

Aplicación de técnicas de procesamiento
multiresolución para la caracterización y
visualización de señales de vibración
mecánicas.

Alejandro Sánchez Orozco

Dirigida por:

Juan Camilo Mejía Hernández M.Sc. (c)

Julián David Echeverry Correa PhD.

Trabajo de grado presentado como requisito parcial
para optar por el título de:

Ingeniero Electricista



Universidad Tecnológica de Pereira

Colombia

11 de Julio de 2019

Aplicación de técnicas de procesamiento multiresolución para la caracterización y visualización de señales de vibración mecánicas.

Dirigido por:

Juan Camilo Mejía Hernández M.Sc. (c)

Ingeniero Electrónico

Grupo de investigación en Automática

Julián David Echeverry Correa PhD.

Profesor Asociado

Facultad de Ingeniería

Pereira 11 de Julio de 2019
Programa de Ingeniería Eléctrica
Universidad Tecnológica de Pereira
Álamos. Pereira. Colombia
TEL:(+57) (6)3137122
www.utp.edu.co

Dedicatoria

Agradecimientos

Resumen

En el presente trabajo se explica y se documenta la metodología de caracterización y visualización de señales de vibraciones mecánicas en rodamientos. Para el análisis de la información contenida en estas señales se estableció una metodología que consiste en: pre-procesado de señales, procesamiento de señales y de sus características y visualización de sus componentes más relevantes.

El pre-procesado de señales aplicado en este trabajo se encarga de cargar las señales para posteriormente segmentarlas, reorganizarlas y mejorar para etapas posteriores de procesamiento.

En el procesamiento de señales se obtienen características en tiempo y frecuencia mediante modelos matemáticos como momentos estadísticos (media, desviación estándar, Mínimo, Máximo, curtosis, moda y mediana), Transformada de Fourier en tiempo corto y Transformada wavelet.

La visualización es la parte donde las características obtenidas en la parte del procesamiento se observan en gráficos para ser interpretadas, según el objetivo que se desee. Con la ayuda de Análisis de Componentes Principales (PCA, por sus siglas en inglés "Principal Component Analysis") y su espacio en tres dimensiones, se pueden observar los valores más relevantes y componentes con mayor peso.

Finalmente esta metodología es aplicable a cualquier base de datos donde se quiera obtener resultados en tiempo y frecuencia, y también podría aumentar el número de características, para un enfoque más específico.

Abstract

In the present work the methodology of characterization and visualization of mechanical vibration signals in bearings is explained and documented. For the analysis of the information contained in these signals, a methodology was established consisting of: pre-processing of signals, processing of signals and their characteristics and visualization of their most relevant components.

The pre-processing of signals applied in this work is responsible for loading the signals to later segment, reorganize and improve for later stages of processing.

In the processing of signals, time and frequency characteristics are obtained by means of mathematical models such as statistical moments (mean, standard deviation, minimum, maximum, kurtosis, fashion and median), Fourier transform in short time and wavelet transform.

The visualization is the part where the characteristics obtained in the processing part are observed in graphics to be interpreted, according to the objective that is desired. With the help of Principal Component Analysis (PCA, for its acronym in English "Principal Component Analysis") and its space in three dimensions, you can see the most relevant values and components with greater weight.

Finally this methodology is applicable to any database where you want to obtain results in time and frequency, and could also increase the number of characteristics, for a more specific approach.

Índice general

| | |
|--|--------------------------------------|
| INTRODUCCIÓN..... | 13 |
| PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA..... | 14 |
| JUSTIFICACIÓN..... | 18 |
| OBJETIVO GENERAL..... | 19 |
| Objetivos específicos | 19 |
| MARCO TEÓRICO..... | 20 |
| Señales de vibraciones mecánicas en rodamientos. | 20 |
| Procesamiento de señales. | 20 |
| Visualización. | 20 |
| MATERIALES Y MÉTODOS..... | 22 |
| Base de datos de la Universidad Case Western | 22 |
| Especificaciones de la base de datos..... | 22 |
| Tipos de falla..... | 22 |
| Media | 23 |
| Desviación estándar | 23 |
| Valores Mínimos y Máximos | 24 |
| Curtosis | 24 |
| Moda | 25 |
| Mediana | 25 |
| Transformada de Fourier | ¡Error! Marcador no definido. |
| La integral de Fourier | 25 |

| | |
|---|--------------------------------------|
| Transformada wavelet | 27 |
| PCA (Análisis de componentes principales) | 29 |
| METODOLOGÍA..... | 32 |
| Adquisición de la base de datos | 32 |
| Pre-Procesamiento. | 33 |
| Cargar las señales de vibraciones mecánicas | 33 |
| Cortar | ¡Error! Marcador no definido. |
| Etiquetar | 33 |
| Procesamiento. | 34 |
| Momentos estadísticos | 34 |
| Transformada de Fourier en tiempo corto | 34 |
| Transformada Wavelet | 35 |
| Visualización e interpretación. | 36 |
| ANÁLISIS DE RESULTADOS | 40 |
| Momentos estadísticos | 40 |
| Transformada en tiempo corto de Fourier | 43 |
| Transformada Wavelet | 46 |
| CONCLUSIONES | 51 |
| TRABAJO FUTUROS..... | 53 |
| ANEXOS | 55 |
| Anexo 1 | 55 |
| Anexo 2 | 55 |
| Anexo 3 | 62 |
| BIBLIOGRAFÍA..... | 69 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1 Pre procesado. | 33 |
| Figura 2 Características obtenidas | 34 |
| Figura 3 Forma de onda predeterminada de la Wavelet Morse. | 36 |
| Figura 4 Características PCA de Tipos de Fallos Amarillo (Fallo en tren externo), Verde (Fallo tren interno), Azul (Fallo en bola) y Morado (Sin fallo). | 37 |
| Figura 5 Características PCA Velocidad en el rodamiento Amarillo (1790 rpm), Verde (1770 rpm), Azul (1750 rpm) y Morado (1730 rpm). | 38 |
| Figura 6 Características PCA Nivel de profundidad del Fallo Amarillo (0.021 pulgadas), Verde (0.014 pulgadas), Azul (0.007 pulgadas) y Morado (Sin fallo). | 38 |
| Figura 7 Diagrama de barras para los 7 Momentos estadísticos. | 40 |
| Figura 8 Características PCA Tipo de fallo usando 7 Momentos estadísticos en la base de datos de la universidad Case Western. | 41 |
| Figura 9 Características PCA Velocidad en el rodamiento usando 7 Momentos estadísticos en la base de datos de la universidad Case Western. | 41 |
| Figura 10 Características PCA Nivel de profundidad usando 7 Momentos estadísticos en la base de datos de la universidad Case Western. | 42 |
| Figura 11 Diagrama de barras para la Transformada de Fourier en tiempo corto. | 43 |
| Figura 12 Características PCA Tipo de fallo usando Transformada de Fourier en tiempo corto en la base de datos de la universidad Case Western. | 44 |
| Figura 13 Características PCA Velocidad en el rodamiento usando Transformada de Fourier en tiempo corto en la base de datos de la universidad Case Western. | 44 |
| Figura 14 Características PCA Nivel de profundidad usando Transformada de Fourier en tiempo corto en la base de datos de la universidad Case Western. | 45 |
| Figura 15 Diagrama de barras para la Transformada Wavelet. | 46 |
| Figura 16 Características PCA Tipo de fallo usando Transformada Wavelet en la base de datos de la universidad Case Western. | 47 |
| Figura 17 Características PCA Velocidad en el rodamiento usando Transformada de Fourier en tiempo corto en la base de datos de la universidad Case Western. | 47 |

*Figura 18 Características PCA Nivel de profundidad usando Transformada Wavelet en la base de datos de la universidad Case Western.*_____ 48

Figura 19 Diagrama de barras de las componentes usadas. _____ 49

*Figura 20 Cantidad de componentes y orden total de 8111.*_____ 49

Índice de tablas.

| | |
|--|-----------|
| <i>Tabla 1 Protocolo base de la base de datos de Case Western Reserve University</i> | <i>32</i> |
| <i>Tabla 2 Primeras 100 componentes usando todas las características</i> | <i>50</i> |

Introducción

El análisis basado en señales de vibración es el más usado para el diagnóstico y detección de fallos en rodamientos. En la industria las máquinas rotativas son pilares en la fabricación y manufactura para un proceso de producción. Por eso se hace necesario un buen mantenimiento y prevención de fallos con estos pequeños elementos. El estudio hecho por mantenimiento preventivo de rodamientos ha logrado un buen análisis y condiciones operativas, para llegar a ello se tomaron datos y características para determinar el diagnóstico.

Durante varios años se han utilizado diferentes metodologías para el diagnóstico de fallos en rodamientos y esto se logra con señales obtenidas de sensores a ciertas velocidades y observando diferentes partes del rodamiento. Teniendo en cuenta las diferentes metodologías usadas por autores que han desarrollado aplicaciones con el mismo énfasis y logrando resultados acertados para el estudio de diagnóstico y detección de fallos en rodamientos, es necesario hacer innovaciones y cambios con metodologías que faciliten o suministren información de forma diferente como se presentara en este documento.

La metodología empleada en este trabajo de grado busca hacer un aporte al estudio de señales de vibraciones mecánicas. Esta metodología está basada en el procesamiento digital de señales en los dominios del tiempo y la frecuencia y en la obtención de distintos conjuntos de características extraídas de las diferentes bases de datos sobre las que se trabajó. A partir de estos conjuntos de características, en este trabajo se propone y se realiza un análisis de la relevancia y la importancia de cada una de ellas y se presentan los resultados en un entorno de visualización que permite interpretar de una forma más detallada y precisa los patrones que definen los fallos en sistemas mecánicos.

El análisis de componentes principales (PCA) es una técnica muy útil en el procesamiento de señales. Esta técnica es muy usada para análisis de datos multivariados, con la ayuda de diferentes características como las que se usaran en la metodología, se obtendrán las mejores componentes y así poder interpretar o analizar dependiendo de su finalidad.

La interpretación y visualización de las características obtenidas de esta base de datos en el espacio PCA es la etapa final de la metodología, ya que con estos resultados se harán los estudios previos y posteriores para nuevas bases de datos o historiales comparativos para procesos estadísticos o de mantenimiento de maquinas. (1)

Planteamiento del problema

La era electrónica, siglo XXI época donde los avances en tecnología superan cada vez más las expectativas de las personas que acuden a los servicios y facilidades que estos otorgan. Es ahí donde también se hace más riguroso el procesamiento de datos, señales, ondas y conexiones inalámbricas, la electrónica y su carrera por un avance con más velocidad y con una dimensión más pequeña hace que la ingeniería saque todo tipo de herramientas para un mejor y óptimo uso.

El procesamiento de señales es una parte fundamental del proceso y avance tecnológico que se ha venido mostrando en estos tiempos, como por ejemplo en telefonía celular, redes inalámbricas, neurociencia, una gran parte de la medicina, sonidos, estudios de suelos y arquitectura, y la lista seguiría, pero la finalidad de este párrafo es mostrar por qué se hace necesario un buen proceso y análisis de señales para su adecuado resultado. Existen diferentes métodos para la detección y diagnóstico de fallos en rodamientos como el análisis de vibración, ruido y ondas, análisis de temperatura, análisis de partículas en aceite. El procesamiento de señales de vibración obtenidas de rodamientos es uno de los más usados en la industria, debido a que independiente a su funcionamiento ni la forma física del elemento a estudiar, solo se ubican sensores que hacen las respectivas mediciones. (2)

El uso y manejo de señales ha permitido avances en la tecnología, incluyendo medios de comunicación hasta incursiones en medicina. El procesamiento de señales se ha convertido en una herramienta usada por inventores para llevar a cabo grandes proyectos que cambiaron vidas a través de la historia. En la comunicación empezando por los teléfonos, telégrafos, fonógrafos, radio, en la medicina con los Rayos X, en las imágenes como cámaras fotográficas o televisores. Es ahí donde implícitamente se ve el valor e importancia de un buen proceso y tratamiento de señales.

Debido a su uso, fabricación o su ambiente de funcionamiento los rodamientos pueden desempeñarse de diferentes formas, y su mantenimiento, reparación o reemplazo puede variar. Entonces, ¿Cómo saber si el rodamiento que se está usando necesita ser reemplazo o

reparado? Por eso es necesario tener técnicas o aplicaciones que indiquen o ayuden a un mantenimiento preventivo. por esto se hace necesario la detección de defectos en su etapa incipiente y un optimo proceso.

Las señales de vibraciones obtenidas con un estudio hecho en rodamientos, puede contener componentes espectrales que se relacionan con la geometría del rodamiento, su forma, velocidad y hasta la ubicación del defecto que se desea detectar. Los errores más comunes que se pueden dar en rodamientos son de manufactura, instalación, lubricación o condiciones ambientales. Los defectos localizados en los rodamientos son generalmente grietas o hendiduras, también mediante el desgaste de los elementos rodantes en su interior causado más que todo por la fatiga o por impactos de carga o excesiva velocidad.

El estudio desarrollado en este proyecto se puede usar para diversos tipos de aplicaciones en señales de vibraciones y señales obtenidas en maquinas. En el proyecto "Diseño y desarrollo de un sistema prototipo en línea para el diagnóstico de motores de combustión interna diesel en servicio con base en vibraciones" financiado en la convocatoria de Colciencias 669 del 2014, se pretende establecer una metodología que permita diagnosticar el comportamiento de vehículos del sistema de transporte público del Parque Automotor Integra S.A., Operador de Transporte Masivo en Pereira (3). Este proyecto busca realizar una innovación en el mantenimiento preventivo con toma de datos en los motores por medio del desarrollo de software propietario.

Ocurre ciertos inconvenientes al momento de procesar señales, ya que dependiendo de su naturaleza hay señales que pueden llegar a tener una gran cantidad de información y se hace necesario un pre proceso que se encargue de disminuir el tamaño o segmentar para optimizar el manejo en algún software donde se quiera hacer el estudio. Una buena caracterización y clasificación de las señales también puede servir para un mejor rendimiento al momento de analizar una base de datos. Para la base de datos a usar se extrajeron características en tiempo y frecuencia.

Teniendo esta metodología para el procesamiento de señales, se podría implementar a diferentes bases de datos. Una de las aplicaciones que tiene las técnicas de procesamiento de señales usada, sería el aumento o

el ingreso de características dependiendo de el objetivo del estudio o de la necesidad que se tenga para el procesamiento.

Justificación

El procesamiento de señales de vibraciones en rodamientos es un análisis de resultados de técnicas para detección y diagnóstico de máquinas en la industria, con el objetivo de optimizar, prever y mejorar condiciones operativas contribuyendo con la calidad y mantenimiento de máquinas rotativas.

La finalidad de este procesamiento de señales de vibraciones en rodamientos es obtener una base de datos donde se den diferentes condiciones de operación para así tener una gran cantidad de casos donde un rodamiento pueda operar y se pueda hacer un mantenimiento preventivo, en caso específico, la Universidad Case Western proporciona una base de datos donde se hicieron mediciones con diferentes condiciones (sin falla y con falla en elementos rodantes, en el carril interno y en el carril externo). El mantenimiento preventivo se basa principalmente en estudios previos donde estadísticamente se sacan porcentajes de fallas y en tiempos determinados, para así saber cuándo es necesario o prudente cambiar piezas para una operación óptima.

La mayoría de fallos en rodamientos se presenta después de la instalación, pero también se presentan fallos por condiciones previas al uso de los rodamientos, puesto que incluso antes de la instalación puede que la pieza ya este con fallas de manufactura o de calidad.

Objetivo general

- Aplicar técnicas de procesamiento multiresolución en señales para la caracterización y visualización de señales de vibración mecánicas.

Objetivos específicos

- Estudiar técnicas de procesamientos multiresolución de señales y recopilar bases de datos de señales de vibración mecánicas.
- Implementar técnicas de procesamiento para la caracterización de señales en los dominios del tiempo y la frecuencia.
- Desarrollar una interfaz gráfica que permita visualizar distintas características de las señales mediante técnicas de reducción de dimensionalidad.

Marco teórico

Este trabajo presenta una metodología para el procesamiento de señales de vibraciones mecánicas en rodamientos. Usando diferentes modelos matemáticos para extraer características que den como resultado una interfaz visual donde se puedan determinar posibles fallos en rodamientos.

Se han implementado diferentes técnicas para el diagnóstico de fallas en rodamientos de maquinas rotativas a partir de señales de vibración. Entre los métodos para la detección y diagnóstico de fallas en rodamientos se encuentran técnicas de análisis de temperatura, sonido, corriente y la más usada la de vibración.

Algunas técnicas usadas para lograr estos objetivos son Modelos ocultos de Markov (11) por capas o también por complejidad de Lempel-Ziv (12), también análisis de Cepstrum (13), señales envolventes (14). Cada una dependiendo de las condiciones de operación y dimensiones del rodamiento.

Señales de vibraciones mecánicas en rodamientos.

Son usualmente usadas para detectar fallos en maquinas rotativas, y una de las técnicas para la adquisición de estas señales se fundamenta en Mantenimiento basado en condición (15). Este mantenimiento invita a implementar acciones dependiendo de la información adquirida.

Procesamiento de señales.

Existen diferentes métodos para la extracción de características de una base de datos de señales de vibraciones. Se basan en dos componentes tiempo y frecuencia. El análisis en frecuencia apoyado en la transformada de Fourier y sus derivaciones es ampliamente el más usado para el diagnóstico de fallas en rodamientos. También las características en el dominio del tiempo son principalmente basadas en parámetros estadísticos incluyendo raíz media cuadrada (RMS), factor de cresta, el sesgo entre otros (16) (17) (18) (19).

Visualización.

Existen diferentes métodos para analizar resultados de procesamientos de bases de datos, pero la más adecuada es una interfaz gráfica que permita observar el comportamiento y características de las señales. En este caso,

el análisis de reducción de dimensionalidad de espacio resulta muy útil cuando se trabaja con componentes tanto de tiempo como frecuencia.

Materiales y métodos

A continuación se explicara la base de datos y la metodología que se uso para el procesamiento de señales de vibraciones mecánicas en rodamientos usando la base de datos de la Univerisidad Case Western Reserve Bearing Data Center 2010.

Base de datos de la Universidad Case Western

En esta sección se describirá el entorno como fue adquirida las señales para esta base de datos (C.W.R. University, 2010). Esta base de datos está abierta al público y puede ser obtenida desde la página de la universidad. Los registros fueron obtenidos a partir de un acelerómetro y un tacómetro, ubicados sobre el rodamiento y el eje del motor respectivamente. Para la base de datos se varía la carga del motor y se presentan fallas inducidas a partir de métodos para obtener diferentes grados de degradación en los rodamientos.

La base de datos mostrada en la figura 1 se conforma por 40 clases, 120 señales, 3 señales por clase con 40000 componentes con una frecuencia de muestreo de 10 kHz durante 4 segundos (20).

Especificaciones de la base de datos

- Numero de balineras: 9
- Diámetro de cada balinera: 0.3126 pulgadas.
- Frecuencia de muestreo: 10 kHz con un acelerómetro.

Tipos de falla

- Inner: Fallo tren interno.
- Ball: Fallo en bola.
- Outer: Fallo tren externo.

Para realizar el estudio de las señales de la base de datos se hace necesario conocer las características que se obtendrán en tiempo (momentos estadísticos) y frecuencia (Transformada de Fourier y Transformada Wavelet). También se dará a conocer las ecuaciones y modelos matemáticos de estas características para tener un conocimiento más conceptual de la adquisición de estos resultados.

Se definen así estos momentos estadísticos:

Media: medida de tendencia central o media aritmética, hace referencia a un punto medio de una distribución.

Se define la media, mediante la ecuación 1 (4).

$$\bar{X} = \frac{\sum Xi}{n}$$

Ecuación 1

Donde:

\bar{X} Es la Media.

Xi Valores de todas las observaciones.

n Número total de elementos.

Desviación estándar: es una medida del grado de proximidad de los datos alrededor de la media, es un método para determinar la desviación de un conjunto de datos. La suma de los cuadrados de las desviaciones de un conjunto de datos con respecto a su media aritmética es un mínimo, si esta suma se divide entre el número de observaciones se obtendría una cantidad llamada desviación cuadrada o varianza. La varianza se da en los cuadrados de los datos originales, y para tener una medida de dispersión expresado en las unidades originales se usa la raíz cuadrada.

Se define la desviación estándar mediante la ecuación 2 (5).

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (Xi - \bar{x})^2}{N}}$$

Ecuación 2

Donde:

σ Desviación estándar.

\bar{x} Es la Media.

$\sum Xi$ Suma de los valores de todas la observaciones.

N Número total de elementos.

Valores Mínimos y Máximos: los valores máximos y mínimos de un conjunto de datos son simplemente los valores con más peso o de mayor magnitud e inversamente para el valor mínimo y estos se usan para dar una referencia o escala de valores.

Curtosis: también conocida como apuntamiento el coeficiente de curtosis estudia la concentración de frecuencias en la zona central del conjunto de datos, de modo que una curtosis alta (leptocúrticas) son en formas gráficamente escarpadas, y una curtosis baja (platicúrticas), son de forma achatadas realizadas respecto a una distribución normal.

Se define el coeficiente de curtosis mediante la ecuación 3 (6).

$$g_2 = \frac{m_4}{s_x^4} - 3 = \frac{\frac{1}{N} \sum (xi - \bar{x})^4 ni}{\left[\frac{1}{N} \sum (xi - \bar{x})^2 ni \right]^2} - 3$$

Ecuación 3

Donde:

g_2 Es el coeficiente de curtosis (segundo momento).

\bar{x} Es la Media.

$\sum Xi$ Suma de los valores de todas la observaciones.

$\sum ni$ Suma de todos los elementos.

N Número total de elementos.

Si $g_2 = 0$, la distribución es mesocúrtica o normal

Si $g_2 > 0$, la distribución es leptocúrtica o por encima de la normal

Si $g_2 < 0$, la distribución es platicúrtica o por debajo de la normal

Moda: en un conjunto de datos la moda es el valor que más se repite, para una base de datos es un indicador de una alta concentración de información.

Mediana: es una medida de tendencia central que mide la observación referencial de los datos agrupados, es el dato que más se acerca al centro del conjunto el resto de datos están por encima y por debajo de este.

Se define la mediana mediante la ecuación 4.

$$Me = \frac{(n + 1)}{2} \text{ésimo término}$$

Ecuación 4

Donde:

Me Es la mediana.

n Es el número total de datos.

Se necesita calcular el promedio entre los elementos dados por el valor n -ésimo de la mediana para determinar el valor exacto de este.

