemejan a los procesos metacognitivo de *Monitoreo Local y Global* que son traídos a la luz y analizados por medio de las preguntas que se desarrollan en la entrevista flexible que, para el caso del estudio de Ge & Land (2003), podrían ser semejantes a las preguntas generadoras que este estudio utiliza como estrategia para la solución de problemas. Por otra parte, a diferencia de la investigación actual este estudio de Ge & Land (2003) tiene en cuenta otros factores como estrategias de andamiaje para la solución de problemas como es la interacción cooperativa que no es objeto de indagación en el presente estudio.

Finalmente en este grupo de investigaciones se incluye el estudio de Pifarré y Sanuy (2001), en el cual se propusieron mostrar y evaluar una propuesta de enseñanza-aprendizaje de estrategias cognitivas y metacognitivas de resolución de problemas matemáticos. Por tal motivo, se implementó un estudio cuantitativo tomando una muestra de sesenta (60)

estudiantes del tercer curso de la ESO de una institución de secundaria de la ciudad de Lleida en España. Este estudio fue realizado en tres fases: evaluación inicial, de intervención (usando 30 horas de clases) y evaluación final. A los estudiantes se les aplicaron siete (7) problemas de matemáticas en la etapa inicial y final (5 individual y 2 en parejas), clasificadas en tres: homogéneas altas, homogéneas bajas y heterogéneas. Para la calificación, cada problema fue puntuado de cero (0) a uno (1) y corregidos además por dos jueces.

Los resultados mostraron, al realizarse una comparación de medias pre-test – post-test, un incremento significativo respecto al nivel de aprendizaje inicial, entendido en los resultados de resolución individual de problemas ($t(1,59) = 8,93; p = .000$) y de resolución en parejas ($t(1,59) = 5,65; p = .000$). Para analizar la participación de los procesos cognitivos y metacognitivos que subyacen en los procesos de resolución de problemas, los jueces analizaron a seis (6) parejas (dos parejas por cada tipo) a partir de las grabaciones en video y categorizadas en: *Análisis* (vistas como acciones de leer, releer, seleccionar datos, representar datos del enunciado), *Planificación* (selección de estrategia, explicitación de posible procedimiento, otras), *Ejecución* (acciones o procedimientos matemáticos para resolver el problema como realizar cálculos) y *Revisión* (vista como *Monitoreo Local y Global*) en donde se evidenciaron acciones para controlar y detectar posibles errores revisión, de procedimiento, del uso de datos y de cálculos. Estos resultados mostraron que los alumnos utilizaron un elevado número de estrategias relacionadas con los procesos de representación del problema y *Planificación* (alrededor del 15% del tiempo empleado para resolver el problema). Por otra parte, los estudiantes no acudieron a realizar procesos de *Monitoreo Local* ni *Monitoreo Global* (visto en la categoría de “Revisión” haciendo énfasis en la

valoración del proceso y del resultado). Los datos estadísticos en porcentajes de frecuencia de los procesos cognitivos y metacognitivos fueron los siguientes: **Análisis** (alrededor del 8%), **Planeación** (alrededor del 7%), **Ejecución** (alrededor del 55%), **Monitoreo Local** (entendido como revisión) (alrededor del 0%). Por otra parte, este estudio contempló un componente **Metacognitivo** (muestra de *conciencia y control sobre la resolución de problemas*), evaluado en forma independiente y cuyo resultado es significativo después de la intervención y evaluación final (alrededor del 23% del tiempo total).

Este estudio es de gran importancia, porque muestra, con qué frecuencia, dada en porcentajes, se evidencian los procesos cognitivos y metacognitivos en la resolución de problemas. Sin embargo, la muestra no es significativa puesto que se basó en los resultados de seis (6) parejas de estudiantes, con los cuales se realizó el análisis. Por otra parte, se presenta en grupos de dos estudiantes, lo cual limita el alcance de la generalización.

El siguiente grupo de investigaciones discriminó la contribución de cada uno de los procesos *cognitivos* y *metacognitivos* en la resolución de problemas matemáticos en el desarrollo de las habilidades matemáticas utilizando las mismas categorías que el presente proyecto de investigación:

- **Cognitivo (Comprensión)**: Mokos & Kafoussi (2013); Buitrago y García (2012); Salmerón, Gutiérrez, Fernández y Salmerón (2010); Dermitzaky, Leondari y Goudas (2009), e incluye el proceso de **Implementación**, de Veenman, Kok y Blöte (2005).

- **Metacognitivo** (*Exploración, Análisis, Planeación, Monitoreo Local y Monitoreo Global*): Mokos y Kafoussi (2013); Karatas y Baki (2013); Buitrago y García (2012); Pugalee (2004); Veenman, Kok & Blöte (2005); Salmerón, Gutiérrez, Fernández y Salmerón (2010), quienes consideran solamente la *Planeación* y el *Monitoreo Local* de Erbas & Okur, (2010), que incluye el *Monitoreo* en general sin distinguir el *Monitoreo Local* y *Monitoreo Global* Dermitzaky, Leondari y Goudas (2009), quienes analizan el *Monitoreo Local, la Planeación*, y el *Análisis* de Pifarré y Sanuy (2001), que incluye el *Análisis, la Planificación, el Monitoreo Local y Monitoreo Global*.

Los que excluyen algunos procesos cognitivos y metacognitivos que se consideran en el presente proyecto de investigación son:

- **Cognitivos**: Mokos & Kafoussi (2013) (*Adquisición de Nueva Información*), Buitrago y García (2012); Erbas & Okur (2010); Dermitzaky, Leondari y Goudas, (2009); Salmerón et al. (2010), excluyen tanto la *Adquisición de Información Adicional* como la *Implementación*.
- **Metacognitivos** (*Exploración y Análisis*) Salmerón et al. (2010); Dermitzaky, Leondari y Goudas (2009) que excluyen el proceso de *Exploración* en su investigación.

Los que indiscriminadamente presentan procesos que se repiten en lo cognitivo como en los metacognitivos son:

- ***Cognitivo y metacognitivos*** al mismo tiempo: Erbas & Okur (2010), los procesos de ***Comprensión, Exploración e Implementación***.

Los que contemplan otros procesos adicionales diferentes a los tenidos en cuenta en nuestra investigación

- ***Autoeficacia y Desempeño***: Salmerón et al. (2010).
- ***Conciencia y control*** sobre la resolución del problema: Pifarré y Sanuy (2001).

Por otra parte, se destacan estudios que contemplan técnicas para la detección de los procesos y cognitivos y metacognitivos como:

- ***La observación directa y videos*** en lugar de auto informe Dermitzaky, Leondari y Goudas (2009), por medio del cual analizaron el comportamiento de los estudiantes en la resolución de problemas.
- ***Redacción o uso del pensamiento en voz alta***: Pifarré y Sanuy (2001) y Pugalee (2004).

Adicionalmente, los estudios al igual que el presente, tienen en cuenta la frecuencia o cantidad en que se presentan los procesos:

- ***Frecuencia en el uso de los procesos cognitivos y metacognitivos:*** Pugalee (2004), la cual se mide a través del método escrito o pensamiento en voz alta utilizado, y Pifarré y Sanuy (2001), que solo mide frecuencia de uso.

En síntesis, ninguno de los estudios anteriormente expuestos abarcó de manera completa todos los procesos de resolución de problemas matemáticos que contempla la presente investigación, ni relacionaron los procesos con las variables dependientes que sí se definen en esta investigación. Solo tuvieron en cuenta parte de las variables, es decir, el desarrollo de habilidades en matemáticas; ni tuvieron en cuenta el desarrollo de competencias matemáticas comparadas entre diferentes sujetos.

3.3.4 Procesos Cognitivos y Metacognitivos de Resolución de Problemas en el Desarrollo de Competencias Matemáticas Comparadas entre Diferentes Sujetos

Las investigaciones que articulan la relación entre los procesos de resolución de problemas de orden cognitivo y metacognitivo con la competencia académica en cuanto al desempeño de los individuos en comparación con otros, convergen en mostrar que la ***Comprensión, la Implementación, la Planeación, el Monitoreo Local y el Monitoreo Global***, inciden positivamente en el desempeño en matemáticas en cuanto a la competencia de resolución de problemas y al desarrollo de habilidades aritméticas, evidenciable en las comparaciones entre sujetos de niveles educativos semejantes.

Algunas de estas investigaciones muestran sus resultados de forma conjunta, sin discriminar la relación específica con cada uno de los procesos estudiados (Griffin & Jitendra, 2009; Özsoy & Ataman, 2009; Chung & Tam, 2005). Las cuales hallaron una relación positiva entre estas variables.

Acorde a lo anterior, Griffin & Jitendra (2009), investigaron acerca de los efectos de una instrucción estratégica en la solución de problemas verbales, para lo cual utilizaron un modelo de Instrucción Basado en Esquemas (SBI), consistente de cuatro pasos: 1) Encontrar el tipo de problema, 2) Organizar la información del problema usando un diagrama, 3) *Planear* para resolver el problema, y 4) Resolver el problema. Este modelo fue comparado con un modelo tradicional de Instrucción Estratégica General (GSI), que vislumbra: leer y *Comprender* el problema, *Planear* la solución, *resolver* el problema (o la *Implementación*) y chequear (entendido como el *Monitoreo Global*).

En esta investigación para realizar el tratamiento, seleccionaron sesenta (60) estudiantes de tercer (3^{er}) grado. Durante las dieciocho (18) semanas que duró la intervención, los profesores aplicaron pruebas de solución de problemas, previa y posterior a la intervención y otras de cálculos matemáticos, para medir el progreso respecto a la solución de problemas de palabras. Al grupo control se le aplicó el modelo de Instrucción Estratégica General (GSI) y al experimental el modelo de Instrucción Basado en Esquema (SBI), el cual está basado en el modelo de Polya (1945/1990). Para medir el progreso en resolución de problemas y habilidades en cálculo; se aplicaron las pruebas de matemáticas SAT-9, que comprende los subtest SAT-9 MPS y SAT-9 MP que evalúan los contenidos matemáticos recomendados

por la NCTM (2000). De igual manera, se utilizó el WPS - Mathematical word problem-solving measure, diseñado por el experimentador para medir la competencia matemática de resolución de problemas matemáticos de palabras de suma y resta en la fase previa a la intervención (pre-test), al final (post test) y doce (12) semanas después de finalizar la intervención (mantenimiento), los cuales comprendían dieciséis (16) problemas y cuya puntuación total posible era de treinta y dos (32) puntos. Adicionalmente, se utilizó el instrumento Basic Math Computation Fluency Measure (Fuchs & Hamlett, 1998), con el objeto de examinar la competencia en cálculos básicos en los estudiantes de tercer (3) grado, momentos antes y durante la realización de la intervención, con puntuación máxima posible de cuarenta y tres (43) puntos correctos.

Los resultados en cuanto a la adquisición y mantenimiento en el desempeño de solución de problemas como una función del tratamiento, mostraron que el efecto principal de grupo, $[F(1, 57) = 0.05, p = 0.83]$, no fue estadísticamente significativo. Sin embargo, se encontró que el SAT-9 MP, $[F(1, 57) = 9.61, p < 0.01]$, era una covariable significativa. Adicionalmente, en cuanto al progreso en la solución de problemas durante la intervención, los resultados mostraron que hubo diferencias estadísticamente significativas entre los grupos, $[F(1, 57) = 13.07, p < .01]$, favoreciendo al grupo SBI, con un gran tamaño de efecto de .94 para el grupo SBI, comparado con el GSI, en donde además, se mostró que el efecto principal para el grupo SBI fue estadísticamente significativo, $F(1, 57) = 3.61, p < .05$. En cuanto al desempeño de los estudiantes en cálculo básico como una función del tratamiento, los resultados mostraron un efecto principal del momento de la aplicación de las pruebas (previa a la intervención, posteriormente y en el momento de mantenimiento),

estadísticamente significativo, $[F(1, 57) = 10.98, p < .01]$, en donde el momento en el post-test, en comparación con el momento de aplicación del pre-test presentaba un gran tamaño de efecto (0.97). Sin embargo, el efecto principal en ambos grupos, $F(1, 57) = 0.000, p = .99$ no fue estadísticamente significativo.

De acuerdo a lo anterior, se pudo observar que con el enfoque SBI se pretendió asegurar el éxito en la solución del problema al identificar y seleccionar un esquema determinado en problemas de suma y resta, asegurando de esta manera el proceso de *Análisis*. Por otra parte, el proceso de *Exploración* en el enfoque SBI se reduce a encontrar el tipo de problema y en GSI no es claro si se lleva a cabo durante la lectura de éste. Por último el *Monitoreo Local* no es evidente en ninguno de los dos enfoques, solo se sugiere en el enfoque GSI un chequeo en la fase final, entendido como un *Monitoreo Global*.

En este trabajo es importante destacar dos aspectos semejantes al presente estudio, en primer lugar, la relación de incidencia de ambos enfoques (SBI y GSI) sobre el desempeño en estudiantes, tiene en cuenta dentro de las competencias académicas no solo la resolución de problemas sino también el desempeño en cálculo básico, variables dependientes que muestran de manera más cercana las competencias aritméticas en el nivel correspondiente, en semejanza al estudio presente; y en segundo lugar, la aplicación en una población de niños en edades y nivel de estudio similar. Sin embargo, el estudio de Griffin & Jitendra (2009), a diferencia de la presente investigación, no evalúa de forma discriminada la incidencia de los procesos implicados en los enfoques didácticos de resolución de problemas en el desempeño de los estudiantes en aritmética. Otra diferencia encontrada es que en esta

investigación utilizaron una variedad amplia de instrumentos para medir la competencia aritmética en cálculo básico, contenidos matemáticos y en resolución de problemas con respecto al presente estudio, la competencia académica es medida a través del cuestionario que diligencian los docentes sobre las habilidades del niño y sobre desempeño comparado con otros estudiantes.

Por otra parte, Özsoy & Ataman (2009), llevaron a cabo un estudio con diseño cuasi experimental durante nueve (9) semanas a cuarenta y siete (47) estudiantes de quinto (5) grado (edad media de 11,2 años), en una escuela de primaria de Ankara, Turquía. Los profesores de cada grupo, fueron capacitados durante ocho (8) horas sobre los procesos de metacognición y en enseñanza metacognitiva. Después de aplicarse el pre-test a los estudiantes, se llevó a cabo el proceso de instrucción de estrategias metacognitivas para la solución de problemas matemáticos en el grupo experimental que no recibió el grupo control.

Los resultados de este estudio mostraron que la enseñanza de estrategias metacognitivas en el grupo de tratamiento dieron lugar a una diferencia significativa ($F(1,45) = 23.389$, $p < 0,05$) entre el grupo experimental y el grupo control en cuanto al nivel de conocimiento y habilidades metacognitivas y, en cuanto a la resolución de problemas mediante el examen MPSAT (Mathematical Problem Solving Achievement Test) de pre-test y post-test ($F(1,45) = 33,254$, $p < 0,05$).

En general, los resultados arrojados en este estudio favorecieron al grupo de tratamiento, mostrando la incidencia de un enfoque de enseñanza que comprende procesos cognitivos y

metacognitivos en el desempeño en la resolución de problemas matemáticos. Sin embargo, vuelve a mostrarse una tendencia en la medición del efecto de dicho enfoque a través de pruebas estandarizadas sin entrar a profundizar ni dar resultados específicos respecto a la influencia de los procesos cognitivos y metacognitivos que se dan al interior de los participantes, en el logro de la competencia de resolución de problemas matemáticos.

Este estudio se diferencia de la presente investigación, porque se les proporcionó a los estudiantes una lista que orienta los procesos metacognitivos que deben seguir durante la resolución de problemas matemáticos. Mientras que en el presente trabajo, a los estudiantes no se les entregó una lista que mostrara los pasos que orientan la resolución de problemas y, en lugar de eso, los estudiantes resolvieron el problema de manera espontánea y se indagó por los procesos utilizados por el estudiante a través de la entrevista flexible, la cual es una técnica sensible para la evaluación de procesos.

Chung & Tam (2005), examinaron los efectos de tres (3) enfoques para la enseñanza en la resolución de problemas matemáticos a estudiantes con dificultad intelectual leve, para lo cual realizaron un estudio experimental de corte transversal con la participación de treinta (30) estudiantes chinos (edad: entre 8 y 12 años) de una escuela especial de Hong Kong, impartiendo tres (3) tipos de instrucciones (con diez (10) estudiantes asignados aleatoriamente a cada grupo): la convencional, la trabajada con ejemplos y la relacionada con estrategias cognitivas, para comparar los efectos de los tres (3) métodos en exámenes inmediatos y posteriores. Al grupo de estrategia cognitiva (CS) se le enseñó a utilizar los procesos cognitivos y metacognitivos y estrategias para resolver problemas de palabras. Los

estudiantes aprendieron cinco (5) procesos cognitivos (*leer el problema para su **Comprensión**, seleccionar la información importante, dibujar una representación del problema, escribir los pasos para realizar los cálculos (proceso de **Planeación**) y chequear los pasos y los cálculos (entendido como el **Monitoreo Local**)*) y el parafraseo de las actividades metacognitivas asociadas con la **Implementación** de cada proceso cognitivo. El docente experimentador presentaba los problemas, modelaba la solución y los estudiantes practicaban por su cuenta con la ayuda de una hoja de cálculo y un gráfico como apoyo al uso de la estrategia cognitiva y metacognitiva. Posteriormente, se aplicó una “prueba inmediata” de cinco (5) problemas similares a la estructura de los ejemplos de adquisición, además de tres (3) problemas de transferencia para evaluar si los estudiantes podían resolver una amplia gama de problemas. Igualmente, se aplicó una “prueba posterior” a los catorce (14) días de la fase de adquisición con igual número de problemas de la prueba anterior.

Los resultados de esta investigación mostraron que en la “prueba inmediata”, se encontró una diferencia significativa [$F(2, 27) = 55.20, p = 0.01$] entre los grupos, en cuanto al número de problemas solucionados correctamente. Las comparaciones post-hoc de Tukey HSD mostraron la superioridad, tanto del grupo de estrategias cognitivas (CS) como del grupo de ejemplo práctico (no muestran diferencias el uno del otro) sobre el grupo de estrategia convencional respecto al número de problemas resueltos correctamente. De igual manera, hubo diferencias significativas entre los grupos al aplicarse la “prueba posterior” [$F(2, 27) = 537.25, p = 0.001$]. Así mismo, los que trabajaron con ejemplos y con estrategias cognitivas fueron capaces de mantener y generalizar sus conocimientos y habilidades anteriores para resolver problemas nuevos, más que los que recibieron enseñanza convencional.

Sin embargo, en esta investigación a pesar de seguir una estrategia que involucra episodios cognitivos y metacognitivos como el de *Comprensión*, *Planeación* y de *Monitoreo Local*, no se muestra la contribución de estos en el desempeño de resolución de problemas y/o en las consecuencias posteriores de desempeño en otras competencias aritméticas. Se destaca como diferencia principal, con relación al presente estudio, la participación de estudiantes que presentaban dificultad intelectual leve, en edades superiores a ocho (8) años, en donde la investigación en curso trabaja con estudiantes regulares, en edades inferiores.

Se puede concluir que, este grupo de investigaciones tienen en común que las estrategias de resolución de problemas matemáticos aplicadas en grupos experimentales de estudiantes, presentan una incidencia positiva en el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas aritméticos, comparando esos resultados con los de otros grupos que siguen enfoques tradicionales. Las estrategias planteadas se caracterizan porque promueven el desarrollo de procesos cognitivos como la *Comprensión* y de procesos metacognitivos como la *Planeación* y el *Monitoreo Local*, dejando a un lado otros procesos que comprende la presente investigación, como lo son la *Exploración*, el *Análisis* y el *Monitoreo Global*. Por otra parte, aunque los sujetos empleados no corresponden al del mismo grado de escolaridad del presente estudio, si se encuentran en el nivel de básica primaria.

Así mismo, los estudios de Griffin & Jitendra (2009); Özsoy & Ataman (2009); Chung & Tam, (2005), se diferencian del actual estudio, en que no se relleva la importancia de los procesos cognitivos y metacognitivos implícitos en los enfoques tratados, por lo que no se

entregan resultados específicos de la incidencia de dichos procesos en el desempeño en matemáticas.

Otro grupo de investigaciones, que estudiaron la relación de los procesos cognitivos y metacognitivos de resolución de problemas matemáticos con el desarrollo de competencias aritméticas, manifiestan sus resultados discriminando la relación específica con alguno de los procesos estudiados (Hoe, Sheng & Hong, 2014; Hong, Lee & Yeo, 2012; Calero, Carles, Mata y Navarro, 2010; Casas, De Alba y Taverner, 2009; Salmerón Gutiérrez y Salmerón, 2009; Zambrano, 2008; Harskamp y Suhre, 2007; Yimer & Ellerton, 2006; Hwa & Lau, 2005). A continuación se detallan estas investigaciones, las cuales encuentran una relación positiva entre estas variables.

Hoe, Sheng & Hong (2014), en su estudio examinaron el papel de la metacognición de la autorregulación en la resolución de problemas. Así como también, el impacto de la utilización de un sistema metacognitivo que se centra en las etapas de **Comprensión y Planificación** de las cuatro etapas de Polya en el comportamiento en matemáticas, rendimiento y actitudes de los estudiantes para resolver problemas. El diseño de la investigación es cuasi-experimental, en donde se trata de animar a los estudiante de primaria a ser más conscientes de sus procesos de pensamiento, ***pensando en voz alta*** a través de la **Comprensión y Planificación**, y de una forma estructurada utilizando un esquema de preguntas metacognitivas. Este estudio incluyó dos cursos de cuarto de primaria (niños de 9 a 10 años) de habilidades mixtas en una escuela pública, elemental predominantemente chino en Singapur. Una clase (N = 40) sirvió como la clase experimental a la que se

administró la intervención, mientras que la otra clase (N = 39) sirvió como la clase de comparación. Sobre la base de las diferencias de medias estandarizadas insignificantes 2 (DME) en las puntuaciones en una prueba previa de resolución de problemas antes de la intervención. Las dos (2) clases fueron comparables en su dominio de (1) **la Comprensión** de los problemas de palabras no son de rutina, (2) **la Planificación** de soluciones, y su (3) el éxito en la solución de esos problemas. Cada uno de los grupos se midieron y calcularon estas variables utilizando la siguiente fórmula: $(\text{Media de clase Experimento} - \text{La media de clase Comparación}) / \text{desviación estándar Clase (SD) Comparación}$.

Después de la prueba preliminar, el grupo experimental se sometió a un programa de intervención de seis (6) semanas durante el plan de estudios. El grupo control no recibió instrucción con el enfoque de Polya, ni el Plan de puesta en marcha, pero se le dio el mismo conjunto de problemas.

En general, los resultados mostraron que los estudiantes mejoraron la forma en que iniciaron el proceso de resolución de problemas, en cierta medida desarrollaron un enfoque más metacognitivo hacia la resolución de problemas matemáticos.

Las puntuaciones medias de niveles de **Comprensión, Planificación** y de resolución de problemas medidas en cuanto al éxito entre los dos grupos en el post-test, muestran en la intervención medianos y grandes efectos en todos los procesos menos una medida (el problema de solución de confianza). Estos resultados son consistentes con el plan de puesta en marcha implementado por los estudiantes del grupo experimental (GE) para comprender

mejor los problemas no rutinarios (DME = 0,64) y planificar mejor sus soluciones (DME = 0,46) cuando se considera en relación con los estudiantes de la clase de comparación o grupo control. Se presentan otros efectos positivos en el GE como un mayor control de los comportamientos y emociones (DME = 0,53) de los estudiantes, así como mayor confianza en su capacidad de resolver problemas (DME = 0,20).

En este estudio se observaron dos (2) procesos: *la Comprensión* y la *Planificación*, pero deja por fuera otros procesos que la investigación en curso incluye como predictores en la resolución de problemas en la competencia académica en matemáticas como son la *Exploración, el Análisis y el Monitoreo Global y Local*, la información adicional y la *Implementación*. Atiende la comprensión no desde lo cognitivo, sino desde lo metacognitivo, lo que es una diferencia en sí misma con esta investigación.

Hong, Lee & Yeo (2012), realizaron un estudio cuasi-experimental que tuvo como propósito *Explorar* el impacto que tiene un esquema metacognitivo, aplicando el modelo de cuatro pasos del enfoque de Polya (1971) centrado en la *Comprensión y Planificación*, con relación a la capacidad de los estudiantes para resolver problemas matemáticos no rutinarios.

En este estudio participaron sesenta y tres (63) alumnos de cuarto (4) grado de primaria con habilidades mixtas, Una clase con (N = 31) grupo experimental y otra clase (N=32) el grupo de comparación o control. El estudio midió tres (3) aspectos: (1) conciencia, regulación y resolución exitosa de problemas, (2) Confianza y control personal, y (3) compromiso del estudiante. Para el primer aspecto a ser medido se realizaron pruebas pre-test y un Post-test

con cinco (5) problemas no rutinarios, en donde el nivel de *Comprensión y Planificación* de los estudiantes para cada problema se basó en las rubricas adaptadas por Charles, Lester y O'Daffer (1987). Los otros dos (2) aspectos en este estudio, no están siendo considerados en este análisis puesto que solo se han tomado los elementos afines con la presente investigación. El grupo experimental fue intervenido en su proceso de enseñanza durante seis (6) semanas, con el enfoque de solución de problemas de las cuatro etapas de Polya, el STARTUP explícitamente. Después de las seis semanas al grupo experimental se le aplicó el post-test, PSI, y el cuestionario PEI, y al grupo control, se evaluó con el mismo problema dado a resolver del grupo experimental.

Las comparaciones de puntuación revelaron que la intervención tiene un gran efecto en la mayoría de las medidas, pues ayudó a los estudiantes de la clase experimental a mejorar su *Comprensión* de los problemas no rutinarios (DME = 0,64), mejorar el control de sus emociones y comportamientos durante la resolución de problemas (DME = 0,26). Y *Planificar* mejor sus soluciones (DME = 0,46) en comparación con los alumnos del grupo control. En una medida pequeña, el grupo experimental ganó mayor confianza en su capacidad de resolución de problemas (DME = 0,20) después de la intervención, en comparación con sus pares del grupo control. Asimismo, el GE logró mayores ganancias en el éxito de la resolución de problemas (DMR = 0,53) respecto al GC.

A continuación se detalla la comparación de los grupos en cuanto a la puntuación de ganancia significativa (SD) respecto a las variables afines a la actual investigación: en *el Nivel de Comprensión* para el Grupo Experimental el SD = 0,71 (1,64) respecto al grupo

control $SD = 0.00$ (1.111) con una diferencia significativa de 0,71; $SMD = 0,64$ y un tamaño del efecto (Cohen 1988) grande. En el nivel de **Planificación** para el GE el $SD = 0,94$ (1.171), y para el grupo Control la $SD = 0,38$ (1.21) con una diferencia significativa de 0,56 y $SMD = 0,46$ con un efecto grande. **El éxito en la resolución de problemas** para el GE en $SD = 1,35$ (4,08) en comparación con el GC el $SD = -0,19$ (2,292) con una diferencia significativa de 1,54 y $SMD = 0,53$ con un efecto cohen grande de la muestra.

Se puede afirmar que esta investigación ofrece información importante sobre como los procesos metacognitivos como la **Planeación**, y cognitivos como la **Comprensión** contribuyen al incremento de éxito en la resolución de problemas, la confianza y el compromiso en el aprendizaje de los estudiantes como resolutores de problemas no rutinarios. Estos dos (2) últimos aspectos son elementos que no se abordan explícitamente dentro de la investigación actual. Asimismo, este estudio no considera dentro de su investigación otros proceso cognitivos y metacognitivos como la **Exploración, Análisis, el Monitoreo Local y Global**, la **Implementación** y la **Adquisición de Nueva Información**, que son medidos y reportados en forma específica en la investigación actual.

Calero, Carles, Mata y Navarro (2010), analizaron la relación entre variables psicológicas y rendimiento escolar en niños preescolares. Dentro de los objetivos específicos propuestos están: 1) Analizar las diferencias en los procesos cognitivos básicos relacionados con el aprendizaje escolar entre niños de educación infantil, con alto y bajo rendimiento académico. 2) Comprobar si existen diferencias significativas en la utilización de estrategias metacognitivas entre los alumnos de educación infantil de alto y bajo rendimiento académico.

Por lo anterior, se tomó una muestra de modo aleatorio, compuesta de cuarenta y siete (47) niños: veintitrés (23) niños con alto rendimiento y veinticuatro (24) niños con bajo rendimiento, de un colegio público de Granada (España), con edades entre cuatro (4) y cinco (5) años ($M = 4$ años y 8 meses, $DT = 0.27$). Se realizaron medidas de inteligencia (K-BIT), de potencial de aprendizaje (EHPAP) y metacognición. Las habilidades de metacognición se evaluaron a través del registro de información verbal de los niños mientras realizaban una tarea del sub-test de clasificación de la EHPAP. Debido a la edad, se establecieron una serie de preguntas directas que aportaban información sobre sus capacidades metacognitivas y modo de ejecución. Se realizaban preguntas a los niños, relacionadas a los diez (10) ítems del cuestionario y se registraba lo que el niño pensaba relacionado a sus procesos de *Planeación*, autorregulación, y de evaluación. El rendimiento académico de los estudiantes se obtuvo a partir de los resultados de áreas curriculares de matemáticas, expresión oral y escrita, identidad y autonomía personal, medio físico y social, expresión corporal y expresión artística; de las cuales se obtuvieron categorías de rendimiento bajo, medio y alto, comparando al final solo veintitrés (23) estudiantes en alto y veinticuatro (24) en bajo rendimiento.

Los resultados obtenidos (en cuanto al primer objetivo) reflejaron la existencia de diferencias significativas entre ambos grupos en la puntuación pre-test total de la EHPAP ($t(1,45) = 3.47, p < .05$) obteniendo mayores puntuaciones y diferencias significativas el grupo de alto rendimiento frente al de bajo rendimiento, así: en cuanto a *Planificación* verbal ($t(1,45) = 2.62, p < .05$), en el análisis entre las medias de los grupos en las puntuaciones totales obtenidas en el cuestionario sobre Metacognición ($t(1,45) = 6.48, p < .05$); en la

Planificación ($t(1,45) = 5.16, p < .05$) y en el Evaluación (entendido como **Monitoreo Global**) ($t(1,45) = 5.00, p < .05$). Sin embargo, en los sub-test de Clasificación ($t(1,45) = 1.54, p > .05$), Series ($t(1,45) = 1.53, p > .05$), no se hallaron diferencias significativas entre los grupos de alto y bajo rendimiento, como tampoco se observaron estas diferencias en los procesos de autorregulación (**Monitoreo Local**)

En este estudio abordaron una población de niños de preescolar en la que se encuentra información discriminada que sugiere la incidencia positiva de los procesos de **Planificación**, **Monitoreo Local** y **Monitoreo Global** en el desempeño de los estudiantes en matemáticas. Sin embargo, se destacó que, en la implementación de procesos de clasificación y seriación, los grupos comparados no muestran mayor diferencia. Esta investigación guarda similitud con el estudio actual en cuanto a la metodología utilizada, dado que se realizaban preguntas relacionadas con el cuestionario, registrando lo que el niño pensaba sobre sus procesos. De igual manera, se asemeja en cuanto a la forma de obtener el resultado de la variable dependiente, es decir, a través del reporte de rendimiento en el área de matemáticas. Por último, esta investigación no mostró otros procesos que se miden en el presente estudio, como lo son la **Comprensión** y el **Análisis**.

Casas, De Alba y Taverner (2009), realizaron un análisis sobre las limitaciones de los niños con TDAH + DAM en habilidades cognitivas y metacognitivas de cálculo y solución de problemas, comparado con niños solo con TDAH (Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad), niños solo con DAM (dificultad específica en matemáticas) o niños sin problemas. En segunda instancia, averiguar si es más severo el déficit de los niños con TDAH

en funciones ejecutivas cuando experimentan DAM que cuando no tienen esas dificultades. El estudio constituyó una muestra de ochenta y seis (86) sujetos (edad entre 6 y 11 años) organizados en cuatro (4) grupos: niños con DAM (n = 20), niños con TDAH (n = 16), niños con TDAH + DAM (n = 24) y niños sin problemas (n = 26) tomados como grupo control, pertenecientes a colegios públicos y concertados de la ciudad de Valencia (España). Los participantes pasaron por tres (3) sesiones de evaluación: primero la aplicación de los criterios que determinarían el grupo al que pertenecería el individuo; segundo, la administración de la prueba informática EPA2000 (DeClerq, Desoete & Roeyers, 2000) para evaluar los procesos cognitivos y metacognitivos implicados en las matemáticas; y por último la administración de la batería de funciones ejecutivas. La prueba EPA2000, estuvo integrada por ochenta (80) ítems que evaluaban conocimiento numérico (incluye lectura de unidades y decenas, comprensión de símbolo de operaciones, *Comprensión* y producción numérica), procedimientos de cálculo y solución de problemas aritméticos; para evaluar los procesos metacognitivos; se desarrolló primero, una fase en donde los estudiantes tenían que predecir su capacidad para resolver correctamente y una segunda en donde resolvían los ítems y luego evaluaban su ejecución (entendida esta evaluación como el proceso de *Monitoreo Global*).

Los resultados mostraron que en cuanto a la *Comprensión* y producción numérica, se tenía un efecto significativo de grupo, $F_{3,79} = 7.491$ ($p = 0.000$, $\eta^2 = 0.221$), y los contrastes post hoc mostraron diferencias entre el grupo control y el resto de grupos. En cuanto a la *Ejecución* de cálculos, se observó un efecto significativo de grupo, $F_{3,79} = 3.192$ ($p = 0.028$, $\eta^2 = 0.108$), evidenciando los contrastes post hoc que el grupo control completó correctamente más ítems que el grupo TDAH + DAM. El grupo control también mostró

mayor número de respuestas correctas que los grupos DAM y TDAH + DAM, en la variable cálculo mental (vista dentro de los procesos de *Ejecución*). También el análisis sobre la *Comprensión* verbal del problema mostró efecto significativo de grupo, $F_{3,79} = 3.970$ ($p = 0.011$, $\eta^2 = 0.131$), señalando los contrastes post hoc, diferencias entre el grupo TDAH + DAM y control. Por último, la representación mental del problema mostró un efecto significativo de grupo, $F_{3,79} = 4.762$ ($p = 0.004$, $\eta^2 = 0.153$), indicando los contrastes post hoc diferencias significativas entre el grupo con DAM y el grupo control.

Finalmente, en relación a las variables metacognitivas de predicción y *Monitoreo Global*, el análisis sobre la predicción mostró diferencias significativas, $F_{3, 79} = 6.157$ ($p = 0.001$, $\eta^2 = 0.189$). Los contrastes post hoc señalaron diferencias significativas en las comparaciones entre el grupo control y el grupo DAM ($p = 0.011$), y entre el grupo control y el grupo TDAH + DAM ($p = 0.002$). En segundo lugar, el análisis sobre la *Evaluación* no mostró diferencias entre los grupos, $F_{3, 79} = 2.552$ ($p = 0.061$, $\eta^2 = 0.080$).

Los resultados de esta investigación, solo analizaron una parte de los procesos cognitivos y metacognitivos que se pueden presentar en los procesos de resolución de problemas, por lo que se hace necesario profundizar en la incidencia de otros procesos cognitivos como el *Análisis* y metacognitivos como *la Exploración, Planeación y Monitoreo Local* en el logro de las competencias académicas entre niños con TDAH + DAM, TDAH, DAM y sin problemas.

Por otra parte, esta investigación tuvo en cuenta a unos participantes que presentan necesidades educativas especiales a diferencia de la investigación propuesta, la cual examina los procesos con niños sin problemas de aprendizaje. Igualmente, este estudio aborda tres (3) aspectos de la competencia académica en matemáticas: conocimientos en matemáticas, cálculo y la resolución de problemas, lo cual se asemeja a la variable dependiente de la presente investigación.

Salmerón, Gutiérrez y Salmerón (2009), compararon en su estudio a un grupo de niños de educación infantil entrenados para aprender a aprender (con enfoque cognitivo y metacognitivo), con un grupo de control que ha utilizado materiales didácticos habituales sin entrenamiento. En esta muestra participaron cuarenta y ocho (48) estudiantes de primer grado de educación primaria de un centro educativo de Cádiz (España) seleccionados al azar, sin ningún proceso muestral. El instrumento utilizado fue la “Escala de estrategias de aprendizaje contextualizada” ESEAC (Bernad, 2000), que mide la presencia de eventos cognitivos y metacognitivos, como son: la **Planificación** y la ejecución (*entiéndase como Implementación*). Se realizó una prueba de pre-test con post-test tanto al grupo control como el experimental.

Al aplicarse la prueba t – student ($\alpha = .01$) y calculado el tamaño del efecto en la medición post test, se obtuvo como resultado diferencias significativas entre las medidas de ambos grupos, a favor de los que usaron materiales didácticos para la apropiación de estrategias de aprendizaje en la resolución de problemas (en **Planificación**: $t = -5.031$, $D = 1.44$, $p = .000$; en la **Ejecución**: $t = -2.284$, $D = 0.75$, $p = .000$). Por otra parte, el nivel de

destreza en el uso de estas estrategias es medio alto en el grupo experimental, y en nivel medio bajo en el grupo control, de acuerdo a la escala para medir nivel de transferencia según ESEAC (Bernad (2000)). Es decir, los estudiantes que conformaron el grupo experimental desarrollaron mayores habilidades de *Planificación* (M = 2.63; SD = 0.77), *Ejecución* (M = 2.52; SD = 0.76); frente al grupo de control en *Planificación* (M = 1,52; SD = 0.75) y en *Ejecución* (M = 1.94; SD = 0.86).

Es importante resaltar en esta investigación que, a pesar de que se midieron varias estrategias cognitivas y metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos, en donde se vislumbraron varios de los procesos utilizados por los estudiantes al responder las preguntas del cuestionario utilizado, no se registraron resultados específicos con relación a los procesos de *Análisis, Exploración y Monitoreo Global*, aunque el cuestionario hace referencia a estos procesos. Por otra parte, la primera estrategia del instrumento ESEAC, comprendió en una misma categoría, la *Comprensión y Planificación*, lo que no permitió dar cuenta de manera separada de los resultados. Es importante anotar que la efectividad de la estrategia se mide por el nivel de *transferencia* en la resolución de problemas (es decir, cuando los estudiantes formulan nuevos problemas que involucran en su solución, el uso de conceptos matemáticos y cálculo básico, según lo solicitado en el cuestionario utilizado), aspecto que diferencia este estudio de la investigación actual.

Zambrano (2008) realizó un estudio con diseño experimental con veinte (20) estudiantes de primer semestre de la Universidad Uniminuto en Bogotá, mediante el cual analizó la relación que tienen las preguntas de orden cognitivo y metacognitivo en la comprensión

conceptual y la resolución de problemas matemáticos “función cuadrática” La investigación se apoyó en dos (2) software que arrojan preguntas cognitivas y metacognitivas a los estudiantes durante el desarrollo de los problemas. Todos los grupos participaron de una evaluación inicial pre-test para determinar el estado actual de los estudiantes y luego se desarrollaron dos (2) sesiones: una de entrenamiento con el uso del software, y otra con la implementación de esas estrategias en la solución esperada del problema. Los siguientes resultados son del *post-test*:

- 1) Con el software que arroja las preguntas **Cognitivas**, el 40% de los estudiantes utilizó estrategias de elaboración, el 10% de pensamiento crítico, el 60% heurística y el 5% de **Planeación**. Asimismo, el 5% de los estudiantes emplearon estrategias de **Planeación** y elaboración simultáneamente, el 10% aplicó estrategias de elaboración y heurísticas, y el 25% de los estudiantes resolvió bien el problema y llegaron a la respuesta esperada.

- 2) Con el software que activa preguntas **Metacognitivas**, el 80% de los estudiantes aplicó estrategias de **Planeación**, el 25% utilizó la estrategia de elaboración, 25% implementó procesos de pensamiento crítico, el 35% aplicó estrategias heurísticas, el 10% utilizó procesos de regulación y el 10% empleó estrategias de repaso. Asimismo, el 15% de los alumnos implementó las estrategias de **Planeación** y Elaboración simultáneamente. Otros estudiantes, el (15%), utilizó las estrategias de **Planeación** y Heurísticas; el 5% aplicó las estrategias de **Planeación** y Pensamiento Crítico; el 10% empleó estrategias de **Planeación**, Elaboración y Heurísticas; el 5% se apoyó en estrategias de **Planeación**, Heurísticas y Pensamiento Crítico; el 10% utilizó estrategias de **Planeación**, Repaso y

Pensamiento Crítico; y el 5 % empleó estrategias de *Planeación*, Heurísticas y Pensamiento Crítico.

- 3) El 25% de los estudiantes resolvió bien el problema, el 75% de los estudiantes resolvió parte del problema planteado.

En este estudio se destaca y se diferencia del proyecto de investigación actual, en que los estudiantes, que además corresponden a un nivel educativo y ciclo de edad diferente a la muestra poblacional del presente estudio, se apoyaron de dos (2) software para promover y desarrollar procesos de pensamiento al lanzar preguntas para estimular los procesos cognitivos y metacognitivos durante la resolución de problemas. Es importante destacar que el estudio deja de examinar procesos cognitivos como la *Adquisición de Nueva Información* y la *Implementación*; y en los procesos metacognitivos no incluye el *Análisis, la Exploración y el Monitoreo Global*. Asimismo, aunque dentro de su marco conceptual menciona el control y la regulación (*Monitoreo Local*) de este proceso no se precisaron resultados.

Asimismo, Harskamp y Suhre (2007), en su estudio de diseño cuasi-experimental, comprobaron la teoría de resolución de problemas de Schoenfeld, evaluando la eficacia de un programa de computador controlado por los estudiantes en el área de matemáticas de una escuela secundaria. Los procesos que los estudiantes utilizaron son los siguientes: *Analizar* el problema, *hacer un plan* (entiéndase como *Planificación*), llevarlo a cabo (visto como *Implementación*) y comprobación de la respuesta contra la pregunta formulada (entiéndase

este proceso como *Monitoreo Global*). Los estudiantes realizaron pruebas pre y post-test, donde se establecieron dos grupos, el grupo experimental con noventa y un (91) estudiantes pre-universitarios entre quince (15) y diecisiete (17) años (48% mujeres). Estos participantes que interactuaron con el programa informático recibieron cuatro (4) clases de entrenamiento semanales (por dos semanas). El grupo control con ciento siete (107) estudiantes (43% mujeres), recibió cinco (5) clases de educación matemática tradicional. Los siguientes resultados se muestran en virtud de las tres (3) preguntas de la investigación:

1. *¿Los estudiantes realmente utilizan las sugerencias sobre los diferentes procesos durante la resolución de problemas?:*

- *Grupo Experimental:* los estudiantes tuvieron éxito para resolver el 84% de los treinta y cinco (35) problemas disponibles, utilizaron con mayor frecuencia: *el Análisis* en un 63% de los problemas y la *Planificación* en un 59%. En menor frecuencia, 41% el uso de pistas sobre Herramientas y el *Monitoreo Global* en un 44% en la corrección de su método de solución. Por otra parte, los estudiantes utilizaron el proceso de *Planificación* en el 63% y 55% en el *Monitoreo Global* en el 80% de los problemas con un enfoque informal.
- *Grupo Control:* trabajaron catorce (14) lecciones en clase de matemáticas y resolvieron los problemas de aplicación del libro de texto. No todos los problemas fueron entendidos incluso, ni después de la lectura con ejemplos prácticos. El GC al igual que el GE tenía treinta y cinco (35) problemas a resolver, los registros muestran que los

estudiantes del GC resolvieron en promedio el 60% de los problemas de forma independiente. Los estudiantes experimentaron dificultad en un 12% de los problemas planteados.