La característica sacada en función de la frecuencia es un tratamiento matemático con transformada de Fourier y transformada Wavelet

La integral de Fourier

Las series de Fourier son técnicas usadas en el dominio de la frecuencia para funciones periódicas, la cual se puede descomponer en armónicos y frecuencias, pero se debe tener en cuenta que no todas las funciones son periódicas por esto se desarrolla un método para funciones no periódicas definidas en un intervalo de tiempo infinito, esto se logra observando dicha función $f(t)$ por secciones o intervalos, a este se le conoce como ventana la cual posee una longitud T y después se debe observar que sucede

cuando se alarga esta ventana. Después se lleva a cabo un desarrollo en serie de Fourier que represente la posición de la función dentro de la ventana generando así una función periódica definida $g(t)$ en un intervalo entre $-T/2$ y $T/2$. Al aplicar la expansión en series de Fourier definida sobre un intervalo definido finito se tiene que:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn\omega_0 t}$$

Ecuación 5

Con

$$G_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Ecuación 6

Donde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Ecuación 7

En la ecuación 6 se observa la transformación de $g(t)$ que está en el dominio del tiempo en una componente G_n en el dominio de la frecuencia donde n puede ser cualquier entero real. Conforme $T \rightarrow \infty$ la ventana aumenta su tamaño, haciendo que $g(t) = f(t)$.

Y definiendo $G(j\omega)$ mediante la ecuación 8:

$$G(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Ecuación 8

Se tiene la representación de la integral de Fourier de $f(t)$ con la ecuación 9

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] d\omega$$

Ecuación 9

Para que la integral de Fourier exista, deben tener ciertas condiciones que son una leve modificación a las condiciones de Dirichlet y teniendo en cuenta que el estudio a realizar es un estudio práctico más no académico, con valores y señales finitas en amplitud y tiempo.

Las condiciones de Dirichlet para la integral de Fourier son:

- Que sea integrable

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Ecuación 10

- Que tenga un número finito de máximos y mínimos y un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo definido finito, esto significaría que la integral converja a $f(t)$ en todo punto donde sea continua (7).

Transformada wavelet

El procesamiento de señales se basa en operaciones o metodologías para analizar, en este caso señales de vibración en rodamientos mecánicos y estudiar componentes o ver propiedades significativas que permitan tener un conocimiento de ésta. Si se desea conocer el espectro contenido en una señal podemos recurrir a la transformada Wavelet ya que la transformada de Fourier no sirve por sí sola, al momento de cambiar la función en un intervalo, modifica el contenido espectral de la función, esto muestra que la transformada de Fourier no es muy práctica para el estudio donde se presenten frecuencias que varíen con el tiempo.

Las señales de las bases de datos obtenidas que se analizaron, son señales que su frecuencia varía con el tiempo, por consiguiente se hace necesario introducir una ventana que se pueda variar y trasladar en función de la frecuencia.

A este modelo se le conocía como Transformada de Fourier con ventana deslizante, definida como:

$$S_f(\omega, t) = \int f(t)g * (t - \tau) \exp(-j\omega t) dt$$

Ecuación 11

Donde $g(t)$ es una ventana móvil con un ancho fijo.

$$g(t) = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{\pi t^2}{s^2}\right)$$

Ecuación 12

Cuando las frecuencias son muy altas la ventana a utilizar deben ser pequeña, y opuesto a esto, cuando son frecuencias bajas, la ventana debe ser grande. Pero este es el principal inconveniente de la ecuación 11, que su ancho es fijo y por ende solo se conoce la señal en un intervalo de tiempo, además otro problema es que si los eventos presentados de la señal pasan muy cerca, puede que no sean vistos por las ventanas excluyendo así información que puede ser importante.

La transformada wavelet es una herramienta que es muy útil para fenómenos transitorios y de alta frecuencia, la diferencia entre la transformada wavelet y la transformada de Fourier con ventana es que la ventana wavelet es adaptable a las frecuencias dadas. Las wavelets son funciones bases o también llamadas "wavelets madre", la cual permite reconstruir la señal a partir de wavelets inversas.

Las wavelets no solo varían en función del tiempo, sino también en frecuencia.

Un conjunto unificado de técnicas de procesamiento de señales, da origen a las wavelets usado principalmente para optimizar procesos en campos de física, procesamiento de datos, comunicaciones, etc. Para un análisis multiresolución se debe analizar señales en múltiples bandas de frecuencias o sub espacios. Cuando la resolución se incrementa, esta debe converger a la función original, en caso contrario, cuando la resolución decrece, la función converge a cero. Lo que esto genera es aprovechar tanto en amplitud como en frecuencia para tener más

información de la señal a procesar, siendo una de las técnicas más eficaces para análisis de bases de datos (8).

En resumen la comparación entre Transformada de Fourier (FFT y STFT) y Transformada wavelet se basa en que la FFT tiene la limitación de tiempo frecuencia, esto se debe a sus componentes exponenciales que transforman del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, esto genera pérdida de información debido a los anchos de la ventana.

Con el objetivo de lograr un grado más alto de resolución tanto en tiempo como en frecuencia se puede utilizar la Transformada de tiempo corto de Fourier, la cual tiene la facilidad de ser usada en más ocasiones con diferentes tamaños de ventanas para obtener buena información tiempo frecuencia.

Al momento de usar un análisis multiresolución se genera la posibilidad de una ventana flexible operando a un amplio rango de frecuencia mediante una transformada discreta wavelet, lo que hace es generalmente mapear una señal de una dimensión (tiempo) en una señal bidimensional (tiempo y frecuencia) en diferentes escalas.

Para un buen procesamiento de señales usando análisis multiresolución con Transformada Wavelet se debe escoger una Wavelet madre apropiada, debido a que dependiendo de su comportamiento puede tener una mejor resolución del espectro generando componentes más separadas.

Uno de los objetivos de este proyecto es una visualización de las componentes principales de una base de datos con un previo proceso de clasificación y caracterización de señales para determinar parámetros de la base de datos con una metodología previamente explicada.

PCA (Análisis de componentes principales)

El análisis de componentes principales es una técnica multivariable que reduce el número de dimensiones de los datos y permite explicar la incertidumbre existente en un conjunto de datos multivariados con un gran número de variables correlacionadas, a través de un número de nuevas variables no correlacionadas llamadas componentes principales o variables latentes, están contruidos como combinaciones lineales de las

originales de modo tal que su varianza decrece de la primera a la ultima (1).

Los PCA ofrecen resultados acertados con variables correlacionadas para llegar a este proceso primero se deben sacar características de la base de datos que se desea estudiar, en este caso para señales de vibraciones mecánicas, se analizan las señales en función de tiempo (7 momentos estadísticos) y en función de la frecuencia (Transformada de Fourier y Transformada Wavelet). La base de datos utilizada se hace con pruebas experimentales y teniendo en cuenta ciertas características operativas de los rodamientos, como la velocidad, dimensiones, desgastes y esfuerzos, lo que se obtiene de este proceso es un conjunto de variables, que al introducirlo en un algoritmo de Análisis de Componentes Principales genera ciertas dimensiones dependiendo de las características y la clasificación de las señales. Con esto se obtiene una matriz de varianza y covarianza.

Los PCA se utilizan para construir modelos explicativos de variables originales en el que las componentes principales intervienen como variables explicativas y puede ser utilizado para proceder valores futuros (9).

Entre mayor sea la varianza entre componentes mayor es la información obtenidas de estas componentes, por esto se deben hacer combinaciones de forma descendente dependiendo de la proporción de la varianza total, es decir, la primer componente es la combinación máxima de la varianza, la segunda es otra combinación de variables que debe seguir condiciones de ortogonalidad y máxima varianza y la tercera es otra combinación con las mismas propiedades que la anterior y así sucesivamente con la cuarta combinación y la quinta etc. Esto da como resultado una correlación de alto grado y una alta proporción de varianza, y estas componentes principales generan la información más relevante e importante que se quiere obtener.

Uno de los problemas del análisis de componentes principales es que todas sus variables deben estar en las mismas unidades o por lo menos en unidades que se puedan comparar. Por lo tanto estas variables deben tener tamaños similares para que su varianza también sea aproximada entre sí, por eso el PCA se debe aplicara valores estandarizados y los componentes principales se definen por eingevalores y eingevectores de una matriz de correlación.

Después de obtener las componentes principales de las características de nuestras señales se obtiene como resultado una visualización con dimensiones proporcionadas adecuadas, en este caso, es una visualización en tres dimensiones con cada eje dependiendo de los aportes experimentales de los rodamientos y así determinar la separación entre las variables concluyendo con el respectivo análisis de las señales (10).

Metodología

A continuación en la figura 2 se explicara la metodología y las técnicas que se usan para el procesamiento multiresolución de las señales de vibraciones mecánicas a partir de la base de datos proporcionada de: Case Western Reserve University Bearing Data Center 2010.

Adquisición de la base de datos

Recopilación de bases de datos de señales de vibraciones mecánicas, base de datos obtenida de la universidad Case Western (120 señales 40.000 componentes, 40 clases y 3 señales por clase a una frecuencia de muestreo de 10kHz durante 4 segundos). Esta base de datos fue adquirida por medio de sensores adheridos a las carcasas de los rodamientos normales y defectuosos, con diferentes tipos de cargas del motor, falla y velocidades (1730 rpm, 1750 rpm, 1772 rpm y 1797 rpm). Se pueden presentar tres tipos de fallas, falla en los elementos rodantes, falla en el carril interno y falla en el carril externo.

En la tabla 1. Se muestra el protocolo de la base de datos de Case Western.

Tabla 1 Protocolo base de la base de datos de Case Western Reserve University

| | |
|------|--------------------------------------|
| Id. | • Estado del rodamiento |
| T0 | • Normal |
| T1 | • Fallo en bola |
| T2 | • Fallo en tren interno |
| T3 | • Fallo en tren externo |
| nx | • Nivel de profundidad del fallo |
| rXXX | • Velocidad en el rodamiento (carga) |

Pre-Procesamiento.

Para aprovechar la mayor parte de la información de una señal de vibración, se hace necesario una segmentación y un acondicionamiento según el estado del arte (21). Este paso se basa en cargar, recortar y ajustar las señales de la base de datos, debido al consumo computacional que este requiere para señales con mucha información. Señales más cortas tienen menor tiempo de procesamiento y menor demanda de recursos de cómputo, además se mejora la localización de las fallas ya que se obtiene una mejor resolución en la frecuencia. Por lo cual se hace una división (40 clases 48 señales por clase en total 1920 tramos por señal 2500 componentes). Los requerimientos de memoria y el tiempo de procesamiento computacionales tienden a incrementar con señales de gran tamaño, por lo tanto un proceso óptimo sería analizar pequeños trozos uno a uno.



Figura 1 Pre procesado.

Cargar las señales de vibraciones mecánicas: se ingresa las señales de la base de datos de los diferentes estados de forma de los rodamientos (Normal, Fallo en bola, Fallo tren interno, Fallo tren externo) al software donde se implementará la metodología.

Segmentar: se definen los tamaños en que se desea segmentar cada señal dependiendo de la frecuencia de muestreo y el estado del arte, en este caso se recorta cada señal en 10, lo que significa que pasa de ser una señal de 40.000 componentes a 10 por 4000 componentes. En general se obtiene una matriz de 1200 por 4000.

Etiquetar: ya que existen diferentes señales dependiendo del estado del rodamiento, se hacen etiquetas para diferenciar cada señal, ya recortadas las señales y siguiendo el protocolo de la base de datos se

genera una matriz de 1200 por 3 (Tipos de falla, Velocidad del rodamiento y Nivel de profundidad del fallo).

Esta etapa se finaliza guardando las señales recortadas y las etiquetas para posteriormente ser procesadas.

Procesamiento.

Esta etapa inicia cargando las señales ya recortadas y etiquetadas para sacar diferentes características, cabe aclarar que mientras más características posea la base de datos mejores pueden ser los resultados. Las características obtenidas de estas señales se sacan en tiempo y frecuencia, (momentos estadísticos, transformada de Fourier STFT y transformada wavelet) obteniendo una matriz de características de 1200 por 8111 como se muestra en la figura 4.



Figura 2 Características obtenidas

Momentos estadísticos: estas características se obtienen en función del tiempo, con resultados que pueden ayudar a un análisis estadístico más detallado (Media, Desviación estándar, Mínimo, Máximo, Curtosis, Moda y Mediana). Con esta característica se obtiene una matriz de 1200 por 7.

Transformada de Fourier en tiempo corto: esta característica como ya fue mencionada, proporciona una gran variedad de componentes debido a su versatilidad en magnitud y frecuencia, esta herramienta aporta una mayor cantidad de información que la parte estadística, dando como resultado una matriz de 1200 por 4104 componentes, dando mayor peso al momento de un espacio PCA (Análisis de componentes Principales) y su visualización, por medio de un espectrograma y con valores positivos (valor absoluto).

Transformada Wavelet: esta herramienta utilizada en el análisis de señales que emplea varios intervalos de tiempo donde se desea obtener información en baja frecuencia, y a su vez, emplea cortos intervalos de tiempo donde resalta información en alta frecuencia. La mayor ventaja es la habilidad de un análisis y acercamientos en cualquier intervalo de tiempo sin dejar a un lado la información espectral. La implementación de la Transformada Wavelet computacionalmente genera datos que no son relevantes y pueden requerir mucho procesamiento y tiempo, por lo que se hace necesario ciertas condiciones de optimización, como frecuencia de muestreo, los valores máximos y solo valores positivos (Valor absoluto) obteniendo como resultado una matriz de 1200 por 4000 componentes.

La Wavelet madre usada para este procesamiento es Morse, que es una Wavelet de valor complejo, cuya transformada de Fourier solo se da en el eje real positivo. Es muy útil para señales con amplitud y frecuencia variable en el tiempo. La wavelet Morse tiene dos parámetros, la simetría y el producto de ancho de banda de tiempo, que dependiendo de la duración determina el número de oscilaciones que hay en una ventana central.

La ecuación 13 muestra la wavelet de Morse en el dominio de Fourier parametrizada.

$$\Psi_{\beta,\gamma}(\omega) = U(\omega)a_{\beta,\gamma}\omega^{\beta}e^{-\omega\gamma}$$

Ecuación 13

Los parámetros predeterminados de la wavelet Morse muestran una simetría por ventana figura 5, que se compara con los parámetros de la señal que se desea analizar (22).

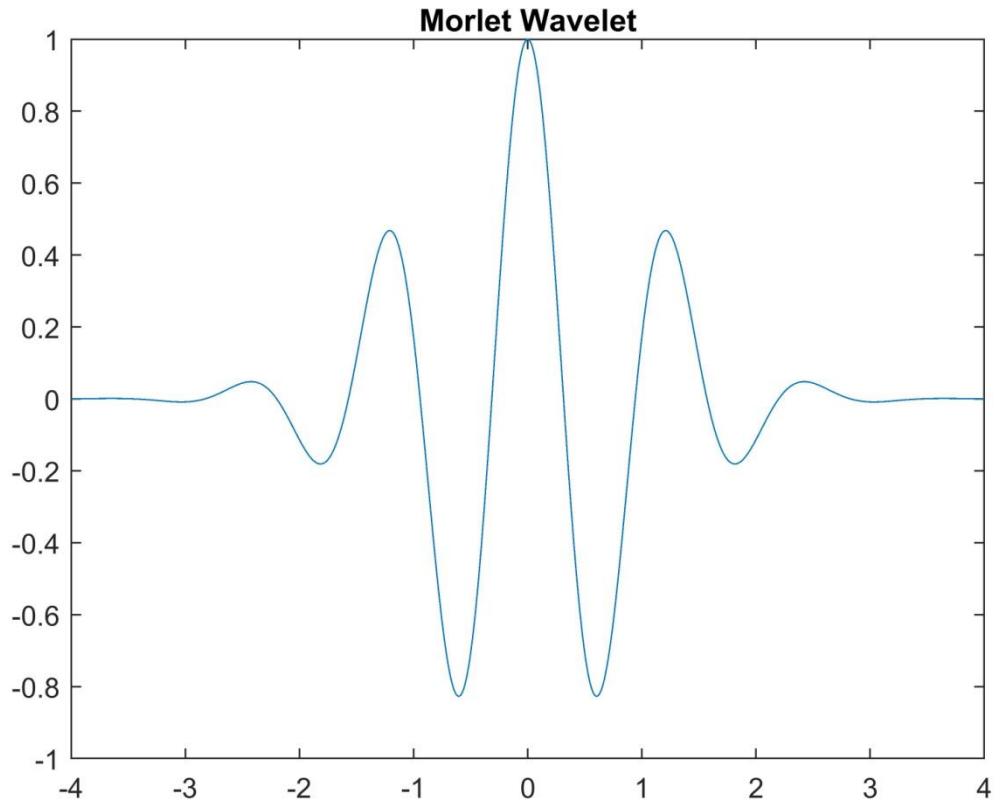


Figura 3 Forma de onda predeterminada de la Wavelet Morse.

Visualización e interpretación.

Parte de una tabla de datos cuantitativos con una representación en pocas dimensiones de las componentes con la información proporcionada. Teniendo una media de las variables que se están proporcionando de la parte del procesamiento o caracterización, se genera una matriz de covarianza con los datos en las dimensiones especificadas. En este caso, se utilizan tres dimensiones, después de esto se realiza el cálculo de los valores propios de la matriz de covarianza con una matriz identidad, esto me genera ecuaciones cuadráticas de su determinante entre la resta de la matriz identidad y la original y sus raíces serán mis primeros valores que se pueden usar en el sistema después se elige las componentes a utilizar.

En las siguientes figuras se tienen la visualización final de las componentes con mayor peso de este análisis respecto a sus etiquetas dadas en el protocolo de la base de datos tabla 1.

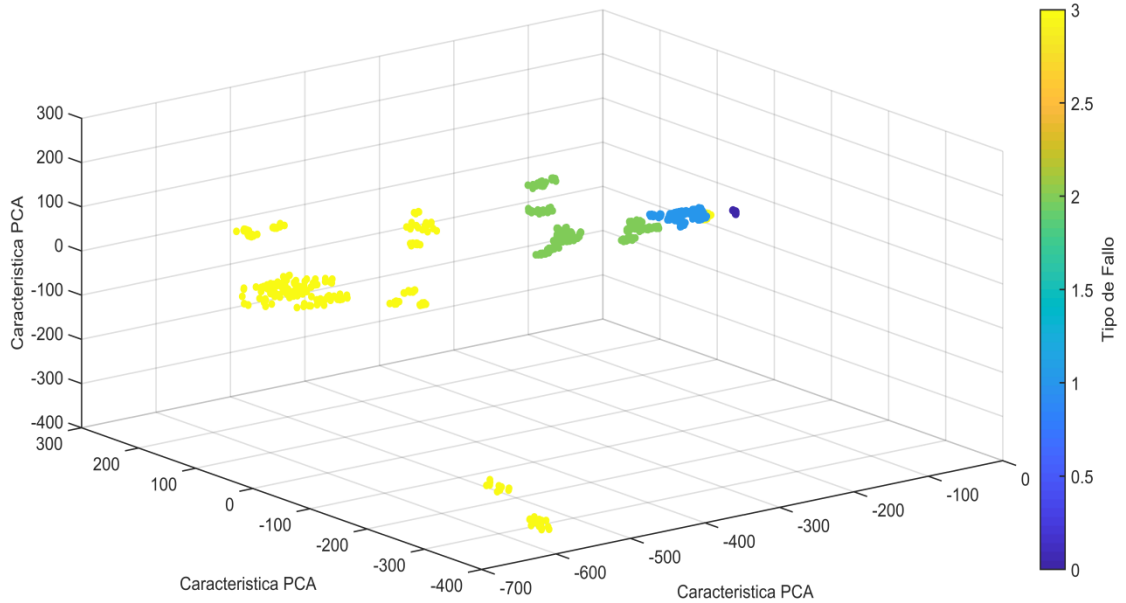


Figura 4 Características PCA de Tipos de Fallos
Amarillo (Fallo en tren externo), Verde (Fallo tren interno), Azul (Fallo en bola) y Morado (Sin fallo).

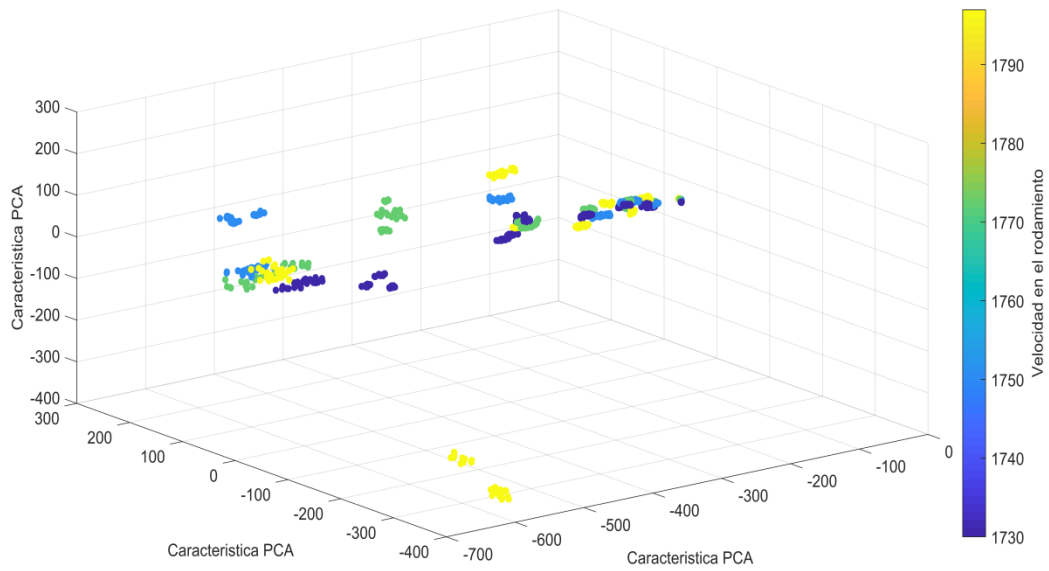


Figura 5 Características PCA Velocidad en el rodamiento
Amarillo (1790 rpm), Verde (1770 rpm), Azul (1750 rpm) y Morado (1730 rpm).