2. *¿Cuáles de los procesos utilizados son más eficaces?:*

- Existen relaciones significativas entre el uso de los procesos de **Análisis**, herramientas y **Planeación** y el puntaje en las pruebas posteriores. Los estudiantes que utilizaron a menudo procesos metacognitivos para la resolución de un problema también lo hicieron para otros.
- El uso de consejos (o ayudas) relativos a episodios de **Planeación** (hacer un plan de solución) ($r = 0.25$, $p < .05$) y a la verificación de la respuesta (entendida como un **Monitoreo Global**) ($r = 0.32$, $p < .05$), se correlaciona con las puntuaciones del pos test, no siendo así para el proceso de **Análisis** ($r = 0.04$, $p > .05$). No hubo correlaciones significativas entre el uso de los procesos metacognitivos durante los problemas y las puntuaciones pre-test, es decir, para los procesos de **Análisis** ($r = 0.07$, $p > .05$), **Planeación** ($r = 0.09$, $p > .05$) y verificación ($r = 0.07$, $p > .05$). Asimismo, contrariamente a las expectativas del estudio, los estudiantes con pocas fortalezas como solucionadores de problemas no utilizaron los procesos metacognitivos con la misma frecuencia, como fueron utilizadas por los estudiantes identificados con mayores fortalezas.

3. Un programa de ordenador, de acuerdo con la teoría de Schoenfeld *¿Puede ayudar a los estudiantes a ser mejores solucionadores de problemas?*

- No se observó diferencias significativas entre el GE y GC en el pre-test en cuanto a los procesos de *Análisis y Monitoreo Global*. En cuanto a enfoque de solución las puntuaciones son mayores en el GE.

En el Post-test, se observó que las puntuaciones para todos los problemas son más altas en el GE, mientras que las puntuaciones después de la prueba para el GC se mantuvieron en el mismo nivel que los puntajes pre-test.

Esta investigación muestra aportes significativos en la resolución exitosa de problemas matemáticos en la medida que los estudiantes hacen uso de los procesos metacognitivos como *Análisis, Planeación y Monitoreo Global*. Sin embargo, este estudio demostró que los estudiantes que presentan mayores dificultades para resolver problemas las suelen utilizar. Adicionalmente, una diferencia sustancial de este estudio con la investigación en curso, es la estrategia de intervención que se basó en la utilización de ayudas de un programa informático que orienta a los estudiantes de niveles significativamente superiores. Por otra parte, este estudio no incluyó procesos como la *Exploración, Comprensión y la Adquisición de Nueva Información* que son importantes en la resolución de problemas en la competencia académica en matemáticas.

Yimer & Ellerton (2006), realizaron un estudio para analizar la interdependencia de los procesos cognitivos y metacognitivos en la solución de problemas matemáticos, los cuales probaron a través de un modelo de cinco (5) fases o categorías: (1) Compromiso (*Comprensión* inicial, *Análisis* de la información, reflexión sobre el problema);

(2) Transformación-Formulación (*Explorar*, conjeturar, reflexionar, **formular un plan**, reflexionar sobre la viabilidad el plan); (3) *Implementación* (Exploración, evaluación del plan, realización del plan, reflexión pertinencia de acciones); (4) Evaluación, *Monitoreo Local y Global* (releer el problema, evaluación del plan, su coherencia , posibles errores en el cálculo, evaluación de los resultados, tomar decisiones de aceptar o no la solución); (5) Internalización (reflexionar sobre el grado de intimidad y otras cualidades del proceso de solución- reflexionar, identificar las características críticas del proceso, evaluar el proceso de solución y, si se puede, adaptar a otras situaciones, diferentes formas de resolverlos, reflexión del rigor matemático en cuestión, grado de satisfacción).

En este estudio se identificó que las características individuales también tienen un grado de influencia en la forma como los individuos hacen uso de los procesos, lo que les permite tener diferentes grados de comprensión, profundidad de análisis y control sobre los mismos. Pese a ello, la recurrencia en los procesos utilizados por los individuos para solucionar los problemas permite identificar con mayor claridad lo que “**hacen y piensan**” las personas cuando se enfrentan a resolver un problema matemático. Con el método comparativo constante (Maykut y Morehouse, 1994), categorizaron los comportamientos en cinco (5) fases: Compromiso, se utilizó en un 27%; Transformación y formulación en un 36%; la *Implementación* en un 18%; Evaluación en un 9%; y la Internalización que en esta investigación se mide independiente también presentó una frecuencia del 9% en su utilización.

Este estudio, con el presente trabajo de investigación tiene similitudes en varios de sus procesos metacognitivos y cognitivos que contribuyeron a la resolución de problemas matemáticos, que a su vez hacen parte de las habilidades a ser desarrolladas en la competencia académica en matemáticas. En cuanto a las diferencias con la presente investigación se encuentra en primer lugar, que la población es distinta en cuanto a edades y nivel escolar, puesto que esta se basa en una población universitaria. Abordó además el proceso de la evaluación a partir de la relectura del problema, como un elemento importante para indicar el camino a seguir y, el proceso de Internalización basada en la reflexión sobre el grado de intimidad que desarrollaron los solucionadores de problemas respecto al proceso en general. Asimismo, no incluye dentro de los procesos cognitivos la ***Adquisición de Nueva Información***.

Hwa & Lau (2005), en su estudio con metodología mixta, cuantitativa y cualitativa, demostraron la importancia de los procesos metacognitivos como una variable importante en la resolución de problemas matemáticos. Este estudio se sustentó en investigaciones previas de Polya (1973) y Schoenfeld (1987-1992). La primera parte es cuantitativa y participaron cuatrocientos doce (412) estudiantes de diecisiete (17) años seleccionados al azar de dos mil novecientos sesenta y dos (2.962) que participaron en el estudio; y la segunda parte es cualitativa, con estudios de casos en donde participaron con muestreo intencional dieciocho (18) estudiantes de la misma edad.

El análisis de los resultados de este estudio en las puntuaciones de la serie de problemas para la primera parte indicó que el 75.7% de los estudiantes de la muestra resolvieron

problemas del primer nivel, mientras que el 6.1% logró resolver problemas de cuarto nivel de dificultad. En un cuestionario inicial, se observaron cuatro factores 1) *Leer y entender* (visto como **Comprensión**), 2) **Elaborar un plan**, 3) *llevar a cabo el plan (implementar)* y 4) *Mirar hacia atrás (Monitoreo)* con valores propios superiores a uno (1) ya que representan el 58.7% del porcentaje acumulado de la varianza de la muestra. Este hallazgo es coincidente con las cuatro (4) etapas del modelo de resolución de Polya (1973).

Las variables que se consideraron en la primera parte de este estudio fueron divididas en tres (3) categorías: a) **habilidades de resolución de problemas**, b) **habilidades básicas de matemáticas** y, c) *las características de los alumnos*. El valor de R² desde un análisis de regresión simple era 0.536. Esto significa que las variables de este estudio sólo representaron el 53,6% de todos los factores que influyen en el rendimiento de los estudiantes en la resolución de problemas de matemáticas. También utilizaron otras variables como las habilidades metacognitivas que necesitan ser considerados. Para ilustrar este hallazgo se presentan dos (2) estudios de caso, el primero (Caso 1), en donde el estudiante tomó muy poco tiempo para aclarar el problema y pensar en una estrategia alternativa para resolverlo. Es decir, no se observó rastro de desarrollo de habilidades metacognitivas y adicionalmente no tenía dominio de las habilidades matemáticas básicas esenciales para la resolución de problemas con éxito, no se logró solución correcta. En el segundo estudio de caso, el estudiante pasa por todas las etapas de solución de problemas propuesta por Polya, y después de realizar una lectura considerable y comprender el problema, **Planea** la solución. El estudiante avanza y retrocede en los pasos cuando se sintió inseguro de su estrategia o cuando no está seguro de la solución propuesta. En este caso el estudiante emplea una forma de

habilidad metacognitiva mediante el *Monitoreo* constante de sus movimientos mientras que *Planifica* la solución, lleva a cabo su plan y comprueba la respuesta que le lleva a una solución correcta.

Esta investigación muestra los procesos metacognitivos relacionados con la *Planeación*, *Monitoreo Global y la Implementación*. Sin embargo, dejó por fuera el *Análisis* y el *Monitoreo Local*. Asimismo, aunque dio cuenta de la *Comprensión*, no advirtió resultados en cuanto a la *Exploración* ni a la *Adquisición de Nueva Información* que son elementos esenciales de los procesos cognitivos.

3.3.5 Procesos Cognitivos de Resolución de Problemas en el Desarrollo de Habilidades Matemáticas

Las investigaciones que articulan la relación entre los procesos de resolución de problemas de orden cognitivo con la competencia académica en cuanto al desarrollo de habilidades aritméticas en los individuos, convergen en mostrar que la *Comprensión* y la *Implementación* de estrategias cognitivas, inciden positivamente en el desempeño en matemáticas en cuanto a la competencia de resolución de problemas. La siguiente investigación describe los resultados de esta incidencia de manera general y de manera particular para algunos de los procesos:

Solazzo (2008), en su investigación utilizaron ciento treinta (130) estudiantes de cuarto (4) grado (69 niños y 62 niñas) con el fin de determinar las variables que influyen en el logro matemático y predecir el éxito de las matemáticas en ese nivel. Los resultados de este estudio

indican que las variables seleccionadas son importantes en la predicción de logro en matemáticas. Según los resultados de este estudio, las diferencias de género no parecen ser tan importantes en el logro en matemáticas como se pensaba anteriormente. Dado esto, es interesante anotar que, en este estudio, se encontraron diferencias de género en las tareas de razonamiento matemático. Los factores cognitivos, así como factores socio-emocionales pronostican el logro en matemáticas para estudiantes de cuarto (4) grado. En este estudio, la competencia matemática desempeñó un papel importante dentro de los factores socio-emocionales. Como un estudiante se siente en cuanto a sus habilidades y competencia en matemáticas realmente afecta su logro y esto presta apoyo a la teoría del valor de la expectativa. Dentro de las variables cognitivas, velocidad de proceso y la **Comprensión** de un problema parece desempeñar un papel importante en la predicción de las matemáticas. Este estudio permitió considerar la **Comprensión** como un proceso cognitivo vital para el logro y éxito matemático. Sin embargo, no muestra si hay o no correlación en cuanto a los procesos cognitivos de **Implementación** para desarrollar habilidades matemáticas.

Por otra parte, este estudio revisa en forma particular los procesos cognitivos en cuanto a la resolución de problemas, Funch et al. (2010), exploraron la interacción entre la cognición numérica básica y las habilidades de dominio general para dos (2) tipos de aprendizaje de las matemáticas que forman una parte importante del programa de la escuela de grado primaria en los Estados Unidos: cálculos de procedimiento (dos dígitos sumando o restando, con o sin reagrupamiento) y problemas verbales (que implican combinar, comparar, y las relaciones de diferencias entre los números). Estos problemas verbales requieren que los estudiantes identifiquen *la información faltante y la utilización de estrategias cognitivas como el conteo*

verbal. El estudio se realizó con mil doscientos ochenta y un (1281) estudiantes con una edad promedio de cinco (5) años de escuelas metropolitanas del sureste de los Estados Unidos.

En esta investigación se establecieron tres (3) hipótesis, entre las cuales se destaca: la cognición numérica básica que contribuye sustancialmente al desarrollo de cálculos de procedimiento y la habilidad matemática para problemas verbales. Es decir, esta investigación tiene en cuenta uno de los procesos que el estudiante de preescolar realiza al momento de resolver un problema y es la capacidad de cognición numérica a través del proceso de **Implementación** (conteo verbal), como estrategia que da una explicación del desempeño matemático en niveles escolares. A su vez, esta capacidad de cognición numérica contribuye a la **Comprensión** y a los cálculos de procedimiento en operaciones básicas como la adición y sustracción (dos dígitos), evaluación de la estrategia de inclusión para problemas en palabras, la combinación, la comparación y el cambio en los problemas de palabras contribuyen al crecimiento académico una vez que se controlan las habilidades de dominio general y las tareas básicas de cognición numérica.

Este estudio encontró que el desarrollo de las habilidades numéricas básicas intervenidas por la estimación de número de línea y, el número de conjuntos de tareas al inicio del primer grado, ha contribuido más al crecimiento académico por año en la solución de problemas de cálculo en el procedimiento. La cognición numérica a través del conteo verbal representó el 8,8% de la varianza en el crecimiento, o el 26,5% de la varianza explicada, conservando la significación estadística después de controlar ocho habilidades de dominio general. Por el

contrario, las ocho (8) habilidades de dominio general representaron sólo el 3,8% de la varianza en el crecimiento o el 11,4% de la varianza explicada, y esto no fue una contribución estadísticamente significativa después de considerar las variables básicas de la cognición numérica.

La contribución relativa de estas habilidades numéricas básicas y habilidades de dominio general, fue notablemente diferente para el desarrollo de habilidades en problemas verbales. En este caso, la cantidad de varianza explicada específicamente atribuible a la cognición numérica básica (*Implementación* a través del conteo verbal) y las variables de dominio general fue comparable (32 % de la varianza en el crecimiento de cada uno; 14,14 % y 15,1 % de la varianza explicada por la cognición numérica básica y de dominio - habilidades generales, respectivamente).

Este estudio, tiene en cuenta uno de los procesos cognitivos: la *Implementación* de estrategia, la cual se diferencia de la presente investigación, en cuanto a que incluye las funciones de dominio general, como procesos importantes en el desarrollo de las habilidades matemáticas. Sin embargo, no mide los procesos de *Comprensión e información adicional*.

3.3.6 Procesos Cognitivos de Resolución de Problemas en el Desarrollo de Habilidades Matemáticas Comparadas entre Diferentes Sujetos

Las investigaciones que articulan la relación entre los procesos de resolución de problemas de orden cognitivo con la competencia académica en cuanto al desempeño de los individuos en comparación con otros, convergen en mostrar que la *Comprensión* y la

Implementación inciden positivamente en el desempeño en matemáticas en cuanto a la competencia de resolución de problemas, en comparación con otros sujetos de niveles semejantes (Toboso (2004)). Las investigaciones en este sentido, arrojaron resultados de esta incidencia de manera general y de manera particular para algunos procesos, como se presenta a continuación.

Toboso (2004) en su investigación “*Evaluación de habilidades cognitivas en la resolución de problemas matemáticos*”, analizó y valoró los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de los problemas matemáticos de narración, así como el de otras variables personales y contextuales que también pueden incidir significativamente en el desarrollo de esta habilidad para mejorar las intervenciones educativas, dirigidas a la adaptación curricular que exige el sistema educativo actual. La muestra estuvo conformada por alumnos de segundo (2º) y tercer (3º) grado de Educación Secundaria Obligatoria. La selección del grupo de alumnos, dentro de cada centro, se realizó al azar. Durante la investigación se utilizaron varios instrumentos para recoger los datos referidos a las variables objeto de estudio. Algunos fueron creados específicamente para evaluar las habilidades cognitivas que intervienen en la resolución de problemas matemáticos, y otros se seleccionaron entre los instrumentos psicométricos que se utilizan frecuentemente en este ámbito escolar.

Las pruebas específicas para evaluar los componentes cognitivos en el proceso de resolución de problemas matemáticos fueron: ECCL: “Evaluación de Componentes Cognitivos en la Comprensión Lectora”, ECSP: “Evaluación de Componentes Cognitivos en

la Selección del Plan de Trabajo”, ECOE: “Evaluación de Componentes Cognitivos en la Organización de Estrategias”, y ECEP: “Evaluación de Componentes Cognitivos en la Ejecución del Plan de Trabajo”.

Por otro lado, las pruebas psicométricas estandarizadas que se utilizaron fueron: Cuestionario GTSQ de Estilos Intelectuales de Sternberg y Martin (1988), Cuestionario “Autoconcepto AFA. Forma-A” (Musitu, García y Gutiérrez 1991), Test “Dominó D-48” de Anstey, adaptado por Pichot, y Subtests de “Aptitud numérica” y “Comprensión verbal” de la batería BADYG-M, o “Batería de Aptitudes Diferenciales y Generales. Nivel Medio” de Yuste (1992).

Siguiendo las orientaciones de Suárez, Jornet y Saéz (1992), en su estudio presentaron varios análisis de regresión univariado y Anova, en donde se verificó la incidencia de las variables estudiadas, en las cuatro (4) pruebas procesuales y el rendimiento general en matemáticas.

De acuerdo con lo anterior, Toboso (2004) identificó dentro de los alumnos las tipologías con perfiles consistentes en cuanto a su ejecución en las cuatro (4) pruebas procesuales consideradas, diferenciándose cuatro (4) tipos de alumnos:

- Con altas habilidades cognitivas en las cuatro fases de resolución, buena aptitud numérica y buen rendimiento en matemáticas (15,67%).

- Con un desarrollo notable en las habilidades de resolución de problemas, la aptitud verbal y el rendimiento en matemáticas (13,43%).
- Con buenas habilidades en los procesos de comprensión lectora, pobre desarrollo en los procesos básicos de resolución de problemas, normal aptitud numérica y suficiente rendimiento en el área de matemáticas (30,59 %).
- Con bajas habilidades cognitivas en los procesos de resolución de problemas, pobre aptitud numérica y bajo rendimiento en matemáticas (40,29%).

En síntesis, de los datos analizados se desprenden las siguientes valoraciones y aportaciones científicas:

- En relación a los componentes cognitivos que intervienen en la resolución de problemas matemáticos, se advirtieron las mayores dificultades en el reconocimiento del problema y el conocimiento estratégico (fases 2 y 3) (Lewis y Anderson, 1985; Sternberg, 1985a y 1985c; Berger y Wilde, 1987).
- Un porcentaje significativo de alumnos resolvieron, de forma “mecánica”, una parte de los problemas planteados, ejecutando los algoritmos indicados, pero desconociendo la naturaleza del problema, Sternberg (1986).

3.3.7 Síntesis general del Estado del Arte- pregunta problema

En el *Estado del Arte* se analizaron los *procesos Cognitivos y Metacognitivos* a partir de la resolución de problemas, que tienen una contribución positiva en la *Competencia*

Académica en Matemáticas que comprende ésta investigación: el *Desarrollo de Habilidades Matemáticas y el Desarrollo de Competencias Matemáticas comparadas entre diferentes sujetos*.

En cuanto al **Desarrollo de Habilidades Matemáticas**, las investigaciones se agruparon teniendo en cuenta, por separados, los procesos cognitivos y metacognitivos que hicieron una contribución al desarrollo de éstas habilidades; además, se agruparon otros estudios que tienen en cuenta estos procesos simultáneamente. Asimismo, y dentro de cada categoría, se observó que un grupo importante de investigaciones no dieron cuenta en forma específica en sus resultados de la contribución que hacen los procesos *cognitivos* y *metacognitivos* en resolución de problemas en el desarrollo de estas habilidades. A su vez, en los estudios donde sí se presentan resultados más detallados, se evidenció que no son incluidos todos los procesos objetos de análisis de la investigación actual.

Por otra parte, cabe destacar que las investigaciones agrupadas en esta categoría resaltan dentro de los procesos metacognitivos las actividades de control y autorregulación como elementos clave para asegurar el éxito, y el mejor desempeño académico en matemáticas de los estudiantes, en la medida en que se aseguran de estar monitoreando el uso de todos los procesos cognitivos y metacognitivos y no quedarse en uno o dos procesos solamente, puesto que los estudios considerados en el presente estado del arte han demostrado una incidencia negativa sobre el desempeño de los estudiantes en la resolución de tareas o problemas matemáticos, cuando estos solo acuden a ciertos procesos y dejan de lado otros, impidiéndole a los estudiante llegar a la resolución del problema de forma exitosa.

Asimismo, las investigaciones que se agruparon en este análisis demostraron que los estudiantes toman mejores decisiones en la resolución de problemas en la medida que logran discriminar los procesos metacognitivos que están utilizando.

De igual forma, cuando las investigaciones en sus resultados especificaron los procesos que hacen una contribución en el desarrollo de habilidades matemáticas, se observó que un buen grupo de ellas, dio un mayor peso en el grado de contribución a los procesos como *la Exploración, Planeación y Monitoreo Local y Global* en lo metacognitivo, y en lo cognitivo a la *Comprensión*, puesto que lograron demostrar que estos procesos tienen una relación importante con el aprendizaje de las matemáticas. En ese sentido, se evidenció que existe una correspondencia entre el grado comprensión de la pregunta y el éxito en la resolución del problema que conlleva aún mejor desempeño en matemática. Adicionalmente, algunos estudios centraron su atención, no sólo en el uso de los procesos por parte de los estudiantes, sino también en la frecuencia con que estos hacían uso de los mismos, lo que permitió visibilizar cuáles de los procesos eran más utilizados y cuáles menos y, como consecuencia, el impacto que tiene la frecuencia del uso en el desarrollo de las habilidades matemáticas.

En cuanto al **Desarrollo de Competencias Matemáticas comparadas entre diferentes sujetos**, cabe destacar que el desempeño de los estudiantes está muy relacionado con las estrategias metodológicas y didácticas que incidieron en la formación de los estudiantes intervenidos o Grupo Experimental, así como en la autoconciencia de los individuos en los procesos metacognitivos y cognitivos que estaban empleando durante la resolución de los problemas. El Desarrollo de Competencias Matemáticas es evidente en cada una de las

investigaciones, donde el grupo experimental presentó diferencias significativas positivas en cuanto a su desempeño en comparación con los estudiantes que hacían parte del grupo control, que fueron enfrentados a los mismos problemas a partir de un enfoque tradicional de enseñanza en la resolución de problemas matemáticos.

Este elemento de la competencia matemática comparada entre diferentes sujetos, agrupó investigaciones por procesos cognitivos y metacognitivos por separado y, a su vez, permitió la agrupación por procesos cognitivos y metacognitivos simultáneamente. Algunas investigaciones no presentaron resultados detallados en cuanto a los procesos que intervenían en la resolución del problema, a diferencia de otras que en los resultados de sus estudios sí precisaron en forma específica los procesos con mayor incidencia en la resolución de problemas, destacándose la pertinencia de la *Planificación, Monitoreo Local y Global* como contribuyentes de manera positiva en el aprendizaje de operaciones matemáticas y en el rendimiento académico en esta área. Asimismo, aunque algunos estudios no indagaron a profundidad el grado de contribución que tienen los procesos de *Implementación, Análisis y Exploración* en el desempeño de los estudiantes, otros estudios sí resaltan el rol de los procesos anteriormente señalados al hacer una diferencia sustancial respecto al desempeño de los estudiantes cuando emplean estos procesos, en algunos casos con ayuda de programas informáticos que les permiten potenciar los procesos cognitivos y de manera más acentuada los procesos metacognitivos a fin de lograr un mejor desempeño respecto a los estudiantes que no recibieron un entrenamiento o ayuda para utilizar los procesos antes mencionados. Sin embargo, es importante mencionar que en algunas investigaciones los resultados no fueron tan concluyentes en cuanto a cómo estas estrategias empleadas por los estudiantes

llevan a una relación significativa con el logro, en matemáticas principalmente, porque la media del grupo de estudiantes con logros bajos en matemáticas del grupo experimental no logró superar en forma significativa la media en comparación con el grupo experimental con nivel alto de logros.

También se observó dentro de las investigaciones agrupadas en las categorías de la Competencia Académica en Matemática, algunas que tienen en cuenta otros procesos que el presente estudio no considera dentro de lo metacognitivo, como son la transferencia e internalización basada en la reflexión sobre el grado de intimidad que desarrollan los solucionadores de problemas respecto al proceso en general. Otro aspecto importante a señalar, evidenciado en uno de los estudios, es la poca contribución que hacen estos procesos de resolución de problemas en el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes con dificultad intelectual leve.

Asimismo, aunque la presente investigación, si bien no se ha enfocado en presentar las metodologías para lograr el desarrollo de estos procesos en los estudiantes, si se interesa en identificar por medio del Protocolo de Entrevista Flexible (López, 1992-2012) cuáles son los procesos que los estudiantes están utilizando y su incidencia en forma particular en la resolución de problemas en la competencia académica en matemáticas. Mientras que las investigaciones agrupadas en el presente estado del arte, presentan una tendencia en la medición de los efectos al utilizar pruebas estandarizadas, sin profundizar y presentar en buena parte de sus estudios resultados específicos respecto a la influencia de los procesos

cognitivos y metacognitivos al interior de los participantes durante la resolución de problemas en la competencia académica en matemáticas.

Considerando dentro del universo de investigaciones que ha recopilado el presente *Estado del Arte*, en donde se observan similitudes pero también diferencias importantes respecto a lo que las investigaciones han dejado de analizar y profundizar, resulta pertinente y relevante para el presente estudio discriminar en sus resultados de manera específica cómo cada uno los procesos inmersos en resolución de problemas han contribuido positivamente en el desarrollo de las habilidades matemáticas y en el desarrollo de la competencia académica en matemáticas.

Por lo tanto, dadas las brechas de las investigaciones anteriormente analizadas, la siguiente pregunta de investigación es pertinente:

¿En qué grado contribuyen los procesos de resolución de problemas a la competencia académica en matemáticas?

4. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Como se ha documentado en la síntesis del estado del arte, las investigaciones analizadas desde los aportes de los procesos cognitivos y metacognitivos en el desarrollo de habilidades matemáticas y, en el desarrollo de competencias matemáticas comparadas entre diferentes sujetos, presentan brechas en sus resultados en cuanto a que no lograron dar cuenta, por cada proceso, sobre la incidencia de los mismos en la competencia académica en matemáticas. Esta limitación en dar resultados específicos en todos los procesos que la presente investigación aborda, es importante porque no permite medir la contribución por separado de los procesos y las articulaciones entre los procesos cognitivos y metacognitivos que realizan los estudiantes.

Por consiguiente, esta situación antes descrita se constituye en sí misma en un problema de investigación relevante, porque en la medida en que se logre determinar el grado de contribución de cada proceso en el desarrollo de la competencia académica en matemáticas en los estudiantes, se podrán hacer los ajustes pertinentes en las didácticas de la enseñanza en esta área, en el diseño de problemas que potencien los procesos cognitivos y metacognitivos que necesitan ser más evidenciados por la contribución que realizan en el éxito del desempeño de los estudiantes, y en el rol que juegan los docentes en el desarrollo de estos procesos en la resolución de problemas matemáticos NCTM (2000) (como se citó en Karatas y Baki, 2013).

Por otra parte, como lo afirmó Polya (1989) (como se citó en Arrieta, 1989: "... pese que en la actualidad la Resolución de problemas de matemáticas es ciertamente el tema de moda entre los teóricos y prácticos interesados por las enseñanzas de las matemáticas (...)" (p. 1), sin embargo los resultados para Colombia en las pruebas PISA 2012 siguen siendo alarmante, pues no se observa avances sino retroceso respecto a los resultados del 2009. En la versión más reciente de esta prueba (2012), los estudiantes colombianos lograron un puntaje en el área de matemáticas de 379 puntos en contraste con los seiscientos tres (603) puntos obtenidos por Shanghái, quién ocupó el primer lugar. Por otra parte, las brechas encontradas en las investigaciones hacen imperativo que esta investigación haga aportes significativos en cuanto al grado de contribución de los procesos de resolución de problemas en la competencia académica, a fin de dar las recomendaciones pertinentes para que se puedan realizar los ajustes necesarios en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde el uso que los estudiantes hacen de estos conceptos en su vida cotidiana siendo conscientes de los procesos cognitivos y metacognitivos que utilizan en la resolución de estos problemas.

Teniendo en cuenta los resultados significativamente positivos que documentan las investigaciones agrupadas en el *estado del arte* en cuanto a los procesos de resolución de problemas en la competencia académica, y en el aporte que estos pueden dar para incrementar el nivel de desempeño en las pruebas PISA y Saber, entre otras, cabe plantear la necesidad de investigar y profundizar en *el grado de contribución de los procesos cognitivos y metacognitivos en la resolución de problemas en la competencia académica en matemáticas* y plantear a partir de los resultados de la presente investigación aspectos a ser mejorados

dentro de la práctica docente a fin de mejorar la competencias académicas en matemáticas de los estudiantes en Colombia.

5. OBJETIVOS

5.1 OBJETIVO GENERAL

Determinar el grado de contribución de los procesos de resolución de problemas a la competencia académica en matemáticas.

5.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Determinar el grado de contribución de los procesos cognitivos de resolución de problemas a la competencia académica en matemáticas.
- ✓ Determinar el grado de contribución de los procesos metacognitivos de resolución de problemas a la competencia académica en matemáticas.

6. HIPÓTESIS

- H_{1_1} : Los procesos cognitivos de resolución de problemas **contribuyen** a la competencia académica en matemáticas.
- H_{1_0} : Los procesos cognitivos de resolución de problemas **no contribuyen** a la competencia académica en matemáticas.
- H_{2_1} : Los procesos metacognitivos de resolución de problemas **contribuyen** a la competencia académica en matemáticas.
- H_{2_0} : Los procesos metacognitivos de resolución de problemas **no contribuyen** a la competencia académica en matemáticas.

7. METODOLOGÍA

7.1 ENFOQUE

Esta investigación se elaboró bajo un enfoque cuantitativo, fundamentado en el paradigma filosófico del Positivismo, utilizando la lógica o razonamiento deductivo, que comenzó con la teoría y se derivaron las hipótesis que luego se sometieron a prueba a partir de la recolección de datos con base en la medición numérica de las variables contenidas en las hipótesis para, posteriormente, analizar las mediciones obtenidas utilizando métodos estadísticos y establecer una serie de conclusiones respecto de las hipótesis (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

7.2 DISEÑO

El diseño de esta investigación es correlacional predictivo, dado que cuantifica las relaciones existentes entre las variables de investigación y ofrece predicciones que surgen de las relaciones ya establecidas entre las variables, es decir, pronostica el comportamiento de un grupo de sujetos en una variable criterio determinada a partir del conocimiento de su relación con un conjunto de variables predictoras (Hernández, et al., 2010; Batthyán y Cabrera, 2011; Tejedor, 2000).

En esta investigación se estudió la contribución de las variables predictoras, las cuales son, los procesos cognitivos de resolución de problemas y los procesos metacognitivos de

resolución de problemas, a la competencia académica en matemáticas, que es la variable criterio.

7.3. POBLACIÓN Y MUESTRA

La población estuvo conformada por estudiantes matriculados en segundo grado de primaria pertenecientes a colegios oficiales, de estrato socioeconómico 1 y 2 del municipio de Malambo, departamento del Atlántico, Colombia.

Los participantes en la muestra fueron 41 estudiantes matriculados en segundo grado de primaria, pertenecientes a un colegio oficial de estrato socioeconómico 1 y 2 del municipio de Malambo, departamento del Atlántico, Colombia. (18 niñas y 23 niños). El tipo de muestreo fue no probabilístico de tipo intencional.

7.4 DEFINICIÓN DE VARIABLES

A continuación se muestra las variables que se utilizaron en esta investigación bajo el enfoque cuantitativo:

7.4.1 Variables predictoras

- *Los procesos cognitivos de resolución de problemas:*

- ✓ *Definición conceptual:*

Los procesos cognitivos de resolución de problemas se refieren a las operaciones reales de la solución de problemas, es decir, lo que una persona *hace* para resolver un problema, por ejemplo, si esa persona *lee* el problema o *Implementa* un cálculo, etc., Artz y Armour, 1990; Garofalo y Lester, 1985 (citado en López, 1992).

De acuerdo con López (1992, 2012), los procesos cognitivos de resolución de problemas son:

- ✓ ***Comprensión***: el esfuerzo del estudiante por aprehender la naturaleza del problema. Incluye: A) Reconocimiento de los elementos del problema donde se espera que el estudiante haga un recuento de los datos que consideró en su cabeza; B) Replanteamiento del problema donde se espera conocer si el niño cambió la pregunta y la replanteó en sus propias palabras.
- ✓ ***Adquisición de la nueva información***: el momento en el que el estudiante pide repetición de la pregunta y recoge nueva información o información que antes no había escuchado o prestado atención, se espera conocer qué información nueva capturó el niño cuando se le repitió la pregunta.
- ✓ ***Implementación***: El elemento donde el estudiante realiza el plan pensado. Incluye las estrategias planteadas.

✓ ***Definición operacional:***

Los procesos cognitivos de resolución de problemas medidos mediante el auto reporte de los estudiantes, en cuanto a la presencia y ausencia de los procesos de: ***Comprensión, Adquisición de Nueva Información e Implementación***, reportados frente a las preguntas que se les plantean en la Entrevista flexible semi-estructurada «Fusión de Procesos Cognitivos y Estrategias para la Resolución de Problemas», adaptada por: De la Cruz, Fernández y Martínez (2006); López (1992).

• ***Los procesos metacognitivos de resolución de problemas:***

✓ ***Definición conceptual:***

Los procesos metacognitivos de resolución de problemas son aquellos procesos que se involucran en la resolución de problemas, en la regulación de los procesos cognitivos y en el pensamiento acerca de estas operaciones cognitivas, por ejemplo, si la persona ***Planea, Analiza*** o ***Monitorea*** mientras que resuelve el problema. (Brown, et al., 1983; Flavell y Wellman, 1977; Jacobs y Paris, 1987; Palincsar y Brown, 1984) (Como se citó en López, 1992).

De acuerdo con López (1992, 2012), los procesos metacognitivos de resolución de problemas son:

- ✓ ***Exploración:*** la búsqueda estructurada para conocer la respuesta.

- ✓ **Análisis:** es el esfuerzo del estudiante por examinar los elementos del problema. Incluye: A) Dividir por partes, donde se espera conocer si el niño analizó el problema planteado, B) Simplificar, donde se espera conocer si el niño analizó el problema planteado acortándolo, C) Seleccionar perspectivas donde se espera conocer si el niño analizó los datos seleccionando el tipo de operación aritmética a realizar.

- ✓ **Planeación:** incluye las decisiones que se toman acerca del procedimiento y estrategias que va utilizar para resolver el problema.

- ✓ **Monitoreo Local:** el momento en el que el niño cuando soluciona el problema, se involucra en actividades de toma de decisiones y autorregulación, es decir, si el niño chequeó o verificó lo que estaba haciendo, o expresado en otras palabras, monitoreo del progreso o de la estrategia. Incluye el subproceso B. Mejoramiento de la estrategia o Estrategia remedial, si hubo corrección durante el proceso.

- ✓ **Monitoreo Global:** la regulación del proceso, es decir, si el niño chequeó o verificó lo que hizo, o expresado en otras palabras, si evaluó los resultados o verificó los cálculos. Incluye el subproceso: B. Entender que si hubo corrección al evaluar los resultados, la estrategia no fue la adecuada, y se debe buscar estrategias alternativas o se ve la necesidad de repensar el proceso, es decir, conocer si el niño utiliza una estrategia diferente para corregirlo.

✓ ***Definición operacional:***

Los procesos metacognitivos de resolución de problemas medidos mediante el auto reporte de los estudiantes, en cuanto a la presencia o ausencia de los procesos de: ***Exploración, Análisis, Planeación, Monitoreo Local, y Monitoreo Global***, reportados frente a las preguntas que se les plantean en la Entrevista flexible semi estructurada «*Fusión de Procesos Cognitivos y Estrategias para la Resolución de Problemas*», adaptada por: De la Cruz, Fernández y Martínez (2006); López (1992).

7.4.2 Variable criterio

- ***Competencia Académica en Matemáticas:***

✓ ***Definición conceptual:***

Capacidad para formular problemas a partir de situaciones dentro y fuera de la matemática, traducir la realidad a una estructura matemática, desarrollar y aplicar diferentes estrategias y justificar la elección de métodos e instrumentos para la solución de problemas, justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de una respuesta obtenida. Verificar e interpretar resultados a la luz del problema original y generalizar soluciones y estrategias para dar solución a nuevas situaciones problema (ICFES, 2007).

✓ **Definición operacional:**

La competencia académica en matemáticas medida mediante las respuestas del profesor en una escala de Competencia Académica tipo Likert con opciones de uno (1) a cinco (5), donde uno (1) representa deficiente y cinco (5) alta, en el cuestionario “*Social Skill Rating Systems*”, de Gresham & Elliot (1990), con respecto a los siguientes aspectos:

- ✓ En matemáticas cómo es el niño comparado con los demás estudiantes.
- ✓ Las habilidades matemáticas del estudiante en términos de lo esperado para el grado.

7.5. CONTROL DE VARIABLES

7.5.1. Variables controladas

La tabla 1, muestra las variables controladas y la tabla 2, las variables que no se tuvieron en cuenta en esta investigación.

Tabla 1. Variables controladas

| Qué | Cómo | Por qué |
|-------------------------------------|--|---|
| Nivel Socio-económico | Se seleccionaron instituciones educativas oficiales que atienden a niños de estrato 1 y 2. | Este estudio busca atender las necesidades de una población de nivel socioeconómico bajo. |
| Grado de Segundo de Primaria | Se seleccionaron estudiantes que se encontraban cursando el grado de Segundo de Primaria. | Esta investigación estudia lo relacionado con la preparación académica de este grado en particular. |
| Entrenamiento a examinadores | Se realizó un programa de entrenamiento en la aplicación de los instrumentos. | Asegurar el cumplimiento de las normas estandarizadas en la aplicación de los instrumentos. |

Fuente: elaboración propia

7.5.2 Variables no controladas

Tabla 2. Variables no controladas

| Qué | Por qué |
|------------------------------------|---|
| Nivel educativo de la docente | Por el tipo de selección que se hizo de la muestra no se controló el nivel educativo de la docente. |
| Edad y género de los participantes | El tipo de muestreo que se hizo no lo permitió. Por lo tanto, no tuvimos en cuenta las diferentes edades de los niños, si eran más mujeres que hombres y todo eso pudo haber afectado los resultados. |

Fuente: elaboración propia

7.6 TÉCNICAS

Para el desarrollo de la presente investigación se utilizó como técnicas la *entrevista semiestructurada* aplicada a los estudiantes participantes y un cuestionario para el docente. El cuestionario se define como un conjunto de preguntas respecto de una o más variables a medir, que debe ser congruente con el planteamiento del problema e hipótesis. Por su parte, la entrevista semiestructurada se basa en una guía de preguntas y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información sobre los temas deseados (Hernández, et al., 2010).

7.7 INSTRUMENTOS

En esta investigación se utilizaron dos (2) instrumentos principales: la Entrevista Flexible Semiestructurada “*Fusión de Procesos Cognitivos y Estrategias para la Resolución de Problemas*” (López, 1992; otras revisiones y adaptaciones López, González, Toro y Arzuza,

2004; De la Cruz, Fernández y Martínez, 2006) y la Escala de Competencia Académica del cuestionario “*Social Skill Rating Systems*” (Gresham & Elliot, 1990).

La Entrevista Flexible Semiestructurada (ver Anexo 2) contiene problemas matemáticos sobre estructuras aditivas de número faltante para estudiantes de segundo (2do) grado de primaria. En esta, los estudiantes evidencian la presencia de los procesos cognitivos de ***Exploración, Comprensión, Adquisición de Nueva Información e Implementación***. También de los procesos metacognitivos de ***Análisis, Planeación, Monitoreo Local y Monitoreo Global***, reportados frente a las preguntas que se les plantean en la Entrevista Flexible Semi estructurada «*Fusión de Procesos Cognitivos y Estrategias para la Resolución de Problemas*». En esta entrevista se explicita el pensamiento de los estudiantes mediante preguntas dirigidas directamente en torno al uso de estos procesos y, en caso que el estudiante responda de manera vaga o general, se le piden aclaraciones utilizando preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información sobre los temas deseados. La validez de contenido de este instrumento se dio a través de jueces expertos que acordaron en un 100% en cuanto a los criterios de pertinencia, claridad, precisión, lenguaje y metodología y el coeficiente de confiabilidad para esta entrevista fue $\alpha = .843$. (López, 1992; otras revisiones y adaptaciones López, González, Toro y Arzuza, 2004; De la Cruz, Fernández y Martínez, 2006).

La Escala de Competencia Académica del cuestionario “*Social Skill Rating Systems*” (ver anexo 3) es una escala tipo Likert con opciones de uno (1) a cinco (5), donde uno (1)

representa deficiente y cinco (5) alta. Esta escala originalmente tiene nueve (9) números de ítems, de los cuales para el presente estudio se seleccionaron los siguientes:

- ✓ En Matemáticas como es este niño comparado con los demás estudiantes.
- ✓ En términos de lo esperado para este grado las habilidades de matemáticas para este niño son.

La validez de contenido de la Escala de Competencia Académica del cuestionario “*Social Skill Rating Systems*” se dio a través de jueces expertos que acordaron en un 100% en cuanto a los criterios de pertinencia, claridad, precisión, lenguaje y metodología y el coeficiente de confiabilidad para este cuestionario fue $\alpha = .843$. (Gresham & Elliot, 1990).

7.8 PROCEDIMIENTO

A continuación se presentan los pasos que se llevaron a cabo para el desarrollo de la presente investigación:

7.8.1 Consentimiento de participantes

Entrega de las cartas de permisos y firma por parte del rector de la institución educativa seleccionada, docente y padres de familia para evaluar a los estudiantes en los procesos de resolución de problemas y la competencia académica en matemáticas.

7.8.2 Entrenamiento a examinadores

Para asegurar el cumplimiento de las normas estandarizadas en la aplicación de los instrumentos se realizó un programa de entrenamiento. Dicho programa consistió en la lectura del manual de cada prueba, conocimiento del material, taller de explicación, juego de roles entre los examinadores antes de hacer la práctica con niños y videos de práctica para que cada examinador evaluara su propio desempeño con niños de la misma edad de los participantes de la investigación previo a la aplicación de los instrumentos a la muestra.

7.8.3 Recolección de información

Se acordó con el docente la fecha de aplicación de los instrumentos, tanto de la Escala de Competencia Académica del cuestionario “*Social Skill Rating Systems*”, como de las Entrevistas Flexibles Semi estructuradas «*Fusión de Procesos Cognitivos y Estrategias para la Resolución de Problemas*» a cada uno de los estudiantes seleccionados en la muestra. Los datos se recopilaron entre los meses de septiembre y noviembre de 2014.

7.8.4 Digitación de datos recolectados

Antes de digitar los datos recolectados, se revisó que las escalas de Competencia Académica del cuestionario “*Social Skill Rating Systems*” y las Entrevistas Flexibles Semiestructuradas, estuvieran completamente diligenciadas. Posteriormente, se organizaron

las bases de datos con los resultados de cada estudiante, con el fin de realizar el análisis estadístico.

7.8.5 Análisis de datos

Para la competencia académica se calculó un promedio de los dos ítems del instrumento que evaluó esta variable, tales como:

- ✓ *En Matemáticas, cómo es este niño comparado con los demás estudiantes.*
- ✓ *En términos de lo esperado para este grado, las habilidades de matemáticas para este niño son.*

Al momento de calcular la frecuencia para la variable de *Competencia Académica* en Matemáticas se categorizaron los datos de la siguiente manera: Debajo del promedio se encuentran los estudiantes que tuvieron una puntuación entre uno (1) y dos (2), en el promedio los estudiantes que tienen una puntuación de tres (3), y encima del promedio los estudiantes que puntuaron entre cuatro (4) y cinco (5).

Para el análisis de los datos se aplicaron estadísticas descriptivas, tales como la Media y la Desviación estándar. Asimismo, se utilizó una Prueba de Kolmogorov-Smirnov, de bondad de ajuste, la cual permite contrastar la hipótesis nula que expresa que, la distribución de una variable se ajusta a una determinada distribución teórica de probabilidad. Finalmente, se realizó una correlación de Spearman para responder a cada uno de los objetivos planteados en esta investigación.

8. RESULTADOS

Para el análisis de los resultados se utilizó la *estadística descriptiva*, así como también la *Media y la Desviación Estándar*. Este primer estadígrafo es utilizado para observar el valor central de los datos, en este caso, para examinar los valores promedio obtenidos por los estudiantes en las diferentes categorías de las variables objeto de estudio. Por otra parte, la desviación típica orienta en el establecimiento del grado de dispersión de los datos en relación a la media, es decir, determinar qué tan cercanos o lejanos están éstos valores de ella.