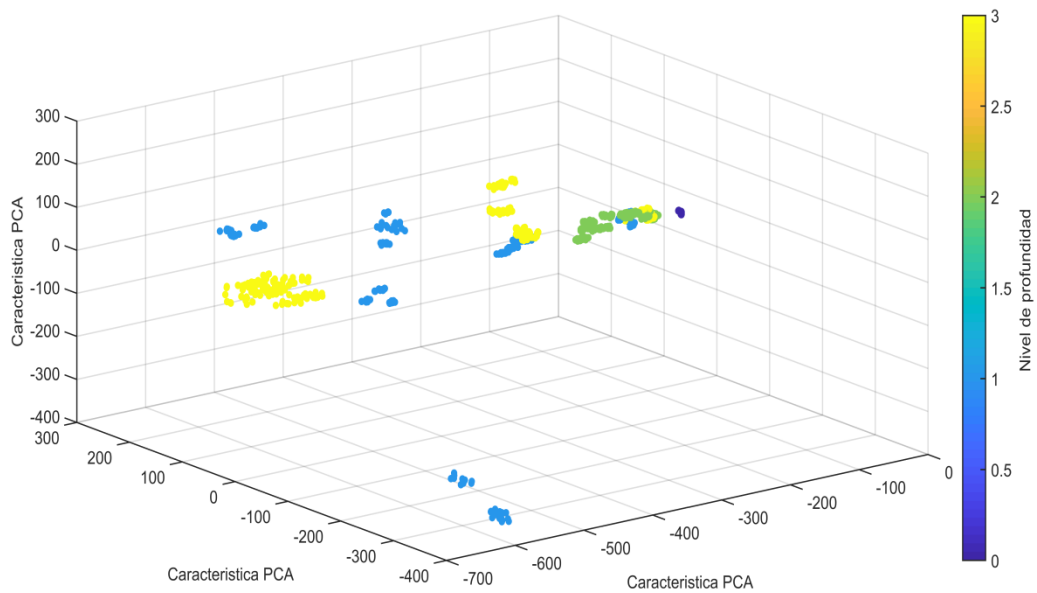


Figura 6 Características PCA Nivel de profundidad del Fallo
Amarillo (0.021 pulgadas), Verde (0.014 pulgadas), Azul (0.007 pulgadas) y Morado (Sin fallo).

En las figuras anteriores se pueden apreciar el moldeamiento de las mejores características en el espacio PCA. Con esta interfaz grafica se puede analizar la base de datos y concluir información específica con base en la relación de variables para trabajos futuros.

Análisis de resultados

En esta sección se presentaran los gráficos y comparaciones entre características y los resultados de usar esta metodología en una interfaz de componentes principales PCA. También se enseñara las características más importantes y de mayor peso.

Momentos estadísticos

Las características obtenidas de estas componentes son en función del tiempo. Como se muestra en las siguientes figuras, se puede observar en un diagrama de barras la importancia de cada variable y las características en un espacio PCA.

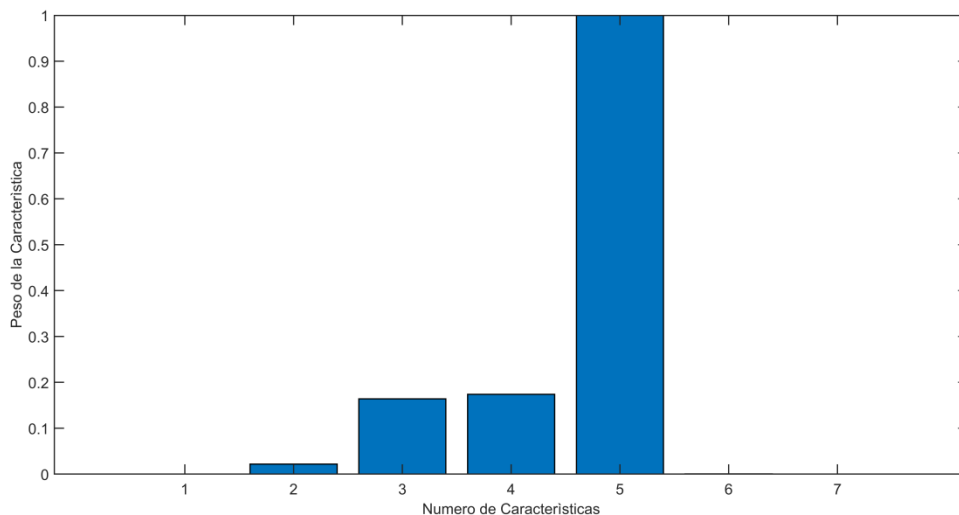


Figura 7 Diagrama de barras para los 7 Momentos estadísticos.

En la figura 7 se observan las variables con mayor importancia, siguiendo el orden donde la componente número 1 es la Media, la 2 es la Desviación estándar, la 3 es el Mínimo, la 4 es el Máximo, la 5 es la Curtosis, la 6 es la Moda y la 7 es la Mediana (Anexo 1).

La variable más significativa fue la Curtosis seguida del Máximo, Mínimo y Desviación estándar.

Teniendo estas características se ingresaron a un análisis de componentes principales PCA y en una interfaz donde se ve la separación de las variables, mostrada en las siguientes figuras.

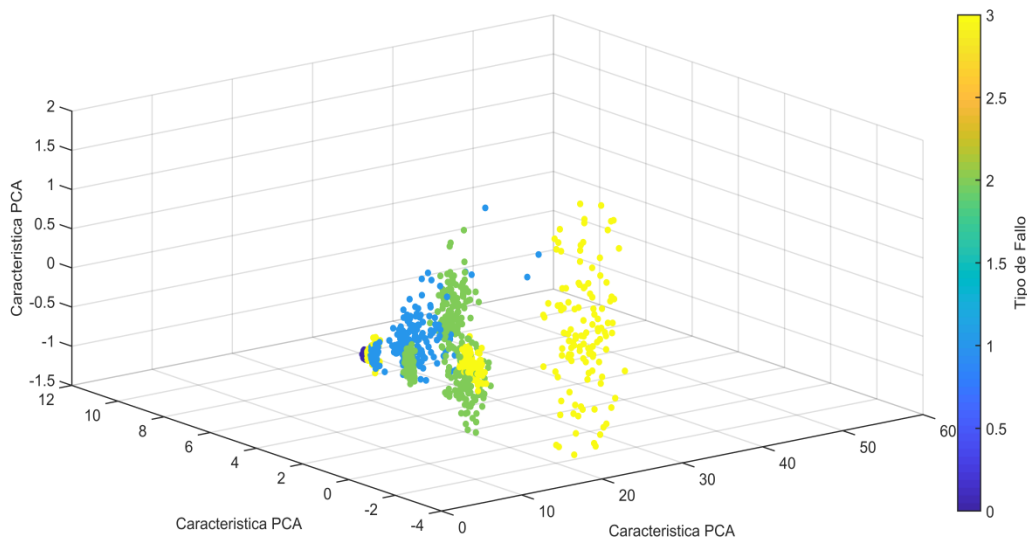


Figura 8 Características PCA Tipo de fallo usando 7 Momentos estadísticos en la base de datos de la universidad Case Western.

Donde los puntos Amarillos son Fallos en el tren externo, los Verdes son Fallos tren interno, los Azules son Fallos en bola y los Morados son Sin fallo.

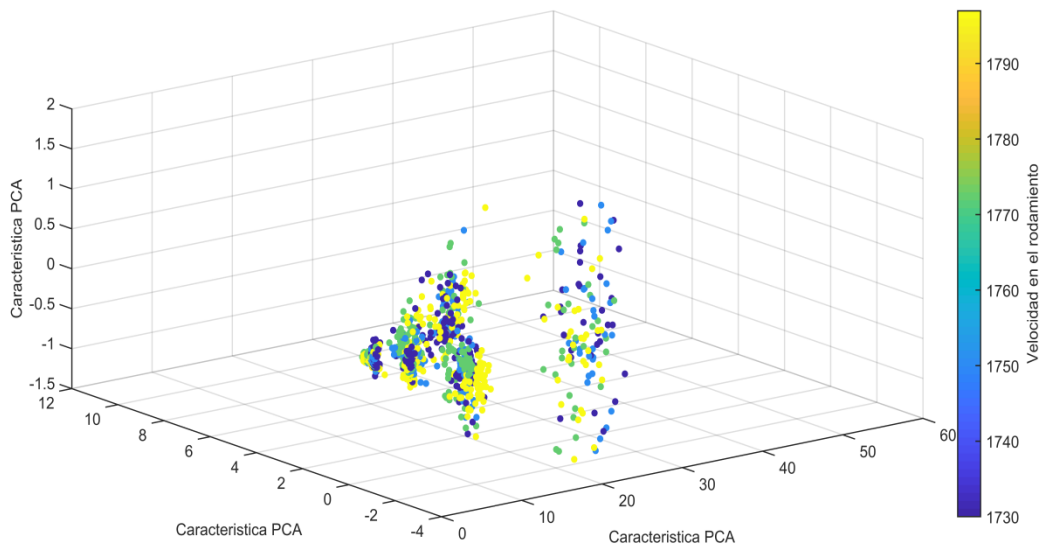


Figura 9 Características PCA Velocidad en el rodamiento usando 7 Momentos estadísticos en la base de datos de la universidad Case Western.

Donde los puntos Amarillos representan una velocidad de 1790 rpm, los Verdes representan una velocidad de 1770 rpm, los puntos Azules representan una velocidad de 1750 rpm y Morados representan una velocidad de 1730 rpm.

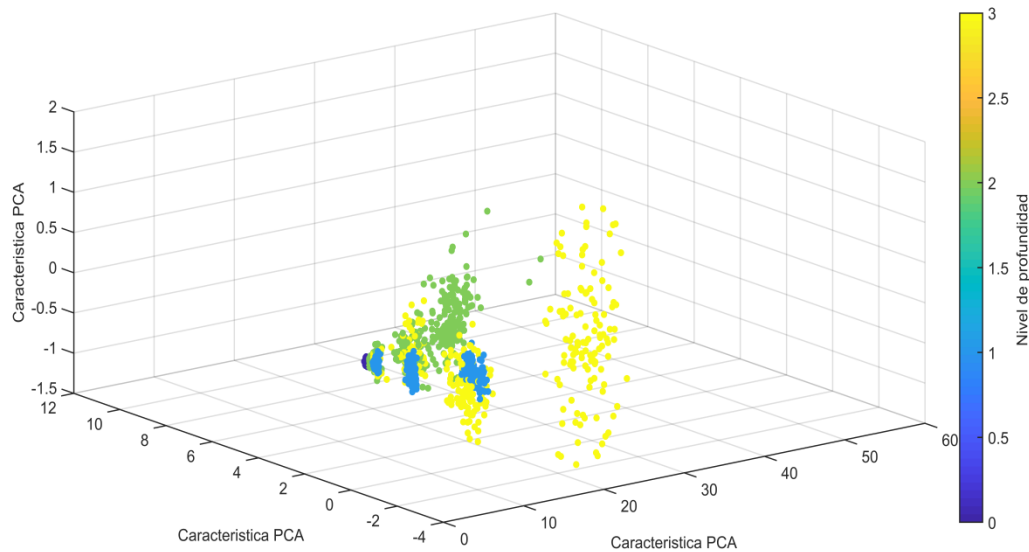


Figura 10 Características PCA Nivel de profundidad usando 7 Momentos estadísticos en la base de datos de la universidad Case Western.

Donde los puntos Amarillos representan una degradación de (0.021 pulgadas), los Verdes representan una degradación de (0.014 pulgadas), los Azules representan una degradación de (0.007 pulgadas) y los Morados no representan ninguna degradación (Sin fallo).

Se puede observar que no existe una buena separación entre componentes lo que hace un poco complicado su análisis. Esto se debe a la pobre cantidad de componentes que puede usar y su importancia de variables.

Transformada en tiempo corto de Fourier

Las características obtenidas de esta componente son en función del tiempo y la frecuencia. Como ya se había mencionado, el proceso de esta variable solo se obtienen valores positivos, ya que son los que generan más peso en el espacio PCA.

En las siguientes figuras se muestra en un diagrama de barras las componentes más significativas y la representación en un espacio PCA para estas variables.

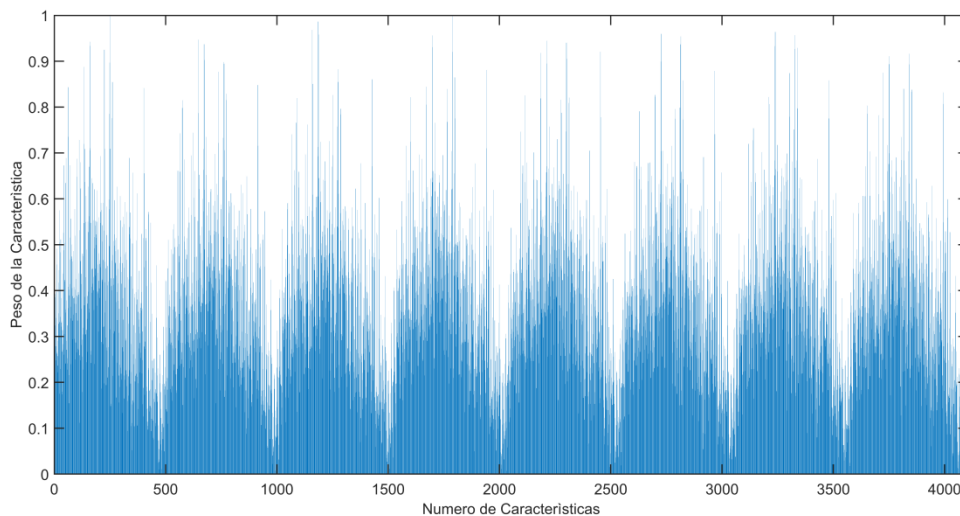


Figura 11 Diagrama de barras para la Transformada de Fourier en tiempo corto.

En la figura 11 se observan las componentes y su respectivo peso en comparación. Las 10 componentes con mayor importancia se ubican en la posición 1788, 250, 1186, 1159, 3239, 2726, 1187, 3328, 1699 y 2815 de mayor a menor respectivamente (Anexo 2).

Teniendo estas características se ingresaron a un análisis de componentes principales PCA y en una interfaz donde se ve la separación de las variables, mostrada en las siguientes figuras.

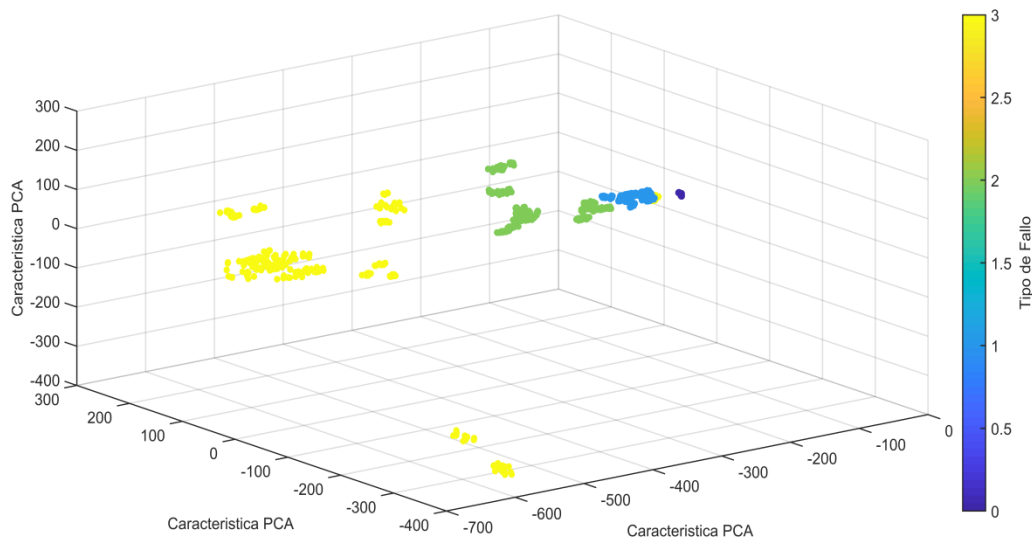


Figura 12 Características PCA Tipo de fallo usando Transformada de Fourier en tiempo corto en la base de datos de la universidad Case Western.

Donde los puntos Amarillos son Fallos en el tren externo, los Verdes son Fallos tren interno, los Azules son Fallos en bola y los Morados son Sin fallo.

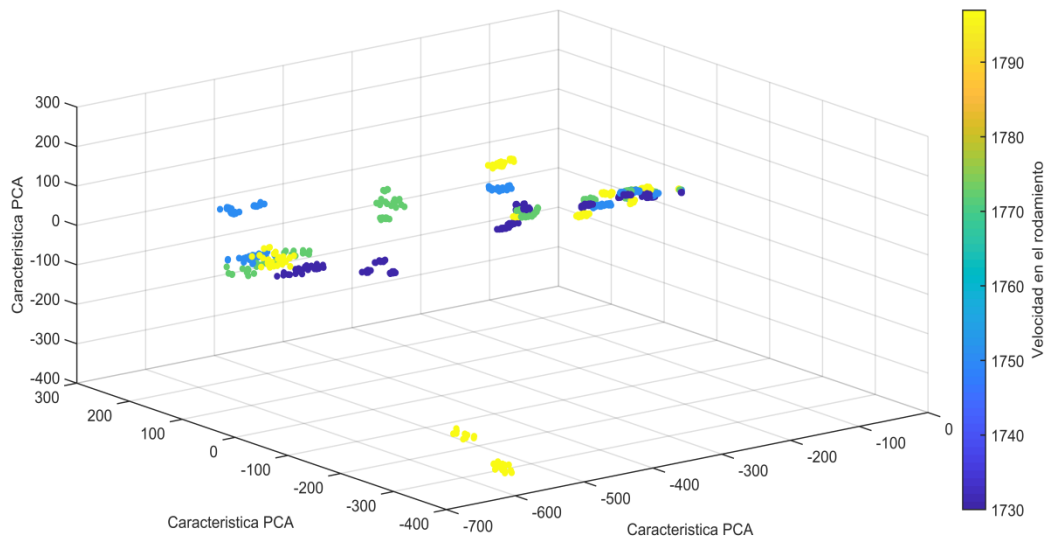


Figura 13 Características PCA Velocidad en el rodamiento usando Transformada de Fourier en tiempo corto en la base de datos de la universidad Case Western.

Donde los puntos Amarillos representan una velocidad de 1790 rpm, los Verdes representan una velocidad de 1770 rpm, los puntos Azules representan una velocidad de 1750 rpm y Morados representan una velocidad de 1730 rpm.

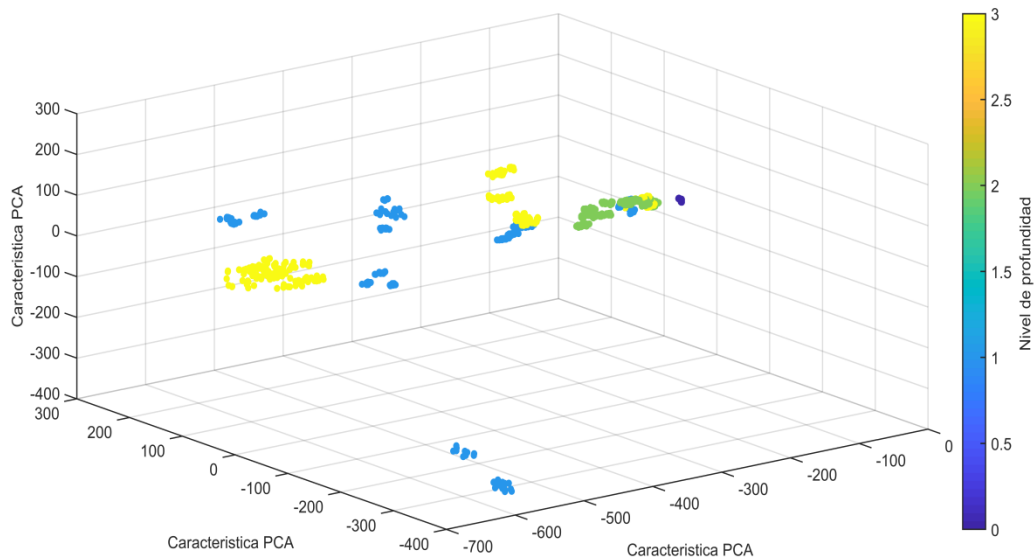


Figura 14 Características PCA Nivel de profundidad usando Transformada de Fourier en tiempo corto en la base de datos de la universidad Case Western.

Donde los puntos Amarillos representan una degradación de (0.021 pulgadas), los Verdes representan una degradación de (0.014 pulgadas), los Azules representan una degradación de (0.007 pulgadas) y los Morados no representan ninguna degradación (Sin fallo).

De las figuras anteriores se puede analizar una mayor separación entre componentes lo que facilita un análisis para estas señales y aplicable a diferentes bases de datos, se debe tener en cuenta que la transformada de Fourier en tiempo corto supera un poco a las características obtenidos en la parte temporal de los momentos estadísticos.

Transformada Wavelet

Las características obtenidas de esta componente son en función del tiempo y la frecuencia. A diferencia de la STFT la versatilidad de esta característica permite componentes más amplias, ya que implementa cortos intervalos resaltando así una información más detallada. También dependiendo de la wavelet madre usada permite una mejor comparación entre las variables.

En las siguientes figuras se muestra en un diagrama de barras las componentes más significativas y la representación en un espacio PCA para estas variables.

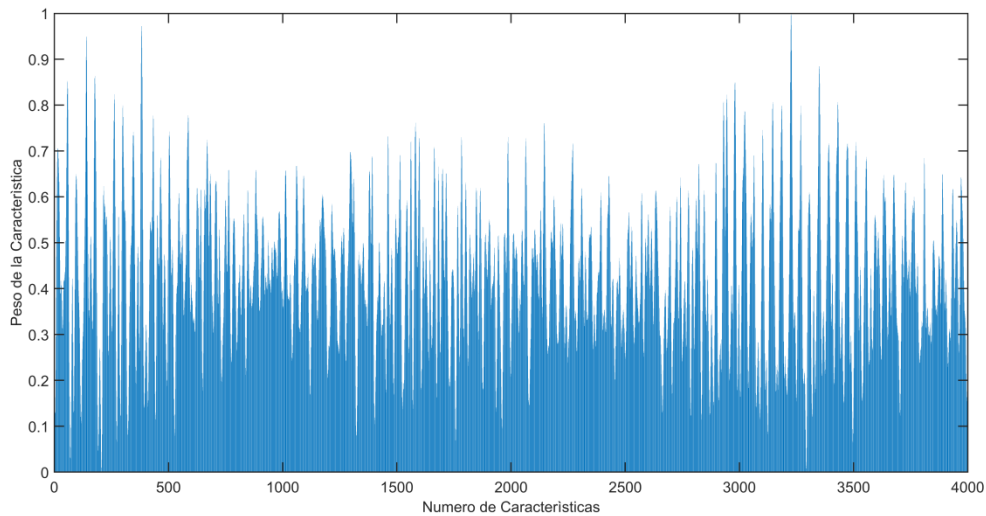


Figura 15 Diagrama de barras para la Transformada Wavelet.

En la figura 15 se observan las componentes y su respectivo peso en comparación. Las 10 componentes con mayor importancia se ubican en la posición (Anexo 3). 3227, 3226, 3228, 382, 3225, 383, 381, 140, 141, 384 de mayor a menor respectivamente.

Teniendo estas características se ingresaron a un análisis de componentes principales PCA y en una interfaz donde se ve la separación de las variables, mostrada en las siguientes figuras.

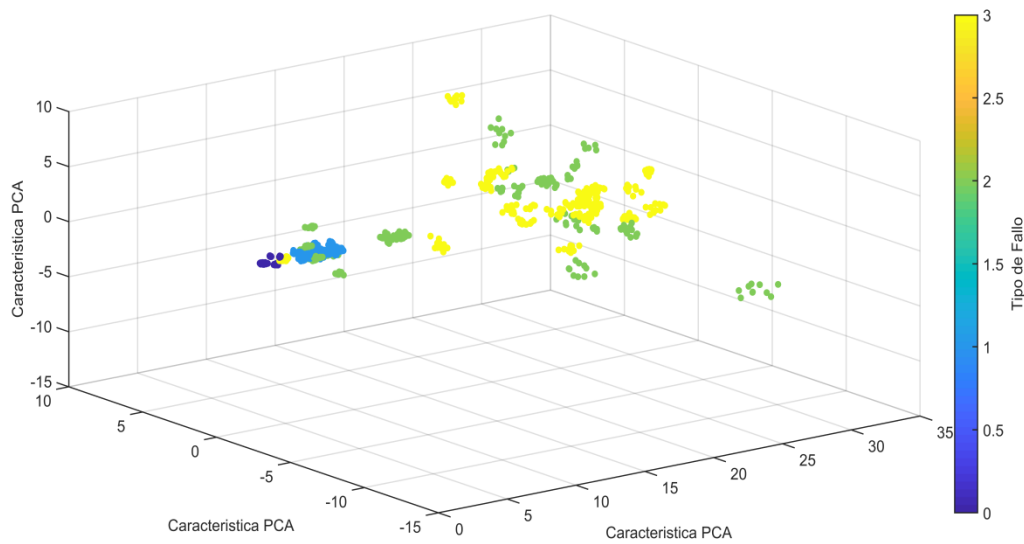


Figura 16 Características PCA Tipo de fallo usando Transformada Wavelet en la base de datos de la universidad Case Western.

Donde los puntos Amarillos son Fallos en el tren externo, los Verdes son Fallos tren interno, los Azules son Fallos en bola y los Morados son Sin fallo.

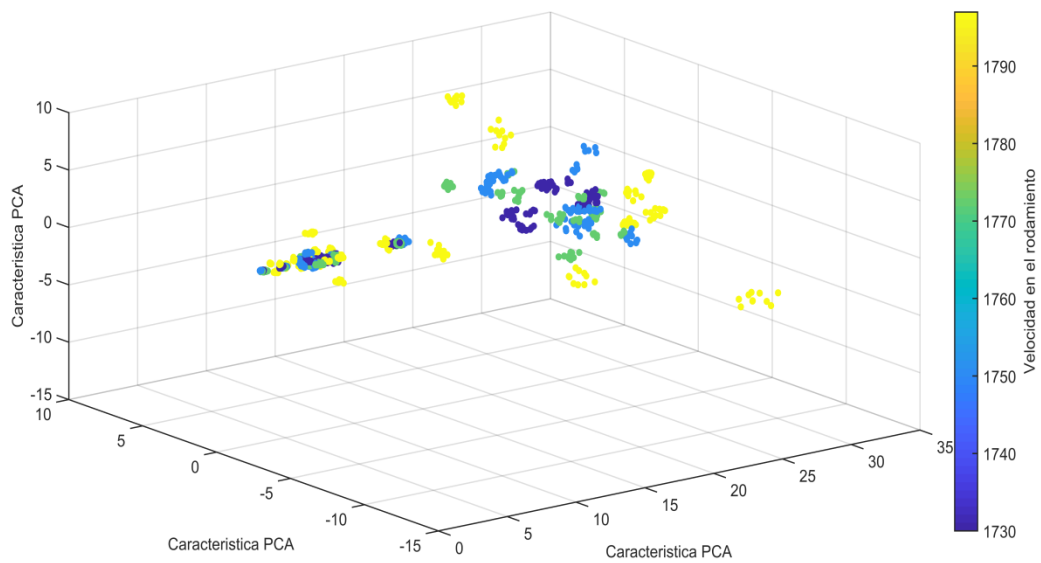


Figura 17 Características PCA Velocidad en el rodamiento usando Transformada de Fourier en tiempo corto en la base de datos de la universidad Case Western.

Donde los puntos Amarillos representan una velocidad de 1790 rpm, los Verdes representan una velocidad de 1770 rpm, los puntos Azules representan una velocidad de 1750 rpm y Morados representan una velocidad de 1730 rpm.

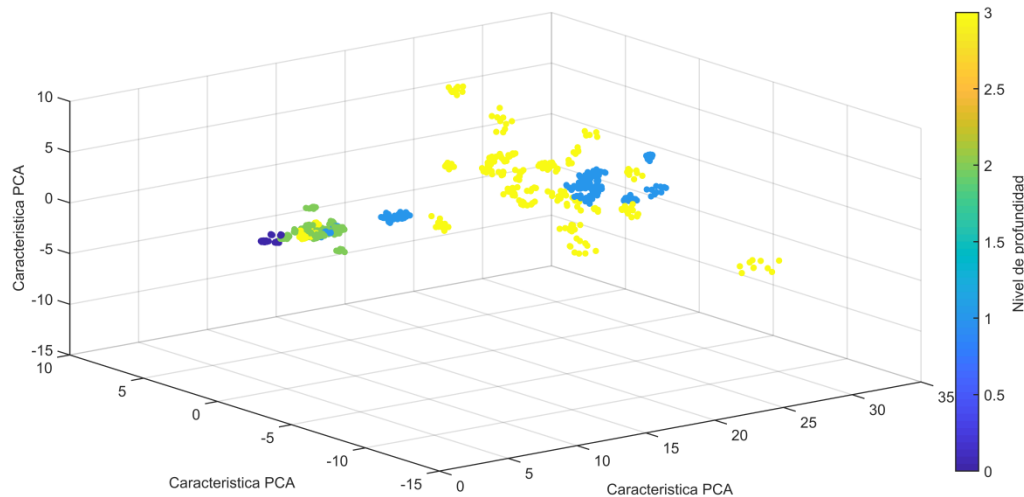


Figura 18 Características PCA Nivel de profundidad usando Transformada Wavelet en la base de datos de la universidad Case Western.

Donde los puntos Amarillos representan una degradación de (0.021 pulgadas), los Verdes representan una degradación de (0.014 pulgadas), los Azules representan una degradación de (0.007 pulgadas) y los Morados no representan ninguna degradación (Sin fallo).

De las figuras anteriores se puede analizar una separación entre componentes que puede generar diferentes análisis para estas señales y aplicable a diferentes bases de datos, se debe tener en cuenta que en comparación con la transformada de Fourier en tiempo corto no muestra una separación adecuada para un mejor estudio. Supera un poco a las características obtenidos en la parte temporal de los momentos estadísticos.

Esta comparación se puede observar en un diagrama de barras figura 19 donde se demuestra que la mejor característica es la STFT seguida de Transformada Wavelet y por último los momentos estadísticos. Cuando se analizan los gráficos entre el espacio PCA con todas las características y la STFT se observa una gran similitud prácticamente son iguales combinando las mejores componentes de las otras características.

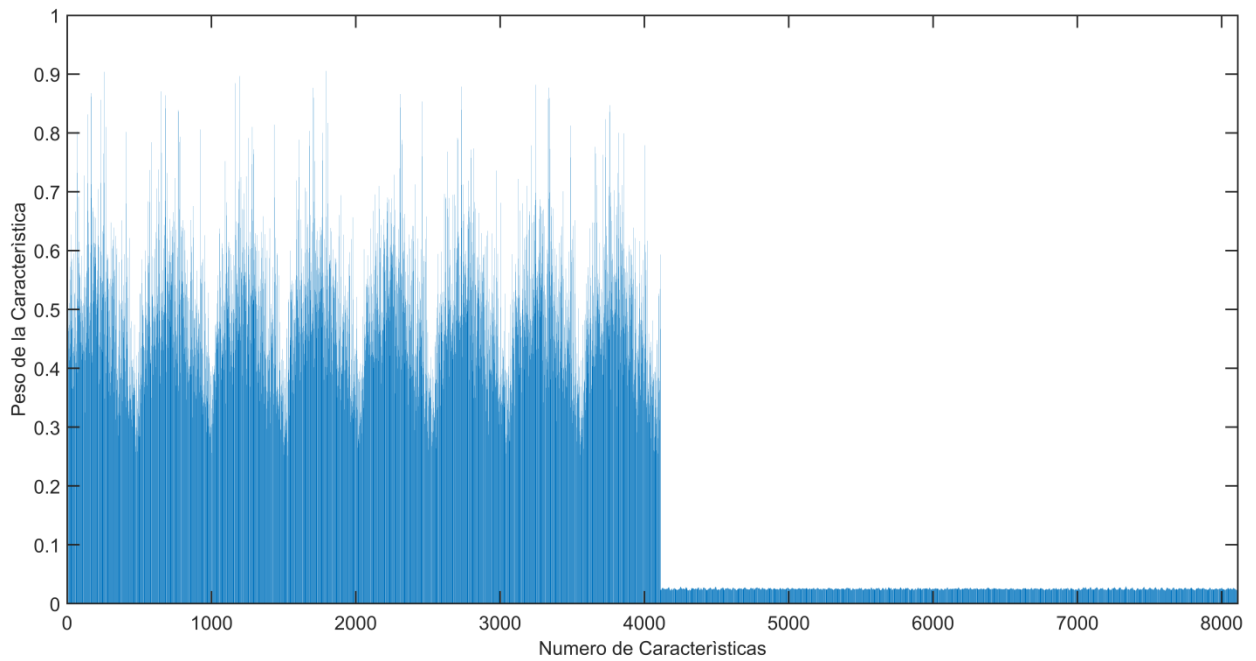


Figura 19 Diagrama de barras de las componentes usadas.

En la figura anterior figura 21 se debe analizar que el número total de las tres componentes fueron 8111, y sigue el orden numérico empezando por los momentos estadísticos, seguido por STFT y por último Transformada wavelet. Como se explica en la siguiente figura 20.

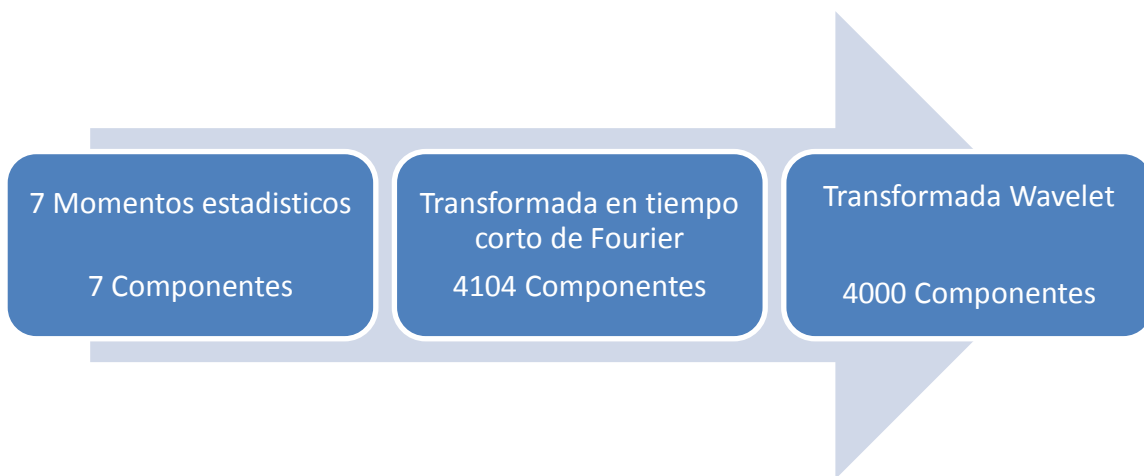


Figura 20 Cantidad de componentes y orden total de 8111.

Se pueden hacer diferentes combinaciones de características, para lograr mejores resultados, pero esto varía mucho según la aplicación.

En la siguiente tabla 2 se anexaran las 100 primeras componentes de la figura 21 usando todas las características.

Tabla 2 Primeras 100 componentes usando todas las características

| | | | | |
|------|------|------|------|------|
| 5 | 3345 | 2974 | 781 | 3346 |
| 1795 | 3334 | 745 | 2705 | 1293 |
| 257 | 232 | 3731 | 1258 | 2797 |
| 1193 | 2461 | 3310 | 2122 | 2635 |
| 1166 | 1796 | 1806 | 2706 | 2285 |
| 3246 | 2193 | 1435 | 3218 | 654 |
| 2733 | 3848 | 3487 | 1609 | 3661 |
| 1194 | 3759 | 2832 | 2320 | 253 |
| 3335 | 2309 | 1283 | 1096 | 1294 |
| 1706 | 681 | 268 | 2192 | 3710 |
| 2822 | 2732 | 1167 | 2284 | 3311 |
| 653 | 769 | 922 | 780 | 2462 |
| 2219 | 256 | 1680 | 583 | 267 |
| 167 | 2220 | 70 | 2319 | 3732 |
| 2308 | 770 | 409 | 4001 | 3488 |
| 680 | 3758 | 3823 | 3219 | 1807 |
| 2821 | 3847 | 1771 | 1679 | 2798 |
| 168 | 140 | 3859 | 3660 | 2833 |
| 3245 | 1282 | 3858 | 2818 | 1772 |
| 1707 | 1948 | 4000 | 582 | 1095 |

Cabe notar que la componente con más peso es la curtosis seguida por las componentes de STFT y por último las componentes de la Transformada Wavelet y la Moda, Media y la Mediana.

Conclusiones

- La selección de sensores para la adquisición de una base de datos de señales de vibración, es indispensable para al momento de hacer algún tipo de diagnóstico o estudios previos. Los sensores de vibración se convierten en la mejor forma de obtener información, ya que otros métodos usados pueden dañar o alterar los rodamientos.
- Para una base de datos robusta en información se hace necesario un pre procesamiento y un acondicionamiento. Consiste en recortar las señales dependiendo de la cantidad de información y frecuencia de muestreo para un mejor rendimiento computacional.
- Se presento una metodología para aplicar técnicas de procesamiento multiresolución en señales. Sacando características en tiempo y frecuencias y empleando un espacio de estados reducidos con análisis de componentes principales PCA, se obtuvo como resultado la visualización de las mejores componentes de tres tipos de características. Siendo las mejores componentes las obtenidas mediante la Transformada en tiempo corto de Fourier STFT.
- Las características obtenidas de los momentos estadísticos arrojaron resultados visibles de componentes principales. La curtosis es la componente con más peso de estas características, pero debido a que solo funciona en la parte temporal, ésta se debe combinar con otras características para obtener mejores resultados.
- El uso de la transformada wavelet frente a otras características tiene una ventaja de versatilidad en tiempo y frecuencia, pero dependiendo de la wavelet madre a comparar esta nos puede generar resultados necesarios para estudios específicos. Debido a su gran consumo computacional, esta debe tener un buen post procesamiento.
- Se pueden emplear diferentes metodologías de caracterización y hacer combinaciones para mejorar los resultados. El código de

programación usado para este análisis abre la posibilidad de ingresar diferentes metodologías y escoger las mejores.

Trabajo futuros

El procesamiento de señales tiene como finalidad explorar bases de datos con el objetivo de realizar estudios y todo ello mediante la ayuda de un ordenador. Las señales de vibraciones mecánicas en rodamientos se obtienen para presentar un diagnóstico y un mantenimiento preventivo en máquinas rotativas.

El mantenimiento preventivo se basa principalmente en inspecciones periódicas a los motores de forma programada con el fin de prevenir y monitorear fallas en piezas debido a factores de desgaste natural o climáticas y así tener un buen rendimiento de éste, es ahí donde la mayoría de empresas en esta área invierten en el mantenimiento y arreglos de motores para evitar fallas futuras. Colombia se está adentrando a una cultura de mantenimiento preventivo basándose a las usadas en Estados Unidos y Europa, ya que anteriormente solo se hacía mantenimiento en caso de fallas. Con la incursión del mantenimiento preventivo se han disminuido costos y tiempo de actividad de empresas en el servicio prestado.

Los objetivos de un buen procesamiento pueden ser diversos. Por ejemplo, añadir información a una señal portadora para que sea transmitida y se pueda recuperar más tarde en otro lugar o en otro momento. También nos puede interesar para proteger información sensible (encriptación), o para detectar piezas defectuosas, mediante imágenes, en una cadena de montaje (detección, clasificación, control de calidad).

En el proyecto “Diseño y desarrollo de un sistema prototipo en línea para el diagnóstico de motores de combustión interna diesel en servicio con base en vibraciones” financiado en la convocatoria de Colciencias 669 del 2014, es un proyecto donde se recolecta una base de datos para establecer un mantenimiento preventivo vía Wifi en tiempo real. El Parque Automotor Integra S.A., Operador de Transporte Masivo en Pereira (3) ya posee un sistema que monitoree el estado de sus motores, pero un buen procesamiento le daría un plus a esta investigación. Este proyecto busca realizar una innovación en el mantenimiento preventivo con toma de datos en los motores por medio del desarrollo de un software adecuado. Este proyecto fue presentado de forma conjunta entre el Grupo de Investigación en Automática de la Universidad Tecnológica de Pereira e

Integra S.A., a la convocatoria ya mencionada de Colciencias dentro del programa nacional de desarrollo tecnológico industrial y calidad.

Anexos

Anexo 1

| Peso | Característica | Tamaño |
|------|---------------------|-----------|
| 5 | Curtosis | 1 |
| 4 | Máximo | 0,1739882 |
| 3 | Mínimo | 0,1639528 |
| 2 | Desviación estándar | 0,0218543 |
| 6 | Moda | 0,0005914 |
| 1 | Media | 7,85E-05 |
| 7 | Mediana | 0 |