Se utilizó una Prueba de Kolmogorov-Smirnov, de bondad de ajuste, la cual sirve para contrastar la hipótesis nula de que la distribución de una variable se ajusta a una determinada distribución teórica de probabilidad. Si el valor del criterio o nivel de significancia es muy pequeño (menor que 0,05) se rechaza la hipótesis de normalidad y se concluye que las puntuaciones de esa variable no se ajustan a una distribución normal. Los resultados de la prueba de Kolmogorov-Smirnov, indican que se rechaza la hipótesis de normalidad con un nivel crítico de $p < 0.005$ (Ver anexo 1), y se concluyó que las puntuaciones de las variables no se ajustan a una distribución normal. Es decir, que se deben utilizar estadísticos no paramétricos para analizar los datos.

Luego, se procedió a realizar una correlación de Spearman. El número decimal obtenido al relacionar estas variables indica la fuerza de relación y significación estadística de las mismas. De esta manera, a partir del valor numérico del coeficiente de correlación obtenido, se considera que los valores cercanos a cero denotan una relación débil, mientras que los que

se aproximaron a + 1 ó a -1 indican una relación más fuerte. Se tomó en consideración los puntajes correlacionales que mostraron un nivel de significancia menor o igual a .05.

8.1 ANÁLISIS DE LOS DATOS

Para la realización del análisis de los datos se utilizó el software estadístico SPSS.

La tabla 3, muestra las frecuencias y porcentajes del uso del proceso *Explora* en la resolución de problemas. Se observó que el 100% de los estudiantes no utilizaron el proceso *Explora* en ninguno de los dos (2) problemas matemáticos.

Tabla 3. Frecuencias y porcentajes del uso del proceso Explora

| | Frecuencia | Porcentaje |
|--------------------------|------------|------------|
| No utilizaron el proceso | 41 | 100% |

La tabla 4, muestra las frecuencias y porcentajes del uso del proceso *Comprende en la resolución de problemas*. Se observó que el 93% de los estudiantes no utilizaron el proceso *Comprende* en ninguno de los dos problemas matemáticos, el 5% de los participantes utilizaron uno de los subprocesos en el que se evalúa el proceso *Comprende* para resolver uno de los dos ejercicios planteados y, sólo el 2% de los estudiantes utilizaron el proceso *Comprende* en los dos (2) problemas matemáticos.

Tabla 4. Frecuencias y porcentajes del uso del proceso Comprende

| | Frecuencia | Porcentaje |
|--|------------|-------------|
| No utilizó el proceso | 38 | 93% |
| Utilizó el proceso en uno de los dos problemas | 2 | 5% |
| Utilizó el proceso en ambos problemas | 1 | 2% |
| Total | 41 | 100% |

La tabla 5, muestra las frecuencias y porcentajes del uso del proceso *Adquiere Nueva Información en la resolución de problemas*. Se observó que el 98% de los estudiantes no utilizaron el proceso *Adquiere Nueva Información* en ninguno de los dos (2) problemas matemáticos y el 2% de los estudiantes utilizó el proceso *Adquiere Nueva Información* para resolver uno de los dos problemas matemáticos.

Tabla 5. Frecuencias y porcentajes del uso del proceso Adquiere Nueva Información

| | Frecuencia | Porcentaje |
|--|------------|-------------|
| No utilizó el proceso | 40 | 98% |
| Utilizó el proceso en uno de los dos problemas | 1 | 2% |
| Total | 41 | 100% |

La tabla 6, muestra las frecuencias y porcentajes del uso del proceso *Analiza* en la resolución de problemas. Se observó que el 76% de los estudiantes no utilizaron el proceso *Analiza* en ninguno de los dos problemas matemáticos, el 19% de los estudiantes utilizaron el proceso *Analiza* para resolver uno de los dos problemas matemáticos, y sólo el 5% de los estudiantes utilizaron el proceso *Analiza* en los dos (2) problemas matemáticos.

Tabla 6. Frecuencias y porcentajes del uso del proceso Analiza

| | Frecuencia | Porcentaje |
|--|------------|-------------|
| No utilizó el proceso | 31 | 76% |
| Utilizó el proceso en uno de los dos problemas | 8 | 19% |
| Utilizó el proceso en ambos problemas | 2 | 5% |
| Total | 41 | 100% |

La tabla 7, muestra las frecuencias y porcentajes del uso del proceso *Planea* en la resolución de problemas. Se observa que el 100% de los participantes no utilizaron el proceso *Planea* en ninguno de los dos (2) problemas matemáticos.

Tabla 7. Frecuencias y porcentajes del uso del proceso Planea

| | Frecuencia | Porcentaje |
|-----------------------|------------|------------|
| No utilizó el proceso | 41 | 100% |

La tabla 8, muestra las frecuencias y porcentajes del uso del proceso *Monitoreo Local* en la resolución de problemas. Se observó que el 86% de los estudiantes no utilizó el proceso *Monitoreo Local* en ninguno de los dos problemas matemáticos, el 12% de los estudiantes utilizó este proceso para resolver uno de los dos problemas matemáticos y sólo el 2% de los estudiantes utilizaron el proceso *Monitoreo Local* en los dos (2) problemas matemáticos.

Tabla 8. Frecuencias y porcentajes del uso del proceso Monitoreo Local

| | Frecuencia | Porcentaje |
|--|------------|-------------|
| No utilizó el proceso | 35 | 86% |
| Utilizó el proceso en uno de los dos problemas | 5 | 12% |
| Utilizó el proceso en ambos problemas | 1 | 2% |
| Total | 41 | 100% |

La tabla 9, muestra las frecuencias y porcentajes del uso del proceso *Monitoreo Global* en la resolución de problemas. Se observó que el 83% de los estudiantes no utilizó el proceso *Monitoreo Global* en ninguno de los dos problemas matemáticos, el 10% de los estudiantes utilizó este proceso para resolver uno de los dos problemas matemáticos y sólo el 7% de los estudiantes utilizaron el proceso *Monitoreo Global* en los dos (2) problemas matemáticos.

Tabla 9. Frecuencias y porcentajes del uso del proceso Monitoreo Global

| | Frecuencia | Porcentaje |
|--|------------|-------------|
| No utilizó el proceso | 34 | 83% |
| Utilizó el proceso en uno de los dos problemas | 4 | 10% |
| Utilizó el proceso en ambos problemas | 3 | 7% |
| Total | 41 | 100% |

La tabla 10 muestra las frecuencias y porcentajes del uso del proceso *Implementa* en la resolución de problemas. Se observó que el 61% de los estudiantes no utilizó el proceso *Implementa* en ninguno de los dos problemas matemáticos, el 17% de los estudiantes utilizaron este proceso para resolver uno de los dos problemas matemáticos y sólo el 22% de los estudiantes utilizaron el proceso *Implementa* en los dos (2) problemas matemáticos.

Tabla 10. Frecuencias y porcentajes del uso del proceso Implementa

| | Frecuencia | Porcentaje |
|--|------------|-------------|
| No utilizó el proceso | 25 | 61% |
| Utilizó el proceso en uno de los dos problemas | 7 | 17% |
| Utilizó el proceso en ambos problemas | 9 | 22% |
| Total | 41 | 100% |

La tabla 11, muestra las frecuencias y porcentajes de la valoración del profesor de la competencia matemática de los estudiantes. Se observó que el 63% de los estudiantes se encuentran por encima del promedio; el 25% de los estudiantes se encuentran en el promedio y el 12% de los estudiantes se encuentran por debajo del promedio en la competencia de matemáticas.

Tabla 11. Frecuencias y porcentajes de la valoración del profesor de la competencia matemática de los estudiantes

| | Frecuencia | Porcentaje |
|---------------------|------------|-------------|
| Debajo del promedio | 5 | 12% |
| Promedio | 10 | 25% |
| Encima del promedio | 26 | 63% |
| Total | 41 | 100% |

La tabla 12 muestra la frecuencia y porcentaje que tienen los estudiantes al resolver exitosamente un problema matemático. Se observó que el 76% no resolvió exitosamente ninguno de los dos problemas matemáticos, el 17% no resolvió exitosamente uno de los dos (2) ejercicios planteados, y sólo el 7% resolvió los dos (2) ejercicios matemáticos.

Tabla 12. Frecuencias y porcentajes que tienen los estudiantes sobre la exactitud al resolver un problema matemático

| | Frecuencia | Porcentaje |
|--|------------|------------|
| No resolvió ninguno de los dos problemas | 31 | 76% |
| Resolvió exitosamente uno de los dos problemas | 7 | 17% |
| Resolvió exitosamente ambos problemas | 3 | 7% |
| Total | 41 | 100% |

La tabla 13 muestra las medias y desviaciones en el uso de los procesos de resolución de problemas. Se observó que el proceso *Explora* tuvo una media de .00 (DS = .000), el proceso *Comprende* tuvo una media de .04 (DS = .187), el proceso *Adquiere Nueva Información* tiene una media de .01 (DS = .078), el proceso *Analiza* tuvo una media de .14 (DS = .279), el proceso *Planea* tuvo una media de .00 (DS = .000), el proceso *Monitoreo Local* tuvo una media de .08 (DS = .220), el proceso *Monitoreo Global* tuvo una media de .12 (DS = .291), el proceso *Implementa* tuvo una media de .30 (DS = .416).

Tabla 13. Medias y desviaciones en el uso de los procesos de resolución de problemas

| | N | Mínimo | Máximo | Media | Desv. típ. |
|----------------------------|----|--------|--------|-------|------------|
| Explora | 41 | .00 | .00 | .00 | .000 |
| Comprende | 41 | .00 | 1.00 | .04 | .187 |
| Adquiere nueva información | 41 | .00 | .50 | .01 | .078 |
| Analiza | 41 | .00 | 1.00 | .14 | .279 |
| Planea | 41 | .00 | .00 | .00 | .000 |
| Monitoreo Local | 41 | .00 | 1.00 | .08 | .220 |
| Monitoreo Global | 41 | .00 | 1.00 | .12 | .291 |
| Implementa | 41 | .00 | 1.00 | .30 | .416 |

La tabla 14 muestra las medias y desviaciones de la valoración del profesor sobre la competencia matemática de sus estudiantes. Se observa que la competencia matemática tiene una media de 3.62 (DS = .812).

Tabla 14. Medias y desviaciones de la valoración del profesor sobre la competencia matemática de sus estudiantes

| | N | Mínimo | Máximo | Media | Desv. típ. |
|------------------------|----|--------|--------|-------|------------|
| Competencia académica | 41 | 2.00 | 5.00 | 3.62 | .812 |
| N válido (según lista) | 41 | | | | |

La tabla 15 muestra los coeficientes de correlación entre los procesos de resolución de problemas que utilizaron los estudiantes y la valoración de su competencia en matemática, realizada por su profesor. No se observó relación significativa entre la competencia matemática y los siguientes procesos: *Comprende* ($r = -.002$, $p > 0.050$); *Adquiere Nueva*

Información ($r = .271$, $p > 0.050$); **Analiza** ($r = .066$, $p > 0.050$); **Monitoreo Local** ($r = -.191$, $p > 0.050$), **Monitoreo Global** ($r = -.155$, $p > 0.050$), e **Implementa** ($r = .092$, $p > 0.050$).

Tabla 15. Coeficiente de correlación entre los procesos de resolución de problemas que utilizan los estudiantes y la valoración del profesor de su competencia matemática

| | | Competencia académica |
|----------------------------|----------------------------|-----------------------|
| Explora | Coeficiente de correlación | . |
| | Sig. (bilateral) | . |
| | N | 41 |
| Comprende | Coeficiente de correlación | -.002 |
| | Sig. (bilateral) | .988 |
| | N | 41 |
| Adquiere Nueva Información | Coeficiente de correlación | .271 |
| | Sig. (bilateral) | .086 |
| | N | 41 |
| Analiza | Coeficiente de correlación | .066 |
| | Sig. (bilateral) | .683 |
| | N | 41 |
| Planea | Coeficiente de correlación | . |
| | Sig. (bilateral) | . |
| | N | 41 |
| Monitoreo Local | Coeficiente de correlación | -.191 |
| | Sig. (bilateral) | .231 |
| | N | 41 |
| Monitoreo Global | Coeficiente de correlación | -.155 |
| | Sig. (bilateral) | .333 |
| | N | 41 |
| Implementa | Coeficiente de correlación | .092 |
| | Sig. (bilateral) | .566 |
| | N | 41 |

8.2 RESUMEN DE LOS RESULTADOS

Al determinar el grado de contribución de los procesos cognitivos de resolución de problemas a la competencia académica en matemáticas, se observó que ninguno de los procesos cognitivos que utilizaron los estudiantes tiene correlación significativa con la puntuación de su competencia académica. Es decir, se acepta la *hipótesis nula de que los procesos cognitivos de resolución de problemas no contribuyen a la competencia académica en matemáticas.*

Al determinar el grado de contribución de los procesos metacognitivos de resolución de problemas a la competencia académica en matemáticas, se observó que ninguno de los procesos Metacognitivos que utilizaron los estudiantes tienen correlación significativa con la puntuación de su competencia académica. Es decir, se acepta la *hipótesis nula de que los procesos metacognitivos de resolución de problemas no contribuyen a la competencia académica en matemáticas.*

9. DISCUSIÓN

La presente discusión, expone los resultados del estudio en términos de sus objetivos específicos.

Seguidamente se discute lo pertinente al primer objetivo: “Determinar el grado de contribución de los procesos cognitivos de resolución de problemas a la competencia académica en matemáticas”. Los resultados presentados, muestran que el coeficiente de correlación, no fue significativo en ninguno de los procesos cognitivos estudiados, según se detalla seguidamente: **Comprende** ($r = -.002$, $p > 0.050$); **Implementa** ($r = .092$, $p > 0,050$); **Adquiere Nueva Información** ($r = .271$, $p > 0.050$).

La carencia de asociación entre los procesos y la competencia matemática, impidió avanzar en los análisis estadísticos para evaluar la contribución de los procesos cognitivos de resolución de problemas a la competencia académica, el cual éste objetivo buscaba precisar. Se explica esta falta de asociación en el hecho de que los procesos que sí fueron utilizados por los participantes, tuvieron una frecuencia baja de presentación, como se detalla a continuación, iniciando con el proceso **Comprende**, continuando con **Implementa** y finalmente con el proceso **Adquiere Nueva Información**.

En cuanto al proceso **Comprende**, los resultados revelaron que en este proceso el 93% de los estudiantes no hicieron uso del mismo, en ninguno de los dos problemas matemáticos a resolver, el 5% de los participantes utilizó uno de los subprocesos que evalúa el proceso **Comprende** para resolver uno de los dos ejercicios planteados, y sólo el 2% de los estudiantes

utilizó el proceso *Comprende* en los dos problemas matemáticos, reflejando posiblemente la dificultad que tienen los estudiantes participantes en identificar los datos del problema y la pregunta del problema. Este resultado explica parcialmente el bajo éxito en la resolución del problema donde se evidencia que el 76% de los estudiantes no resolvieron ninguno de los dos problemas, solo el 17% tuvo exactitud en su resolución y el 7% logró dar una respuesta acertada a los dos problemas planteados. Por otra parte, la baja frecuencia de uso del proceso *Comprende*, explica como éste afecta otros procesos metacognitivos como la *Planeación*, siendo congruente con estudios de Buitrago y García (2012), quienes concluyeron que, aunque el 80% de los estudiantes utilizaron el proceso de *Planeación* como una estrategia para resolver el problema, no en esa misma proporción los resultados o solución del problema fueron correctos. Esto se debe a que los estudiantes presentaron dificultad en la Comprensión del problema, lo que influyó directamente en la *Planeación*. Por su parte, el estudio de Erbas & Okur (2010), presenta en sus resultados que, una de las razones principales para no encontrar una respuesta correcta en los problemas se debe a que los estudiantes muestran, en cuatro casos de cincuenta, al proceso de *Comprensión*, como la razón principal del fracaso. Asimismo, Dermitzaky, Leondari y Goudas (2009), demostraron en su estudio, que existe una mayor relación entre la *Comprensión* ($r = 0.62, p < 0.05$) con el desempeño de la tarea problema que los demás procesos evaluados. Estas investigaciones antes mencionadas respecto a los resultados de la presente investigación son congruentes, puesto que devela como el bajo uso o la falta de comprensión del problema, podría conllevar a los estudiantes al fracaso en la resolución de los mismos.

Asimismo, en cuanto al uso del proceso *Comprende*, el cual presentó una media muy baja ($M = .04$, $DS = .187$), refleja una posible dificultad que tienen los estudiantes participantes, quizás por la falta de práctica en resolución de problemas en los primeros grados de primaria. Estos resultados son coherentes con el estudio de Van der Stel & Veenman (2008), quienes encontraron cargas negativas para resolver tareas de matemáticas (En la etapa de Orientación donde se vislumbra el proceso de *Comprensión*): -0.48); cuando el proceso de *Comprensión* se utilizó de forma incipiente; lo cual parece explicar que ésta y otras habilidades cognitivas muestran un desarrollo inicial para los niños de dicho estudio (edad de 12 años).

La falta de resultados en cuanto al uso del proceso *Comprende* no corresponde con estudios que sí encontraron un alto nivel de empleo de este proceso, evidenciando éxito en la resolución de problemas matemáticos, en la medida en que los estudiantes fueron conscientes de este proceso. Tal es el caso de Karatas y Baki (2013), Hong, Lee & Yeo (2012) y Casas, De Alba y Taverner (2009), quienes evidenciaron diferencias significativas en el uso de los procesos cognitivos especialmente de *Comprensión* o entendimiento del problema en comparación con otros grupos de estudiantes que no hacen uso recurrente a este proceso. Así por ejemplo, Karatas y Baki (2013), muestran cómo los estudiantes inmersos en un ambiente de aprendizaje logran un incremento en la resolución exitosa de problemas, mientras que en los otros estudiantes se observa un decrecimiento, evidenciándose en estos grupos diferencias estadísticas significativas ($F(1 - 50) = 47.597$, $p < .05$). Asimismo en la fase de entendimiento del problema, el estudio de Karatas y Baki (2013), reveló diferencias significativas entre la primera aplicación de las pruebas GE ($X = 2.756$) y del GC ($X = 2.775$) respecto al promedio de puntajes en la tercera aplicación en el GE ($X = 2.951$) y el GC

($X = 2.722$), lo cual evidencia que el grupo de estudiantes expuestos a los procesos cognitivos en un ambiente de aprendizaje muestran progreso y diferencias significativas en el entendimiento del problema ($F(1 - 50) = 14.955, p < .05$), lo que indica que el nivel de éxito de los estudiantes, relacionado con el entendimiento del problema, fue posible mejorarlo positivamente a lo largo del estudio.

Hong, Lee & Yeo (2012), detallan ganancias significativas en los grupos comparados en cuanto al nivel de *Comprensión* que, para el caso del Grupo Experimental empleado, es de $M = 0,71$ ($SD = 1,64$) respecto al grupo $M = 0,00$ ($SD = 1,111$) con una diferencia en medidas de 0.71 ; $SMD = 0,64$ y un gran tamaño del efecto (Cohen, 1988). Finalmente, De Alba y Taverner (2009), mostraron que la comprensión y producción numérica presentaba un efecto significativo de grupo, $F_{3,79} = 7.491$ ($p = 0.000, \eta^2 = 0.221$), mostrando además diferencias entre el grupo control y el resto de los grupos.

En cuanto a las asociaciones entre el proceso *Comprende* y la *Competencia Académica*, hay estudios que sí encontraron correlación y, además, precisaron contribuciones o relaciones causa efecto, tal es el caso de Troncoso (2013), quien confirma que existe una correspondencia entre el grado de *Comprensión* de la pregunta y el éxito en la resolución de problemas que conlleva a un mejor desempeño en el área de matemáticas. Así por ejemplo en la suma, el 60% de los estudiantes que hicieron uso de los procesos presentaron un porcentaje de éxito del 100% en comparación con el resto de estudiantes que solo logró un 60% de éxito. En el caso de la resta, inicialmente el 60% estudiantes presentaban un porcentaje de éxito en la resolución entre 0% a 33% y posteriormente con el uso de los

procesos, el 80% de estudiantes logró un porcentaje de éxito demostrable del 100%. Asimismo, se evidenció un incremento en el desempeño en la resolución de problemas con operaciones de multiplicación en estudiantes que estaban entre un 0% y 50% a un incremento del desempeño de un 75% en el 60% de los estudiantes, y del 100% en el 40% restante; y finalmente con las operaciones utilizables en la división para resolución del problema, el 80% de los estudiantes que se encontraba inicialmente entre el 0 y 50% de éxito en su desempeño, al hacer uso de los procesos, evidenció un incremento en la resolución de un 75% en el 80% de los estudiantes y de un 100% de éxito en el 20% de los estudiantes restantes.