Anexo 2

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|--|--|
| 1 | 7 | 8 | 8 | 1 | 0 | 6 | 6 | 2 | 6 | 9 | 7 | 4 | 6 | 7 | 9 | 8 | 8 | 5 | 4 | 2 | 3 | 8 | 1 | 9 | 3 | 5 | 6 | 9 | 8 | 9 | 1 | 1 | 7 | 8 | 3 | 5 | 2 | 4 | 9 | 4 | 8 | 0 | 3 | | | | | | | | | |
| 8 | 3 | 7 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 4 | 9 | 6 | 2 | 0 | 7 | 8 | 4 | 4 | 9 | 9 | 5 | 8 | 0 | 6 | 0 | 8 | 4 | 9 | 5 | 2 | 7 | 0 | 5 | 1 | 8 | 5 | 4 | 3 | 4 | 9 | 0 | 5 | 5 | 2 | 7 | | | | | | | | |
| 8 | 8 | 9 | 1 | 8 | 0 | 2 | 3 | 7 | 8 | 0 | 0 | 5 | 5 | 8 | 1 | 2 | 8 | 4 | 0 | 6 | 0 | 8 | 4 | 9 | 5 | 2 | 7 | 0 | 5 | 1 | 8 | 5 | 4 | 3 | 4 | 9 | 0 | 7 | 6 | 5 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 2 | 6 | 7 | 8 | 2 | 2 | 2 | 8 | 7 | 1 | 3 | 7 | 3 | 1 | 1 | 9 | 2 | 7 | 8 | 6 | 8 | 8 | 3 | 2 | 3 | 2 | 5 | 8 | 7 | 7 | 5 | 4 | 4 | 7 | 1 | 5 | 0 | 0 | 8 | 2 | 6 | 0 | 2 | 2 | | | | | | | | |
| 5 | 7 | 1 | 8 | 0 | 3 | 2 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 3 | 5 | 4 | 9 | 8 | 6 | 8 | 8 | 3 | 2 | 3 | 2 | 5 | 8 | 7 | 7 | 5 | 4 | 4 | 7 | 1 | 5 | 0 | 0 | 8 | 2 | 6 | 0 | 2 | 2 | | | | | | | | | | | |
| 0 | 2 | 1 | 6 | 9 | 5 | 7 | 5 | 6 | 7 | 3 | 2 | 3 | 4 | 7 | 9 | 3 | 8 | 6 | 9 | 9 | 0 | 2 | 2 | 4 | 3 | 5 | 6 | 4 | 4 | 7 | 1 | 5 | 0 | 0 | 8 | 2 | 6 | 0 | 2 | 2 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 5 | 1 | 7 | 7 | 8 | 7 | 1 | 8 | 1 | 3 | 0 | 9 | 6 | 2 | 0 | 9 | 9 | 2 | 6 | 6 | 1 | 2 | 6 | 6 | 1 | 2 | 6 | 5 | 1 | 4 | 9 | 1 | 0 | 3 | 3 | 5 | 5 | 4 | 4 | 0 | 5 | 5 | | | | | | | | | |
| 8 | 2 | 5 | 8 | 1 | 0 | 9 | 4 | 9 | 5 | 6 | 9 | 9 | 1 | 4 | 6 | 9 | 9 | 5 | 9 | 9 | 0 | 6 | 8 | 8 | 3 | 9 | 2 | 3 | 7 | 1 | 1 | 0 | 7 | 7 | 9 | 9 | 4 | 4 | 6 | 6 | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 3 | 5 | 1 | 3 | 2 | 7 | 6 | 9 | 8 | 1 | 9 | 6 | 6 | 8 | 8 | 5 | 9 | 8 | 8 | 2 | 0 | 7 | 2 | 4 | 6 | 7 | 1 | 8 | 4 | 6 | 2 | 6 | 3 | 7 | 0 | 7 | 5 | 7 | 3 | 2 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 7 | 6 | 9 | 9 | 8 | 2 | 3 | 3 | 6 | 9 | 1 | 6 | 2 | 4 | 7 | 6 | 1 | 7 | 3 | 5 | 9 | 7 | 4 | 5 | 2 | 4 | 7 | 6 | 5 | 3 | 8 | 5 | 9 | 0 | 5 | 9 | 0 | 5 | 9 | 9 | 0 | | | | | | | | | | |
| 5 | 4 | 0 | 3 | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 8 | 1 | 9 | 1 | 0 | 3 | 6 | 1 | 3 | 6 | 5 | 4 | 7 | 6 | 1 | 3 | 2 | 0 | 4 | 8 | 5 | 1 | 8 | 2 | 9 | 4 | 7 | 0 | 3 | 5 | 3 | 7 | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 1 | 1 | 7 | 6 | 7 | 6 | 9 | 1 | 7 | 7 | 9 | 2 | 2 | 8 | 6 | 3 | 9 | 3 | 2 | 3 | 4 | 7 | 0 | 0 | 3 | 4 | 7 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 9 | 2 | 3 | 0 | 1 | 5 | 2 | 5 | 2 | 4 | 0 | 1 | 3 | | | | | | | |
| 3 | 3 | 6 | 7 | 0 | 3 | 7 | 1 | 3 | 7 | 7 | 6 | 4 | 4 | 0 | 3 | 6 | 4 | 0 | 6 | 5 | 1 | 5 | 2 | 8 | 5 | 7 | 2 | 8 | 9 | 0 | 8 | 7 | 2 | 8 | 4 | 6 | 6 | 3 | 5 | 2 | 3 | 5 | 7 | 3 | 9 | 8 | 0 | 2 | 1 | | | |
| 3 | 2 | 3 | 7 | 2 | 1 | 1 | 0 | 6 | 9 | 4 | 9 | 3 | 3 | 5 | 4 | 7 | 2 | 1 | 6 | 9 | 4 | 8 | 3 | 8 | 4 | 6 | 6 | 3 | 5 | 2 | 3 | 5 | 7 | 3 | 9 | 8 | 0 | 2 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 4 | 1 | 5 | 8 | 5 | 8 | 2 | 0 | 5 | 4 | 8 | 6 | 0 | 6 | 0 | 8 | 5 | 0 | 4 | 3 | 4 | 5 | 8 | 1 | 9 | 2 | 6 | 2 | 1 | 6 | 1 | 0 | 3 | 8 | 9 | 9 | 2 | 7 | 5 | 0 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 7 | 2 | 2 | 9 | 0 | 6 | 1 | 6 | 2 | 6 | 3 | 6 | 1 | 4 | 7 | 3 | 2 | 0 | 6 | 7 | 3 | 2 | 0 | 2 | 2 | 5 | 3 | 7 | 4 | 8 | 3 | 1 | 9 | 9 | 0 | 9 | 0 | | | | | | | | |
| 7 | 2 | 7 | 7 | 3 | 9 | 7 | 8 | 7 | 2 | 2 | 9 | 0 | 6 | 1 | 6 | 2 | 6 | 3 | 6 | 1 | 4 | 7 | 3 | 2 | 0 | 6 | 7 | 3 | 2 | 0 | 2 | 2 | 5 | 3 | 7 | 4 | 8 | 3 | 1 | 9 | 9 | 0 | 9 | 0 | | | | | | | | |
| 2 | 9 | 8 | 8 | 0 | 6 | 4 | 5 | 0 | 7 | 2 | 1 | 6 | 9 | 7 | 6 | 0 | 8 | 9 | 7 | 0 | 8 | 9 | 0 | 8 | 9 | 0 | 7 | 3 | 2 | 0 | 2 | 2 | 5 | 3 | 7 | 4 | 8 | 3 | 1 | 9 | 9 | 0 | 9 | 0 | | | | | | | | |
| 6 | 8 | 1 | 1 | 7 | 2 | 5 | 0 | 8 | 6 | 0 | 9 | 5 | 2 | 4 | 1 | 9 | 9 | 8 | 1 | 9 | 0 | 7 | 0 | 6 | 5 | 3 | 4 | 7 | 5 | 9 | 6 | 4 | 0 | 4 | 1 | 9 | 7 | 8 | 2 | 5 | 7 | 1 | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | | | |
| 1 | 0 | 7 | 9 | 7 | 3 | 1 | 6 | 9 | 5 | 7 | 8 | 0 | 0 | 8 | 3 | 9 | 7 | 7 | 1 | 4 | 7 | 5 | 3 | 6 | 7 | 1 | 6 | 7 | 6 | 6 | 3 | 8 | 0 | 3 | 5 | 9 | 2 | 9 | 5 | 4 | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 9 | 4 | 7 | 9 | 9 | 7 | 7 | 2 | 8 | 6 | 7 | 9 | 4 | 3 | 9 | 3 | 3 | 4 | 3 | 6 | 6 | 6 | 3 | 8 | 3 | 2 | 6 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 4 | 0 | 6 | 5 | 7 | 1 | 7 | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 4 | 2 | 2 | 0 | 0 | 4 | 6 | 7 | 1 | 8 | 8 | 6 | 8 | 1 | 7 | 3 | 2 | 7 | 9 | 5 | 9 | 2 | 5 | 1 | 6 | 0 | 1 | 7 | 5 | 1 | 4 | 6 | 0 | 8 | 7 | 4 | 9 | 3 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 3 | 6 | 2 | 7 | 2 | 3 | 6 | 6 | 2 | 3 | 2 | 6 | 8 | 7 | 2 | 1 | 5 | 1 | 4 | 7 | 3 | 7 | 7 | 1 | 0 | 0 | 5 | 1 | 4 | 1 | 0 | 4 | 2 | 9 | 9 | 4 | 5 | 8 | 7 | 6 | 7 | 6 | 7 | 2 | 5 | 4 | 0 | 6 | 1 | | | |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 6 | 2 | 4 | 5 | 9 | 0 | 5 | 7 | 2 | 9 | 6 | 4 | 9 | 5 | 0 | 6 | 4 | 9 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 | 1 | 5 | 4 | 5 | 1 | 3 | 5 | 9 | 9 | 2 | 2 | 7 | 2 | 5 | 4 | 0 | 6 | 1 | | | | | | | |
| 8 | 5 | 8 | 0 | 1 | 3 | 8 | 6 | 7 | 2 | 8 | 3 | 9 | 4 | 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 4 | 6 | 6 | 6 | 9 | 6 | 0 | 9 | 1 | 7 | 6 | 8 | 9 | 8 | 9 | 2 | 7 | 7 | 2 | 4 | 6 | 7 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 5 | 5 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 8 | 1 | 3 | 8 | 1 | 3 | 8 | 1 | 3 | 9 | 3 | 5 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 8 | 2 | 2 | 1 | 5 | 3 | 2 | 1 | 3 | 4 | 2 | 2 | 3 | 3 | | | | | | | | | | | |
| 6 | 6 | 6 | 2 | 7 | 8 | 6 | 9 | 8 | 1 | 3 | 0 | 2 | 3 | 7 | 2 | 8 | 7 | 0 | 2 | 6 | 9 | 1 | 6 | 8 | 9 | 8 | 6 | 3 | 8 | 7 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 4 | 9 | 7 | 0 | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 | 0 | 3 | 5 | 6 | 0 | 4 | 0 | 1 | 6 | 6 | 1 | 1 | 1 | 4 | 7 | 2 | 2 | 1 | 1 | 7 | 2 | 2 | 1 | 1 | 7 | 2 | 2 | 8 | 5 | 3 | 9 | 9 | 5 | 6 | 1 | 2 | 1 | 9 | 4 | 0 | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
| | 7 | 4 | 0 | 1 | 6 | 3 | | 2 | | 0 | 2 | 9 | 8 | 3 | 5 | 3 | 4 | 7 | 3 | 3 | 8 | 3 | | 0 | 6 | 9 | 2 | 4 | 2 | 3 | 7 | 8 | 9 | 2 | 2 | 5 | | 1 | | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | | 2 | 1 | 1 | | 4 | 3 | 3 | | 2 | 2 | | 3 | 3 | 3 | | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 4 | 5 | 3 | 3 | 7 | 8 | 9 | 2 | 2 | 3 | 1 | | | | | | | | |
| 7 | 7 | 3 | 6 | 4 | 8 | 9 | 6 | 0 | 3 | 3 | 9 | 8 | 0 | 6 | 6 | 0 | 5 | 5 | 8 | 8 | 3 | 8 | 8 | 3 | 3 | 8 | 7 | 5 | 7 | 0 | 0 | 4 | 4 | 1 | 8 | 6 | 0 | 8 | 9 | 1 | 5 | 3 | 5 | 8 | | | |
| 2 | 8 | 5 | 4 | 8 | 9 | 6 | 0 | 3 | 3 | 9 | 8 | 0 | 6 | 6 | 0 | 5 | 5 | 8 | 8 | 3 | 8 | 8 | 3 | 3 | 8 | 7 | 5 | 7 | 0 | 0 | 4 | 4 | 1 | 8 | 6 | 0 | 8 | 9 | 1 | 5 | 3 | 5 | 8 | | | | |
| 4 | 5 | 9 | 3 | 7 | 5 | 1 | 1 | 8 | 4 | 4 | 1 | 1 | 5 | 7 | 7 | 1 | 4 | 8 | 4 | 0 | 4 | 4 | 5 | 9 | 7 | 6 | 1 | 0 | 6 | 2 | 2 | 7 | 3 | 3 | 8 | 4 | 3 | 4 | 1 | 8 | | | | | | | |
| 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 8 | 6 | 8 | 9 | 6 | 7 | 8 | 8 | 7 | | 8 | 4 | 6 | 0 | 2 | 1 | 8 | 7 | 5 | 6 | 8 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 5 | 4 | 4 | 9 | 7 | 4 | 1 | 7 | 9 | 9 | 2 | 4 | 0 | 9 | 4 | | | | |
| 0 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 5 | 1 | 8 | 7 | 4 | 0 | 0 | 2 | 1 | 3 | 8 | 6 | 0 | 0 | 5 | 1 | 5 | 7 | 0 | 9 | 8 | 2 | 7 | 6 | 0 | 8 | 5 | 6 | 3 | 7 | 3 | 4 | 0 | 9 | 4 | | | | | | |
| 3 | 7 | 7 | 1 | 1 | 6 | 4 | 1 | 1 | 9 | 0 | 8 | 3 | 1 | 3 | 4 | 8 | 5 | 2 | 9 | 8 | 4 | 8 | 6 | 5 | 0 | 8 | 7 | 1 | 1 | 7 | 5 | 8 | 7 | 4 | 6 | 8 | 5 | 6 | 8 | 5 | 8 | 8 | 5 | | | | |
| 1 | 3 | 2 | 1 | | 2 | 1 | | 2 | 2 | 3 | | 1 | | | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 6 | 1 | 6 | 8 | 2 | 6 | 5 | 8 | 2 | 5 | 2 | 8 | 2 | 1 | 5 | 7 | 1 | 2 | 1 | 2 | 6 | 2 | 2 | 0 | 7 | 8 | 1 | 6 | 2 | 0 | 4 | 8 | 3 | 8 | 5 | 2 | 0 | 4 | 8 | 8 | 5 | 4 | 2 | 9 | | | |
| 9 | 6 | 6 | 9 | 3 | 3 | 6 | 9 | 5 | 8 | 2 | 5 | 2 | 8 | 7 | 8 | 6 | 1 | 5 | 4 | 6 | 1 | 2 | 0 | 8 | 4 | 5 | 3 | 3 | 7 | 0 | 9 | 1 | 3 | 2 | 0 | 3 | 8 | 9 | 6 | 8 | 8 | 1 | 7 | | | | |
| 9 | 3 | 4 | 6 | 0 | 3 | 6 | 5 | 0 | 7 | 0 | 7 | 2 | 5 | 3 | 4 | 4 | 6 | 1 | 8 | 4 | 5 | 4 | 6 | 1 | 2 | 8 | 4 | 5 | 3 | 7 | 0 | 9 | 1 | 3 | 2 | 0 | 3 | 8 | 9 | 6 | 8 | 8 | 1 | 7 | | | |
| 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | | 2 | 1 | 3 | | 3 | 3 | 3 | 2 | | | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | | 3 | 3 | 1 | 2 | | | 3 | 2 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 1 | 1 | 2 | 9 | 4 | 7 | 3 | 4 | 3 | 7 | 8 | 6 | 2 | 7 | | 2 | 6 | 3 | 7 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 5 | 5 | 7 | 9 | 5 | 6 | 7 | 3 | 8 | 5 | 5 | 4 | 9 | 9 | 9 | 4 | | | | | | | |
| 2 | 8 | 5 | 1 | 1 | 3 | 7 | 3 | 2 | 1 | 9 | 3 | 1 | 6 | 6 | 6 | 9 | 8 | 1 | 7 | 9 | 6 | 1 | 1 | 4 | 5 | 6 | 7 | 3 | 6 | 4 | 9 | 6 | 8 | 1 | 5 | 5 | 8 | 9 | 7 | 9 | 4 | | | | | | |
| 8 | 0 | 5 | 5 | 0 | 3 | 1 | 8 | 0 | 6 | 0 | 9 | 6 | 9 | 1 | 2 | 5 | 4 | 8 | 8 | 6 | 1 | 1 | 6 | 8 | 8 | 6 | 5 | 5 | 6 | 3 | 9 | 6 | 9 | 5 | 1 | 2 | 6 | 8 | 5 | 1 | 2 | 6 | 5 | 8 | | | |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 1 | 2 | 2 | 7 | 1 | 0 | 3 | 3 | 3 | 9 | 2 | 3 | 0 | 9 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 4 | 0 | 3 | 3 | 1 | 8 | 2 | 8 | 8 | 1 | 3 | 8 | 4 | 0 | 4 | 2 | 4 | 0 | 2 | 6 | 0 | 4 | 5 | 9 | | | |
| 8 | 5 | 0 | 9 | 9 | 6 | 9 | 6 | 1 | 3 | 4 | 4 | 4 | 3 | 0 | 2 | 8 | 4 | 8 | 5 | 5 | 3 | 9 | 8 | 9 | 9 | 7 | 4 | 0 | 2 | 6 | 3 | 7 | 5 | 5 | 0 | 2 | 7 | 5 | 0 | 2 | 7 | 7 | 6 | 8 | | | |
| 0 | 4 | 7 | 9 | 1 | 3 | 9 | 8 | 0 | 4 | 9 | 1 | 4 | 9 | 9 | 0 | 7 | 8 | 3 | 2 | 7 | 8 | 3 | 2 | 7 | 9 | 8 | 9 | 5 | 5 | 9 | 4 | 7 | 9 | 6 | 4 | 7 | 9 | 6 | 2 | 3 | 0 | 8 | 0 | 2 | 9 | 4 | |
| 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | | 2 | 1 | | 3 | 1 | | 3 | 2 | | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | | |
| 8 | 7 | 7 | 1 | 8 | 2 | 1 | 5 | 4 | 7 | 3 | 3 | 9 | 0 | 8 | 3 | 3 | 5 | 6 | 7 | 4 | 6 | 9 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 6 | 7 | 8 | 8 | 4 | 0 | 8 | 4 | 3 | 5 | 2 | 5 | 8 | 1 | 1 | 4 | 5 | 5 | |
| 2 | 5 | 2 | 8 | 0 | 0 | 5 | 4 | 9 | 2 | 6 | 3 | 1 | 4 | 0 | 6 | 6 | 2 | 3 | 0 | 1 | 6 | 3 | 6 | 9 | 9 | 2 | 7 | 2 | 8 | 2 | 5 | 6 | 2 | 0 | 9 | 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 1 | 9 | | | | |
| 5 | 0 | 3 | 3 | 0 | 9 | 3 | 1 | 9 | 2 | 6 | 3 | 1 | 4 | 0 | 6 | 6 | 2 | 3 | 0 | 1 | 6 | 3 | 6 | 9 | 9 | 2 | 7 | 2 | 8 | 2 | 5 | 6 | 2 | 0 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 9 | | | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | | 3 | 1 | 1 | | 2 | 1 | 3 | | 3 | 2 | | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 9 | 2 | 3 | 9 | 6 | 2 | 7 | 2 | 1 | 3 | | 6 | 6 | 2 | 1 | 7 | 3 | 8 | 9 | 4 | 0 | 8 | 1 | 0 | 3 | 4 | 8 | 0 | 3 | 5 | 0 | 8 | 9 | 5 | 0 | 8 | 9 | 5 | 0 | 5 | | | |
| 7 | 9 | 9 | 0 | 5 | 7 | 4 | 4 | 0 | 8 | 2 | 1 | 4 | 8 | 0 | 8 | 6 | 1 | 3 | 5 | 2 | 7 | 8 | 3 | 0 | 8 | 3 | 0 | 7 | 6 | 2 | 7 | 6 | 5 | 0 | 3 | 2 | 8 | 7 | 9 | 1 | 0 | 8 | 7 | 2 | | | |
| 6 | 3 | 4 | 9 | 8 | 8 | 1 | 2 | 1 | 8 | 3 | 1 | 7 | 0 | 2 | 5 | 8 | 1 | 1 | 8 | 6 | 1 | 1 | 4 | 5 | 8 | 6 | 1 | 4 | 5 | 7 | 4 | 9 | 0 | 6 | 9 | 5 | 9 | 4 | 1 | 0 | 8 | 6 | 2 | | | | |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | | 3 | 3 | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | |
| 2 | 7 | 2 | 7 | 3 | 1 | 7 | 3 | 7 | 8 | 4 | 9 | 8 | 1 | 6 | 9 | 3 | 6 | 8 | 1 | 6 | 6 | 9 | 1 | 3 | 7 | 5 | 6 | 4 | 9 | 1 | 3 | 1 | 3 | 9 | 4 | 3 | 4 | 9 | 0 | 5 | | | | | | | |
| 6 | 2 | 7 | 2 | 1 | 3 | 2 | 9 | 2 | 7 | 2 | 7 | 0 | 4 | 4 | 5 | 3 | 1 | 1 | 7 | 2 | 1 | 7 | 5 | 6 | 7 | 4 | 9 | 0 | 7 | 7 | 1 | 2 | 1 | 7 | 2 | 1 | 9 | 3 | 5 | 4 | | | | | | | |
| 1 | 1 | 3 | 4 | 1 | 2 | 9 | 6 | 5 | 3 | 9 | 5 | 7 | 1 | 6 | 9 | 4 | 0 | 9 | 7 | 4 | 0 | 9 | 7 | 4 | 5 | 9 | 7 | 6 | 7 | 8 | 7 | 6 | 1 | 9 | 8 | 6 | 5 | 4 | 5 | 0 | 8 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 2 | 6 | 8 | 5 | 5 | 7 | 2 | 4 | 6 | 3 | 2 | 2 | 9 | 6 | 5 | 1 | 1 | 3 | 1 | 8 | 7 | 3 | 8 | 0 | 6 | 0 | 2 | 5 | 0 | 8 | 2 | 4 | 6 | 1 | 7 | 9 | 6 | | | | | | |
| 6 | 2 | 7 | 7 | 7 | 6 | 4 | 5 | 5 | 7 | 2 | 4 | 6 | 3 | 2 | 2 | 9 | 6 | 5 | 1 | 1 | 3 | 1 | 8 | 7 | 3 | 8 | 0 | 6 | 0 | 2 | 5 | 0 | 8 | 2 | 4 | 6 | 1 | 7 | 9 | 6 | | | | | | | |
| 0 | 8 | 0 | 8 | 0 | 3 | 2 | 1 | 4 | 3 | 9 | 7 | 4 | 1 | 8 | 6 | 4 | 4 | 6 | 6 | 9 | 3 | 5 | 2 | 4 | 1 | 5 | 5 | 9 | 5 | 2 | 5 | 3 | 5 | 0 | 8 | 7 | 6 | 2 | 1 | 1 | 4 | 0 | | | | | |
| 9 | 6 | 7 | 2 | 9 | 8 | 0 | 6 | 6 | 2 | 2 | 4 | 3 | 1 | 4 | 0 | 1 | 5 | 2 | 6 | 6 | 0 | 2 | 6 | 0 | 2 | 6 | 0 | 2 | 7 | 8 | 0 | 0 | 9 | 5 | 5 | 2 | 4 | 1 | 7 | 9 | 4 | 7 | 2 | 0 | | | |
| 1 | 4 | 7 | 4 | 4 | 8 | 2 | 4 | 3 | 5 | 2 | 3 | 0 | 4 | 1 | 8 | 4 | 5 | 4 | 7 | 8 | 0 | 6 | 0 | 3 | 2 | 4 | 8 | 3 | 3 | 0 | 8 | 3 | 0 | 0 | 8 | 5 | 2 | 0 | 6 | 0 | 4 | 1 | 2 | 7 | 6 | | |
| 5 | 1 | 2 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 2 | 3 | 0 | 4 | 1 | 8 | 4 | 5 | 4 | 7 | 8 | 0 | 6 | 0 | 6 | 0 | 3 | 2 | 4 | 8 | 3 | 3 | 0 | 8 | 3 | 0 | 0 | 8 | 5 | 2 | 0 | 6 | 0 | 4 | 1 | 2 | 7 | 6 | | |
| 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 | 2 | | 2 | | 2 | | 2 | | 2 | 1 | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | | |
| 6 | 2 | 5 | 6 | 4 | 2 | 2 | 7 | 6 | 5 | 3 | 6 | 7 | 8 | 3 | 7 | 9 | 6 | 7 | 2 | 3 | 5 | 1 | 4 | 1 | 0 | 9 | 5 | 6 | 8 | 3 | 8 | 6 | 5 | 7 | 4 | 5 | 4 | 4 | 3 | 5 | | | | | | | |
| 7 | 5 | 9 | 2 | 1 | 4 | 6 | 4 | 4 | 9 | 1 | 8 | 1 | 5 | 7 | 1 | 7 | 6 | 7 | 9 | 0 | 8 | 0 | 0 | 9 | 7 | 6 | 4 | 3 | 4 | 9 | 8 | 1 | 6 | 9 | 4 | 0 | 6 | 9 | 8 | 8 | 6 | 4 | 8 | 7 | 9 | 7 | |
| 3 | 2 | 2 | 6 | 4 | 6 | 7 | 8 | 4 | 6 | 4 | 7 | 8 | 2 | 7 | 0 | 3 | 0 | 3 | 6 | 4 | 3 | 4 | 9 | 8 | 1 | 1 | 6 | 9 | 4 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 | 9 | 8 | 8 | 6 | 4 | 8 | 7 | 9 | 7 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | | 2 | 2 | 1 | 1 | 5 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 2 | 4 | 7 | 5 | 2 | 1 | 7 | 3 | 5 | 7 | 6 | 7 | 2 | 7 | 2 | 7 | 5 | 1 | 8 | 8 | 7 | 5 | 4 | 7 | 7 | 8 | 4 | 4 | 3 | 4 | 5 | 7 | 5 | 2 | 4 | 0 | 2 | 5 | 4 | 2 | 3 | 6 | 0 | | | | |
| 6 | 4 | 1 | 5 | 4 | 3 | 7 | 2 | 9 | 3 | 8 | 9 | 4 | 5 | 2 | 1 | 8 | 8 | 7 | 5 | 4 | 7 | 7 | 8 | 4 | 4 | 3 | 4 | 5 | 7 | 5 | 2 | 4 | 0 | 2 | 5 | 4 | 2 | 5 | 4 | 2 | 3 | 6 | 0 | | | | |
| 3 | 7 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 8 | 1 | 8 | 7 | | | 3 | 3 | 2 | 6 | | | | | 1 | 1 | 5 | | 5 | 1 | 8 | | 5 | 1 | 8 | | 6 | 5 | 3 | 2 | 3 | 9 | 4 | 7 | | | | | | | | |
| 3 | 2 | | | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | | | | | | | |
| 8 | 9 | 1 | 6 | 4 | 8 | 4 | 3 | 1 | 6 | 7 | 7 | 3 | 0 | 8 | 5 | 1 | 8 | 4 | 2 | 3 | 1 | 6 | 9 | 7 | 2 | 3 | 8 | 0 | 3 | 5 | 6 | 5 | 0 | 5 | 4 | 0 | | | | | | | |
| 5 | 1 | 3 | 6 | 2 | 9 | 4 | 0 | 4 | 9 | 8 | 6 | 6 | 1 | 0 | 7 | 1 | 2 | 2 | 3 | 8 | 5 | 1 | 2 | 2 | 3 | 8 | 7 | 2 | 7 | 5 | 4 | 5 | 9 | 6 | 1 | 8 | | | | | | | |
| 1 | 7 | 8 | 5 | 3 | 2 | 1 | 5 | 8 | 3 | 6 | 7 | 9 | 3 | 8 | 1 | 4 | 0 | 3 | 9 | 1 | 2 | 3 | 5 | 4 | 5 | 9 | 6 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 0 | 5 | | | | | | | |
| 3 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | | | | | | |
| 9 | 7 | 1 | 3 | 2 | 4 | 7 | 4 | 4 | 7 | 4 | 4 | 6 | 8 | 3 | 5 | 7 | 4 | 3 | 5 | 8 | 7 | 0 | 1 | 5 | 6 | 6 | 4 | 4 | 9 | 5 | 3 | 5 | 8 | 5 | 5 | 0 | 5 | | | | | | |
| 9 | 8 | 5 | 2 | 2 | 9 | 4 | 7 | 6 | 3 | 1 | 1 | 7 | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 8 | 4 | 0 | 0 | 8 | 6 | 7 | 6 | 4 | 1 | 4 | 8 | 7 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 7 | 1 | | | | | | |
| 3 | 2 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 4 | 0 | 5 | 1 | 8 | 9 | 7 | 1 | 7 | 0 | 3 | 2 | 4 | 2 | 5 | 9 | 9 | 8 | 2 | 2 | 6 | 7 | 0 | 6 | 9 | 2 | 7 | 1 | 7 | | | | | | |
| 7 | 3 | 4 | 2 | | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | | | | | |
| 7 | 3 | 1 | 0 | 7 | 2 | 3 | 9 | 2 | 2 | 7 | 2 | 6 | 7 | 0 | 2 | 1 | 1 | 6 | 3 | 3 | 2 | 4 | 8 | 1 | 5 | 4 | 3 | 9 | 5 | 3 | 7 | 2 | 9 | 9 | 5 | 3 | 4 | 8 | | | | | |
| 4 | 6 | 1 | 4 | 8 | 5 | 9 | 6 | 9 | 1 | 7 | 9 | 4 | 3 | 4 | 4 | 8 | 0 | 2 | 7 | 8 | 0 | 2 | 7 | 8 | 0 | 1 | 0 | 8 | 7 | 6 | 2 | 9 | 6 | 2 | 8 | 2 | 7 | 1 | | | | | |
| 2 | | 1 | 2 | | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | | 3 | | 3 | | 2 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | | 3 | | 2 | | 2 | | 3 | 1 | | 1 | 3 | 3 | 3 | 2 | 4 | | | | | | |
| 6 | | 6 | 2 | | 3 | 7 | 3 | 8 | 3 | 2 | 7 | 2 | 9 | 7 | 8 | 8 | 2 | 5 | 2 | 8 | 9 | 6 | 3 | 9 | 9 | 2 | 0 | 3 | 9 | 5 | 8 | 7 | | 5 | 7 | 0 | 9 | 4 | 4 | | | | |
| 9 | 5 | 9 | 5 | 4 | 0 | 2 | 5 | 5 | 3 | 0 | 0 | 9 | 0 | 9 | 0 | 9 | 8 | 7 | 3 | 2 | 0 | 9 | 7 | 2 | 2 | 0 | 3 | 9 | 5 | 7 | 5 | 6 | 3 | 1 | 5 | 3 | 8 | 0 | 1 | | | | |
| 8 | 3 | 8 | 9 | 1 | 9 | 3 | 6 | 3 | 3 | 0 | 6 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 7 | 2 | 5 | 1 | 5 | 2 | 2 | 1 | 2 | 7 | 2 | 7 | 9 | 8 | 7 | 9 | 8 | 7 | 8 | 0 | 1 | 2 | 5 | 5 | 3 | | |
| 1 | 1 | 2 | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 0 | | | |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 8 | 1 | 7 | 5 | 8 | 8 | 8 | 3 | 2 | 7 | 4 | 6 | 7 | 5 | 7 | 5 | 5 | 5 | 2 | 8 | 6 | 4 | 5 | 9 | 8 | 8 | 7 | 1 | 0 | 4 | 9 | 0 | 9 | 3 | 3 | 3 | 0 | | | |
| 5 | 0 | 1 | 4 | 7 | 8 | 8 | 1 | 3 | 5 | 9 | 6 | 5 | 0 | 3 | 3 | 7 | 9 | 5 | 2 | 6 | 1 | 7 | 1 | 7 | 6 | 6 | 6 | 2 | 0 | 8 | 5 | 5 | 9 | 3 | 7 | 2 | 2 | 3 | 8 | 8 | 3 | | |
| 1 | 2 | 4 | 5 | 5 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 5 | 2 | 8 | 4 | 4 | 4 | 0 | 2 | 7 | 2 | 9 | 4 | 0 | 2 | 7 | 2 | 9 | 4 | 1 | 3 | 9 | 1 | 1 | 3 | 3 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | | |
| 2 | 1 | 2 | 3 | | 1 | 2 | | 3 | 1 | 3 | | 2 | | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 6 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 1 | 6 | 7 | 8 | 2 | 7 | 2 | 9 | 2 | 3 | 8 | 3 | 4 | 1 | 6 | 8 | 7 | 0 | 0 | 5 | 9 | 6 | 6 | 4 | 6 | 7 | 5 | 5 | 2 | 7 | 5 | 0 | 6 | 6 | 8 | 9 | 5 | 1 | 7 | 8 | 6 | 8 | | |
| 5 | 1 | 5 | 7 | 2 | 1 | 6 | 5 | 6 | 5 | 0 | 4 | 0 | 4 | 9 | 2 | 9 | 2 | 7 | 4 | 8 | 0 | 0 | 8 | 2 | 1 | 6 | 8 | 7 | 0 | 9 | 3 | 1 | 0 | 0 | 3 | 6 | 1 | 9 | 8 | 9 | | | |
| 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 9 | 6 | 8 | 4 | 8 | 3 | 0 | 1 | 6 | 8 | 9 | 4 | 8 | 0 | 3 | 0 | 4 | 5 | 9 | 0 | | |
| 6 | 4 | 7 | 5 | 1 | 2 | 7 | 3 | 3 | 8 | 6 | 7 | 7 | 6 | 1 | 0 | 5 | 8 | 8 | 3 | 9 | 6 | 8 | 4 | 8 | 3 | 0 | 1 | 6 | 8 | 9 | 4 | 8 | 0 | 3 | 0 | 0 | 4 | 4 | 5 | 9 | 0 | | |
| 9 | 3 | 2 | 0 | 7 | 3 | 7 | 6 | 7 | 6 | 5 | 9 | 9 | 5 | 2 | 7 | 5 | 8 | 0 | 2 | 8 | 5 | 7 | 5 | 0 | 8 | 2 | 8 | 6 | 9 | 7 | 4 | 8 | 7 | 9 | 2 | 5 | 6 | 4 | 4 | 6 | 3 | | |
| 9 | 0 | 9 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 3 | 1 | 2 | 4 | 5 | 3 | 5 | 9 | 1 | 1 | 8 | 0 | 2 | 8 | 5 | 5 | 0 | 8 | 2 | 8 | 6 | 9 | 7 | 4 | 4 | 8 | 7 | 9 | 2 | 5 | 6 | 4 | 4 | 6 | | |
| 3 | 3 | 2 | | 1 | 2 | | 2 | 1 | | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | | | 3 | 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | |
| 2 | 5 | 1 | 3 | 7 | 7 | 2 | 3 | 7 | 1 | 1 | 6 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 7 | 7 | 1 | | 3 | 6 | 4 | 0 | 7 | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 5 | 5 | 3 | 2 | 3 | 4 | 9 | 0 | | | |
| 1 | 8 | 9 | 8 | 8 | 8 | 4 | 7 | 4 | 0 | 1 | 8 | 9 | 2 | 7 | 5 | 2 | 5 | 3 | 2 | 4 | 2 | 3 | 8 | 6 | 6 | 1 | 9 | 1 | 2 | 3 | 1 | 6 | 2 | 0 | 5 | 6 | 8 | 4 | 5 | 0 | | | |
| 1 | 5 | 6 | 8 | 3 | 7 | 7 | 0 | 2 | 3 | 7 | 7 | 6 | 4 | 6 | 1 | 0 | 5 | 6 | 1 | 5 | 4 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 9 | 5 | 7 | 3 | 7 | 7 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 9 | | |
| 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | | 2 | 2 | | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 4 | 3 | |
| 6 | 8 | 2 | 3 | 5 | 8 | 7 | 6 | 1 | 2 | 4 | 2 | 8 | 5 | 4 | 0 | 8 | 6 | 2 | 9 | 4 | 4 | 8 | 6 | 2 | 9 | 4 | 4 | 8 | 6 | 1 | 5 | 1 | 3 | 0 | 0 | 4 | 4 | 5 | 5 | 4 | 4 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 9 | 9 | 2 | 5 | 7 | 8 | 2 | 6 | 1 | 2 | 7 | 0 | 8 | 5 | 4 | 7 | 3 | 8 | 1 | 3 | 8 | 4 | 7 | 6 | 3 | 8 | 6 | 2 | 2 | 0 | 0 | 4 | 2 | 6 | 7 | 9 | 2 | 6 | 0 | | |
| 2 | 7 | 0 | 3 | 0 | 4 | 1 | 3 | 2 | 3 | 6 | 0 | 6 | 4 | 6 | 4 | 5 | 9 | 8 | 4 | 6 | 5 | 1 | 5 | 2 | 8 | 5 | 4 | 4 | 7 | 6 | 1 | 3 | 0 | 9 | 9 | 9 | 7 | 7 | 7 | 0 | 0 | | |
| 2 | 3 | | | 1 | 2 | 1 | | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | | 2 | | 3 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 1 | 3 | 3 | | 3 | | 3 | 1 | | 2 | 3 | 3 | | |
| 3 | 7 | | 2 | 2 | 1 | 7 | 8 | 6 | 8 | 3 | 6 | 2 | 2 | 2 | 8 | | 6 | 9 | 3 | 5 | 6 | 8 | 6 | 9 | 6 | 3 | 0 | 4 | 5 | 1 | 1 | 8 | 3 | 2 | 4 | 3 | 3 | 2 | 4 | 0 | 0 | | |
| 1 | 6 | 5 | 7 | 3 | 3 | 4 | 2 | 3 | 6 | 0 | 6 | 3 | 9 | 4 | 4 | 4 | 0 | 6 | 6 | 6 | 6 | 4 | 9 | 2 | 4 | 5 | 8 | 9 | 3 | 2 | 3 | 2 | 8 | 9 | 5 | 4 | 7 | 1 | 3 | 6 | 6 | | |
| 3 | 2 | 2 | 1 | 6 | 1 | 0 | 5 | 2 | 1 | 3 | 6 | 1 | 1 | 5 | 2 | 9 | 9 | 0 | 2 | 3 | 6 | 4 | 9 | 5 | 6 | 3 | 5 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 8 | 1 | 4 | 4 | 1 | 5 | 1 | 1 | 1 | | |
| 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | | 1 | 1 | 3 | 1 | | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | | 2 | | 1 | | | 3 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 4 | 2 | |
| 0 | 8 | 8 | 2 | 2 | 6 | 5 | 7 | 9 | 8 | 8 | 6 | 7 | 3 | 6 | 9 | 3 | 3 | 2 | 8 | 1 | 6 | 4 | 5 | 7 | 1 | 6 | 4 | 5 | 7 | 1 | 6 | 8 | 5 | 4 | 0 | 2 | 0 | 6 | 7 | 6 | 8 | 6 | |
| 8 | 1 | 1 | 9 | 8 | 9 | 6 | 3 | 0 | 7 | 3 | 8 | 6 | 0 | 3 | 7 | 6 | 5 | 7 | 4 | 9 | 1 | 6 | 8 | 5 | 4 | 0 | 2 | 0 | 6 | 7 | 6 | 8 | 6 | 1 | 3 | 6 | 6 | 5 | 1 | 3 | 6 | 5 | 1 |
| 9 | 7 | 2 | 9 | 5 | 7 | 4 | 5 | 2 | 6 | 5 | 8 | 9 | 0 | 7 | 3 | 7 | 6 | 5 | 9 | 2 | 4 | 7 | 4 | 0 | 8 | 3 | 5 | 5 | 6 | 5 | 9 | 6 | 0 | 6 | 2 | 4 | 5 | 7 | 2 | 3 | 3 | | |
| 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 |
| 2 | 2 | 8 | 4 | 7 | 1 | 7 | 6 | 8 | 6 | | 7 | 1 | 4 | 6 | 3 | 5 | 2 | 1 | 7 | 4 | 6 | 8 | 8 | 6 | 1 | 9 | 5 | 3 | 8 | 3 | 4 | 4 | 3 | 5 | 9 | 4 | 5 | 8 | 5 | 5 | 5 | 5 | |
| 7 | 3 | 4 | 1 | 1 | 6 | 3 | 9 | 1 | 4 | 8 | 5 | 1 | 0 | 2 | 0 | 7 | 8 | 9 | 4 | 9 | 2 | 1 | 2 | 0 | 4 | 9 | 2 | 2 | 0 | 6 | 9 | 5 | 6 | 9 | 0 | 4 | 1 | 8 | 0 | 3 | 9 | 0 | 5 |
| 7 | 7 | 2 | 9 | 9 | 5 | 7 | 3 | 5 | 7 | 2 | 4 | 1 | 4 | 1 | 9 | 1 | 9 | 6 | 5 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 0 | 5 | 3 | 1 | 0 | 5 | 0 | 7 | 0 | 3 | 5 | 6 | 3 | 3 | 3 | 4 | 6 | 6 | |
| | 1 | | | 3 | 1 | 1 | 3 | | 1 | 2 | 3 | 2 | | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | | 1 | 3 | 3 | | 2 | | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 7 | 2 | 7 | 7 | 6 | 3 | 1 | 9 | | 7 | 7 | 2 | 0 | 2 | 2 | 3 | 8 | 4 | 8 | 1 | 6 | 0 | 9 | 4 | 2 | 4 | 1 | 3 | 6 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 9 | 0 | 4 | 5 | 2 | 3 |
| 7 | 1 | 2 | 8 | 1 | 4 | 2 | 8 | 1 | 4 | 5 | 5 | 8 | 6 | 6 | 5 | 8 | 6 | 6 | 6 | 9 | 5 | 2 | 9 | 4 | 1 | 7 | 1 | 8 | 4 | 2 | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 7 | 2 | 3 | 9 | 6 | 4 | 2 | 9 | 6 | 9 | 4 | 1 | 6 | 5 | 2 | 4 | 8 | 2 | 7 | 6 | 8 | 8 | 0 | 8 | 8 | 1 | 4 | 4 | 3 | |
| 3 | 9 | 1 | 1 | 2 | 6 | 6 | 5 | 8 | 6 | 7 | 0 | 4 | 1 | 4 | 2 | 7 | 1 | 7 | 6 | 5 | 7 | 4 | 4 | 5 | 1 | 2 | 0 | 0 | 7 | 3 | |
| 4 | 8 | 7 | 6 | 6 | 6 | 7 | 2 | 4 | 9 | 0 | 7 | 3 | 3 | 7 | 6 | 2 | 3 | 2 | 4 | 5 | 5 | 1 | 2 | 0 | 0 | 7 | 3 | 3 | 3 | 3 | |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | |
| 2 | 6 | 3 | 2 | 4 | 6 | 1 | 8 | 2 | 3 | 4 | 7 | 8 | 6 | 3 | 5 | 8 | 9 | 3 | 5 | 4 | 8 | 7 | 5 | 1 | 9 | 5 | 6 | 4 | 0 | 4 | |
| 1 | 7 | 0 | 5 | 3 | 7 | 8 | 1 | 6 | 6 | 2 | 8 | 4 | 0 | 4 | 4 | 3 | 4 | 1 | 9 | 5 | 6 | 9 | 0 | 6 | 0 | 1 | 5 | 9 | 0 | 1 | |
| 2 | 7 | 3 | 2 | 9 | 4 | 4 | 9 | 9 | 5 | 2 | 0 | 1 | 6 | 0 | 7 | 3 | 8 | 8 | 7 | 8 | 4 | 1 | 4 | 9 | 5 | 3 | 9 | 5 | 4 | 1 | |
| 1 | 6 | 1 | 8 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 6 | 4 | 7 | 2 | 6 | 3 | 7 | 1 | 8 | 6 | 7 | 9 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 | 4 | 5 | 3 | 5 | 6 | |
| 7 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 6 | 7 | 1 | 6 | 9 | 9 | 2 | 5 | 6 | 7 | 9 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 | 4 | 5 | 3 | 5 | 6 | 0 | 0 | 6 | 1 | |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 8 | 7 | 0 | 7 | 1 | 6 | 9 | 9 | 2 | 5 | 6 | 7 | 9 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 | 4 | 5 | 3 | 5 | 6 | 0 | 0 | 6 | 1 | |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 |
| 6 | 6 | 8 | 9 | 4 | 6 | 9 | 7 | 7 | 8 | 6 | 4 | 2 | 5 | 2 | 4 | 7 | 9 | 0 | 8 | 2 | 2 | 9 | 5 | 1 | 2 | 7 | 8 | 0 | 6 | 6 | |
| 5 | 6 | 4 | 8 | 2 | 3 | 0 | 1 | 6 | 7 | 2 | 8 | 8 | 8 | 6 | 4 | 2 | 9 | 3 | 1 | 0 | 0 | 5 | 3 | 9 | 1 | 0 | 0 | 7 | 6 | 7 | |
| 3 | 7 | 0 | 8 | 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 8 | 0 | 5 | 6 | 6 | 7 | 9 | 7 | 6 | 6 | 9 | 0 | 1 | 1 | 5 | 8 | 0 | 0 | 5 | 9 | |
| 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | |
| 8 | 3 | 2 | 6 | 1 | 6 | 9 | 9 | 4 | 5 | 2 | 2 | 8 | 3 | 5 | 8 | 2 | 3 | 0 | 3 | 1 | 3 | 5 | 1 | 5 | 2 | 5 | 0 | 4 | 9 | 3 | |
| 1 | 7 | 1 | 5 | 6 | 7 | 1 | 4 | 1 | 6 | 7 | 9 | 3 | 0 | 8 | 4 | 6 | 3 | 8 | 8 | 5 | 2 | 8 | 1 | 1 | 4 | 6 | 3 | 6 | 7 | 7 | |
| 1 | 8 | 6 | 7 | 1 | 8 | 7 | 4 | 8 | 0 | 3 | 6 | 9 | 8 | 2 | 7 | 1 | 0 | 3 | 7 | 5 | 7 | 7 | 9 | 5 | 2 | 7 | 7 | 9 | 5 | 4 | |
| 5 | 2 | 0 | 3 | 9 | 2 | 9 | 7 | 5 | 9 | 8 | 2 | 9 | 2 | 3 | 1 | 8 | 6 | 7 | 6 | 7 | 2 | 2 | 7 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 5 | 6 | |
| 7 | 8 | 7 | 1 | 2 | 7 | 8 | 6 | 2 | 1 | 8 | 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 9 | 9 | 2 | 7 | 2 | 7 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 5 | 6 | 6 | 4 | |
| 5 | 6 | 8 | 7 | 9 | 1 | 9 | 9 | 5 | 7 | 3 | 0 | 4 | 6 | 6 | 6 | 2 | 5 | 1 | 0 | 7 | 3 | 8 | 0 | 5 | 8 | 6 | 8 | 0 | 1 | 2 | |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | |
| 3 | 8 | 2 | 9 | 7 | 6 | 2 | 2 | 5 | 1 | 8 | 6 | 0 | 0 | 9 | 2 | 1 | 6 | 6 | 6 | 5 | 6 | 7 | 8 | 5 | 0 | 6 | 3 | 1 | 9 | 3 | |
| 3 | 9 | 6 | 1 | 1 | 2 | 5 | 1 | 9 | 2 | 3 | 7 | 5 | 9 | 1 | 0 | 6 | 2 | 6 | 1 | 9 | 3 | 3 | 7 | 1 | 2 | 6 | 9 | 0 | 4 | 2 | |
| 9 | 1 | 7 | 8 | 0 | 1 | 5 | 6 | 0 | 8 | 4 | 7 | 4 | 0 | 7 | 2 | 9 | 3 | 8 | 2 | 0 | 2 | 4 | 8 | 8 | 5 | 5 | 2 | 9 | 9 | 5 | |
| 1 | 2 | 3 | 6 | 6 | 1 | 1 | 7 | 6 | 8 | 9 | 5 | 1 | 1 | 3 | 0 | 5 | 8 | 2 | 5 | 0 | 5 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | |
| 2 | 7 | 2 | 6 | 6 | 1 | 1 | 7 | 6 | 8 | 9 | 5 | 1 | 1 | 3 | 0 | 5 | 8 | 2 | 5 | 0 | 5 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | |
| 8 | 5 | 7 | 9 | 1 | 6 | 0 | 6 | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 8 | 1 | 7 | 8 | 2 | 5 | 7 | 7 | 2 | 1 | 8 | 6 | 9 | 2 | 9 | 9 | 7 | 2 | |
| 6 | 6 | 9 | 4 | 6 | 1 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 1 | 8 | 1 | 2 | 7 | 5 | 3 | 7 | 4 | 8 | 6 | 5 | 6 | 4 | 7 | 7 | 4 | 2 | 3 | 0 | |
| 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 5 | 2 | 5 | 9 | 6 | 5 | 7 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | |
| 7 | 7 | 3 | 1 | 8 | 5 | 2 | 5 | 9 | 6 | 5 | 7 | 2 | 3 | 4 | 8 | 1 | 8 | 2 | 4 | 0 | 9 | 5 | 4 | 6 | 4 | 3 | 7 | 4 | 6 | 2 | |
| 9 | 4 | 3 | 9 | 1 | 6 | 7 | 8 | 0 | 1 | 5 | 9 | 9 | 9 | 0 | 6 | 9 | 0 | 8 | 2 | 4 | 0 | 9 | 5 | 4 | 6 | 4 | 3 | 7 | 4 | 6 | |
| 0 | 9 | 3 | 6 | 2 | 1 | 2 | 6 | 5 | 9 | 9 | 6 | 3 | 7 | 2 | 8 | 6 | 5 | 3 | 3 | 9 | 8 | 8 | 4 | 2 | 5 | 1 | 7 | 5 | 5 | 9 | |
| 2 | 6 | 9 | 7 | 4 | 6 | 3 | 7 | 6 | 7 | 2 | 1 | 5 | 5 | 4 | 9 | 6 | 9 | 3 | 8 | 2 | 4 | 7 | 6 | 8 | 0 | 4 | 1 | 7 | 2 | 6 | |
| 2 | 7 | 4 | 2 | 2 | 6 | 5 | 7 | 7 | 9 | 1 | 7 | 9 | 1 | 2 | 0 | 2 | 3 | 9 | 6 | 6 | 8 | 5 | 0 | 9 | 9 | 5 | 3 | 1 | 0 | 1 | |
| 8 | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 0 | 9 | 6 | 5 | 3 | 3 | 6 | 2 | 4 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 6 | 8 | 5 | 0 | 6 | 8 | 9 | 9 | 5 | 3 | 5 | |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 1 | 4 | 3 | 1 | 4 | 3 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | |
| 2 | 7 | 4 | 9 | 0 | 9 | 8 | 2 | 8 | 8 | 7 | 4 | 2 | 0 | 9 | 0 | 3 | 5 | 1 | 2 | 5 | 0 | 4 | 2 | 1 | 5 | 8 | 1 | 1 | 9 | 5 | |
| 8 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 9 | 2 | 7 | 2 | 4 | 7 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 | 3 | 1 | 8 | 7 | 9 | 2 | 5 | 3 | |
| 6 | 1 | 1 | 8 | 6 | 3 | 3 | 6 | 4 | 7 | 9 | 6 | 1 | 4 | 7 | 9 | 6 | 1 | 4 | 1 | 7 | 2 | 2 | 8 | 5 | 9 | 6 | 1 | 5 | 2 | 9 | |
| 4 | 0 | 5 | 2 | 8 | 7 | 8 | 4 | 4 | 8 | 8 | 1 | 2 | 0 | 6 | 9 | 3 | 4 | 9 | 9 | 1 | 3 | 9 | 1 | 1 | 2 | 9 | 3 | 1 | 2 | 3 | |
| 7 | 5 | 2 | 0 | 5 | 5 | 6 | 8 | 4 | 8 | 8 | 1 | 2 | 0 | 6 | 9 | 3 | 4 | 9 | 9 | 1 | 3 | 9 | 1 | 1 | 2 | 9 | 3 | 1 | 2 | 3 | |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 | |
| 6 | 6 | 2 | 6 | 4 | 1 | 3 | 4 | 1 | 3 | 6 | 2 | 8 | 5 | 6 | 1 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | 0 | 4 | 3 | 8 | 7 | 0 | 6 | 7 | 5 | 1 | |
| 5 | 1 | 8 | 1 | 7 | 9 | 3 | 6 | 8 | 0 | 6 | 8 | 5 | 9 | 9 | 4 | 0 | 6 | 6 | 6 | 0 | 4 | 3 | 8 | 7 | 0 | 6 | 7 | 5 | 1 | 0 | |
| 4 | 8 | 1 | 4 | 5 | 0 | 7 | 4 | 9 | 9 | 7 | 1 | 9 | 4 | 2 | 8 | 4 | 2 | 8 | 4 | 7 | 4 | 2 | 3 | 5 | 0 | 8 | 3 | 7 | 1 | 5 | |
| 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | |
| 2 | 6 | 7 | 2 | 7 | 6 | 7 | 6 | 6 | 4 | 7 | 3 | 0 | 5 | 7 | 7 | 4 | 3 | 7 | 7 | 6 | 2 | 0 | 4 | 1 | 3 | 3 | 0 | 0 | 5 | 8 | |
| 4 | 4 | 5 | 2 | 7 | 1 | 3 | 9 | 4 | 2 | 0 | 6 | 5 | 3 | 0 | 6 | 0 | 8 | 6 | 1 | 3 | 9 | 4 | 1 | 3 | 2 | 4 | 4 | 8 | 3 | 5 | |
| 6 | 4 | 0 | 1 | 5 | 8 | 5 | 5 | 3 | 7 | 0 | 3 | 0 | 7 | 5 | 8 | 8 | 0 | 1 | 9 | 5 | 4 | 3 | 4 | 8 | 2 | 5 | 4 | 6 | 9 | 5 | |
| 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 0 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 2 | 2 | 7 | 3 | 9 | 3 | 8 | 8 | 8 | 7 | 8 | 1 | 1 | 7 | 6 | 5 | 1 | 0 | 9 | 3 | 6 | 2 | 1 | 6 | 8 | 0 | 3 | 1 | 1 | 5 | 8 | |
| 8 | 1 | 9 | 9 | 6 | 0 | 0 | 1 | 8 | 5 | 1 | 8 | 2 | 3 | 6 | 8 | 6 | 9 | 8 | 8 | 5 | 1 | 1 | 0 | 2 | 9 | 0 | 9 | 3 | 7 | 1 | |
| 7 | 4 | 9 | 7 | 2 | 6 | 5 | 4 | 1 | 2 | 1 | 4 | 9 | 8 | 2 | 6 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 5 | 7 | 8 | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | 6 | |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 4 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 8 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | |
| 7 | 4 | 1 | 1 | 4 | 8 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 5 | 9 | 8 | 1 | 1 | 3 | 3 | 9 | 0 | 1 | 9 | 6 | 9 | 5 | 0 | 0 | 1 | 9 | 6 | 3 | |
| 0 | 2 | 9 | 0 | 9 | 5 | 5 | 0 | 4 | 8 | 7 | 6 | 3 | 4 | 0 | 3 | 6 | 8 | 8 | 1 | 0 | 7 | 8 | 4 | 1 | 0 | 7 | 8 | 4 | 1 | 4 | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 9 | 6 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 7 | 2 | 4 | 1 | 0 | 5 | 7 | 5 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 0 | 5 | 0 | 4 | 9 | 8 | 4 | 8 | 8 | 8 | 4 | 6 | 6 | 1 | 7 | 5 |
| 0 | 0 | 5 | 9 | 0 | 7 | 3 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 4 | 4 | 9 | 7 | 7 | 7 | 0 | 0 | 6 | 5 | 7 | 3 | 2 |
| 2 | | 1 | | 2 | 3 | 3 | | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 9 | 2 | 3 | 3 | 7 | 5 | 8 | 1 | 1 | 7 | 4 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 6 | 5 | 4 | 9 | 2 | 6 | 6 | 3 | 1 | 2 | 8 | 6 | 1 | 7 | 2 | 8 | 6 | 1 | 9 | 2 | 3 | 3 | 7 | 9 | 5 | 8 | 6 | 4 | 3 | 6 | 6 | 9 |
| 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 5 | 4 | 6 | 4 | 3 | 9 | 1 | 8 | 6 | 1 | 3 | 4 | 8 | 3 | 7 | 1 | 9 | 8 | 6 | 9 | 8 | 1 | 0 | 0 | 1 | 7 | 9 |
| 3 | 1 | 1 | 2 | | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 8 | 1 | 2 | 1 | 4 | 2 | 8 | 5 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 1 | 4 | 2 | 2 | 7 | 7 | 8 | 3 | 1 | 4 | 0 | 5 | 7 | 4 | 7 | 8 | 7 | 9 | 9 | 6 | 6 | 6 | 3 | 6 | 5 | 2 | 2 | 9 | 5 | 0 |
| 9 | 8 | 5 | 1 | 5 | 6 | 8 | 7 | 8 | 1 | 9 | 1 | 8 | 5 | 7 | 0 | 5 | 7 | 0 | 5 | 4 | 3 | 4 | 7 | 2 | 4 | 3 | 5 | 1 | 2 | 2 | 4 |
| 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | | 3 | 2 | | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 |
| 1 | 3 | 6 | 0 | 5 | 3 | 2 | 6 | 9 | 5 | 8 | 4 | 2 | 7 | 9 | 4 | 2 | 8 | 2 | 0 | 8 | 3 | 0 | 7 | 6 | 9 | 4 | 6 | 8 | 7 | 6 | 9 |
| 4 | 9 | 6 | 6 | 5 | 5 | 1 | 8 | 6 | 9 | 4 | 2 | 7 | 9 | 4 | 2 | 8 | 2 | 4 | 5 | 4 | 4 | 5 | 4 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 4 | 2 | 4 |
| 7 | 2 | 3 | 3 | 9 | 5 | 5 | 7 | 8 | 9 | 5 | 4 | 3 | 3 | 8 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 4 | 4 | 7 | 3 | 5 | 9 | 7 | 3 | 5 | 1 | 6 | 8 |
| 3 | 2 | | 3 | 5 | 1 | 1 | 3 | 0 | 5 | 7 | 7 | 9 | 1 | 9 | 0 | 6 | 7 | 7 | 4 | 1 | 5 | 8 | 6 | 7 | 3 | 4 | 8 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 4 | 2 | | 3 | 5 | 1 | 1 | 3 | 0 | 5 | 7 | 7 | 9 | 1 | 9 | 0 | 6 | 7 | 7 | 4 | 1 | 5 | 8 | 6 | 7 | 3 | 4 | 8 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 7 | 1 | 4 | 5 | 3 | 7 | 0 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 4 | 5 | 4 | 4 | 6 | 4 | 7 | 0 | 4 | 5 | 2 | 9 | 6 | 1 | 8 | 5 | 0 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 5 | 8 | 9 | 2 | 7 | 8 | 3 | 6 | 1 | 5 | 5 | 4 | 9 | 7 | 3 | 5 | 9 | 4 | 1 | 6 | 0 | 2 | 1 | 6 | 4 | 7 | 3 |