En cuanto al proceso **Implementa**, los resultados del presente estudio evidenciaron que el 61% de los estudiantes no utilizaron el proceso en ninguno de los dos (2) problemas matemáticos, el 17% hizo uso del proceso antes mencionado en uno de los dos (2) problemas, y solo el 22% de los estudiantes aplicó el proceso **Implementa** en la resolución de los dos problemas matemáticos, reflejando posiblemente la dificultad que podrían tener los estudiantes participantes en realizar el plan pensado, o en ejecutar las estrategias planteadas. Es decir, que el hecho de presentarse un porcentaje considerablemente alto de estudiantes que no utilizó dicho proceso, podría explicar que el 78% de los estudiantes no lograran resolver exitosamente ninguno de los dos problemas, que un 7% de los estudiante lograran exactitud en la resolución de ambos problemas y que solo un 17% de los estudiantes resolvieran con exactitud uno de los dos problemas matemáticos que se evaluaron. Estos resultados son congruentes con estudios como el de Yimer & Ellerton (2006), en donde el proceso de implementación fue solo del 18% en cuanto a su frecuencia y el valor de R² desde un análisis de regresión simple fue 0.536. Es decir, que las variables de este estudio sólo

representaron el 53,6% de todos los factores que influyen en el rendimiento de los estudiantes en la resolución de problemas de matemáticas. Para ilustrar este hallazgo el estudio de Yimer & Ellerton (2006), presentó dos estudios de caso: en el primer caso el estudiante tomó muy poco tiempo para aclarar el problema y pensar en una estrategia alternativa para su resolución. Es decir, no se observó rastro de desarrollo de procesos cognitivos y metacognitivos en la resolución del problema y tampoco tenía dominio de las habilidades matemáticas básicas esenciales para la resolución, por tanto, no logró la solución correcta del problema. Sin embargo, en el segundo caso que estudiaron los autores de este estudio, el estudiante pasa por todas las etapas de solución de problemas propuestas por Polya, lo que le lleva a una solución correcta del problema. Este estudio resulta congruente con los resultados de la presente investigación en donde, como ya se ha discutido, un alto porcentaje de estudiantes no logró exactitud en la resolución de ambos problemas, casi en una proporción cercana a los estudiantes que no hicieron uso de este proceso. También se observa una correspondencia en los resultados con el estudio de Erbas & Okur (2010), donde se concluyó que los errores en el proceso de *Implementación* en la resolución problemas en tres (3) casos de cincuenta (50), condujeron a resultados incorrectos o parcialmente incorrectos.

En otras investigaciones se presenta un uso apropiado del proceso *Implementa*, tal como lo revela el estudio de Mandaci & Kendir (2013), en donde se muestran diferencias significativas en el rendimiento de los estudiantes para el grupo experimental, cuya puntuación media fue de 82.43 en comparación con el grupo control de 67.50 en la prueba de rendimiento en un rango de puntuación superior de cien (100) e inferior de cero (0) puntos respectivamente. Encontrándose además, en los resultados de la prueba *t* del estudio en

mención, una diferencia significativa (6,974t) entre los grupos de acuerdo al nivel aceptado de significación (0,05). El estudio de Mandaci & Kendir (2013), pudo inferir que los procesos cognitivos que emplearon los estudiantes del grupo experimental entre los cuales se resaltó el proceso de **Implementación** en la resolución de problemas, inciden en un mejor rendimiento en los estudiantes que los utilizan, por encima de aquellos que no siguen dichos procesos.

Por otra parte, Karatas y Baki (2013), en los resultados de su estudio basado en las fases de resolución de problemas de Polya (1945), evidenciaron que en el proceso de **Implementación** o de desarrollo del plan, se presentan diferencias significativas ($F(1 - 50) = 42.699, p < .05$) y al llevar a cabo el plan se encontraron diferencias significativas entre los estudiantes a partir de la segunda y tercera aplicación de los problemas, entre los grupos control (GC) y experimental (GE) ($T(51) = 3.010, p < .05$). Estos resultados permitieron a los investigadores concluir que en un ambiente de aprendizaje los procesos tienen una influencia positiva en el éxito de los estudiantes del GE en comparación con el grupo control que no utilizó el proceso.

La presente investigación, cuya media fue de .30 (DS=.416), en contraste con la estadística descriptiva del estudio de Dermitzaky, Leondari y Goudas (2009), que mostró una mayor presencia de los procesos de **Implementación** ($M = 3.10, SD = 0.44$), y coeficientes de correlación de Pearson, mostraron que los diferentes procesos y sus factores subyacentes fueron diferencialmente relacionados con el rendimiento en la tarea y el autoconcepto en matemáticas.

Se evidencian en algunas investigaciones anteriores (Mandaci & Kendir, 2013; Karatas y Baki, 2013; Yimer & Ellerton, 2006), contribuciones positivas en la resolución de los problemas y, en la competencia académica en matemáticas, en la medida en que los estudiantes hacen uso de este proceso, en contraste con los resultados de la investigación actual en donde la falta de uso de este proceso, por la mayoría de los estudiantes, podría incidir en la asociación de este proceso y la valoración del profesor de la competencia académica en matemática de los estudiantes, en donde el coeficiente de correlación fue de .092 y la significancia bilateral fue de .566. Es decir no se observó relación significativa entre la competencia matemática y el proceso implementa ($r = .092, p > 0,050$).

Por último, la frecuencia en el uso de proceso *Adquiere Nueva Información* en el presente estudio, mostró que el 98% de los estudiantes no utilizó en ninguno de los dos problemas matemáticos y solo el 2% sí lo hizo para resolver uno de los dos problemas matemáticos, reflejando posiblemente la dificultad que podrían tener los estudiantes participantes en pedir que le repitan el problema y/o la pregunta del problema, o en leer de nuevo el problema si lo tiene en frente para recoger nueva información y de esa manera comprenderlo.

Continuando con la discusión respecto al segundo objetivo del presente estudio: “*Determinar el grado de contribución de los procesos metacognitivos de resolución de problemas a la competencia académica en matemáticas*”, los resultados antes presentados muestran que el coeficiente de correlación entre la competencia matemática y los procesos

no fue significativo en ninguno de los procesos metacognitivos estudiados, según se detalla seguidamente: *Analiza* ($r = .066$, $p > 0.050$); *Monitoreo Local* ($r = -.191$, $p > 0.050$) y *Monitoreo Global* ($r = -.155$, $p > 0.050$). Cabe anotar que, el uso de los procesos *Explora* y *Planea*, no se evidenció en ninguno de los participantes.

De igual forma que en los procesos cognitivos, la falta de asociación entre los procesos y la competencia matemática, impidió avanzar en el análisis estadístico que permitiera evaluar el grado de contribución de los procesos metacognitivos de resolución de problemas a la competencia académica de acuerdo al segundo objetivo que buscaba precisar la presente investigación. Esta falta de asociación se explica basada en el hecho de que los procesos que los estudiantes utilizaron en la resolución de los dos problemas a los que fueron expuestos, tuvieron una frecuencia baja en su uso como a continuación se describe:

En cuanto al proceso *Explora*, en la presente investigación se encontraron valores de media en el uso de los procesos de resolución de problemas, muy por debajo del valor máximo posible (1.00), para los procesos cognitivos, en el que cabe resaltar que no se evidenció este proceso por parte de los estudiantes, reflejando posiblemente la dificultad que tienen en activar sus conocimientos o estrategias que fueron exitosas en situaciones anteriores, previo a la solución de los problemas. Es posible que la limitación en el uso de este proceso en la resolución de problemas matemáticos, pueda ser por razones sociodemográficas, tales como: edad, el nivel de educación, condiciones socioeconómicas, etc.

La falta de presencia en el proceso *Explora* durante la resolución de problemas en los sujetos de este estudio, es coherente con estudios anteriores en los cuales los participantes también tuvieron frecuencias bajas en el uso del proceso de *Exploración*. Erbas & Okur (2010), encontraron episodios del proceso de *Exploración* sólo en algunos estudiantes, siendo su frecuencia de ocurrencia una de las menores con respecto a los demás procesos estudiados; así mismo, se identificó en el estudio de Van der Stel & Veenman (2008), baja participación de procesos de *Exploración* dentro del componente de dominio general valorado (según análisis de PCA: 0.65). Por otra parte, la falta de resultados en cuanto al uso del proceso *Explora*, no corresponde con el estudio de Rott (2013) quien pudo presumir que el solo uso, de manera frecuente del proceso de *Exploración*, conduce a lo que Shoenfeld denominó una “búsqueda inútil”, lo cual se refleja en una incidencia negativa en el desempeño de los estudiantes en la resolución de tareas o problemas matemáticos.

Se podría suponer que la no observación del proceso *Explora* en la resolución de problemas matemáticos, es un posible signo de las limitaciones en los sujetos en el uso de procesos cognitivos y en especial en niños de los primeros años de educación, en escuelas que carecen de prácticas que promueven el uso de procesos cognitivos, pudiendo este hecho conducir a resultados deficientes en la solución de problemas, como sucede en el estudio de Rott (2013), sin embargo no siempre se puede suponer que, la falta de uso del proceso *Explora* tenga una asociación negativa con la competencia académica en matemáticas, como bien se presenta en la investigación de Erbas & Okur (2010), debido a que muchos estudiantes pueden obviar este proceso y tener éxito en la resolución de problemas, quizás porque el estudiante tiene otras destrezas o habilidades intelectuales, las cuales no se perciben

durante el proceso de resolución, lo que también guarda correspondencia con los resultados del estudio de Van der Stel et al. (2010), en donde se mostró una disminución en la media del uso de estos procesos por parte de los estudiantes del tercer año con respecto a los del segundo en la categoría de “orientación”, la cual incluye entre otros, el proceso de *Exploración*.

Respecto al proceso *Analiza* no se evidenció su uso en el 76% de los estudiantes en ninguno de los dos problemas matemáticos. El 19% hizo uso del proceso *Analiza* para resolver uno de los dos problemas matemáticos, y sólo el 5% de los estudiantes utilizan el proceso *Analiza* en los dos problemas matemáticos propuestos, reflejando la posible dificultad que podrían tener los estudiantes participantes en dividir el problema en sus partes, en simplificar el problema, y en seleccionar el tipo de operación aritmética a realizar. Siendo tan significativamente bajo el uso del proceso *Analiza*, se encuentra congruencia con los resultados de la investigación de Erbas & Okur (2010), donde se concluyó que, una las razones principales para llegar al fracaso o a la no resolución de problema se debió a la falta de análisis en siete (7) casos, conduciendo a su vez a episodios de *Planeación* e *Implementación* inapropiados. Por su parte, en el estudio de Pifarré y Sanuy (2001), los datos estadísticos en porcentajes de frecuencia de los procesos metacognitivos como el *Análisis* (alrededor del 8%) mostraron ser muy inferiores al de otros procesos como el de *ejecución*, que en dicho estudio fue del 55%.

En contraste con la presente investigación, la estadística descriptiva del estudio de Dermitzaky, Leondari & Goudas (2009), mostró una mayor presencia de los procesos de

Implementación ($M = 3.10$, $SD = 0.44$) y en los procesos de *Análisis* ($M = 2.96$, $SD = 0.56$). Así mismo, se contrasta con el estudio de Harskamp y Suhre (2007), en estudiantes de secundaria, al evaluar la eficacia de programa de computador controlado por los estudiantes en el área de matemáticas, hallando que en el Grupo Experimental, los estudiantes tuvieron éxito para resolver el 84% de los treinta y cinco (35) problemas planteados, utilizando con mayor frecuencia el proceso de *Análisis* en un 63% de los problemas.

En cuanto a las asociaciones entre el proceso *Analiza* y la competencia en matemática, hay estudios que sí encontraron correlación y además precisaron contribuciones o relaciones causa efecto. En este sentido, es importante resaltar la importancia de este proceso dentro del desarrollo de la competencia académica en matemáticas. Así se desprende del estudio de Dermitzaky, Leondari y Goudas (2009), quienes evidenciaron en las correlaciones de Pearson la existencia de mayores relaciones de los procesos de *Análisis* ($r = 0.65$, $p < 0.05$) y de *Comprensión* ($r = 0.62$, $p < 0.05$) con el desempeño de la tarea problema. Es decir, que la implementación de estos procesos y sus factores subyacentes fueron diferencialmente relacionados con el rendimiento en la tarea y el autoconcepto en matemáticas.

Así mismo, Jimena, Korzeniowski & Esposito (2014) mostraron una asociación significativa ($r = 0,292$, $p < 0,01$) entre la capacidad de los niños (estudiantes de tercero a quinto de primaria) para resolver problemas matemáticos y su habilidad para organizarlos. En ese sentido, los niños con una estrategia de organización (en la que se vislumbra el proceso de *Análisis*) parcialmente estructurada y conceptualizada, presentaron un rendimiento

significativamente mayor ($F = 7,632$, $p = 0,001$, $f = 0,41$) en la resolución de problemas matemáticos en comparación con los niños con estrategias pobres de organización.

En el caso del proceso de *Monitoreo Local*, el 86% de los estudiantes no lo utilizó en ninguno de los dos problemas, el 12% utilizaron este proceso en por lo menos uno de los dos (2) problemas y solo el 2% de la muestra evidenció su uso en ambos problemas, reflejando posiblemente la dificultad que podrían tener los estudiantes participantes en reflexionar acerca de las actividades o problemas, y la forma como están llevando a cabo o solucionando los mismos, incluyendo la autorregulación y auto chequeo durante su resolución y la implementación de la estrategia remedial. De la misma manera, el valor de media ($M = .08$; $SD = .220$) ratifica el bajo uso de este proceso en los estudiantes, considerando que el valor máximo es 1.00. Este resultado puede sugerir la falta de autorregulación en los niños a esta edad, o la carencia de implementación en el aula de estrategias de resolución de problemas con enfoque metacognitivo que fomenten el empleo de estos procesos, debido a que no se evidenció fuertemente, la presencia de acciones de verificación y chequeo al momento de resolver la pregunta del problema, además tampoco se puede inferir de los resultados, si aquellos niños que sí usaron el proceso de *Monitoreo Local*, hayan obtenido mejor desempeño en la resolución del problema y así mismo en la competencia en matemáticas, que aquellos que no la emplearon. En correspondencia con este resultado y, teniendo en cuenta las posibles causas relacionadas con la edad, Van der Stel & Veenman (2008), encontraron que la carga arrojada para la habilidad metacognitiva de Evaluación (la cual comprende procesos de *Monitoreo Local*) en el componente de dominio general no era muy alta (0.58, según análisis PCA) en niños con edades promedio de doce (12) años, ocho (8)

meses. De igual manera, el análisis de PCA arrojó un valor de carga negativo (eigenvalor de -0.67) para la habilidad metacognitiva de *Evaluación* en el dominio específico de matemáticas, sugiriendo a los autores un posible inicio del desarrollo de esta habilidad a la edad de doce (12) años, lo que podría explicar el comportamiento de los estudiantes de la muestra del presente estudio, que se encuentran en una edad entre los siete (7) y ocho (8) años. En esta misma línea, Van der Stel et al. (2010), mostraron que procesos como el *Monitoreo Local* y el *Monitoreo Global* van adquiriendo mayor utilización en los niños en edades entre los trece (13) y quince (15) años, mostrando además un aumento en la calidad en que se presentan dichos procesos. Sin embargo, y en correspondencia con el presente estudio, parece vislumbrarse débilmente la incidencia de dichas habilidades metacognitivas en el rendimiento en matemáticas al inicio del estudio de Van der Stel et al. (2010), a la edad promedio de trece años, no siendo así en la segunda aplicación de post-test, en donde sí evidenciaron correlación significativa, entre la cantidad ($r = 0.33$, $p < 0.05$) y calidad ($r = 0.65$, $p < 0.01$) de las habilidades metacognitivas y el rendimiento en matemáticas.

Resultados similares arrojaron el estudio de Pifarré y Sanuy (2001), quienes encontraron que los estudiantes no acudieron a realizar procesos de *Monitoreo Local* ni *Monitoreo Global* (visto en la categoría de “Revisión” en la que se hizo énfasis en la valoración del proceso y del resultado), con datos estadísticos en porcentajes de frecuencia de alrededor del 0%.

Este hallazgo apoya investigaciones anteriores, en cuanto a las deficiencias encontradas en el uso de procesos metacognitivos como el *Monitoreo Local*, en la resolución de

problemas, en las que se ha comparado la utilización de dicho proceso, en diversos sujetos que no han tenido ninguna intervención, con respecto a otros que sí han sido sometidos a algún programa con enfoque en el uso de estrategias o de ayudas metacognitivas (Veenman, Kok y Blöte, 2005; Ge & Land, 2003; Martínez, et al., 2011; Gassin ,et al., 2011).

Algunos de estos estudios realizados, además de revelar las deficiencias en el uso del proceso de *Monitoreo Local*, en sujetos de diferentes edades que no habían participado inicialmente, en ningún proceso de intervención de formación en resolución de problemas matemáticos con orientación metacognitiva, han coincidido en mostrar una relación de incidencia del uso de dicho proceso (Gassin, et al., 2011) o de manera conjunta con otros procesos (Veenman, Kok y Blöte, 2005), con el desempeño en la resolución de problemas matemáticos o de tareas matemáticas, en contraste con el hallazgo de esta investigación.

Teniendo en cuenta que investigaciones anteriores han encontrado incidencias del tipo de problemas matemáticos en la utilización de los procesos metacognitivos y a su vez la implicación en los resultados de su solución (Mokos & Kafoussi, 2013), es importante considerar esta variable en el análisis de resultados. Por ejemplo Mokos & Kafoussi (2013), mostraron que los niños que resolvieron problemas complejos, hicieron mayor uso de los procesos de *Monitoreo Local* y *Global* que el grupo sometido a problemas abiertos. Dicha investigación sugirió que en la medida en que se complejiza el problema se hace más evidente el uso del *Monitoreo Local*. De lo anterior, se puede inferir que el tipo de problema usado para el presente estudio, el cual consistió en un problema abierto de palabra, pudo haber tenido alguna incidencia en el bajo uso en los estudiantes del proceso *Monitoreo Local*.

Adicional a lo anterior, es importante tener en cuenta, la forma en que fue presentado el problema a los niños. Ésta consistió en enunciar el problema de manera verbal a través de una historia sencilla, familiar para el estudiante, lo que en primer lugar, le permitió a ellos fijar su atención a su enunciado, dado que no fue entregado en forma escrita y en segundo lugar, activar el proceso de *Comprensión*. Las dificultades encontradas en el proceso de *Comprensión* ($M = .04$, $SD = .187$), sugieren que otros procesos se hallan visto afectados, lo que parece explicar, por una parte el bajo uso del proceso *Implementa* ($M = .30$, $SD = .416$) y, por consiguiente, que el 76% de los estudiantes no resolvieran exitosamente ninguno de los dos (2) problemas. De esta manera, los resultados sugieren que alrededor del 70% de los estudiantes no siguieron un proceso de *Implementación* de una estrategia, lo que conduciría a pensar que posiblemente dichos estudiantes hubieran dado una respuesta sin haberse detenido lo suficiente a pensar en una posible forma de solucionar los problemas, lo que pone de manifiesto lo sustentado en cuanto a la imposibilidad de percibir otros procesos como el *Monitoreo Local* o *Monitoreo Global*, dado que no se evidencia en estos hallazgos, el desarrollo de un proceso de resolución de cada problema.

Por otra parte, las investigaciones que han comparado a grupos de estudiantes teniendo en cuenta diversos criterios, como por ejemplo el de “nivel de desempeño en matemáticas” (Rodríguez, et al., 2012; Calero, et al., 2010), y “Uso de nivel de enfoque del aprendizaje (UDAL)” (García, et al., 2015), han encontrado diferencias entre los grupos en cuanto al uso del proceso de *Monitoreo Local* en el proceso de resolución de problemas matemáticos, intentando así, explicar la posible relación entre la manifestación de éste y otros procesos,

con el desempeño en tareas o problemas matemáticos y en general con la competencia matemática. Por ejemplo, Rodríguez et al. (2012), mostró que los dos grupos comparados, presentaron diferencias estadísticas significativas en todas las variables analizadas, presentándose en mayor medida la monitorización en el grupo de mayor nivel (Monitorización: $M = 12.86$, $SD = 2.713$) que en el grupo de menor nivel en matemáticas (Monitorización: $M = 18.84$, $SD = 4.306$), con una de las mayores puntuaciones t-student entre las funciones ejecutivas revisadas ($t = 6.653$, $p = .000$), lo que sugirió una gran problematidad en la aplicación de procesos de *Monitoreo Local* en el grupo de menor desempeño en matemáticas.

En contraste, Calero et al. (2010), no hallaron diferencias significativas entre los grupos de alto y bajo rendimiento en los procesos de autorregulación que comprendían el *Monitoreo Local*, obteniéndose medias inferiores a 1.00, de una máxima puntuación de 10.0.

Otras investigaciones, en contraste con los resultados hallados, evidencian en los sujetos de estudio, alta frecuencia en el empleo del proceso de *Monitoreo Local* (Buitrago y García, 2012; Dermitzaky, et al., 2009) al realizar procesos de control y verificación del proceso de solución en los problemas. Por ejemplo, en los resultados de la investigación de Buitrago y García (2012), se evidenció el uso del proceso *Monitoreo Local*, en el 60% de los estudiantes, lo que les permitió a algunos identificar el error, y así obtener la solución correcta del problema y en otros, a replantear nuevas ideas de solución. Sin embargo a pesar que Dermitzaky, Leondari y Goudas (2009) demostraron un mayor empleo del proceso de *Monitoreo Local* ($M = 3.22$, $SD = 0.44$) en los niños de primer y segundo grado de primaria,

con relación a los otros procesos observados, la relación de incidencia de este proceso con el desempeño en la tarea problema ($r = 0.36$, $p < 0.05$), fue la menor.

Continuando con el análisis de los resultados en cuanto a la frecuencia y porcentajes de uso del proceso de *Monitoreo Global*, se observa un relativo incremento en cuanto al uso de este proceso por parte de los estudiantes en comparación con el proceso de *Monitoreo Local* donde solo el 2% hizo uso de éste en los dos problemas, mientras que el 7% de recurrió al *Monitoreo Global*. Sin embargo, este porcentaje de frecuencia de uso continúa siendo significativamente bajo si además se considera que el 83% de los estudiantes no utilizó el proceso *Monitoreo Global* en ninguno de los dos problemas matemáticos, y el 10% de la muestra lo usó en por lo menos uno de los dos problemas matemáticos a resolver, reflejando posiblemente la dificultad que podrían tener los estudiantes participantes en reflexionar acerca de las actividades o problemas, y la forma cómo los llevaron a cabo, o los solucionaron, incluyendo la autorregulación y autoevaluación al finalizar la resolución del problema y la implementación de la estrategia remedial, lo que a su vez podría tener implicaciones en el desempeño de la resolución de problemas. Es posible que la falta de fomento en el aula del proceso de *Monitoreo Global*, pudiera explicar la ausencia que en general, se presenta en los estudiantes por realizar control o revisión final de los resultados y del proceso de resolución o por intentar modificar la estrategia en caso de no tener éxito en su implementación. Acorde con estos resultados, Buitrago y García (2012), observaron en todos los estudiantes dificultades para evaluar el proceso de solución, falta de interés en revisar todos los pasos en la solución de problemas, aún más, cuando tenían la certeza de su éxito. De igual manera Pifarré y Sanuy (2001), encontraron que los estudiantes no acudieron

a realizar “revisión” para detectar posibles errores, o realizar revisión de procedimiento o de cálculos. En el caso de la investigación de Dermitzaky, Leondari y Goudas (2009), la estrategia remedial ($M = 2.0$, $SD = 0.74$), producto del *Monitoreo Global* fue de menor presencia, comparada con los demás procesos valorados. Así mismo, Méndez y Peña (2011), evidenciaron que al 74% de los estudiantes se les dificultó el proceso de evaluación (visto como *Monitoreo Global*), debido que, a pesar de haber identificado las dificultades obtenidas al resolver el problema, les costó modificar su plan inicial para mejorar su entendimiento y los resultados. Sin embargo, estudios de Erbas & Okur (2010) y Harskamp y Suhre (2007) evidencian la presencia moderada de este proceso cuando los estudiantes hicieron verificación al problema resuelto y por tanto corrección al método de solución cuando fue requerido.