| 3 | 3 | 6 | 2 | 1 | 7 | 9 | 7 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 9 | 9 | 3 | 9 | 1 | 9 | 9 | 9 | 0 | 1 | 2 | 9 | 5 | 6 | 4 | 5 | 8 | 4 |
| 0 | 4 | 0 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 6 | 2 | 5 | 4 | 1 | 7 | 2 | 6 | 2 | 8 | 0 | 0 | 6 | 2 | 4 | 5 | 5 | 4 | 2 | 6 | 1 | 8 | 5 | 3 |
| 0 | 4 | 0 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 6 | 2 | 5 | 4 | 1 | 7 | 2 | 6 | 2 | 8 | 0 | 0 | 6 | 2 | 4 | 5 | 5 | 4 | 2 | 6 | 1 | 8 | 5 | 3 |
| 3 | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 6 | 5 | 3 | 1 | 1 | 3 | 8 | 6 | 2 | 6 | 8 | 3 | 9 | 8 | 9 | 5 | 7 | 2 | 8 | 3 |
| 6 | 6 | 9 | 5 | 1 | 3 | 5 | 3 | 3 | 5 | 1 | 4 | 5 | 1 | 5 | 3 | 8 | 6 | 5 | 4 | 7 | 6 | 3 | 6 | 2 | 2 | 4 | 9 | 4 | 7 | 5 | 6 |
| 9 | 1 | 4 | 3 | 2 | 9 | 9 | 9 | 0 | 0 | 5 | 4 | 5 | 1 | 5 | 3 | 8 | 6 | 5 | 4 | 7 | 6 | 3 | 6 | 2 | 2 | 4 | 9 | 4 | 7 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 4 | 5 | 0 | 3 | 7 | 8 | 2 | 9 | 7 | 2 | 5 | 1 | 2 | 2 | 5 | 2 | 1 | 8 | 7 | 9 | 1 | 9 | 9 | 1 | 9 | 0 | 6 | 3 | 0 | 8 | 7 |
| 8 | 7 | 1 | 5 | 0 | 7 | 8 | 5 | 0 | 4 | 6 | 0 | 8 | 2 | 4 | 3 | 8 | 0 | 4 | 4 | 4 | 2 | 3 | 2 | 1 | 7 | 5 | 2 | 2 | 6 | 6 | 0 |
| 6 | 4 | 3 | 9 | 9 | 6 | 6 | 7 | 5 | 7 | 6 | 0 | 9 | 3 | 2 | 7 | 4 | 6 | 0 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 7 | 5 | 2 | 2 | 6 | 6 |
| 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 9 | 7 | 5 | 3 | 6 | 8 | 9 | 9 | 8 | 1 | 7 | 4 | 7 | 9 | 0 | 5 | 8 | 4 | 8 |
| 3 | 4 | 0 | 6 | 1 | 4 | 5 | 9 | 4 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | 9 | 7 | 5 | 3 | 2 | 6 | 8 | 9 | 6 | 5 | 7 | 8 | 4 | 3 | 8 | 3 | 2 | 3 |
| 4 | 7 | 6 | 7 | 0 | 3 | 5 | 5 | 7 | 0 | 7 | 4 | 8 | 8 | 5 | 9 | 9 | 8 | 1 | 7 | 4 | 5 | 9 | 0 | 5 | 8 | 4 | 3 | 8 | 3 | 5 | 7 |
| 7 | 3 | 7 | 5 | 6 | 2 | 1 | 0 | 0 | 7 | 7 | 6 | 6 | 5 | 2 | 7 | 2 | 2 | 1 | 2 | 5 | 2 | 2 | 1 | 2 | 5 | 8 | 4 | 3 | 5 | 3 | 6 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| 9 | 4 | 2 | 0 | 3 | 8 | 2 | 4 | 7 | 6 | 0 | 6 | 5 | 3 | 5 | 3 | 8 | 6 | 3 | 6 | 4 | 2 | 2 | 3 | 5 | 5 | 6 | 0 | 0 | 3 | 4 | 2 |
| 8 | 6 | 6 | 6 | 4 | 9 | 2 | 2 | 8 | 5 | 6 | 1 | 3 | 2 | 1 | 9 | 0 | 3 | 4 | 2 | 2 | 3 | 5 | 1 | 4 | 0 | 3 | 3 | 9 | 2 | 8 | 2 |
| 3 | 1 | 7 | 2 | 4 | 2 | 0 | 4 | 4 | 2 | 9 | 0 | 9 | 5 | 6 | 2 | 6 | 4 | 9 | 6 | 3 | 8 | 6 | 2 | 2 | 5 | 3 | 7 | 5 | 5 | 4 | 9 |
| 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | | 3 | 1 | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 8 | 1 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 9 | 6 | 2 | 7 | 7 | 7 | 9 | 1 | 9 | 8 | 8 | 3 | 4 | 4 | 3 | 1 | 0 | 8 | 8 | 4 | 4 | 3 | 6 |
| 9 | 7 | 0 | 8 | 3 | 6 | 6 | 0 | 7 | 3 | 0 | 5 | 5 | 9 | 3 | 7 | 5 | 2 | 4 | 3 | 5 | 1 | 6 | 8 | 2 | 5 | 4 | 7 | 5 | 1 | 0 | 8 |
| 9 | 0 | 9 | 0 | 4 | 7 | 9 | 5 | 7 | 8 | 8 | 4 | 5 | 3 | 2 | 3 | 5 | 4 | 4 | 5 | 6 | 8 | 3 | 0 | 1 | 8 | 4 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | | 1 | 1 | 2 | 2 | | 2 | | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 7 | 8 | 9 | 4 | 5 | 3 | 6 | 1 | 5 | 5 | 7 | 9 | 1 | 5 | 8 | 9 | 4 | 8 | 9 | 3 | 1 | 5 | 3 | 2 | 2 | 0 | 6 | 1 | 8 | 4 | 4 |
| 4 | 8 | 9 | 7 | 6 | 4 | 9 | 8 | 6 | 2 | 1 | 2 | 3 | 0 | 5 | 3 | 5 | 5 | 4 | 7 | 0 | 3 | 2 | 2 | 0 | 5 | 2 | 1 | 4 | 3 | 9 | 5 |
| 5 | 2 | 7 | 1 | 8 | 7 | 5 | 0 | 4 | 9 | 1 | 2 | 6 | 1 | 6 | 5 | 6 | 9 | 3 | 7 | 2 | 9 | 2 | 8 | 3 | 5 | 5 | 3 | 0 | 5 | 1 | 1 |
| 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 |
| 1 | 3 | 8 | 2 | 2 | 9 | 8 | 3 | 8 | 5 | 6 | 8 | 3 | 7 | 1 | 5 | 8 | 5 | 9 | 1 | 2 | 4 | 4 | 5 | 9 | 9 | 0 | 2 | 8 | 8 | 0 | 1 |
| 8 | 9 | 9 | 3 | 6 | 6 | 0 | 4 | 6 | 1 | 0 | 9 | 9 | 0 | 5 | 0 | 3 | 7 | 5 | 2 | 4 | 3 | 0 | 5 | 4 | 9 | 9 | 6 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 5 | 1 | 8 | 2 | 4 | 9 | 4 | 0 | 8 | 8 | 9 | 4 | 0 | 0 | 3 | 0 | 8 | 5 | 7 | 4 | 4 | 5 | 9 | 9 | 0 | 2 | 8 | 4 | 2 | 7 | 9 | 5 |
| 3 | | 3 | 1 | 1 | | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 | 2 | 5 | | | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 0 | 3 | 0 | 0 | 7 | 7 | 5 | 2 | 0 | 7 | 4 | 2 | 8 | 5 | 3 | 9 | 2 | 7 | 7 | 0 | 8 | 7 | 5 | 3 | 9 | 3 | 6 | 3 | 6 | 8 |
| 3 | 4 | 2 | 5 | 9 | 8 | 5 | 4 | 9 | 2 | 5 | 4 | 9 | 6 | 4 | 4 | 7 | 1 | 6 | 3 | 5 | 8 | 9 | 6 | 6 | 5 | 3 | 7 | 9 | 8 | 6 | 1 |
| 3 | 8 | 8 | 0 | 4 | 9 | 1 | 0 | 6 | 6 | 4 | 5 | 9 | 4 | 7 | 1 | 6 | 3 | 5 | 8 | 9 | 6 | 6 | 5 | 3 | 7 | 9 | 8 | 6 | 1 | 5 | 8 |
| | 3 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | | 1 | 1 | 7 | 6 | 0 | 1 | 9 | 2 | 7 | 0 | 7 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 6 | 1 | 2 | 4 | 8 | 7 | 6 | 7 | 6 | 4 | 8 | 2 | 4 | 8 | 4 | 5 | 3 | 7 | 2 | 0 | 4 | 3 | 7 | 5 | 4 | 1 | 6 | 0 | 4 | 3 | 7 | 5 |
| 0 | 0 | 5 | 2 | 8 | 3 | 1 | 9 | 3 | 7 | 3 | 8 | 8 | 3 | 7 | 5 | 4 | 1 | 6 | 0 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 7 | 5 | 4 | 8 |
| 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 7 | 5 | 4 |
| 0 | 9 | 8 | 9 | 9 | 0 | 2 | 0 | 6 | 6 | 4 | 5 | 5 | 7 | 9 | 4 | 3 | 3 | 0 | 8 | 6 | 5 | 6 | 1 | 7 | 1 | 6 | 2 | 3 | 3 | 9 | 3 |
| 2 | 4 | 2 | 8 | 3 | 1 | 6 | 5 | 0 | 1 | 2 | 0 | 8 | 1 | 5 | 9 | 4 | 6 | 1 | 3 | 4 | 6 | 1 | 3 | 4 | 2 | 8 | 2 | 5 | 7 | 4 | 3 |
| 3 | 2 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 0 | 5 | 6 | 6 | 8 | 2 | 1 | 2 | 0 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 7 | 0 | 2 | 5 | 0 | 1 | 0 | 9 | 4 | 3 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 2 | | | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | | | | | |
| 1 | 0 | 9 | 5 | | 2 | 6 | 6 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 7 | 1 | 9 | 5 | 4 | 0 | 9 | 3 | 7 | 5 | 4 | 0 | 9 | 3 | 7 | 5 | 4 | 0 | 9 | 3 | 7 | 5 | 4 | 0 | 9 | 3 | 7 | 5 | | | | |
| 7 | 6 | 4 | 7 | 9 | 8 | 7 | 1 | 3 | 0 | 4 | 2 | 1 | 9 | 5 | 2 | 4 | 4 | 4 | 0 | 3 | 2 | 1 | 4 | 4 | 0 | 3 | 2 | 1 | 4 | 4 | 0 | 3 | 2 | 1 | 4 | 4 | 0 | 3 | 2 | 1 | | | | |
| 3 | | 3 | | | 2 | 2 | | 1 | 2 | 1 | 1 | | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | | | | |
| 0 | 6 | 8 | 8 | 6 | 5 | 6 | 2 | 7 | 8 | 8 | 6 | 9 | 9 | 3 | 4 | 8 | 7 | 7 | 3 | 5 | 8 | 7 | 5 | 3 | 6 | 8 | 3 | 4 | 4 | 2 | 4 | 8 | 0 | 8 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | | | | |
| 2 | 6 | 1 | 8 | 4 | 0 | 4 | 0 | 2 | 6 | 4 | 1 | 1 | 5 | 2 | 2 | 3 | 7 | 9 | 9 | 8 | 7 | 6 | 3 | 4 | 1 | 3 | 3 | 7 | 5 | 0 | 8 | 1 | 2 | 9 | 3 | 2 | 9 | 3 | 0 | 9 | | | | |
| 4 | 8 | 1 | 1 | 1 | 8 | 0 | 2 | 7 | 5 | 9 | 9 | 4 | 3 | 6 | 5 | 5 | 4 | 8 | 7 | 1 | 9 | 4 | 1 | 5 | 0 | 2 | 8 | 2 | 6 | 6 | 4 | 5 | 2 | 2 | 8 | 7 | 1 | 2 | 0 | 0 | | | | |
| 3 | 3 | 3 | 1 | | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 8 | 7 | 3 | 1 | 7 | 8 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 4 | 3 | | | |
| 2 | 4 | 2 | 0 | 6 | 7 | 6 | 3 | 6 | 7 | 5 | 9 | 1 | 4 | 2 | 7 | 8 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 6 | 0 | 4 | 8 | 0 | 2 | 4 | 1 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 | 9 | 3 | 0 | 2 | 0 | 0 | | | | |
| 7 | 7 | 7 | 9 | 5 | 1 | 4 | 1 | 4 | 2 | 1 | 8 | 8 | 7 | 2 | 2 | 7 | 7 | 4 | 8 | 3 | 9 | 9 | 7 | 0 | 6 | 6 | 0 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 7 | 9 | 3 | 0 | 2 | 0 | | | | |
| 0 | 2 | 2 | 3 | 9 | 8 | 0 | 0 | 3 | 2 | 2 | 1 | 7 | 3 | 1 | 6 | 9 | 3 | 0 | 1 | 8 | 7 | 3 | 0 | 1 | 8 | 7 | 0 | 8 | 3 | 0 | 1 | 8 | 7 | 3 | 0 | 1 | 8 | 7 | 3 | 0 | 1 | | | |
| 3 | 3 | 1 | | 1 | 2 | 1 | 3 | | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | | |
| 3 | 4 | 4 | 4 | 8 | 8 | 8 | 8 | 1 | 1 | 9 | 7 | 0 | 6 | 6 | 1 | 2 | 8 | 7 | 5 | 3 | 8 | 5 | 1 | 3 | 7 | 0 | 9 | 3 | 3 | 2 | 7 | 8 | 7 | 0 | 8 | 3 | 0 | 9 | 8 | 4 | 3 | | | |
| 5 | 3 | 6 | 3 | 0 | 1 | 4 | 9 | 1 | 8 | 7 | 6 | 4 | 1 | 2 | 4 | 1 | 7 | 5 | 3 | 8 | 5 | 1 | 3 | 2 | 7 | 8 | 7 | 0 | 8 | 8 | 4 | 2 | 5 | 0 | 1 | 8 | 7 | 5 | 2 | 0 | 0 | | | |
| 3 | 5 | 0 | 0 | 3 | 1 | 6 | 3 | 0 | 2 | 3 | 9 | 6 | 1 | 6 | 5 | 4 | 8 | 7 | 3 | 3 | 0 | 9 | 8 | 3 | 0 | 9 | 8 | 3 | 0 | 8 | 4 | 9 | 8 | 8 | 2 | 2 | 3 | 0 | 8 | 8 | 4 | | | |
| | 1 | 1 | 3 | | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | | | |
| 5 | 5 | 0 | 6 | 6 | 1 | 1 | 8 | 0 | 8 | 8 | 5 | 3 | 2 | 5 | 0 | 1 | 4 | 5 | 1 | 7 | 8 | 5 | 0 | 4 | 8 | 4 | 2 | 5 | 4 | 2 | 8 | 8 | 2 | 7 | 7 | 9 | 1 | 4 | 1 | 2 | | | | |
| 8 | 9 | 6 | 3 | 4 | 8 | 3 | 0 | 6 | 0 | 8 | 5 | 5 | 7 | 9 | 1 | 1 | 8 | 9 | 3 | 2 | 7 | 7 | 4 | 2 | 8 | 2 | 8 | 4 | 4 | 3 | 0 | 7 | 6 | 6 | 4 | 1 | 9 | 3 | 0 | 2 | 5 | | | |
| 6 | 7 | 1 | 1 | 2 | 9 | 5 | 7 | 0 | 5 | 8 | 9 | 3 | 0 | 0 | 6 | 7 | 5 | 4 | 2 | 2 | 0 | 5 | 5 | 4 | 2 | 0 | 5 | 2 | 0 | 6 | 3 | 1 | 5 | 0 | 2 | 4 | 7 | 0 | 1 | 5 | | | | |
| 3 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 0 | 8 | 3 | 9 | 2 | 9 | 5 | 6 | 7 | 9 | 3 | 8 | 0 | 9 | 5 | 6 | 7 | 9 | 3 | 8 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 5 | 6 | 3 | 5 | | |
| 0 | 1 | 5 | 6 | 9 | 3 | 8 | 0 | 9 | 1 | 0 | 8 | 3 | 9 | 2 | 9 | 5 | 6 | 7 | 9 | 9 | 3 | 8 | 7 | 7 | 0 | 3 | 8 | 4 | 9 | 7 | 2 | 6 | 0 | 7 | 8 | 5 | 8 | 4 | 9 | 0 | 2 | | | |
| 2 | 8 | 9 | 6 | 7 | 0 | 4 | 0 | 5 | 8 | 1 | 6 | 3 | 0 | 8 | 0 | 9 | 0 | 5 | 5 | 8 | 4 | 9 | 7 | 2 | 6 | 0 | 7 | 8 | 5 | 7 | 6 | 4 | 3 | 5 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 8 | | | |
| 2 | 2 | 6 | 7 | 5 | 4 | 4 | 9 | 2 | 5 | 2 | 2 | 7 | 8 | 8 | 7 | 1 | 2 | 6 | 9 | 0 | 2 | 2 | 9 | 0 | 2 | 9 | 4 | 6 | 2 | 9 | 6 | 2 | 9 | 6 | 9 | 5 | 3 | 7 | 1 | 8 | 6 | | | |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | | |
| 2 | 6 | 0 | 5 | 9 | 4 | 6 | 4 | 1 | 3 | 0 | 0 | 8 | 0 | 1 | 3 | 6 | 5 | 0 | 2 | 0 | 2 | 6 | 4 | 7 | 6 | 1 | 5 | 6 | 8 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | | | |
| 6 | 6 | 7 | 7 | 4 | 3 | 9 | 2 | 5 | 6 | 6 | 4 | 2 | 2 | 2 | 6 | 5 | 3 | 2 | 0 | 2 | 6 | 4 | 7 | 6 | 1 | 5 | 6 | 8 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | | |
| 8 | 5 | 0 | 8 | 4 | 8 | 8 | 5 | 8 | 1 | 7 | 8 | 2 | 3 | 6 | 8 | 5 | 0 | 8 | 6 | 6 | 0 | 0 | 1 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 3 | 2 | 0 | 6 | 1 | 6 | 5 | 9 | 6 | 2 | 8 | 6 | 8 | 3 | 1 | 8 |
| 2 | | 2 | | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | | |
| 9 | 5 | 8 | | 7 | 2 | 1 | 4 | 4 | 6 | 0 | 5 | 7 | 8 | 5 | 6 | 1 | 7 | 7 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 |
| 3 | 8 | 2 | 9 | 2 | 6 | 9 | 6 | 9 | 1 | 1 | 4 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 | 4 | 5 | 7 | 5 | 9 | 2 | 1 | 6 | 3 | 5 | 6 | 0 | 1 | 6 | 3 | 5 | 6 | 0 | 1 | 6 | 3 | 5 | 6 | 0 | 1 | 6 | 3 | 5 |
| 2 | 2 | 3 | 8 | 6 | 3 | 6 | 3 | 1 | 9 | 2 | 6 | 8 | 5 | 0 | 4 | 1 | 6 | 7 | 9 | 2 | 1 | 6 | 7 | 9 | 2 | 1 | 6 | 7 | 9 | 2 | 1 | 6 | 7 | 9 | 2 | 1 | 6 | 7 | 9 | 2 | 1 | 6 | 7 | 9 |
| 4 | 3 | 3 | 3 | 8 | 0 | 6 | 4 | 5 | 8 | 0 | 1 | 1 | 9 | 3 | 3 | 0 | 5 | 7 | 9 | 8 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | |
| 3 | 9 | 4 | 9 | 4 | 5 | 6 | 2 | 6 | 2 | 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 4 | 9 | 8 | 4 | 2 | 3 | 3 | 8 | 6 | 6 | 1 | 5 | 7 | 8 | 6 | 6 | 1 | 5 | 7 | 8 | 6 | 6 | 1 | 5 | 7 | 8 | 6 | 6 | | |
| 3 | 0 | 5 | 5 | 7 | 8 | 1 | 3 | 0 | 8 | 8 | 5 | 2 | 7 | 5 | 0 | 9 | 9 | 0 | 7 | 9 | 0 | 1 | 7 | 8 | 0 | 9 | 0 | 7 | 9 | 0 | 1 | 7 | 8 | 0 | 9 | 0 | 1 | 7 | 8 | 0 | 9 | 0 | 1 | |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | | 2 | 9 | 8 | 9 | 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 7 | 1 | 8 | 5 | 1 | 7 | 1 | 8 | 5 | 1 | 7 | 1 | 8 | 5 | 1 | 7 | 1 | 8 | 5 | 1 | 7 | 1 | 8 | 5 | 1 | 7 | 1 | |
| 3 | 4 | 6 | 8 | 8 | 6 | 2 | 9 | 8 | 9 | 5 | 4 | 0 | 9 | 5 | 1 | 7 | 1 | 8 | 5 | 1 | 7 | 1 | 8 | 5 | 1 | 7 | 1 | 8 | 5 | 1 | 7 | 1 | 8 | 5 | 1 | 7 | 1 | 8 | 5 | 1 | 7 | 1 | 8 | 5 |
| 0 | 2 | 8 | 2 | 4 | 3 | 2 | 8 | 2 | 5 | 9 | 8 | 7 | 0 | 3 | 3 | 1 | 2 | 6 | 0 | 7 | 1 | 1 | 5 | 6 | 0 | 8 | 0 | 7 | 1 | 1 | 5 | 6 | 0 | 8 | 0 | 7 | 1 | 1 | 5 | 6 | 0 | 8 | 0 | |
| 1 | 8 | 3 | 4 | 6 | 8 | 2 | 7 | 9 | 0 | 3 | 7 | 6 | 0 | 2 | 0 | 0 | 7 | 1 | 1 | 5 | 6 | 0 | 8 | 0 | 5 | 6 | 0 | 8 | 0 | 5 | 6 | 0 | 8 | 0 | 5 | 6 | 0 | 8 | 0 | 5 | 6 | 0 | 8 | 0 |
| 2 | 3 | 2 | | 1 | 1 | 3 | 1 | | 2 | | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | |
| 9 | 1 | 1 | 6 | 3 | 7 | 3 | 2 | 7 | 5 | 1 | 4 | 1 | 9 | 5 | 6 | 4 | 9 | 0 | 8 | 4 | 9 | 2 | 2 | 7 | 0 | 5 | 4 | 8 | 9 | 2 | 7 | 0 | 5 | 4 | 8 | 9 | 2 | 7 | 0 | 5 | 4 | 8 | 9 | |
| 4 | 4 | 4 | 6 | 7 | 0 | 0 | 1 | 8 | 4 | 4 | 4 | 3 | 7 | 1 | 3 | 9 | 8 | 7 | 2 | 3 | 4 | 0 | 2 | 4 | 3 | 7 | 8 | 3 | 4 | 0 | 2 | 4 | 3 | 7 | 8 | 3 | 4 | 0 | 2 | 4 | 3 | 7 | 8 | |
| 7 | 3 | 9 | 6 | 8 | 3 | 3 | 4 | 5 | 9 | 1 | 1 | 2 | 9 | 6 | 2 | 8 | 3 | 4 | 1 | 0 | 3 | 9 | 0 | 4 | 5 | 0 | 7 | 8 | 3 | 9 | 0 | 4 | 5 | 0 | 7 | 8 | 3 | 9 | 0 | 4 | 5 | 0 | 7 | 8 |
| | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 4 | 3 | 3 | 8 | 8 | 7 | 8 | 3 | 4 | 3 | 3 | 8 | 6 | 0 | 0 | 1 | 9 | 2 | 3 | 3 | 6 | 7 | 9 | 5 | 8 | 8 | 6 | 1 | 8 | 7 | 8 | 2 | 0 | 4 | 1 | 7 | 2 | 0 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | |
| 8 | 7 | 0 | 1 | 4 | 5 | 4 | 5 | 9 | 5 | 8 | 4 | 5 | 5 | 2 | 1 | 2 | 8 | 9 | 0 | 4 | 4 | 6 | 2 | 6 | 6 | 9 | 6 | 6 | 8 | 1 | 3 | 4 | 0 | 4 | 6 | 6 | 2 | 1 | 7 | 2 | 0 | 3 | 1 | |
| 1 | 5 | 1 | 2 | 9 | 0 | 4 | 1 | 1 | 0 | 8 | 5 | 1 | 7 | 5 | 9 | 9 | 2 | 5 | 1 | 3 | 7 | 3 | 2 | 6 | 7 | 9 | 5 | 3 | 2 | 6 | 7 | 9 | 5 | 3 | 2 | 6 | 7 | 9 | 5 | 3 | 2 | 6 | 7 | 9 |
| | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | | 2 | 3 | 1 | 3 | | 2 | 1 | 3 | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | |
| 5 | | 5 | 0 | 6 | 3 | 3 | 8 | 9 | 2 | 8 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 6 | 2 | 9 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | | | | | | |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 5 | 8 | 3 | 3 | 0 | 8 | 1 | 1 | 6 | 5 | 7 | 8 | 6 | 9 | 7 | 6 | 9 | 0 | 3 | 4 | 9 | 5 | 7 | 1 | 9 | 6 | 6 | 3 | 7 | 3 | 2 | | | | | |
| 4 | 8 | 2 | 3 | 6 | 0 | 4 | 6 | 3 | 0 | 4 | 6 | 9 | 6 | 2 | 6 | 8 | 0 | 0 | 5 | 0 | 6 | 9 | 6 | 2 | 8 | 6 | 0 | 7 | 2 | 3 | 9 | 8 | 2 | 0 | 2 | | | | |
| 2 | 3 | 1 | | 2 | 1 | 1 | | 1 | | 2 | 2 | 1 | | 2 | | 1 | 2 | 3 | | 2 | | 1 | 1 | 3 | 3 | | 2 | 2 | 3 | 1 | | 2 | 3 | | | | | | |
| 1 | 3 | 0 | 7 | 5 | 5 | 5 | 1 | 1 | 6 | 5 | 2 | 9 | 4 | 0 | 4 | 1 | 0 | 9 | 8 | 1 | 9 | 4 | 0 | 2 | 8 | 6 | 8 | 6 | 3 | 6 | 2 | 1 | 4 | 3 | 7 | 2 | | | |
| 4 | 8 | 6 | 1 | 0 | 7 | 4 | 9 | 0 | 6 | 5 | 1 | 7 | 4 | 8 | 1 | 5 | 4 | 4 | 0 | 9 | 9 | 1 | 2 | 6 | 0 | 2 | 9 | 2 | 1 | 1 | 5 | 8 | 2 | 6 | 0 | 9 | 8 | 9 | |
| 7 | 9 | 2 | 0 | 0 | 1 | 6 | 4 | 1 | 9 | 6 | 0 | 5 | 7 | 3 | 9 | 6 | 6 | 4 | 5 | 9 | 9 | 7 | 9 | 9 | 4 | 1 | 5 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 0 | 2 | 5 | 4 | | | |
| 2 | 1 | 3 | | 8 | 6 | 9 | 5 | 1 | 6 | 9 | 5 | 7 | 0 | 5 | 7 | 8 | 5 | 3 | 6 | 7 | 8 | 3 | 7 | 5 | 6 | 4 | 4 | 2 | 5 | 8 | 6 | 0 | 9 | 9 | 1 | 7 | 7 | 5 | 2 |
| 9 | 0 | 8 | 2 | 8 | 2 | 9 | 9 | 7 | 9 | 7 | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 | 3 | 1 | 8 | 0 | 1 | 0 | 5 | 6 | 5 | 7 | 1 | 1 | 5 | 6 | 3 | 6 | 3 | 6 | 2 | 1 | 3 | 0 | 7 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 1 | 5 | 8 | 1 | 5 | 7 | 6 | 2 | 0 | 6 | 4 | 6 | 6 | 4 | 5 | 2 | 7 | 9 | 5 | 8 | 3 | 4 | 8 | 5 | 1 | 0 | 4 | 3 | 9 | 9 | 1 | 2 | 7 | 3 | 1 | 0 | 6 |
| | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | | 2 | 1 | 1 | 3 | | 1 | | 3 | 1 | 3 | | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | |
| 1 | 5 | 0 | 1 | 0 | 2 | 9 | 1 | 5 | 0 | 9 | 0 | 3 | 6 | 2 | 7 | 8 | 2 | 3 | 6 | 9 | 2 | 2 | 1 | 3 | 4 | 4 | 7 | 6 | 6 | 6 | 9 | 3 | 3 | 5 | 4 | 1 | 7 | 7 | 2 |
| 4 | 8 | 1 | 5 | 3 | 7 | 3 | 9 | 5 | 4 | 4 | 5 | 9 | 0 | 3 | 1 | 4 | 3 | 5 | 4 | 2 | 8 | 0 | 2 | 1 | 5 | 9 | 6 | 5 | 5 | 2 | 2 | 5 | 3 | 9 | 9 | 3 | 0 | 5 | 9 |
| 4 | 4 | 3 | 0 | 0 | 3 | 7 | 1 | 0 | 9 | 9 | 8 | 6 | 2 | 2 | 4 | 1 | 2 | 7 | 5 | 8 | 3 | 6 | 5 | 7 | 0 | 6 | 4 | 0 | 6 | 1 | 9 | 9 | 4 | 0 | 9 | 3 | 6 | 5 | 3 |
| 1 | 1 | | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | | 2 | | 2 | 1 | | 2 | 1 | | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | | 1 | 3 | 1 | | 2 |
| 5 | 9 | 1 | 6 | 7 | 3 | 7 | 2 | 9 | 2 | 5 | 4 | 2 | 1 | 0 | 7 | 1 | 1 | 1 | 9 | 5 | 2 | 0 | 4 | 2 | 8 | 3 | 6 | 5 | 4 | 7 | 7 | 4 | 6 | 3 | | 5 | 0 | 5 | 2 |
| 8 | 8 | 8 | 6 | 2 | 1 | 3 | 6 | 5 | 9 | 9 | 1 | 1 | 3 | 9 | 6 | 3 | 7 | 1 | 4 | 7 | 5 | 4 | 1 | 5 | 0 | 2 | 2 | 8 | 4 | 6 | 1 | 0 | 9 | 7 | | 2 | 7 | 2 | 0 |
| 1 | 5 | 3 | 2 | 9 | 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 8 | 8 | 5 | 2 | 6 | 4 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 7 | 3 | 8 | 2 | 5 | 4 | 2 | 4 | 0 | 9 | 0 | 9 | 8 | 7 | 6 | 2 | 2 | 5 | 7 |