Coherente con investigaciones anteriores, este resultado parece sugerir que, en entornos de aprendizaje carentes de un debido desarrollo de procesos metacognitivos para la resolución de problemas matemáticos, es muy posible presenciar dificultades en la empleabilidad de este proceso y por tanto en el desempeño de las competencias matemáticas en los sujetos. Acorde con esto, dichas investigaciones han revelado resultados diferenciados cuando se compara a grupos de estudiantes intervenidos con algún enfoque de aprendizaje, o de uso de estrategias, o de programas informáticos que incorporan ayudas con orientación metacognitiva, con otros grupos que son sometidos a procesos de enseñanza de las matemáticas o a la resolución de problemas de forma tradicional, favoreciendo dichos resultados a los grupos intervenidos (Karatas y Baki, 2013; Méndez y Peña, 2011; Harskamp y Suhre, 2007). También se aprecian mejoras sustanciales en el logro de las competencias,

cuando a un mismo grupo se le interviene con un programa de ayudas metacognitivas y se comparan sus resultados de desempeño de aprendizaje (Veenman, Kok y Blöte, 2005) en momentos antes y después de la intervención

En este sentido, por ejemplo, Karatas y Baki (2013), presentaron sus resultados desde la fase de Polya “Mirar Atrás” no evidenciándose en la primera aplicación, diferencias significativas entre el GE y GC ($t(50) = 1.120, p > .05$). Sin embargo, en la segunda aplicación en la medida que los estudiantes fueron incorporando los procesos, se comenzaron a presentar diferencias claras entre los grupos ($t(51) = 3.464, p < .05$). En ese sentido, el puntaje promedio del GE en la primera aplicación fue $X = 1.717$ y en la tercera aplicación $X = 1.826$, y para el GC en la primera aplicación fue $X = 1.564$ y en la tercera aplicación fue $X = 1.342$. Estos datos permitieron observar diferencias significativas entre los grupos en la fase de “*Mirar Atrás*” ($F(1 - 50) = 24.233, p < .05$), lo que demostró un incremento en el éxito en los estudiantes en la solución de problemas basado en un ambiente de aprendizaje con fomento al empleo de estrategias metacognitivas. De manera semejante Méndez y Peña (2011), al finalizar la intervención encontró que el grupo experimental alcanzó un rendimiento superior al grupo control (GE: 19,33 puntos; $SD = 2,069$ y el GC : 9 y 10 puntos; $SD = 1,586$) y Harskamp y Suhre (2007), por otra parte, encontraron que la verificación de la respuesta por parte de los estudiantes se correlacionó positivamente ($r = 0.32, p < .05$) con las puntuaciones del pos-test, al utilizarse las ayudas metacognitivas. Sin embargo, acorde con los resultados del presente estudio, no hubo correlaciones significativas entre el uso del proceso de verificación (entendido como un *Monitoreo Global*) durante los problemas y las puntuaciones pre-test, es decir, cuando aún no se habían usado las ayudas metacognitivas

($r = 0.07$, $p > .05$). Por último, en el caso del estudio de Veenman, Kok y Blöte (2005), los episodios de “*control de la respuesta*”, entendido como un **Monitoreo Global** mejoraron después que los estudiantes emplearan algunas ayudas metacognitivas (Sin ayuda: $M = 0.53$, $SD = 0.65$; con ayuda: $M = 0.73$, $SD = 0.68$, significancia de la diferencia: $p < 0.04$), pero en contraste con los resultados de la presente investigación, los hallazgos indicaron contribución de la metacognición a los resultados del aprendizaje, tanto en el desempeño sin ayuda metacognitiva ($r = 0.47$; $p < 0.01$), como en el desempeño con ayuda metacognitiva ($r = 0.48$; $p < 0.01$) así como en la calificación promedio en matemáticas (GPA) ($r = 0.30$; $p < 0.05$).

Otros estudios también infieren, por sus resultados, asociaciones entre el proceso **Monitoreo Global** y la *Competencia Académica en matemáticas*, los cuales precisaron contribuciones o relaciones causa efecto (Calero, et al., 2010; Casas, et al., 2009; Méndez y Peña, 2011; García, et al., 2015), en las cuales los sujetos son comparados de acuerdo a su rendimiento en matemáticas. Así por ejemplo, Calero et al. (2010), mostraron puntuaciones y diferencias significativas en el grupo de alto rendimiento en matemáticas frente al de bajo rendimiento en cuanto al episodio de Evaluación, entendido como un **Monitoreo Global** ($t(1,45) = 5.00$, $p < .05$). Por otra parte, Casas et al. (2009) encontraron diferencias significativas en la variable metacognitiva de **Monitoreo Global** ($F_{3,79} = 6.157$ ($p = 0.001$, $\eta^2 = 0.189$)) en las comparaciones entre el grupo control y el grupo DAM ($p = 0.011$), y entre el grupo control y el grupo TDAH + DAM ($p = 0.002$). Sin embargo, en esta investigación un análisis sobre la evaluación no mostró diferencias entre los grupos, $F_{3,79} = 2.552$ ($p = 0.061, 712 = 0.080$). Asociaciones similares se establecen en el estudio de García et al. (2015), cuyos resultados revelaron diferencias estadísticamente significativas en cuanto al

proceso de *Monitoreo Global*, en los estudiantes que presentaron un enfoque de profundidad de aprendizaje (UDAL) alto, y quienes utilizaron con mayor frecuencia el proceso de *Monitoreo Global* [$\chi^2(2) = 17,951, p \leq 0.001$] que aquellos con un UDAL bajo, los cuales dedicaron mucho tiempo leyendo el problema, no pudiéndose percibir notablemente la utilización de dicho proceso.

Por otra parte, y como se explicitó anteriormente el proceso *Planea* no fue utilizado por ninguno de los estudiantes (100% de $n = 41$) en ningún momento de la resolución de los dos problemas, reflejando posiblemente la dificultad que pudieron tener en decidir acerca del procedimiento y estrategias que van a utilizar para resolver el problema. Es decir, los estudiantes pudieron no haber desarrollado una conciencia sobre la importancia del uso de este proceso, lo cual podría tener una incidencia en el desarrollo de su competencia académica en matemáticas. De acuerdo con el estudio de Yildirim & Ersozlu (2013), si hay un uso del proceso de *Planeación*, se establece una relación positiva entre la conciencia metacognitiva y la resolución de los tipos de problemas matemáticos ($r = 0,673, p < 0,01$). Asimismo, la regresión en el estudio de Yildirim & Ersozlu (2013) indicaron que la conciencia metacognitiva predice significativamente el desempeño en la resolución de problemas.

Investigaciones anteriores, en correspondencia con los resultados del presente estudio, han encontrado deficiencias apreciables en el uso del proceso de *Planeación* al momento de resolver problemas matemáticos (Van der Stel & Veenman, 2008; Méndez y Peña, 2011; Rodríguez y Zorrilla, 2012; Mokos & Kafoussi, 2013; Pifarré y Sanuy, 2001). En este

sentido, Méndez y Peña (2011) en su estudio encontraron que al 85% de los estudiantes del grupo experimental, les era extraño manejar el proceso de **Planeación**, puesto que no sabían definir los objetivos de trabajo. De manera parecida Rodríguez y Zorrilla (2012), al establecer comparaciones entre niños con edad media de cinco (5) años y diez (10) meses, encontraron mayor presencia del proceso de **Planeación** en el grupo de estudiantes de mayor rendimiento ($M = 11.71$, $SD = 2.77$), que en el grupo de menor rendimiento ($M = 18.29$, $SD = 4.656$), sugiriendo así una asociación positiva entre el rendimiento en matemáticas de los niños, con el empleo de dicho proceso en la resolución de problemas matemáticos y evidenciando a la vez la mayor dificultad de empleo de este proceso, entre los demás procesos metacognitivos evaluados, en niños con bajo rendimiento ($t = 6.861$). Con resultados similares, el estudio de Mokos & Kafoussi (2013), revelaron una baja utilización (13,3%) de la estrategia de **Planeación** en una muestra de niños y niñas de quinto (5°) grado de primaria; a nivel de “problemas auténticos” y en menor proporción (de solo el 7,8%) en la resolución de “*Problemas Complejos*” evidenciado en solo el 14,8% de los estudiantes.

Sin embargo, no necesariamente la utilización del proceso de **Planeación** para resolver el problema, asegura en la misma proporción los resultados o soluciones correctas, tal como lo corroboran los resultados de la investigación de Buitrago y García (2012), quienes encontraron que el 80% de los estudiantes utilizaron el proceso de **Planeación**, no siendo correspondiente con el éxito en la solución de problemas. Es decir, presumiblemente la dificultad en otros procesos tuvo incidencia en los resultados, tales como dificultades de comprensión, que podrían influir directamente en el planteamiento de un plan.

Por otra parte se podría inferir que la edad, es una variable que podría tener alguna incidencia en los resultados. En este sentido, investigaciones anteriores han intentado demostrar que este es un factor que incide en la revelación de las habilidades metacognitivas en los sujetos. Acorde con esto, Vander Stel & Veenman (2008), explicaron sus resultados desde la variable edad, infiriendo que a una edad de doce (12) años apenas se observan vestigios del proceso de *Planeación*, mostrando que dicho proceso participa de manera incipiente en el rendimiento en matemáticas, resultados que posteriormente Vander Stel et al. (2010), intentaron complementar a través de un estudio transversal, encontrando que la calidad y cantidad de los episodios de *Planeación* mejoran desde los trece (13) a los quince (15) años.

En concordancia con los resultados de este estudio y los hallazgos de investigaciones anteriores, si los estudiantes no han incorporado el uso de los procesos metacognitivos y en este caso del proceso de *Planeación* en la resolución de problemas, el desarrollo de la competencia académica en matemáticas puede verse comprometida. Sin embargo, resulta interesante observar en la (Tabla 8) sobre la frecuencias y porcentajes que tienen los estudiantes sobre su competencia académica, que el 51% de los estudiantes se encuentra por encima del promedio, lo cual podría tener varias explicaciones, entre las cuales podría estar que, los docentes consideraron, además de la resolución del problemas, otros aspectos para medir la competencia académica o que los docentes no tienen claro qué aspecto son determinantes en el desarrollo de la competencia académica en matemáticas.

Contrario a los resultados anteriores, otros hallazgos revelan la utilización en gran medida del proceso *Planeación* (Erbas & Okur, 2010; Veenman, Kok & Blöte, 2005; Harskamp y Suhre, 2007), otros además, muestran una asociación positiva o relaciones de causa – efecto con el desempeño en la solución de problemas o con los logros en la competencia académica en matemáticas (Jimena, Korzeniwiski & Esposito, 2014; Soresi y Zimmerman, 2004; Dermitzaky, Leondari y Goudas, 2009; Calero, et al., 2010; Harskamp y Suhre, 2007). Estos hallazgos apoyan la idea de que, el estudiante, al planear su proceso de resolución de problema, puede, en gran medida, poseer control organizado de sus decisiones, establecer la estrategia o ruta, que además le permite hacer rendir su tiempo y alcanzar mejores resultados de desempeño en matemáticas, que cuando se aventura a realizar cálculos e implementar soluciones deliberadamente. De acuerdo a lo planteado, la capacidad en un niño para elaborar un plan de trabajo puede estar asociada con la habilidad para resolver problemas matemáticos como lo reveló el estudio de Jimena, Korzeniwiski & Esposito (2014) quien encontró asociaciones significativas entre dichas variables ($r = 0,225$, $p < 0,01$), al igual que Dermitzaky, Leondari y Goudas (2009), siendo además, la relación entre la *Planificación* con el desempeño de la tarea problema ($r = 0.56$, $p < 0.05$) la más significativa entre los demás procesos metacognitivos valorados. De manera semejante, en los hallazgos de Harskamp y Suhre (2007), el uso de ayudas relativas a episodios de *Planeación*, se correlacionó positivamente ($r = 0.25$, $p < .05$) con las puntuaciones del pos-test. Sin embargo, en correspondencia con los resultados del presente estudio, no hubo correlaciones significativas entre el uso de los procesos metacognitivos (para *Planea*: $r = 0.09$, $p > .05$) durante la solución de los problemas y las puntuaciones pre-test, es decir, cuando aún los estudiantes no habían acudido a las ayudas metacognitivas. En este mismo sentido, también

se puede inferir una relación entre el uso del proceso de *Planeación* en estudiantes con mayor rendimiento en matemáticas, como lo mostraron los resultados de Calero et al. (2010), en niños entre los cuatro (4) y cinco (5) años de edad, quienes al compararse con los de menor rendimiento, revelaron diferencias significativas ($t(1,45) = 5.16, p < .05$).

RECOMENDACIONES

Después del análisis de los resultados obtenidos en la presente investigación, se plantean las siguientes recomendaciones para mostrar las futuras direcciones que los investigadores interesados en esta línea de estudio pueden recorrer.

Esta investigación recomienda hacer un estudio más detallado, que pueda involucrar las impresiones de los participantes, mediante videos donde se permita repasar posteriormente las reacciones, manifestaciones o actitudes de los estudiantes durante la resolución de problemas, y de esta manera poder confirmar la presencia de los procesos cognitivos y metacognitivos que logren manifestarse, en las distintas fases empleadas para la resolución. De manera similar, este tipo de estudios podrían emplear dos (2) o tres (3) observadores (o jueces), con el objeto de percibir aspectos específicos que, durante breves segundos, es posible que los estudiantes manifiesten y que no sean fácilmente apreciables por un solo observador.

De igual manera, estudios posteriores podrían revisar no solo la presencia de los procesos cognitivos y metacognitivos, sino también valorar la calidad en que éstos se presentan, a través de la observación por un grupo de jueces que puedan determinar, mediante el uso de criterios previamente definidos, el nivel de profundidad en que los estudiantes emplearon estos procesos. En este sentido Vander Stel et al. (2010), acude a esta práctica en su investigación en donde se muestre de manera clara el desarrollo de los procesos en los niños en edades entre trece (13) y quince (15) años.

En cuanto a la aplicación del problema al estudiante, se hace necesario, generar suficiente confianza entre el aplicador y sujeto de estudio, lo cual genera la intercomunicación que permite un diálogo abierto en donde el estudiante expresa sus dudas o inquietudes. Muchos estudiantes posiblemente no logren sensibilizarse y conocer la importancia de la actividad de la que están participando, en este sentido, se podría afirmar que el nivel de motivación de los participantes es un factor importante para la recolección eficaz de la información. Lo anterior podría explicar, la razón por la cual muchos estudiantes durante el estudio, se aventuran a responder de manera inmediata la respuesta sin evidenciar procesos de *Análisis* o *Exploración* e inclusive de *Comprensión* del problema, que arroje indicio de esfuerzo por resolver el problema de manera exitosa. La no presencia de procesos como el de *Comprensión*, permite inferir una debilidad muy seria en los niños relacionada con la toma de conciencia de su importancia o las deficiencias en el sistema educativo por trabajar el desarrollo de habilidades de resolución de problemas, desde los primeros grados de educación básica primaria. Igualmente la motivación y otros factores diferentes a los cognitivos y metacognitivos posiblemente inciden en el desempeño de los estudiantes en matemáticas, específicamente en la culminación eficaz de los problemas matemáticos, tal como lo demuestran estudios anteriores, que en sus resultados muestran algún tipo de incidencia entre la motivación y el desempeño en matemáticas. Estudios posteriores, podrán entonces verificar la incidencia de los procesos cognitivos y metacognitivos presentes en la resolución de problemas matemáticos en la competencia matemática, teniendo en cuenta la variable motivación o expectativa por la matemática por parte de los sujetos en estudio.

Por otra parte, se hace importante resaltar que, la valoración que los profesores realizan del desempeño o logro de la competencia en matemáticas, puede poseer un alto grado de subjetividad, debido a que el docente tiene otros elementos de juicio para evaluar a sus estudiantes, no necesariamente académicos, que inciden en que los estudiantes muestren resultados superiores a los obtenidos en las diversas tareas matemáticas, los cuales apuntan directamente al desarrollo de capacidades y habilidades en la matemática, como por ejemplo, el desarrollo de la habilidad para resolver problemas matemáticos, la cual es una competencia que parece no poseer el mismo peso específico de importancia que otras asumidas en la evaluación otorgada por los profesores. Lo anterior, pone a reflexionar respecto a las diferentes percepciones que tienen los maestros del significado de la competencia en matemáticas y como su aplicación en el aula puede ser tan distinta entre los diferentes niveles escolares. Esto, indudablemente, es un factor determinante en los resultados del presente estudio, pues no corresponden con los resultados de valoración del docente en cuanto a “como es ese niño en matemáticas comparado con los demás de su grupo” y “cómo es el desempeño de este niño en matemáticas”, con la eficacia en la resolución de los dos problemas matemáticos planteados. En este sentido, estudios posteriores, deberían tener en cuenta, no solo la competencia en matemáticas, sino también, la eficacia en la resolución de los problemas matemáticos o con la competencia específica de resolución de problemas matemáticos.

BIBLIOGRAFÍA

- Abdullah, N., Zakaria, E. & Halim, L. (2012). The Effect of a Thinking Strategy Approach through Visual. Representation on Achievement and Conceptual Understanding in Solving Mathematical Word Problems. *Asian Social Science*, 8 (16), 30-37
- Aguilar, M., y Navarro, J. (2000). Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 53 (1), 63-83.
- Arrieta, J. (1989). La Resolución de Problemas y la educación Matemáticas: Hacia una mayor interrelación entre Investigación y Desarrollo Curricular. *Departamento de Ciencias de la Educación, Universidad de Oviedo*, 7 (1), 63-71.
- Baker, L. (1985). *How do we know when we don't understand? Standards for evaluating text Comprehension: Metacognition, Cognition and Human Performance*. Nueva York: Academic Press.
- Barnett, R. (2001). Los límites de la competencia. El conocimiento, la educación superior y la sociedad. *Gedisa*, 22(46), 286.
- Batthyány, K. y Cabrera, M. (2011). *Metodología de la investigación en ciencias sociales*. Montevideo: Comisión Sectorial de Enseñanza de la Universidad de la Republica.

- Beltrán, J. (1995). *Conocimiento, pensamiento e interacción social: Psicología de la Instrucción*. Madrid: Síntesis.
- Biryukov, P. (1976). *Metacognitive Aspects of Problem Solving Combinatorics Problems*. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum
- Buitrago, Sandra y García Ligia (2012). *Procesos de Regulación Metacognitiva en la regulación de problemas matemáticos*. (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Manizales, Colombia,
- Calero, M., Carles, R., Mata, S. y Navarro, E. (2010). Diferencias en habilidades y conducta entre grupos de preescolares de alto y bajo rendimiento escolar. *Relieve*, 16 (2), 1-17.
- Casas, A., De Alba, A. y Taverner, R. (2009). Habilidades matemáticas y funcionamiento ejecutivo de niños con trastorno por déficit. *Psicothema*, 21 (1), 63-69.
- Cervantes, G., Mendoza, A., Peñaloza, L., Ramírez, M. y Viñas, M. (1995). Descripción y análisis de procesos de pensamiento de estudiantes al resolver problemas matemáticos. *Ingeniería y Desarrollo*, 1, 1-23.
- Chung, K. & Tam, Y. (2005). Effects of cognitive-based instruction on mathematical problem solving by learners with mild intellectual disabilities. *Journal of Intellectual & Developmental Disability*, 30 (4), 207-216

Colombia, de nuevo última en los resultados de pruebas Pisa. (Julio 9 de 2014). Recuperado de <http://www.noticiasrcn.com/bienestar-educacion/colombia-nuevo-ultima-los-resultados-pruebas-pisa>

Colombia, en el último lugar en nuevos resultados de pruebas Pisa: Los estudiantes colombianos obtuvieron el peor puntaje en evaluación sobre educación financiera. (9 de julio de 2014). Recuperado de <http://www.eltiempo.com/estilo-de-vida/educacion/colombia-en-el-ultimo-lugar-en-pruebas-pisa/14224736>

De La Cruz, M., Fernández, I. y Martínez, J. (2006). *Conocimientos y prácticas pedagógicas de los docentes en relación con la enseñanza de la resolución de problemas Aritméticos*. (Tesis doctoral). Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia.

Dermitzaki, I., Leondari, A. & Goudas, M. (2009). Relations Between Young Students' Strategic Behaviours, Domain Specific Self-concept, and Performance in a problem-solving Situation. *Learning and Instruction*, 19, 144-157.

Desoete, A. (2008). Multi-method assessment of Metacognitive skills in Elementary School Children: How you test is what you get. *Metacognition and Learning*, 3(3), 189-206.

Desoete, D., Roeyers, H. & Buysse, A. (2001). Metacognition and Mathematical Problem Solving in Grade 3. *Journal of Learning Disabilities*, 34 (5), 435-449.