Bibliografía

1. **Morrison, Donald F.** *Multivariate Statistical Methods*. University of Pennsylvania : Thomson Brooks Cole, 2005. 469 Pages.
2. **Estupiñan, Edgar- Saavedra, Pedro.** *Técnicas de diagnóstico para el análisis de vibraciones de rodamientos*. Concepción Chile : Casilla 160-C Departamento de Ingeniería Mecánica , 2013.
3. **Mauricio, Holguín.** *Diseño y desarrollo de un sistema prototipo en línea para el diagnóstico de motores de combustión interna Diésel en servicio con base en vibraciones mecánicas*. Pereira : Universidad Tecnológica de Pereira , 27 de Diciembre del 2016. Programa de Ingeniería Eléctrica .
4. **Richard I. Levin, David S. Rubin.** *Estadística para administración y economía*. Mexico : Pearson Educación, 2004. Séptima edición.
5. **Armas, Wilfredo Caballero.** *Introducción a la estadística*. Lima Perú : Instituto interamericano de Cooperación Para la Agricultura , 1974. Pg 86.
6. **Sáez, Jose M. Sarabia Marta P.** *Curso Básico De Estadística Para Economía y Administración De Empresas*. Cantabria España : Universidad De Cantabria, 2005.
7. **James, Glyn.** *Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería*. Transformada de Fourier : Coventy University, 2006.
8. **Olmedo, Mariano Gonzáles.** *Introducción a las Wavelets*. Uruguay : Universidad de la República , 13 de Octubre 2016. Facultad de Ciencias.
9. **Vitelleschi, Maria Susana.** *Modelos PCA a partir de conjuntos de datos con información faltante*. Santa Fe Argentina : SaberES N°2, 2009. Premio Provincial.
10. **Delgado, Silvia Mercedes.** *UNA APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES CATEGÓRICAS PARA DETERMINAR EL POSICIONAMIENTO DE ESPOL EN EL CONTEXTO DE LOS ESTUDIANTES DE 3ER AÑO DE BACHILLERATO*. Guayaqui Ecuador : Ingeniera en Informática, 2006.

11. **Liang, T. Boutros and M.** *Detection and diagnosis of bearing and cutting tool faults using hidden Markov models.* Mechanical System and Signal Processing : Vol 5 pp 2102-2124, 2011.
12. *Fault severity assessment for rolling element bearing using the Lempel-Ziv complexity and continuous wavelet transform .* **M., Hong H. Liang.** 320 , Canada : Journal of Sound and Vibration, 2009, Vol. I. 452-468.
13. *A comparison of some vibration parameters for the condition monitoring of rolling element bearing .* **N., Tadon.** 3, s.l. : Journal of the International Measurement Confederation , 1994, Vol. 12. pp 285-289.
14. *Enveloping For Bearing Analysis .* **R., Jones.** pp 10-15, s.l. : Sound and Vibration , 1996, Vol. 30.
15. *A Condition based maintenance model for a three state system subject to degradation and environmental shocks.* **L. Yang, X. Ma, and Y. Zhao.** s.l. : Computer and Industrial Engineering, 2017, Vol. 105. pp 210-222.
16. *An analytic model for ball bearing vibration to predict vibration response to distributed defects .* **A., Tadon N. Choudhury.** 3, s.l. : Sound and Vibration , 1997, Vol. 205. pp 275-292.
17. *Statical analysis of sound and vibration signals for monitoring rolling element bearing condition.* **M., Heng R. Ñor.** 1, s.l. : Applied Acoustics, 1998, Vol. 53. pp 211-226.
18. *On-Line detection of localized defects in bearings by pattern recognition analysis.* **S., Li C. Wu.** 3, s.l. : Journal of Engineering for Industrial , 1989, Vol. 111. pp 331-336.
19. *Rolling element bearing diagnostics in run to failure lifetimetesting.* **T., Williams T. Ribadeneira X. Billington S. Kurfess.** 5, s.l. : Mechanical system and signal processing, 2001, Vol. 15. pp 979 993.
20. **Reserve, Case Western University.** Case Western reserve data base. [Online]. [Online]
<https://csegroups.case.edu/bearingdatacenter/pages/download-base-file>. Aviable.

21. *Application of Cepstrum and neural network to bearing fault detection* .
Y.R Hwang, K.K Jen, and Y. T Shen. 10, s.l. : Journal of Mechanical Science
and Technology, 2009, Vol. 23. pp 2730-2737.

22. *Higher order propieties of analytic Wavelet.* **Lilly, JM, y SC Olhede.** 1, s.l. :
IEEE Transactions on signal Processing, 2009, Vol. 57. pp 146-160.