- Erbas, A. & Okur, S. (2012). Researching students' strategies, episodes, and metacognitions in mathematical problem solving. *Qual Quant*, 46, 89 - 102.
- Fuchs L., Geary D., Compton D., Fuchs, D., Hamlett C., Seethaler, P., Bryant, J. & Schatschneider, C. (2010) ¿Do Different types of School Mathematics Development Depend on Different Constellations of Numerical versus General Cognitive Abilities? *Developmental Psychology*. 46 (6), 1731-1746.
- Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 129-159.
- Gassin. C., Mata, S., Calero, M., López-Rubio, S., Vives, C. & Navarro, E. (2011). Variables predictoras de la ejecución escolar y cognitiva en preescolares inmigrantes. En F. J. García Castaño y N. Kressova. (Coords.). *Actas del I Congreso Internacional sobre Migraciones en Andalucía* (pp. 93- 105). Granada: Instituto de Migraciones.
- Ge, X. & Land, S. (2003). Scaffolding students' problem-solving processes in an ill-structured task using question prompts and peer interactions. *Educational Technology Research and Development*, 51 (1), 21-38.
- Gresham, F. & Elliott, S. (1990). *Social Skills Rating System*. Bloomington: Pearson Assessments.

- Griffin, C. & Jitendra, A. (2009). Word Problem-Solving Instruction in Inclusive Third-Grade Mathematics Classrooms. *The Journal of Educational Research*, 102 (3), 187-201
- Harskamp, E. & Suhre, C. (2007). Schoenfeld's problem solving theory in a student controlled learning environment. *Computer & Education*, 49. 822-839.
- Hernández, S., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. Santa Fe de Bogotá: McGraw-Hill.
- Hoard, M., Geary, D., Byrd, J. & Nugent, L. (2008). Mathematical cognition in intellectually precocious first graders. *Developmental Neuropsychology*, 33 (3), 251-276.
- Hong, S., Lee, N. & Yeo, D. (2012). *A Metacognitive approach in Kick-starting the understanding and planning phase of mathematical problem solving*. Recuperado de: <http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/181/1/PROCESOS%20DE%20REGULACION%20METACOGNITIVA%20EN%20LA%20RESOLUCION%20DE%20PROBLEMAS%20MATEMATICOS%20SMBM.pdf>
- Hwa, T. & Lau, N. (2005). *Metacognitive Aspect of mathematics Problem Solving*.

Iglesias-Sarmiento, V., Alfonso, S., Conde, Á., & Deaño, M. (2014). Predictores del rendimiento aritmético en 4° de Educación Primaria. *International Journal of Developmental and Educational Psychology*

Iglesias-Sarmiento, V., Gil, S., González, F. y Deaño-Deaño, M. *Procesamiento cognitivo y logro aritmético.*

Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior-ICFES (2014). Colombia en Pisa. *Informe Nacional de resultados: Resumen Ejecutivo.* Recuperado de: [file:///C:/Users/ULTRABOOK/Downloads/Resumen%20ejecutivo%20Resultados%20Colombia%20en%20PISA%202012%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/ULTRABOOK/Downloads/Resumen%20ejecutivo%20Resultados%20Colombia%20en%20PISA%202012%20(1).pdf)

Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior-ICFES (2007). *Fundamentación conceptual área de matemáticas. Grupo de evaluación de la educación superior.* Bogotá: El instituto.

Iriarte, A. (2011). Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una didáctica con enfoque metacognitivo. *Zona Próxima*, (15), 2 - 21.

Jacobse, E., & Harskamp, E. (2009). Student-controlled Metacognitive Training for Solving Word Problems in Primary School Mathematics. Gion – Groningen Institute for Educational Research, University of Groningen, Groningen, *The Netherlands* Published online, 02 Dec 2009.

- Jimena, M., Korzeniowski, C. & Esposito, A. (2014). Planning and Organization Skills, and their Relationship with the Ability of Solving Mathematical Problems in Argentinean *School Children*, 11 (1) 52-64.
- Kwang, T. (2003). Metacognitive Intervention in a Cognitive - Apprenticeship-Computer-Based Environment. 26h Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated (MERGA 2003) on “Mathematics education research. *Innovation, Networking, Opportunity*.
- Lee, N., Yeo, D. & Hong, S. (2014). A Metacognitive –base Instruction for Primary Four Students to Approach non-routine Mathematical Word Problems. *Mathematics Education*, 46, 465-480. Doi: 10.1007/s 11858-014-0599-6.
- Lee, B., Teo, T. & Bergin, D. (2009). Children’s use of metacognition in solving everyday problems: An Initial Study from an Asian Context. *The Australian Educational Researcher*, 36 (3), 89 – 102.
- Lester, F. (1980). *Research on mathematical problem solving. Research in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- López, L. (1992). *Efectos del contexto y de la complejidad semántica en la presentación de problemas aritméticos para los procesos de resolución de problemas por estudiantes de quinto grado* (Tesis doctoral). Columbia University, New York, United States.
- López, L. González, R., Toro, C. y Arzuza, J. (2004). *Protocolo de entrevista flexible para la evaluación y desarrollo del pensamiento matemático en la Clase para Pensar*. FOCP. Documento interno. Universidad del Norte.
- López, L. (2012). *La clase para pensar*. Barranquilla: Editorial Universidad del Norte.
- Mandaci, S. & Kendir, F. (2013). The Effect of using metacognitive strategies for solving geometry problems on students' achievement and attitude. *Educational Research and Review*, 8 (19), 1777 - 1792.
- Martínez, R., Tubau, E., Guilera, L., Rabanaque, S. y Sánchez, E. (2008). Utilidad de distintas ayudas en la resolución de un problema de *Insight* y su relación con las estrategias metacognitivas. *Anales de Psicología*, 24 (1), 16-24.
- Martínez, L., Negrete, M. y Sierra, I. (2011). Estrategias heurísticas en la solución de problemas matemáticos, desarrollo de habilidades metacognitivas en educación infantil. (Maestría en educación). Sistema de Universidades Estatales del Caribe Colombiano-SUE Caribe, Montería, Colombia.

Mazzocco, M. & Kover, S. (2007). A Longitudinal Assessment of Executive Function Skills and Their Association with Math Performance. *Child Neuropsychology*, 13(1), 18-45. Doi: 10.1080/09297040600611346.

Méndez, D. y Peña, P (2011) Efectos de la aplicación de estrategias metacognitivas en el rendimiento de los estudiantes de 5to grado al realizar operaciones con números racionales. *Revista de Investigación*, 73 (35).

Miñano, P. y Castejón, J. (2011). Variables cognitivas y motivacionales en el rendimiento académico en Lengua y Matemáticas: un modelo estructural. *Revista de Psicodidáctica*, 16 (2).

Mokos, E. & Kafoussi, S. (2013) Elementary Students' Spontaneous Metacognitive Functions in Different Types of Mathematical Problems. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2 (2), 242-267. Doi: 10.4471/redimat. 2013.29.

Montague, M., Krawec, J., Enders, C. & Dietz, S. (2013). The Effects of Cognitive Strategy Instruction on Math Problem Solving of Middle-School Students of Varying Ability. *Journal of Educational Psychology*. Doi: 10.1037/a0035176

Özsoy, G. & Ataman, A. (2009). The Effect of Metacognitive Strategy Training on Mathematical Problem Solving Achievement. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 1 (2), 68-83

Paris, S., Lipson, M. & Wixson, K. (1983). Becoming a Strategic Reader. Contemporary. *Educational Psychology*, (8), 293-316.

Pennequin, V., Sorel, O. & Mainguy, M. (2010). Metacognition, Executive Functions and Aging: The Effect of Training in the Use of Metacognitive Skills to Solve Mathematical Word Problems. *Journal of Adult Development*, 17 (3), 168-176. Doi: 10.1007/s10804-010-9098-3

Pennequin, V., Sorel, O., Nanty, I. & Fontaine, R. (2010). Metacognition and low achievement in mathematics: The effect of training in the use of metacognitive skills to solve mathematical word problems. *Thinking & Reasoning*, 15(3), 198-220.

Peralta, J. (2005). Sobre los automatismos en la resolución de problemas. *Boletín de la Asociación matemática Venezolana*, 12(1), 87-103.

Pérez, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 129-160.

Pifarré, M., y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las Ciencias*, 19 (2), 297-308.

Polya, G. (1954). *How to Solve it*. Princeton. Princeton: University Press.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery. On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Wiley & Sons.

Polya, G. (1957). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

Pugalee, D. (2004). A Comparison of Verbal and Written Descriptions of Students' Problem Solving Processes. *Educational Studies in Mathematics*. 55 (1/3), 27 – 47.

Rodríguez, J., Llobet, M. y Zorrilla, L. (2012). Funcionamiento ejecutivo en niños de educación infantil con diferentes niveles de matemáticas valorado por los maestros. *Fórum de Recerca*, (17), 839-850.

Roque, J. (2009). *Influencia de la enseñanza de la matemáticas basada en la resolución de problemas en el mejoramiento del rendimiento académico* (Tesis de Maestría) Universidad Alas Peruanas, Perú.

Rott, B. (2013). Process Regulation in the Problem-Solving Processes of Fifth Graders. *Journal*, 3 (4), 25- 39.

- Sáiz, M., Flores, V. y Román, J. (2010). Metacognición y competencia de “aprender a aprender” en Educación Infantil: Una propuesta para facilitar la inclusión. *Reifop*, 13(4), 123 – 130.
- Sáiz, M. y Román, J. (2011). Entrenamiento metacognitivo y estrategias de resolución de problemas en niños de 5 a 7 años. *International Journal of Psychological Research*, 4 (2), 9 – 19.
- Salmerón, H., Gutiérrez, C., Fernández, A. y Salmerón, P. (2010). Aprendizaje autorregulado, creencias de autoeficacia y desempeño en la segunda Infancia. *Journal of Educational Research, Assessment and Evaluation. Relieve*, 16 (2). 1-18.
- Salmerón, H., Gutiérrez, C. y Salmerón, P. (2009). Desarrollo de la competencia matemática a través de programas para aprender a aprender en la infancia temprana. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 2 (2), 143-156.
- Santiago, V. y Orrantia, J. (2007). Resolución de problemas y comprensión situacional. *Revista de teoría, investigación y práctica*. 19 (1), 61-85.
- Schöenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.
- Solazzo, L. (2008). *The Role of Gender, Cognition, Anxiety, and Competence Beliefs in Predicting Mathematics Achievement*. (Order No. 3303095, Fordham University).

ProQuest Dissertations and Theses, 147-n/a. Retrieved from <http://search.proquest.com/docview/304652499?accountid=41515>. (304652499).

Soresi, Z. (2004). Self-regulation and Academic Achievement and Resilience: A Longitudinal Study. *International Journal of Educational Research*, 41, 198-215.

Sternberg, R. (1985). *Beyond IQ: A Triarchic Theory of Intelligence*. Cambridge: Cambridge University Press.

Tanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). *Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. The teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. 1-22 Reston. National Council of Teachers of Mathematics.

Tejedor, F. (2000). El diseño y los diseños en la evaluación de Programas. *Revista de Investigación Educativa*, 18 (2), 319-339.

Toboso, J. (2004). *Evaluación de habilidades cognitivas en la resolución de problemas matemáticos*. (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España.

Torrado, M. (1999). *El Desarrollo de las Competencias: una propuesta para la Educación Colombiana*. Bogotá: Mimeo.

- Troncoso, O. y García, L. (2013). *Estrategias Metacognitivas en el aprendizaje de las Matemáticas: una intervención en el aula para determinar las implicaciones de las estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas*. (Tesis de maestría). Universidad del Tolima, Tolima, Colombia.
- Valle, A., Rodríguez, S., Cabanach, R., Núñez, J., González, J. y Rosario, P. (2013). Diferencias en rendimiento académico según los niveles de las estrategias cognitivas y de las estrategias de autorregulación. *Summa Psicológica*, 6(2), 31-42.
- Van der Stel, M, Veenman, M., Deelen, K. & Haenem, J. (2010). The increasing role of metacognitive skills in math: a cross-sectional study from a developmental perspective. *Mathematics Education*, 42, 219–229.
- Van der Steel, M. & Veenman, M. (2008). Relation between Intellectual Ability and Metacognitive Skillfulness as Predictors of Learning Performance of Young Students Performing Tasks in Different Domains. *Learning and Individual Differences*, 18(2008), 128-134.
- Veenman, M., Kok, R. & Blöte, A. (2005). The Relation between Intellectual and Metacognitive Skills in early Adolescence. *Instructional Science*, 33, 193–211.

- Whitebread, D. & Bryce, D. (2012). The Development of Metacognitive Skills: Evidence from Observational Analysis of Young Children's Behavior During Problem-Solving. *Metacognition Learning*, 7, 197-217.
- Wieth, M. (2005). *The Influence of Motivation on Cognitive Mechanisms Involved in Problem Solving*. (Order No. 3189773, Michigan State University). ProQuest Dissertations and Theses, 136-136 p. Retrieved from <http://search.proquest.com/docview/305430053?accountid=41515>. (305430053).
- Yildirim, S. & Ersozlu, Z. (2013). The Relationship between Students' Metacognitive Awareness and their Solutions to Similar Types of Mathematical Problems. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 9 (4), 411-415
- Yimer, A. & Ellerton, N. (2006). *Cognitive and Metacognitive Aspects of Mathematical Problem Solving: An Emerging Model*. 575-582
- Zambrano, G. (2008) Preguntas cognitivas y metacognitivas en el aprendizaje y en la generación de estrategias de resolución de problemas matemáticos. *Revistas Inventum* 4.

ANEXOS

ANEXO 1. PRUEBA DE KOLMOGOROV - SMIRNOV

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

| | N | Parámetros normales ^{a,,b} | | Diferencias más extremas | | | Z de Kolmogorov-Smirnov | Sig. asintót. (bilateral) |
|-------------------------------------|----|-------------------------------------|---------------------|--------------------------|----------|----------|-------------------------|---------------------------|
| | | Media | Desviación típica | Absoluta | Positiva | Negativa | | |
| Explora | 41 | .0000 | .00000 ^c | | | | | |
| Comprende | 41 | .0488 | .18725 | .530 | .530 | -.397 | 3.391 | .000 |
| Adquiere | 41 | .0122 | .07809 | .538 | .538 | -.438 | 3.443 | .000 |
| Analiza | 41 | .1463 | .27937 | .456 | .456 | -.300 | 2.919 | .000 |
| Planea | 41 | .0000 | .00000 ^c | | | | | |
| Monitoreo local | 41 | .0854 | .22086 | .504 | .504 | -.350 | 3.228 | .000 |
| Monitoreo global | 41 | .1220 | .29113 | .492 | .492 | -.338 | 3.148 | .000 |
| Implementa | 41 | .3049 | .41650 | .378 | .378 | -.232 | 2.418 | .000 |
| Exactitud | 41 | .1585 | .30494 | .455 | .455 | -.302 | 2.910 | .000 |
| Competencia Matemática | 41 | 3.6220 | .81225 | .313 | .223 | -.313 | 2.006 | .001 |
| Competencia Matemática (Categorías) | 41 | 2.5122 | .71141 | .388 | .246 | -.388 | 2.482 | .000 |

a. La distribución de contraste es la Normal.

b. Se han calculado a partir de los datos.

c. La distribución no tiene varianza para esta variable. No es posible realizar la prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra.

ANEXO 2. ENTREVISTA FLEXIBLE SEMIESTRUCTURADA

Ejercicios (7 Años- 2 GRADO)

Después de establecido el rapport y haber hecho una corta introducción sobre la idea de hacer collares para vender se le dice: “Imagínate que vamos a empezar a realizar collares y pulseritas para vender a nuestros amigos y vecinos y poder tener una platica para el paseo del curso de fin de año. Debemos recoger algunos fondos para el transporte, el almuerzo y las meriendas de todos los niños del curso y un detalle para cada uno, por lo cual debemos poner todos los esfuerzos en este negocio, hacer los collares y pulseras más bonitas, ofrecerles a otros y llevar bien nuestras cuentas para no perder plata”.

“Como no quiero que se me olviden las ideas que tú me des para realizar los collares y las pulseras, voy a ir escribiendo tus ideas aquí en este papel... a ver qué se nos ocurre...”

Después de que el estudiante finalice el ejercicio, el entrevistador seguirá con la entrevista.

| NUMERO FALTANTE | NUMERO FALTANTE | NUMERO FALTANTE | NUMERO FALTANTE |
|--|--|---|--|
| <p>1. A. Imagínate que hoy hiciste 92 collares para vender en el colegio y tu amiguito hizo 28 collares más que tu. ¿Cuántos collares hizo tu amiguito?</p> | <p>2. A. Imagínate que una de tus compañeras de curso tiene 82 collarcitos para vender por todo el barrio. Ella tiene 38 menos que tu. ¿Cuántos collares tienes tú?</p> | <p>1. B. Oye... Imagínate que Mary una de tus compañeras te compró para regalar a su mamá en el día de las madres 62 collares y Juanito 18 más que Mary ¿Cuántos collares te compró Juanito?</p> | <p>2. B. Oye... Imagínate que la profesora Juana te compró 52 pulseras para los niños de su curso y la profesora Olga te compró 48 más que Juana, ¿Cuántas pulseras compró la profesora Olga?</p> |

| |
|--|
| <p>1. Explora: Antes de contestar la pregunta de los collares que te hice, ¿Recordaste algo parecido a esta pregunta?, ¿Sí?, ¿Qué? Parfraseo: ¿Esta pregunta te recordó alguna otra pregunta que hayas contestado antes? ¿Sí? ¿Cuál?</p> |
| <p>2. Comprende: Antes de dar la respuesta, ¿Qué hiciste para entender la pregunta de los collares? (Gral.) A. Reconoce datos Oye, mientras yo te hablaba, ¿Pensaste cual era la información más importante del problema? ¿Cuál? B. Identifica la pregunta problema/ Replantea problema Oye, ¿Pusiste/cambiaste a tus propias palabras lo que yo te pregunté? ¿Puedes expresar el problema con tus Palabras?</p> |
| <p>3. Adquiere Nueva Información Cuando me pediste que te repitiera la pregunta de los collares ¿Qué oíste que haya sido diferente a lo que habías oído antes? Parfraseo: ¿Hubo algo diferente en la última pregunta que te hizo más fácil entender?</p> |
| <p>4. Analiza Antes de resolver el problema, ¿Cómo ordenaste la pregunta de los collares en tu cabecita?(General) A. Divide por partes ¿Dividiste el problema en partes? ¿Qué hiciste primero?, ¿qué hiciste después? B. Simplifica ¿Le quitaste palabras para hacerlo más corto? Dímelo a mí para saber cómo fue que lo hiciste C. Selecciona Perspectiva/ (identifica una estrategia de solución) Antes de resolver el problema ¿pensaste en que ibas hacer para resolverlo? ¿Sabías que tenías que quitar o poner collares?</p> |
| <p>5. Planea Antes de resolver el problema ¿Pensaste cómo lo ibas a hacer?, ¿Sí?, ¿Qué pensaste? Parfraseo: ¿Pensaste cómo ibas a quitar/poner (collares) antes de hacerlo?</p> |
| <p>6. Implementa Cuéntame lo que hiciste para llegar a tu respuesta... Parfraseo: ¿Cómo lo hiciste?</p> |

7. Monitoreo Local

A. Mientras que resolvías la pregunta, de las piedrecitas/collares/ pulseras ¿Paraste para mirar/chequear/verificar si lo estabas haciendo bien? (General)

Parafraseo: Pensaste: “Mmm..¿Será que estoy haciendo esto bien?”

A. B. Estrategia remedial (Si monitorea y corrige) Si te diste cuenta de que estabas equivocado, ¿Qué hiciste para corregirlo?

8. Monitoreo Global

A. Cuando me diste la respuesta, ¿Volviste a mirar/chequear para ver si habías contestado bien mi pregunta de las piedrecitas etc.? (Gral.)

Parafraseo: Cuando me respondiste, ¿Te diste un tiempo y pensaste: “Sí, esta respuesta está bien, o ¡Uy!, no esto está mal?”

B. Estrategia alternativa (Si el niño evaluó y corrigió) ¿Pensaste en otra forma diferente para solucionar la pregunta?

9. Sugerencias Preguntas abiertas: si la respuesta del niño es muy vaga o general entonces pida aclaración utilizando las siguientes preguntas.

-Dime un poco más sobre eso

-Me puedes aclarar tu respuesta

-Que querías decir cuando me dijiste

-A qué te refieres con _____

-Por qué _____

-Cuéntame cómo así que _____

-Como hiciste para saberlo _____

- ¿Qué cosas? ¿Qué operaciones?

Re = Respuesta espontánea Ef = Entrevista Flexible

M = Corrección metacognitiva _____

Hubo corrección metacognitiva: Proceso/Subproceso: _____ o por escucha de la repetición de la respuesta _____

ANEXO 3. ESCALA DE COMPETENCIA ACADÉMICA DEL CUESTIONARIO “SOCIAL SKILLS RATING SYSTEM”

| C A | COMPETENCIA ACADÉMICA (ACADEMIC COMPETENCE) | DEFICIENTE 10% | DEBAJO DEL PROMEDIO 20% | PROMEDIO 40% | POR ENCIMA DEL PROMEDIO 20% | ALTA 10% |
|------------|--|---------------------------|--|-------------------------|--|---------------------|
| | 49. Comparado con otros estudiantes en mi salón de clases el desempeño académico general de este niño es: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | 50. En lectura como es este niño comparado con los demás estudiantes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | 51. En Matemáticas como es este niño comparado con los demás estudiantes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | 52. En términos de lo esperado para este grado las habilidades de lectura para este niño son: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | 53. En términos de lo esperado para este grado las habilidades de matemáticas para este niño son: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | 54. La motivación de este niño para el éxito académico es: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| | | | | | | |
|-----------|---|---|---|---|---|---|
| | 55. El estímulo que recibe el niño de los padres para el rendimiento académico es: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | 56. Comparado con otros niños en mi salón de clases el desempeño intelectual de este niño es: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | 57. Comparado con otros niños en mi salón de clases el comportamiento general de este niño es: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| AC | Sumatoria de la Columna | | | | | |